Н.В. МИХАЙЛОВА

ФИЛОСОФСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ОБОСНОВАНИЯ НАУЧНОГО ЗНАНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ

Исследуется философская проблема математической истины и критерии истинности математических теорий. Методологический анализ стандартов обоснования математического знания позволяет сделать вывод о том, что интуиционистская и теоретико-множественная математики могут сосуществовать в контексте концепции дополнительности.

The problem of the mathematical truth and the truth criteria of the mathematical theories are investigated in the article. Methodological analysis of the standards of substantiation of mathematical knowledge allow us to draw a conclusion that intuitionist mathematics and set-theoretical mathematics can coexist in the context of subsidiarity concept.

Природа и предмет математического знания, начиная еще с античной эпохи, привлекали внимание многих математиков и философов. Особую актуальность вопрос о природе математических понятий и сущности доказательств приобретает в конце XIX - начале XX в., когда были обнаружены первые парадоксы теории множеств. Эти парадоксы свидетельствовали о шаткости фундамента здания всей классической математики, на роль которой претендовала теория множеств. Чтобы найти выход из трудностей, были предложены различные программы обоснования математики, наиболее влиятельными направлениями которого стали логицизм, интуиционизм и формализм. В неклассической математике все большее распространение получают идеи конструктивного направления.

Новые математические методы и идеи, выдвинутые этими школами, во многом обогатили наши знания о таких фундаментальных понятиях и методах математики, как число, множество, функция, доказательство, аксиоматический и конструктивный методы и др. Интенсивные исследования по основаниям математики за последние сто лет пролили новый свет и на многие ее методологические и философские проблемы науки, и в первую очередь на проблемы, связанные с аксиоматическим построением математического знания. Философско-методологические исследования по этим вопросам дают возможность более конкретно подойти к анализу всего комплекса проблем, связанных с аксиоматическим методом, и в особенности таких, как условия и границы применения аксиоматического метода, сущность и значение формализации в математике.

С аксиоматизацией математики непосредственно связана философская проблема математической истины и критерии установления истинности математических предложений и теорий. Стандарты строгости доказательства, разработанные современной математической логикой, могут служить конкретным примером таких критериев. Однако как само понятие строгости доказательства, так и способы логического вывода меняются с развитием науки, испытывая определенное влияние философии. Особое значение методологический и философский анализы приобретают при выяснении особенностей математической абстракции и проблемы существования абстрактных объектов. Наконец, любая программа обоснования математики существенным образом зависит от определенного истолкования категории бесконечности вообще и математической в особенности. Разный подход к этим понятиям в теоретико-множественной математике, с одной стороны, и в интуиционистской - с другой, предопределяет их отношение и к проблемам существования, и к законам логики, и к доказательствам математики.

В математике прошлое нередко соседствует с будущим, поэтому трудно определить, что следует считать началом "современной математики". Обычно "новейшую" историю науки начинают с некоторого самодостаточного переломного момента. В середине XX в. многие математики связали бы такой перелом с деятельностью группы Бурбаки, однако в семидесятых-восьмидесятых годах во всем научном мире стал наблюдаться постепенный отход от бурбакистской концепции развития математики. Поэтому большинство математиков все же считает началом "современной математики" последнюю четверть XIX в., когда в работах Георга Кантора и Рихарда Дедекинда была построена современная теория действительных чисел. Она способствовала развитию теории множеств, абстрактной алгебры, топологии, функционального анализа и теории уравнений с частными производными. Современный этап развития математики отличается от классического также и усилением роли алгоритмического в математических понятиях.

Модернизация традиционных направлений философии математики не проясняет новый образ научного знания, складывающийся в современной философии познания. Создание теории множеств можно считать кульминацией дедуктивной составляющей математического способа мышления. Однако классическая математика развивала только одну теорию множеств, а в связи с принятием или отрицанием континуум-гипотезы она может получить их, как минимум, две. Новые направления исследования можно представить как реакцию на традиционные направления - формализм и интуиционизм. Критика классической математики в рамках интуиционистской программы Брауэра показалась вначале излишне радикальной. Поэтому в настоящее время особый интерес представляет философский анализ практического построения и обоснования математики с точки зрения ее частичной конструктивности и некоторого промежуточного варианта логической структуры, состоящей из конструктивных математических объектов и классической логики.

Первостепенное значение на рубеже XIX-XX вв. приобрело философское осмысление оснований математики, перестройка ее фундаментальных понятий и принципов, а также механизмов формирования новых стандартов обоснования математического знания. Анализ работ по философии математики и тенденций развития математического знания показывает, что именно основания математики до сих пор остаются наиболее проблемным полем взаимодействия точной науки и философии в связи с тем, что, хотя математические суждения выглядят абсолютно достоверными, математические объекты существуют не в том смысле, в каком существуют предметы внешнего мира. Историко-философский анализ показывает, что наиболее плодотворные периоды развития оснований математики проходили при возобновлении дискуссий об онтологическом статусе понятия множества и особом внимании к философским вопросам познания.

Поворот философии математики по направлению к математической практике позволяет высказать некоторые нетрадиционные версии о непротиворечивости, строгости и эффективности в современной математике. Современные интерпретации математического знания учитывают способность науки к самоорганизации, способствующей ее дальнейшему развитию, и отражают двойственную природу науки в духе парадокса Менона об эффекте распознавания нового знания. Даже если рассматривать математику только как деятельность ученых, нельзя избежать философствования на эту тему, так как граница между фундаментальной двойственностью субъекта и объекта подвижна и не определена заранее в каждом новом акте математического познания.

Выявление обосновательного слоя в математике, гарантирующего надежность научного знания, требует глубокого философского анализа понятия бесконечности, принципиально важного для преодоления существующей методологической неопределенности в основаниях этой науки. Теоремы Гёделя о неполноте указали на недостаточность логических средств, используемых в программе Гильберта. Исходя из этого, в современной философии математики дискутируется вопрос: в какой мере рациональные критерии познания контролируют строгость и эффективность математики? Он включает в себя и задачу вычислительной сложности разрешимых математических проблем, хотя многие математические теории теоретически разрешимы, с практической точки зрения они неразрешимы, поскольку любой алгоритм, являясь экспоненциально сложным, потребовал бы для его реализации практически невозможного числа шагов для современных вычислительных машин.

Традиционные взгляды на философию математики, ориентированные ранее на вопросы о природе математических объектов, значительно изменяются в сторону эпистемологической ориентации на вопросы математического познания. Известный российский математик А.Н. Паршин утверждает, что "наука не развивается линейным накоплением знаний, в ней есть непонятные анклавы, которые столетиями находятся в латентном состоянии и затем вдруг полноправно входят в науку, как будто их-то и не хватало"[1]. Опираясь на постгёделевские модификации программы Гильберта, согласно которым в современной математике приемлемы любые непротиворечивые и содержательные системы понятий, имеющие внутреннюю и внешнюю значимость, можно предположить, что важнейшей задачей является не обоснование математики в целом, а философско-методологический анализ отдельных разделов и новых ее направлений.

Современный этап исследований оснований математики характеризуется тем, что многие вопросы, рассматриваемые ранее в рамках чисто умозрительных принципов, в настоящее время решаются с помощью точных логико-математических методов. Именно поэтому математическая логика приобретает доминирующую роль в таких исследованиях. И все же многие фундаментальные проблемы обоснования математики нельзя решать в изоляции от других наук и философии, поскольку именно инфинитные экстраполяции, а также неподдающиеся конструктивной интерпретации абстракции придают математическому аппарату "непостижимую эффективность". Вот почему возникает необходимость в специальном, философском обсуждении проблем обоснования математики, а также в анализе и общей оценке различных программ такого обоснования.

Постгёделевская программа обоснования математики направлена на характеристику природы математического познания с помощью выбора объектов исследования, признаваемых научным сообществом, и соответствующей регламентации способов рассуждений о них. Проблема отыскания закономерностей и тенденций развития современной математики распадается на ряд сопутствующих методологических подпроблем в контексте реальных изменений философско-методологических оснований классического и неклассического знания. Трудность удовлетворительного практического решения соответствующих задач заключается в отсутствии среди математиков и философов единого мнения относительно природы математической реальности. Это старейшая и важнейшая проблема метафизики, от способов решения которой зависит дальнейшее развитие современной философии математики.

Философское осмысление науки XX в. позволяет сделать вывод о том, что современная математика изменила не только представления об окружающем нас мире, но и подвергла сомнению идею о "безграничных возможностях человека". Кроме того, хотя достижения математики в XX столетии превосходят все, что было сделано в ней за предшествующие более чем две с половиной тысячи лет, в неклассической математике была обнаружена недостаточность традиционных схем обоснования современного знания, элиминирующих субъективные факторы исследования основных понятий идеальных объектов. Современная математика способствует формированию нового культурного поля научных исследований, переставая быть лишь средством описания, становясь при этом также способом обоснования и получения истины.

Наука как особая интерпретационная деятельность по своему эпистемологическому статусу не отличается от других культурных феноменов. В математике это не только методы, но и новые математические образы, новые стандарты обоснования знания, а также математическая деятельность в целом, включающая эстетику, интерпретацию и проблему понимания знания. Академик РАН В.С. Степин считает, что соответствующее воздействие "может быть представлено как включение различных социокультурных факторов в процесс генерации собственно научного знания"[2]. Философско-методологический анализ научных исследований последней трети XX в., представляющих постнеклассический тип рациональности, предполагает мировоззренческие установки, определяемые в той или иной степени социокультурными факторами развития науки. Это предопределяет тот эпистемологический поворот в исследованиях по основаниям математики, который происходит в целом и в философии математики, поскольку, вообще говоря, математическое мышление не свободно от интуитивных допущений, требующих для своего уяснения выхода за пределы математики.

Исходные посылки, лежащие в основе логики и математики, позволяют распознавать "проблемные" аксиомы и положения как следствия концепций интуиционизма и формализма. Интуиционизм, отвергая попытки обоснования математики всецело лишь с позиций актуальной бесконечности, признает единственно допустимой в математике только бесконечность становящуюся, или потенциальную, полагая, что только она имеет право на существование, зафиксировав тем самым расхождение понятий "существование" и "построение". Методологический анализ стандартов обоснования математического знания позволяет сделать вывод с философских позиций о том, что интуиционистской математике свойствен примат внутренней интерпретации математических теорий, тогда как философская компонента формалистической концепции связана с абсолютизацией внешних аспектов теории, дополнительных к внутренним аспектам. Это подобно тому, как описание правил употребления слова "множество" дополнительно к его определению.

Ошибка указанных программ обоснования математики заключалась в их стремлении абсолютизировать какую-то одну систему положений, не учитывая дополнительный характер их взаимодействия. Проведенный анализ показывает, к каким трудностям приводит одностороннее преувеличение той или иной формы математической бесконечности. Исследование интуиционистской и формалистской философии математики никогда не даст их полного описания, так же как недостижима полная теория познания других сложных явлений. Поэтому оценку систем обоснования математики целесообразно проводить с учетом критерия полезности, а поскольку такая оценка теории зависит от ее назначения, то для реализации различных целей можно воспользоваться по-разному построенными теориями, т. е. интуиционистская и теоретико-множественная математики могут сосуществовать в контексте расширенной концепции дополнительности.

Откуда берется уверенность в правильности знания и определенности математического доказательства, если мы не способны ощутить абстрактные методы математики и ее понятий? "Математическое описание мира, - по мнению академика В.И. Арнольда, - основано на деликатном взаимодействии непрерывных (плавных) и дискретных (скачкообразных) явлений"[3]. Некоторые математические описания всегда будут неполными, поскольку какие-то аспекты мира на границах человеческого понимания могут "сопротивляться" полному описанию. По существу, в этой сложности, в духе обобщенной концепции дополнительности, проявляется недостаточность формальных методов описания математических процессов и явлений. Философские суждения о рациональности и внерациональности в математике в контексте проблемы соответствия средств целям, вообще говоря, строго не определены. Есть еще и методологические вопросы "глобального" характера: являются ли новые разделы математики математикой, т. е. совместимы ли они с природой этой науки? Поставленные вопросы тоже относятся к проблеме обоснования математики.

Современная математика в своей аксиоматической форме представляется через математические структуры, т. е. математика, в том числе и неклассическая, состоит из структур. Структурализм, согласно которому математика говорит не об отдельных математических объектах, а о структурах, является одним из наиболее влиятельных направлений в современной философии математики, способствующим более глубокому пониманию эталонов обоснования, отличных от этого направления. Концепция математического мышления, основанная на понятии математической структуры, не предполагает, что все сферы реального доступны структуризации, поскольку даже содержательно интерпретируемая теоретико-множественная математика является, вообще говоря, "логически незаконным" обобщением непосредственного человеческого опыта. Учитывая активную роль субъекта в генезисе математических структур, вопрос о структуризации сводится к вопросу о пределах математического мышления, который не имеет пока окончательного решения.

Примененный методологический прием в работе позволил обосновать тезис о том, что использование математических терминов не схватывается аксиомами или формальными выводами и поэтому нуждается в дополнительном объяснении, которое выявляется в способах употребления математического языка. Однако представители структурализма в философии математики избегают строго определять понятие структуры, поскольку теория множеств изучает лишь одну из многих всевозможных структур и поэтому можно сделать вывод о том, что понятие структуры тоже не подходит на роль базового онтологического понятия современной математики, что свидетельствует о сложном двойственном характере современного этапа развития математики. В контексте изменения стандартов обоснования математического знания это означает, что даже строгое доказательство может содержать утверждения, которые "выполнены" в реальной ситуации лишь приближенно.

Специфика математической теории состоит в том, что она включает в себя алгоритмическую составляющую, связанную с вычислениями и методами решения задач. Проведенный в данной статье историко-философский анализ показывает, что законность применения алгоритмических методов гарантируется при соблюдении двух основных условий: финитная часть математики, допускающая содержательную интерпретацию, должна быть полной, а не финитная часть, лишенная содержательной интерпретации, - непротиворечивой. В основе формалистской концепции математического доказательства как способа обоснования лежат чисто формальные рассуждения, а у интуиционистов - способ построения, или вычисления, хотя возможность алгоритмического построения может устанавливаться и классическими средствами, а не только предъявлением такого построения. С точки зрения современной философии математики "вычисление" и "рассуждение" неотделимы друг от друга и представляют собой фундаментальную двойственность математического познания.

Вопреки мнению о "провале" программы формализации в связи с принципиальными трудностями, создаваемыми теоремами Гёделя, утвердившемуся в философско-методологической литературе, можно предположить, что положение, согласно которому вторая теорема Гёделя о неполноте не только не противоречит программе формализации, в русле которой развивается значительная часть современной математики, но и является косвенным подтверждением ее разумности. Постгёделевский этап развития математики, указывая на тупиковые пути обоснования, предостерегает от поиска арифметических выражений непротиворечивости. Однако теоремы Гёделя о неполноте не закрывают других путей внутреннего обоснования непротиворечивости отдельных частей математики. В таком контексте алгоритмическую неразрешимость, т. е. отсутствие общих алгоритмов для целого класса задач, некоторых арифметических высказываний можно рассматривать как дополнение к результатам Гёделя.

Анализ различных точек зрения в современной философии математики позволяет сделать вывод о том, что проблема бесконечности заключена в нечеткости понятия бесконечного множества. Это задача не только актуальной и потенциальной бесконечности или проблема континуума, но и в более широком контексте проблема не-измеримости, не-разрешимости и не-вычислимости. С точки зрения философии математики можно сделать вывод о том, что не исключено принятие новой концепции континуума, согласно которой он не будет иметь никакой "мощности", а представление о множестве, состоящем из элементов, может оказаться адекватным лишь для конечных или счетных множеств. Разрыв между бесконечностью, заложенной в математические понятия, и практической реализуемостью алгоритма побуждает также к обсуждению философско-методологической проблемы оптимальной финитизации, т. е. к анализу математических способов преобразования бесконечного в конечное.

Несмотря на то, что были получены финитные доказательства непротиворечивости довольно значительного фрагмента элементарной теории чисел, так и не удалось в полном объеме финитно установить непротиворечивость арифметики и аксиоматической теории множеств. Поэтому, принимая во внимание, что математические абстракции являются не только естественнонаучными, но и философскими, современная философия математики пытается своими методами преодолеть эту двузначность на границе между "существует" и "не существует". Сравнительный анализ классической и неклассической теорий в контексте общефилософской концепции дополнительности может способствовать пониманию онтологических и эпистемологических проблем, относящихся к основаниям и обоснованию математики.

1 Паршин А.Н. Путь. Математика и другие миры. М., 2002. С. 171.
2 Степин В.С. Теоретическое знание: Структура и историческая эволюция. М., 2000. С. 41.
3 Арнольд В.И. Математика и физика: родитель и дитя или сестры? // Успехи физических наук. 1999. Т. 169. № 12. С. 1311-1323.

Поступила в редакцию 05.04.05.

Наталия Викторовна Михайлова - кандидат философских наук, доцент кафедры математики Минского государственного высшего радиотехнического колледжа.