

ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В КОНТЕКСТЕ ФИЛОСОФСКОЙ ИДЕИ ТРИАДИЧНОСТИ

Проведен философский и методологический анализ, который опирается на историческую достоверность математического знания и позволяет заключить, что философская идея триадичности может служить основой структурной целостности программы обоснования математики.

Philosophical and methodological analysis based on the historical reliability of mathematical knowledge is undertaken in the article. The analysis allows the author to conclude, that the philosophical idea of triadility can be the basis of structural integrity of the program of substantiation of mathematics.

Обоснование математики само нуждается в процессе обоснования или соответствия обоснования своей задаче. Здесь естественно возникают философские и собственно математические проблемы, поскольку обосновательная деятельность в математике состоит из двух относительно независимых уровней: математического и философского. Для решения любой философско-математической проблемы познания надо попытаться выявить принципы, приобретающие гносеологический статус в исторически стабильных разделах математики. Поскольку новых подходов к решению проблемы обоснования математики не приходится ждать от логики, то сосредоточимся на углублении философии математики, следуя общезначимой философской идее триадичности. В своем философско-методологическом анализе будем исходить из общепризнанного факта особой достоверности математического знания и неправомерности отождествления математики с опытными науками. Системная триада, воплощающая философскую тринитарную методологию, может служить базовой структурой целостности программы обоснования математики.

Недостаток традиционных программ обоснования математики состоял не в их претензии на абсолютность, а в отсутствии методологической теории оправдания абсолютности, присущей по своей природе математическому мышлению. Известный математик и философ математики академик Н.Н. Лузин, пытаясь снять необоснованные ограничения на внутренние математические определения теории множеств, полагал, что наряду с некоторыми эффективными в математике понятиями теории множеств последняя содержит в себе объекты, не имеющие реального наполнения, несмотря на их приемлемость в логическом и математическом отношении. Теоретико-множественный подход в духе Кантора уводил математическое мышление в сторону математического платонизма. В таком контексте, даже если построение аксиоматической теории по своей форме индуктивно, интерпретации этой теории могут быть вполне платоническими. Например, вера Курта Гёделя в то, что континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна, вне зависимости от того, способны ли математики доказать ее или опровергнуть, позволяет причислить его к приверженцам платоновской идеи в математике. Хотя, например, такой авторитет в математической логи-

ке, как Пол Коэн, обосновавший недоказуемость континуум-гипотезы, не разделял взглядов Гёделя, полагая, что теория множеств – это не более чем аксиоматическая структура, а не частная модель внешнего мира.

Несмотря на различные мнения об аксиоматически построенных теориях, формальная программа Гильберта сыграла выдающуюся роль и оказалась наиболее продвинутой как в самой современной математике, так и в вопросах ее обоснования. По заключению специалиста по математической логике и теории алгоритмов И.А. Лаврова, «в ней удалось систематизировать весь накопившийся в математике опыт исследований и решений трудных математических проблем. Под этот необозримый материал была подведена разумная философия осмысления достигнутого, что, в свою очередь, помогло строго математически поставить такие вопросы обоснования, которые ранее лишь предугадывались»¹. Признавая важность теоремы Гёделя о непротиворечивости, отчасти накладывающей в методологическом смысле существенные ограничения на программу Гильберта, философы математики сейчас пытаются избежать ее «излишне радикального истолкования», закрывающего путь к финитному обоснованию отдельных математических теорий вообще. Таким обоснованием для арифметики является ее интуиционистское представление. Если опираться на содержательную интерпретацию логических операций, которые тоже являются элементами формализованной теории, может появиться возможность нахождения такого содержательного финитного рассуждения, которое обеспечит обоснование математической теории, хотя оно может и не обладать свойством арифметизируемости.

Постгёделевская философия математики разных направлений, несмотря на очевидную эффективность аксиоматически построенных теорий, породила серьезные сомнения в существовании непротиворечивых формальных описаний. Философско-методологические открытия Гёделя положили начало многочисленным исследованиям возможностей формализованного метода познания. Дело в том, что ограничительные результаты математической логики не исчерпываются теоремами Гёделя, а продолжают в таких философско-методологических исследованиях, как актуальные проблемы «разрешимости – неразрешимости», «опре-

делимости – неопределимости», «полноты – неполноты» и, конечно же, доказуемости и истинности. Тем не менее это не дает оснований для противопоставления рассудочного и содержательного способа познания, поскольку идеи Гёделя можно трактовать как отказ от строгого анализа оснований и возвращения к историческим сложившейся манере изложения математических теорий, ориентированной на убедительность восприятия их предпосылок и выводов. Гносеологические выводы из гёделевских результатов философы математики делают с должной осторожностью, так как целостный смысл в контексте синергетической методологии достигается в синтезе различных аспектов внутренней структуры программ обоснования математики. Относительная неудача основной идеи Гильберта о доказательстве непротиворечивости теории средствами формального языка, выявленная в теореме Гёделя о неполноте арифметики натуральных чисел, вообще говоря, вовсе не умаляет значимости для развития математики программы Гильберта. Наоборот, такое понимание отмечает тупиковые пути решения подобного рода проблем и подсказывает возможные пути дальнейшего направления исследований в философии математики.

Теория множеств лежит в основе всех математических наук, и практически все математики верят в то, что она непротиворечива. Эта вера основана на том, что многовековой опыт работы математиков пока не давал повода для сомнений в непротиворечивости математики, частью которой является канторовская теория множеств. Результаты Гёделя с точки зрения философии демонстрируют нечто большее. Они доказывают, что способность человека к постижению сути вещей невозможно свести к какому бы то ни было набору дедуктивных правил. Сенсационный результат философа указывал на относительную слабость избранных логических средств, чтобы с их помощью можно было решать кардинальные вопросы обоснования теорий. Известный логик Н.Н. Непейвода резюмировал сложившуюся ситуацию в философии математики как «вызов логики и математики XX века». Довольно эмоционально он высказался в том духе, что «теорема Гёделя о неполноте является почти что красной тряпкой для тех, кто желал бы придерживаться иллюзии, что наука всеильна, идущей еще от просветителей и иллюминаторов. Поэтому нет числа попыткам ее обойти (хотя способ ее обойти известен неформально еще со времен эллинов: не включайте в теорию ничего лишнего, не стремитесь к абстрактной общности, не все усиливайте, что может быть усилено, и система может оказаться разрешимой как, например, элементарная геометрия)»². Тем не менее нельзя создать такую формальную систему логически обоснованных математических правил вывода, которой было бы в принципе достаточно для до-

казательства всех истинных теорем элементарной математики.

Поэтому если говорить о наиболее продвинутой программе в современной математике, а именно формалистской программе, то ее расширения с учетом гёделевских результатов должны проходить через пересмотр принципов построения метатеории и допустимых логических средств. В содержательных расширениях теорема Гёделя не имеет силы, так как они не поддаются представлению в арифметизированной метатеории. Первые примеры верных, но недоказуемых в арифметике Пеано реальных математических утверждений о натуральных числах были получены Джеффом Парисом. После двухсотлетней попытки зафиксировать постулаты, на которых основано дифференциальное и интегральное исчисление, он вместе с Лео Харрингтоном в самом конце 70-х гг. прошлого столетия доказал, что они не могут быть сформулированы в логико-арифметическом языке. Поэтому можно сказать, что он создан «из ничего», но это не означает, что он создан «ничем», поскольку наиболее ценные его результаты получены благодаря центральной смысловой категории математического анализа – понятию актуальной бесконечности. Ограничение сферы надежной метатеории арифметизируемостью и финитностью требует пересмотра программ обоснования через выявление онтологических оснований математического мышления в различных областях современной математики, что, в свою очередь, потребует привлечения новых подходов к гносеологическим критериям. Наряду с аналитическим движением в глубь математики возникает потребность понять не только те части, из которых состоит изучаемая сфера науки, но и целое.

Существуют специфические законы целого, а также его свойства, которые нельзя объяснить на языке его составных частей, поскольку именно целое детерминирует части, выступая причиной их существования. При анализе реальной информации о функционировании системы ее нельзя рассматривать абстрактно от ее среды, как образно заметил философ и культуролог М.С. Каган: «Функциональный аспект системного анализа, подобно двуликому Янусу, смотрит и в недра исследуемой системы, стремясь раскрыть механизм ее внутреннего функционирования, взаимодействие ее элементов, и в окружающий эту систему мир, в ее реальную среду, взаимодействие с которой составляет внешнее функционирование системы»³. В методологии науки обосновано, что системный подход помогает преодолеть ограниченность аналитического подхода в различных областях знания благодаря способности ученых моделировать целостности, не сводящие целое к механической сумме бесконечно умножающихся частных. Поскольку трудно учесть все формализуемые аспекты программ обоснования, то онтологическое обоснование современной математики, скорее

всего, маловероятно. Однако в самой математике гильбертовская программа формализма позволяет универсальным образом рассмотреть все имеющиеся в настоящее время результаты и методы, присущие математическим направлениям. Разные философские взгляды на источники человеческого знания и трудности математического познания, опирающегося на онтологическое единство знаковых конструкций, обусловили различные, на первый взгляд несовместимые точки зрения на основания математики.

Подводя итог спору между интуиционистами и формалистами, крупнейший математик Рихард Курант сказал: «При всем уважении к достижениям, завоеванным в борьбе за полную ясность основ, вывод, что эти расхождения во взглядах или же парадоксы, вызванные спокойным и привычным использованием понятий неограниченной общности, таят в себе серьезную угрозу для самого существования математики, представляются совершенно необоснованными»⁴. К сожалению, труднообозримое содержание современной математики не удается уложить в простые рамки «кантианской» философии математики, согласно которой математические понятия можно рассматривать как объекты сферы «чистой интуиции», независимой от различных актов мыслительной деятельности человека. Естественно, что представители современного математического интуиционизма не полагаются на чистую интуицию в кантовском понимании. Однако многие понятия и методы, важные для математики, не могут быть реконструированы в соответствии с требованиями интуиционистской программы. Например, интуиционисты признают счетную бесконечность как доступную интуиции, однако такое фундаментальное понятие, как числовой континуум, с их точки зрения, следует исключить из употребления, но при этом то, что остается в математике, тоже оказывается очень сложным, без надежды на существенное упрощение. Не обязательно требование конструктивности математических объектов ограничивает логические средства современной математики. В частности, это означает, что интуиционистская программа обоснования математики не всегда согласуется с реальной ее практикой. В формалистской программе обоснования математики математическим понятиям не приписывают никакой интуитивной реальности. Их главные работы сосредоточены на формальной логической правильности процесса рассуждений, базирующихся на принятых Гильбертом постулатах.

Отчасти такой подход представляет собой большую свободу действий по сравнению с интуиционистской позицией как для математических теорий, так и для их приложений. В связи с этим обратим внимание на интересную философскую работу английского математика Брайана Дэвиса «Куда идет математика?». В ней обосновывается, что к концу прошлого века точнейшая из

наук испытала потрясения, которые могут принципиально изменить характер полученных в ней результатов. Логические прозрения Курта Гёделя привели в 1930-е гг. к первому из трех кризисов, о чем идет речь в этой работе. Следует все же заметить, что критика формалистской программы, исходящая из теорем Гёделя, не может быть признана вполне корректной еще и потому, что она приписывает гёделевским теоремам большую общность, чем та, которой они обладают по логике своих доказательств. По предположению Брайана Дэвиса, начиная с 1970-х гг. в математике произошли еще два кризиса, столь же непредсказуемые, как и кризис, вызванный работой Гёделя. «Оба они связаны с проблемой переусложненности: доказательства стали настолько длинными и сложными, что ни один ученый не взял бы на себя смелость однозначно подтвердить или оспорить их правильность»⁵. В философской литературе эти кризисы в такой постановке проблемы не обсуждались. Самым революционным техническим изобретением прошедшего века можно считать компьютер. Этот инструмент, первоначально создававшийся для математических расчетов, позволил проводить математическое моделирование огромного класса физических и социальных процессов.

Появление компьютеров не только изменило лицо цивилизации, но и породило сомнение в методологической обоснованности машинных доказательств теорем. Как применять такие результаты? Основная методологическая идея состоит в том, что это способ получения новой информации, которая не заметна в обычном строго математическом формализме. Второй кризис относится как раз к тем доказательствам, которые проводились с использованием компьютера. Соответствующую проблему можно сформулировать так: можно ли считать математическим доказательством, которое выполнено на компьютере? С одной стороны, «кризисы переусложненности» носят эпистемологический характер и вроде бы не связаны с онтологией математики, но, с другой стороны, если рассматривать математику как созидательный процесс, то ее можно уподобить архитектуре, как это делала группа Бурбаки. Но тогда эти кризисы можно интерпретировать как кризисы человеческой мысли. Когда архитекторы науки осознали, что невозможно построить многокилометровое сооружение, то стало ясно, что нет смысла обсуждать, какими свойствами устойчивости оно могло бы обладать. По поводу кризиса, связанного с применением компьютера в доказательстве теорем, можно сказать, что никакой ясности в эту проблему внести пока не удалось, поскольку нет реальных технологий доказательства корректности компьютерных программ.

Третий кризис переусложненности в определенном смысле для математиков более серьезный, так как связан с излишней сложностью доказательств некоторых знаменитых математичес-

ких проблем. Решение математической задачи, сформулированной в нескольких предложениях, может занимать десятки тысяч страниц математического текста. Как в таком случае оно может быть полностью понято отдельно взятым математиком, пусть даже самой высочайшей квалификации? Напомним, что главные споры между исследователями философии математики ведутся вокруг особого статуса математических объектов. Если принять гипотезу об их существовании в некоем абстрактном платоновском мире, то непонятно, как мы, живущие в реальном пространстве и времени, можем что-либо знать о них. Кроме того, существует множество других тонкостей, которые нельзя не принять в расчет. Известный последователь платонистских воззрений Роджер Пенроуз указывает на такую важную философскую проблему: «...в рамках платонизма можно поставить вопрос о том, существуют ли в реальности объекты математической мысли или это только лишь понятие “математической истины”, которое является абсолютным»⁶. Удивительно, как, не имея прямого доступа к таким объектам, мы тем не менее можем силой логического разума приходить к определенным заключениям относительно них? Например, существование фрактального множества Мандельброта есть его свойство абсолютной природы, не зависящей от математика или компьютера, которые его исследуют. Поэтому такая «независимость от математика» множества Мандельброта обеспечивает ему чисто платонистское существование.

Даже некоторые профессиональные математики, такие как Брайан Дэвис, критиковавшие позицию последователей Платона, признают сегодня объективное существование математических объектов, имеющих строго определенное свойство. Три основных направления в современной философии математики – формализм, платонизм и интуитионизм – образуют системную триаду обоснования математики. И все же, почему для методологии целостного подхода к обоснованию математики в качестве структурной единицы избрана именно триада? Необходимость такого выбора обусловлена тем, что диады «формализм – интуитионизм» было явно недостаточно, а из более сложных структур она наиболее простейшая и достаточно содержательная в отличие от других искусственных и поверхностных интерпретаций. Тем не менее достаточность тернарной структуры пока остается под вопросом, хотя и существуют определенные основания в математике, физике и философии для выделения таких структур. Более существенная аргументация, по мнению математика и философа науки Р.Г. Баранцева, – это существование «универсальной семантической формулы системной триады», состоящей из таких элементов, как «рацио», «эмоцио» и «интуцио». Системный подход как целостное проявление должен вернуть един-

ство в понимание современной математики, утраченное интуитионистами и формалистами, как бы ни были различны точки зрения на проблемы обоснования математики, питаемые теми или иными математическими традициями.

Совместный анализ этих противоположных начал и борьба за их синтез в духе новой тернарной методологии обеспечивают полезность и ценность философии математики собственно для математики. Поэтому так важно было исследовать с философской точки зрения сущность формалистских и интуитионистских ограничений с целью их возможной разумной либерализации. Из анализа проблем оснований математики можно сделать следующий философско-методологический вывод: процесс развития математики, а также уточнение оснований математики никогда не будут завершены, так как познание бесконечно. Почему мы считаем, что целостному подходу соответствует триада программ обоснования математики? Во-первых, число три обладает высоким приоритетом, поскольку триединство удивительным образом сохраняет значение в культуре наших дней. Во-вторых, основное значение триады состоит в том, что она фиксирует начало синтеза, соединяя воедино противоположные начала. Полярные качества диады по своей природе плохо согласуемы, но когда мы игнорируем эту несогласованность и говорим о «золотой середине», в которой пытаемся найти решение проблемы, то мы тогда обращаемся к системной триаде, которая несет в себе потенциальную возможность согласования. Структурирование понятий по принципу триады имеет множество вариантов. Например, в такой фундаментальной диаде, как «пространство – время», на пути к целостности через триаду «пространство – закон – время» раскрывается возмущающее причинно-следственного описания мира. Учитывая, что в пространственно-временной точке вариация масштаба раскрывает своеобразные миры на разных уровнях самоорганизации материи, в результате получается еще одна триада «пространство – масштаб – время».

Несколько тысячелетий назад представление о триединстве Мира возникло у Платона. Кроме того, вполне уместно заметить, что идея тринитарности является основным догматом христианства, а троича – излюбленное число героев мифологии. Как считает идеолог тринитарного мышления Р.Г. Баранцев, переход от диад к триадам позволяет заново взглянуть на суть диалектики, которая, вообще говоря, не привязана исключительно к дихотомии, а допускает изучение многомерных систем, включая тройные. Он считает, что «тринитарная методология не заменяет, а развивает диалектику, раскрывая ее внутренние возможности»⁷. С точки зрения математики треугольник – это двумерный симплекс, т. е. простейший выпуклый многогранник данного числа измерений, а именно двух. Он примечателен

тем, что три точки, образующие его вершины, с одной стороны, могут рассматриваться как самостоятельные элементы, а с другой стороны, образуют нечто целое в виде простейшей геометрической фигуры. Отсюда, возможно, и возникла философская идея триадичности, а то, что, осознав ее, люди стали мыслить пространственно, хорошо отражено в разнообразных тринитарных метафорах. Самое непостижимое в окружающем мире – это то, что он постижим на математическом языке. Однако если рассматривать математические конструкции как произвольные творения человеческого ума, то тогда вопрос о причинах «непостижимой эффективности математики» нельзя даже разумно сформулировать.

В современной математике наиболее распространены «позитивистский» подход, состоящий в рассмотрении математических теорий как некоторых формальных конструкций, и поэтому вопросы о мировоззренческом статусе используемых математиками понятий и методов можно считать ненаучными. К подобным подходам можно отнести прежде всего аксиоматический метод, развитый Гильбертом. Позитивизму противостоит интуиционизм, который близок к «номинализму» – подходу в вопросе об основаниях математики, состоящему в предположении, что математические понятия являются результатом абстрагирования и обобщения свойств реального физического мира. При таком подходе математические факты – это конструктивные объекты или, по существу, такие же экспериментальные результаты, как и факты естествознания. Поэтому номинализм как философское воззрение противостоит платоновскому реализму понятий. Для «реалиста», мировоззрение которого восходит непосредственно к Платону, мир наполнен идеями. Их реальность отлична от реальности «конструктивистов», для которых математические объекты существуют исключительно в разуме математика. Многие крупные математики, пытавшиеся понять статус математических понятий, склонялись к тому или иному варианту платонизма, или «реализма». Например, такой авторитет, как Анри Пуанкаре, считал «канторианцев» реалистами именно в том, что относится к сущностям математики.

Возможность крупным математикам увидеть будущее математики служит хорошим аргументом в пользу того воззрения на математику, которое принято называть «математическим реализмом». Вера в математические сущности – это результат опыта работы математиков, что представляется веским аргументом в защиту математического реализма, принимающего все ценности традиционной математики. В этой вере начинают сомневаться лишь при столкновении с трудностями теории множеств. Как пояснил Пол Коэн, «если эти трудности особенно смущают математика, он спешит под прикрытие формализма, предпочитая, однако, в спокойное время обре-

таться где-то между двух миров, наслаждаясь лучшим, что есть в обоих»⁸. Приятное преимущество реализма состоит в том, что он избавляет от необходимости обоснования аксиом теории множеств. Поскольку развитие математики показало недостаточность гильбертовского подхода к обоснованию даже в пределах самой математики, то математика неизбежно должна быть содержательной и «человеческой» или в духе платонизма даже «сверхчеловеческой». Процесс обнаружения истины есть переход от сокрытого знания к явному знанию. Уже в Новое время познание природы стало настолько сложным, что Иммануил Кант счел необходимым разделить науку и мудрость, а также науку и истину. Математики уже примирились с тем, что любая непротиворечивая система аксиом не может дать ответ на все возникающие в ее рамках вопросы. Похожая ситуация имеет место в физике элементарных частиц, которая не отвергает предположения о бесконечной сложности материи.

Расширение физического знания происходит путем добавления новых физических законов, которые можно рассматривать как систему физических аксиом, подобно тому, как добавление новых математических аксиом позволяет ответить на некоторые ранее неразрешимые вопросы. Физик-теоретик М.И. Каганов и специалист по математическому анализу Г.Я. Любарский, считающие, что по крайней мере в настоящее время аксиоматизация физики представляется ненужной, тем не менее специально подчеркнули, что «все выводы, которые удастся получить с помощью неполной системы аксиом, являются истинными, коль скоро истинна каждая аксиома используемой системы»⁹. К этому можно добавить, что теорема Гёделя о неполноте не может опровергнуть ни одной из уже добытых математических истин. Для поколения, воспитанного на скептицизме, словосочетание «абсолютная истина» представляется неким анахронизмом. Это касается и абсолютности математической истины. Достаточно указать на различные мнения относительно абсолютной истинности утверждений о бесконечных множествах. Например, хотя уже общепринято, что теория множеств в некотором смысле унифицирует современную математику, она не является ее онтологическим основанием и, возможно, однозначно понимаемое обоснование современной математики вообще недостижимо. В контексте обоснования математики это впоследствии привело к либерализации и ослаблению ограничительных требований, допустимых с точки зрения онтологической истинности математических представлений.

Даже для установления математической истины отдельно взятый математик не применяет изначально только те алгоритмы и методы рассуждений, которые он полагает хорошо обоснованными. Отказ от претензий понимания природы вещей в себе, от постижения окончательной ис-

тины, от разгадки сущности мира, может быть, психологически тягостен для некоторых энтузиастов, но на самом деле он оказался плодотворным для развития научной мысли. Мнения о возможной противоречивости математической теории исходят от философов математики, поэтому ее обоснование не является для математиков проблемой первостепенной важности. Математики, выступая в своей роли, отбросив свои философские воззрения, могут прийти к согласию, поскольку в их науке достаточно областей, где можно получать сильные результаты традиционными методами. Но если они не хотят потерять перспективы целостного понимания, математика не может не иметь альтернативных теорий обоснования в духе разумного компромисса.

¹ Лавров И.А. Программа Д. Гильберта построения аксиоматических теорий // Лавров И.А. Математическая логика. М., 2006. С. 15.

² Непейвода Н.Н. Вызов логики и математики XX века и «ответ» на них цивилизации // Вопросы философии. 2005. № 8. С. 121.

³ Каган М.С. О системном подходе к системному подходу // Философские науки. 1973. № 6. С. 38.

⁴ Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? 3-е изд., испр. и доп. М., 2004. С. 242.

⁵ Davies B. Whither mathematics? // Notices of the American Mathematical Society. 2001. Vol. 52. № 11. P. 1351.

⁶ Пенроуз Р. Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики. М., 2003. С. 110.

⁷ Баранцев Р.Г. Становление тринитарного мышления. М.; Ижевск, 2005. С. 54.

⁸ Коэн П. Дж. Об основаниях теории множеств // Успехи математических наук. 1974. Т. 29. Вып. 5. С. 171.

⁹ Каганов М.И., Любарский Г.Я. Абстракция в математике и физике. М., 2005. С. 97.

Поступила в редакцию 26.12.07.

Наталья Викторовна Михайлова – кандидат философских наук, доцент, заведующий кафедрой социально-гуманитарных дисциплин Минского государственного высшего радиотехнического колледжа.

Библиотека БГУИР