ПРИНЦИП СИСТЕМНОСТИ И ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ НАПРАВЛЕНИЙ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Н.В. Михайлова

В работе предпринята попытка осуществить конкретизацию философского принципа системности путем раскрытия генезиса основных направлений обоснования математики и эксплицировать недостаточность методологических предпосылок отдельных программ формализма и интуиционизма в приращении математического знания.

Ключевые слова: принцип системности, обоснование математики, философско-методологический синтез

Проблема обоснования математики имеет два взаимосвязанных уровня: математический и философский. Если сущность первого выявляется через применение программы обоснования к конкретной теории, что составляет чисто математическую работу, то сущность второго характеризуется тем, что каждая программа обоснования нуждается в философском анализе ее соответствия исходной философско-методологической задаче. Кроме того, проблема обоснования настолько тесно связана с философскими императивами конкретной эпохи, что ее исследование невозможно без экспликации соответствующего философского контекста.

Идея системного подхода к обоснованию математики на основе эволюции математического знания в некоторой степени была намечена Э. Гуссерлем. Он писал, что «нужно понимать глубокую причину того требования так называемого “теоретико-познавательного обоснования” наук, которое распространилось и, в конце концов, повсеместно утвердилось в Новое время, в то время как ясности по поводу того, чего же не хватает заслужившим столько восхищения наукам, достигнуто не было» [1]. В обосновании математики исторически сосуществуют и взаимодействуют два способа систематизации подходов к обоснованию: теоретический и практический. При теоретическом способе систематизации обоснования математического знания выявляются общие логические связи, продуцируемые познавательными способностями и зафиксированные в специальных понятиях логического вывода. При практическом способе систематизации обоснования акценты переносятся на выявление наиболее стабильных и надежных методов конструирования новых математических объектов, соответствующих практико-прикладным потребностям, которые, в свою очередь, способствуют правильному пониманию реальных направлений эволюции современных математических теорий.

Системный подход в области философско-методологического обоснования математики представляет собой реализацию целостного подхода к проблеме обоснования в условиях сложнейшей и многообразной дифференциации современного математического знания для выявления путей философско-методологического синтеза направлений обоснования современной математики и осмысления их неизбежной взаимной дополнительности. Соответственно, под принципом системности в проблемном поле обоснования математики понимаются новые идеи, концепции и теории, удовлетворяющие некоторой философской парадигме, которые в своей совокупности и взаимосвязи позволяют раскрыть методологическую целостность математического знания и способствуют реальному развитию математики на данном этапе развития науки. Взгляд на проблему обоснования под углом зрения философско-методологического синтеза способствует приращению знания, открывая новые способы коммуникации в математике. Опираясь на принцип системности, можно объединить различные методологические подходы в обосновании математики, что и дает возможность устанавливать пути их синтеза и осмысливать их взаимную дополнительность. Понятие подхода означает, например, методологическую ориентацию, определяющую общую стратегию исследования, и оказывает существенное влияние на выработку идеалов и норм математической теории.

История математики наглядно показывает, что в результате развития математических теорий самоорганизуется практический и эффективный механизм очистки математических доказательств от некорректных утверждений, обусловленный системным подходом к ее обосновательным процедурам и практической направленностью на решение естественно-научных задач. Несмотря на аналогию с процедурой освобождения опытных теорий от ложных гипотез, принципиальное отличие этой процедуры от формирования математических теорий состоит в том, что очистка эмпирических теорий от некорректных допущений и рассуждений в принципе не может быть закончена. Поэтому в философско-методологическом анализе обоснования математики мы будем исходить из общепризнанного факта особой достоверности математического знания и неправомерности отождествления математики с опытными науками. Системное обоснование современных математических теорий более абстрактно, чем логическое, поскольку рабочие программы логико-философского обоснования математики базируются на различных видах редукции. По мнению методолога науки И.В. Блауберга, «системный подход представляет собой методологическую ориентацию исследователя, основанную на рассмотрении объектов изучения в виде систем, то есть совокупностей элементов, связанных взаимодействием и в силу этого выступающих как единое целое» [2]. Используя при этом дополнительно внутренние связи и внешние целостные свойства системы, можно попытаться получить определенное философское обоснование современной математики.

Необходимость философско-методологического синтеза существующих направлений обоснования обусловлена, прежде всего, тем, что философия в своих когнитивных задачах делает акцент на выявлении теоретически универсального в обосновании математики, а методология – на развитии практической деятельности в конструктивном аспекте и на создании условий для дальнейшего развития математики. Философско-методологический синтез отличается от простого соединения принципов тем, что он представляет собой слияние исходных, даже противоположных, принципов в концептуальную идею, имеющую новый смысл, сущность которой состоит в том, что она задает совокупность методов исследования как составляющую часть своего методологического арсенала. Поскольку математику можно рассматривать как специфическую систему понятий и идей, подчиненных научному знанию в целом, постольку проблему обоснования современной математики можно обсуждать прежде всего в философско-методологическом аспекте, а именно, в плане общих принципов математического познания.

С точки зрения философской рефлексии программа обоснования математики сама нуждается в собственном обосновании – математическом и философском, соответствующем задачам математики и философии. Математический анализ проблемы связан с рассмотрением математической теории в соответствии с принципами принятой программы обоснования. Философский анализ проблемы опирается на общие характеристики научного познания, поэтому процедуры конкретизирующего обоснования в философии выполняются, вообще говоря, не с той последовательностью, методичностью и эксплицитностью, как это делается в точных науках. Для конкретизирующего обоснования своих познавательных теорий и схем философия математики обращается за помощью к самой математике. Как утверждает философ математики В.Я. Перминов, «общая методология программ обоснования математики, выдвинутая в начале XX века, с современной точки зрения должна быть признана совершенно неудовлетворительной» [3]. Возможно, в связи с этим, несмотря на некоторое продвижение в прояснении и обосновании упомянутых допущений, имеющих гносеологический характер, проблема обоснования современной математики все еще далека от своего окончательного решения, поэтому она до сих пор является предметом различных научно-философских исследований.

К началу XX в. философия математики осознала себя как область, имеющую значение не только для решения чисто философских проблем. Проблема обоснования математики методологически строго впервые была сформулирована Д. Гильбертом как проблема обоснования непротиворечивости математических теорий. Новое понимание обоснования математики, представляющей собой совокупность абстрактных структур, являющихся математическим языком и основой дедукции, сводится к обоснованию надежности ее доказательных утверждений и установлению непротиворечивости ее теорий. Но так ли существенна для математики проблема ее обоснования? В общеметодологическом плане такое обоснование необходимо для того, чтобы найти средства, гарантирующие надежность сверхсложных современных математических рассуждений и доказательств. Заметим, что в разные периоды истории развития математики надежными представлялись математические теории, соответствующие различным уровням теоретической строгости, формирующимся под влиянием критической познавательной установки. С точки зрения современной математики надежность теоретического знания определяется также его гарантированностью от контрпримеров.

Рассмотрим суть некоторых философских дискуссий, относящихся к проблеме обоснования математики. Редукция математики к логике не может быть реализована без явного или неявного включения в логику понятий и принципов, связанных с бесконечностью, что противоречит статусу логики как системы понятий, не связанных с идеей бесконечности, а тем более, с наиболее плодотворной в математике идеей актуальной бесконечности. Поэтому логицизм как направление в философии в настоящее время является малопродуктивным. Использование понятия актуальной бесконечности есть то, что в философии математики принято называть платонизмом, хотя такой авторитет в области оснований математики, как П. Коэн предпочитает называть его реализмом. Корни платонизма следует искать в XIX в., когда математики стали пользоваться понятием актуальной бесконечности совершенно свободно и актуально бесконечные множества объектов стали составлять основное содержание традиционной математики. Отношение к бесконечным множествам стало критерием, по которому происходило размежевание математиков. «Знаменитые логические антиномии, – по мнению П. Коэна, – никогда не играли заметной роли в математике просто потому, что они не имели ничего общего с обычно используемыми рассуждениями» [4]. Кризис логицистского метода обоснования математики способствовал появлению новых подходов к обоснованию, среди которых необходимо выделить реально действующие формалистское и интуиционистское направления.

Основоположник программы формализма Д. Гильберт существенно опирался в процессе обоснования на метод формализации содержательной математики. Его идея относительно спасения теории множеств состояла в предложении аксиоматизировать эту теорию в духе разработанной им метаматематики, или теории доказательств, а затем доказать непротиворечивость полученной системы аксиом. Суть требования непротиворечивости можно понимать так, что аксиоматически определенный математический аппарат вообще может работать. Гильберт взял у логицистов положение аксиоматизации и формализации математической теории, добавив в свою программу обоснования принцип финитизма, согласно которому оперирование с бесконечным можно сделать надежным только через конечное. Впоследствии оказалось, что финитистские методы пригодны для обоснования непротиворечивости сравнительно бедных формальных теорий, например без аксиомы полной математической индукции. Более того, сколько-нибудь содержательная часть современной математики не может быть полностью формализована, а для той, которая формализована, непротиворечивость не может быть доказана в методологических рамках этой формализованной системы.

Своеобразную программу преодоления этих трудностей в математике, возникающих при попытке строить ее исключительно на базе теории множеств, предложил в самом начале XX в. Л. Брауэр. Эта программа обоснования получила широкую известность в философии математики под обобщенным названием «интуиционизм». В настоящее время она объединяет также различные конструктивные направления и использование возможностей компьютера в обосновании современной математики. При выяснении логической структуры положений, на которых основаны различные программы математики, преследовались две цели, вообще говоря, не совпадающие между собой для математики в целом, которые можно назвать «программа-минимум» и «программа-максимум». Если первая призвана обеспечить непротиворечивость и методическую ясность в преподавании математических курсов, то вторая стремится обеспечить истинность всей математики как целостного знания. По этому поводу известный специалист по математическому моделированию Ю.П. Петров заметил: «…Программа-минимум была выполнена, а программа-максимум не реализована и до настоящего времени. Можно предположить, что она и никогда не будет выполнена, поскольку уже в начале XIX века Гегелем было показано, что любое достаточно богатое понятие внутренне противоречиво» [5]. Тем не менее интеллектуальным ядром современной математики остаются системные идеи, позволяющие философски размышлять над проблемами сложности математических моделей и эффективности вычислительных экспериментов.

Мотивы, которые побуждали математиков принимать некоторые положения интуиционистской, а затем и развивающей ее конструктивистской программы обоснования математики, носили и чисто математический, и философский характер. Они вытекали из размышлений о роли интуиции в математическом познании вообще. Согласно интуиционизму, математическое высказывание должно быть утверждением о выполнении некоторого построения, которое должно быть ясным само по себе, чтобы не нуждаться ни в каких обоснованиях. В интуиционистской программе можно выделить негативный и позитивный аспекты: первый состоит в отрицании существования некоторых основных понятий теоретико-множественной математики, а второй – в разработке конструктивных аспектов математики. Заметим, что финитизм программы формализма был все же не столь радикален, как финитизм программы интуиционизма. Если Гильберт считал возможным сохранить понятие актуальной бесконечности в тех пределах, в которых оно допускает финитное обоснование, то Брауэр вообще хотел устранить это понятие из математики. Но с другой стороны, гносеологические предпосылки программ формализма и интуиционизма, определяющие исходный понятийный базис и допустимые критерии достоверности, являются наименее рационализированным компонентом проблемы обоснования.

Синтез основных направлений обоснования современной математики как объектов является новой концептуальной идеей философии математики. Суть этой идеи состоит в том, что надо выявлять, упорядочивать и прогнозировать их результирующие пересечения с целью создания обобщенной теоретико-мировоззренческой программы обоснования. Такую программу можно реализовать, если существенно доработать концепции обоснования математики, рассматривая их в качестве предпосылочного знания, которое глубоко исследовалось в философии математики XX столетия. Кроме того, как отмечает философ науки Б.Г. Кузнецов, «синтезирующая функция математики опирается теперь не на ее неподвижность, а на ее изменчивость, распространенную на то, что только и может служить фундаментом универсального синтеза – на наиболее общие исходные принципы, на аксиоматику, которая стала онтологической и поэтому динамической, подвижной, зависящей от физического эксперимента» [6]. Для конкретных реализаций философско-методологического синтеза направлений обоснования математики, возможно, понадобится не диадная структура противоположных сущностей, а более емкая триадная, хотя богатейший тринитарный опыт человечества все еще находится на периферии современных научных парадигм.

Даже самые проницательные философы математики первой половины XX в. не могли предвидеть появления такого мощного нового направления современной математики, как компьютерная математика, синтезирующая в себе как формалистские, так и конструктивистские проблемы обоснования математики. Благодаря новым теориям, например теории алгоритмов, методов оптимизации и теории игр, в сферу математики вошли исследования, способствующие моделированию понимания. Поскольку в современной математике фиксируются такие конститутивно важные для всякой научной рациональности характеристики, как целостность, системность и структурность, это создает возможность трансляции уже аккумулированного знания. Кроме того, в результате стремительного развития математического моделирования и компьютерного эксперимента открываются новые возможности философско-методологического синтеза программ обоснования математики, который мы называем системным, хотя в философии и методологии науки он не имеет жестко фиксированного семантического смысла. Так, например, существование фрактального множества Мандельброта есть его свойство абсолютной природы, не зависящей от математика или компьютера, которые его исследуют, поэтому независимость от математика этого множества обеспечивает ему чисто платонистское существование.

С помощью фрактальных объектов природа «на языке математики» демонстрирует не просто значительно более высокую степень сложности, соответствующую современному уровню развития науки, а совсем другой уровень постнеклассической сложности. «Представление о структуре материи, – философски глубоко подмечает методолог математики Р.Г. Баранцев, – порождает альтернативу дискретность – непрерывность, отраженную в одной из антиномий Канта. После ряда колебаний она тоже пытается найти относительное успокоение в принципе дополнительности» [7]. В контексте триадного подхода к обоснованию математических теорий спекуляции о неожиданностях в сфере фракталов постепенно утихают, хотя обнаруженные эффекты не только нетривиальны, но и в определенной степени фундаментальны в современной теории познания. Когда появляется дополнительная мотивация в контексте новых философских подходов к обоснованию фрактальной геометрии, созданной для нужд естествознания и играющей ведущую роль в возрождении теории итераций, иногда удается отойти от шаблона, которому обычно следуют при изучении математики, и вернуться к новым математическим объектам с меньшей предубежденностью.

Фрактальная геометрия, занимающаяся изучением инвариантов группы самоаффинных преобразований, описывает весьма широкий класс природных явлений. Хотя физические модели трудно доводить до совершенства без математического инструментария, согласование дискретного с непрерывным можно инкорпорировать в систему физического знания через современные представления о самоорганизации. Считая фрактальность фундаментальным свойством, оппозицию дискретность – непрерывность, которая характеризуется также с помощью противоположностей главных линий философско-математического познания, а именно, арифметико-алгебраической и геометрико-топологической, можно переосмыслить в составе следующей математической триады, включающей функционально-аналитическое направление познания: дискретность – фрактальность – непрерывность. И дискретное, и непрерывное в составе триады – это математические модели, не исключающие, а дополняющие друг друга, так как обе они являются идеализациями, относящимися к гносеологии, постоянно пересекаясь и переплетаясь, порождая новые математические объекты. Логическая экспликация дополнительности в рассматриваемой триаде предполагает переход от дополнительности как отношения между линейными составляющими триады к дополнительности как отношению между высказываниями о сущности этих понятий.

Философская интерпретация дополнительности предполагает, что математические структуры действительности представляют собой сложную иерархию двухполюсных систем, подразделяющихся на дискретное – связное, случайное – необходимое, конечное – бесконечное и другие философские системы. Сложность понятия конечности состоит в том, что оно оказывается невыразимым на языке классической логики. А философская сущность понятия бесконечности, по мнению академика А.Д. Александрова, проявляется в следующем: «Бесконечность, не мыслимая как завершенная, мыслится как завершенная. Это и есть диалектика, есть переход в противоположность, изменение понятия вплоть до отождествления противоположностей, осознание полного отрицания как в некотором смысле “того же самого”, как отрицательное число есть тоже число» [8]. Пониманию этой проблемы может способствовать применение концепции дополнительности к некоторым реальным фактам логической природы рассуждений. Например, обоснование математики может потребовать различных точек зрения по поводу таких фундаментальных понятий математики, как число, множество и т.д., которые не поддаются однозначному описанию.

Ошибка классических программ обоснования математики состояла в том, что они стремились абсолютизировать какую-то одну систему достоверных положений обоснования, не учитывая дополнительный характер их взаимодействия. Поэтому основой единства современной математики должно стать не построение единого языка науки, а нахождение методологического сходства теоретико-познавательных ситуаций, требующих для своего анализа дополнительной системы понятий, которая способствовала бы устранению субъективных элементов и расширению объективного описания. Хотя важно также понять активную роль субъекта в генезисе математических структур. Математические структуры обладают к тому же той уникальной способностью, что будучи однажды сформулированными, они могут логически развиваться без дальнейшего обращения к действительному миру. Поэтому математика в таком контексте весьма эффективна, но ее выводы нуждаются в перепроверке, поскольку для разных методологических целей требуются разные приближения.

Однако становление новой тринитарной парадигмы, принимающей вид «неформализуемой целостности», сопряжено с серьезными философскими трудностями. Они связаны прежде всего с преодолением традиционного философского «бинаризма» и методологической редукции, когда все многообразие явлений сводится к какой-либо одной теоретической системе. Суть философско-методологического синтеза состоит также в том, что целостные свойства процедур обоснования современной математики реально проявляют себя не только во внешних взаимодействиях различных философско-методологических программ обоснования, имеющих интегральный характер, но и в том, что дополняются анализом внутренней дифференциации этих программ. Р. Пенроуз выделяет «три основных направления в современной математической философии: формализм, платонизм и интуиционизм» [9]. Немногие современные математики строго исповедуют «чистый формализм» или «чистый интуиционизм», но философско-методологический синтез направлений обоснования сводит различные математические теории в целостности и системы, сохраняя при этом математические основания исходных понятий и обеспечивая единство многообразия математического знания.

В качестве теоретического конструкта при решении проблемы обоснования математики можно использовать эвристический потенциал философско-методологического синтеза обосновательных подходов, учитывая, что такой синтез является в максимальной степени недедуктивным. Он основан на идее интеграции, которая характеризует тенденцию к соединению математических теорий в рамках целостной системы. Такой эпистемологический поворот заметен не только по отношению к программе обоснования, но и в философии математики в целом. Поскольку в философии современной математики выделяется три направления в обосновании, в качестве формулы системной триады обоснования можно рассмотреть, например, следующую совокупность современных концепций обоснования математики: формализм – платонизм – интуиционизм. Так как с точки зрения математической практики ни направление формализма, ни направление интуиционизма не является подлинно репрезентативным для обоснования математики, наиболее употребительный методологический подход при экспликации структуры обоснования всего комплекса математического знания – это вложение исследуемых структур в более богатую структуру с помощью «третьего», которое есть форма опосредования крайних позиций.

В заключение следует отметить, что в отношении современной философии математики существуют полярные точки зрения. С одной стороны, исходя из признания того, что пока «ничто из нее не работает», предпринимаются шаги по созданию новых направлений, пытающихся придать философии математики «новое дыхание». С другой стороны, как отмечает философ математики В.В. Целищев, имеет место полное отрицание любой философии математики, основанное на убеждении, что «философская оценка математической деятельности бесплодна: математическая деятельность не имеет в себе скрытого смысла, искомого философией, и сама философия неправильно следует в своих собственных стандартах строгости, на которых основывается философия математики, за этой самой математикой» [10]. Стоит заметить, что острота современных философско-математических дискуссий заметно снизилась, возможно, еще и потому, что сами работающие математики устали от бурной полемики, происходившей в первой половине XX в. и инициированной гёделевскими результатами, а новые противоречия, связанные с переусложненностью математики, остались за пределами этих обсуждений.

Несостоятельность предыдущих философских установок на обоснование математики говорит о том, что эта проблема нуждается сегодня в постановке на принципиально иной основе, а именно, на основе философского принципа системности, суть которого, в преломлении к проблеме обоснования в целом, раскрывается через понятия целостности, суммативности и единства, предполагающие определенный уровень самоорганизации подпрограмм обоснования. В таком контексте имеющиеся программы обоснования математики можно рассматривать в качестве предпосылочного знания для новых подходов в философии обоснования современной математики. Поэтому системный подход к обоснованию математики видоизменяет наши взгляды на проблему целостности обоснования. Если раньше целостные представления о программе обоснования складывались на основе внешних взаимодействий конкурирующих программ обоснования, то на современном этапе на основе системного подхода изучение целостности дополняется анализом, связанным с проникновением во внутреннее результирующее пересечение всех действующих программ обоснования математики. Современная математизация естественно-научного и гуманитарного знания также может рассматриваться как одна из форм реализации в неклассической науке положений системного подхода.

Различные современные методологии научного мышления посвоему тяготеют к рационализму. Их объединяет общая цель – строго придерживаться рационалистических принципов науки, хотя то, что, например, современная физика называет действительностью, – это не всегда действительность, а скорее, тот или иной миф о действительности. В работе «Ценность науки» А. Пуанкаре объясняет это с позиции философов так: «Вы можете подняться к вашему логическому идеалу, только порвав те связи, которые соединяют вас с реальностью. Ваша наука непогрешима, но она может оставаться такою, только замыкаясь в свою раковину и запрещая себе всякое сношение с внешним миром» [11]. Эксплицируя инструментальную ценность современной математики, постгеделевская философия математики сменила философско-мировоззренческие акценты в программе обоснования математики. В методологии обоснования математики наиболее востребованным становится системный подход в контексте критического рационализма, а последний в отличие от рационализма допускает существование неразрешимых математических проблем, на что реально указывает современная математическая практика.

Примечания

1. *Гуссерль Э.* Начало геометрии / Введение Ж. Деррида. – М.: Изд-во Ad Marginem, 1996. – С. 230.

2. *Блауберг И.В.* Проблема целостности и системный подход. – М.: Эдиториал УРСС, 1997. – С. 319.

3. *Перминов В.Я.* Философия и основания математики. – М.: Прогресс-Традиция, 2001. – С. 148.

4. *Коэн П.Дж.* Об основаниях теории множеств // Успехи математических наук. – 1974. – Т. 29, вып. 5. – С. 170.

5. *Петров Ю.П.* История и философия науки: Математика, вычислительная техника, информатика. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – С. 77.

6. *Кузнецов Б.Г.* История философии для физиков и математиков. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – С. 338.

7. *Баранцев Р.Г.* Становление тринитарного мышления. – Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – С. 52.

8. *Александров А.Д.* Математика и диалектика // Сибирский математический журнал. – 1970. – Т. 11, № 2. – С. 258.

9. *Пенроуз Р.* Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – С. 104.

10. *Целищев В.В.* Поиски новой философии математики // Философия науки. – 2001. – № 3. – С. 140.

11. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983. – С. 164.

Дата поступления 22.08.2012

Минский государственный высший
радиотехнический колледж, г. Минск
michailova_mshrc@mail.ru

Mikhailova, N.V. **The principle of systemicmode and philosophical and methodological synthesis of directions in foundation of mathematics**

The author attempts to give concrete expression to the philosophical principle of systemicmode by revealing the genesis of the main directions in foundation of mathematics, as well as to explicate insufficiency of methodological prerequisites of several programs of formalism and intuitionism in the increase of mathematical knowledge.

Keywords: the principle of systemicmode, foundation of mathematics, philosophical and methodological synthesis