УДК 51

ИДЕЯ "МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ" БРАУЭРА В ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Н. В. Михайлова
кандидат философских наук, доцент
Минский государственный высший радиотехнический колледж,
г. Минск, РБ

В статье анализируется идея "математической конструкции" Брауэра в интуиционистском существовании бесконечных математических объектов, которая не признает неконструктивные доказательства существования абстрактных объектов, существование актуальной бесконечности и некоторые законы классической математической логики.

Введение

Голландский философ и математик Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр положил начало новому направлению в математике – интуиционизму. Он подверг философскому сомнению неограниченную применимость в математических рассуждениях классических законов исключенного третьего, снятия двойного отрицания, корректность косвенного доказательства (доказательства от противного). Наиболее ясно и последовательно интуиционистские взгляды Лёйтзена Брауэра были сформулированы в его диссертации "Об основании математики", опубликованной в 1907 г. на голландском языке. А после завершения в 1918 г. работы с неожиданным для того времени названием "Обоснование теории множеств независимо от логического принципа исключенного третьего" в математике и логике окончательно сформировалось новое философское направление, которое называется "интуиционизм".

Основная часть

Главная методологическая идея интуиционистской точки зрения в философии математики была связана с идеей "математической конструкции", согласно которой существование математических сущностей и возможность их построения являлись для него синонимами. Эту идею можно, например, рассматривать как конечный результат развития той линии математического мышления, которая началась с Платона. Требования конструктивности математических объектов были связаны с попытками устранить из математики возможность противоречия, но Брауэр проявляет в этом направлении не только математический интерес, но и собственное чисто философское понимание проблемы обоснования математики. Кроме того, Брауэр разработал совершенно новый подход к обоснованию математического анализа и теории множеств. Его суть состояла в том, что, признавая "изначальную интуицию" натурального числа, в программе интуиционизма арифметику рассматривают как основу всей математики, хотя при этом отвергается представление о континууме в виде геометрического пространства как "интуитивно ясное", которое было характерно еще для древнегреческой математики. Отправляясь от понятия натурального числа, на основе интуиционистских представлений можно построить своеобразную математическую теорию.

Название "интуиционизм" в философии науки не всеми признается как удачное, поскольку оно ассоциируется с понятием "математической интуиции". С точки зрения математики, суть этого направления в философии математики состоит в другом. Вот как объясняет философско-математическую специфику интуиционистского направления в обосновании математики сам Лёйтзен Брауэр. Если цель формалистов базируется на "непреложной вере в волшебный характер языка", то интуиционизм "выдвигает на первый план существование чистой математики, независимой от языка, и на этой основе пытается доказать истинность математики, построенной до сих пор" [1, с. 257]. Брауэр исследует, насколько логические принципы, которые играли существенную роль в генезисе математики, могут быть применены для связи чисто математических построений, поэтому озабочен не обоснованием корректности математических процедур, а исследованием когнитивной деятельности мысли как таковой. Его методологический анализ направлен на обоснование основных математических понятий как производных от форм интеллектуальной деятельности. В таком контексте математика являлась для интуиционистов продуктом человеческого ума, описывающим математические утверждения не как абстрактную истину и ложь, а как специальные предложения о возможности выполнить некоторое "умственное построение".

Брауэр настаивал также на том, что для соответствующих конструктивных построений требуется применять особую интуиционистскую логику, в которой ни закон исключенного третьего, ни закон снятия двойного отрицания уже не могут претендовать на роль универсальных логических принципов. Хотя закон исключенного третьего критиковали и до Брауэра, именно он предположил, что безграничное применение этого логического принципа способствовало появлению парадоксов теории множеств. Принцип исключенного третьего в интуиционистской математике не является верным, но если он применяется только для конечных совокупностей свойств, то он тогда допустим. Поэтому Брауэр ограничивал его применение только конечными множествами и, принимая лишь абстракцию потенциальной бесконечности, ограничивался рассмотрением "конструктивных" математических объектов, требующих иной логики, связанной с проверкой возможности реализации таких объектов, либо установления, что такой реализации не существует. Следует упомянуть, органически присущий интуиционизму, конвенционализм французского математика Анри Пуанкаре, согласно которому в основе математических теорий лежат условные соглашения или конвенции, то есть системы идей, свободные от противоречий. Разработанное им учение о математической интуиции было одним из основных источников возникновения интуиционизма, поэтому конвенционализм можно рассматривать как направление, близкое к интуиционизму, точнее как ранний интуиционизм. Брауэр даже охарактеризовал Пуанкаре как одного из основных создателей "предынтуиционистской", или "полуинтуиционистской", школы.

В философии классической математики понятия "утверждения" и "отрицания" дополняют друг друга, в том смысле, что отрицание истины есть ложь, а отрицание лжи есть истина, в результате чего двойное отрицание возвращало все на исходную позицию. Даже при конструктивном определении математического существования такая симметрия могла быть сохранена, если бы отрицание было бы определено как невозможность построения. Однако, по Брауэру, отрицание – это по существу доказательство абсурдности самого предположения о возможности существования этого объекта. Это принципиально "неклассический" подход, по отношению к классической дихотомии истинности и ложности. Зададимся вопросом: нуждается ли современная математика в опровержении закона исключенного третьего? Все аргументы Брауэра относительно некоторых законов классической логики прямо или косвенно связаны с его строгим критерием приемлемости математических суждений, который он интерпретировал в свойстве интуитивной ясности исходных математических объектов и в конструктивном введении производных от них объектов. В контексте интуиционистской логики проблема конструктивности сводится к пониманию утверждения и его отрицания с точки зрения логики математического мышления и, в итоге, к философско-методологической проблеме назначения и сущности математики. Анализируя этот вопрос, философ математики В.Я. Перминов пришел к выводу, что "требование содержательности не проистекает из функции математики и не может определять логику математического мышления" [2, с. 206]. В философско-математической литературе хорошо исследована гипотеза Брауэра о законе исключенного третьего как источнике парадоксов в теории множеств. В защиту подхода Брауэра заметим, что закон исключенного третьего экстраполирован на бесконечные совокупности, исходя из его понимания в конечных ситуациях, а многие свойства конечных множеств не выполняются для бесконечных множеств, хотя бы такое, что всякая собственная часть меньше целого. Кроме того, применение закона исключенного третьего к конечным множествам с большим числом элементов может привести к неконструктивным доказательствам существования.

Интуиционистское понимание доказательства истинности математического суждения всегда предполагает, что можно извлечь способ построения математических объектов, существование которых утверждается. Рассмотрим, например, не удовлетворяющее интуиционистским канонам доказательство того, что существуют два иррациональных действительных числа a и b такие, что a^b рационально. Используя доказательство от противного, древние греки сумели доказать, что число $\sqrt{2}$ не представимо в виде обыкновенной дроби. Раннее все числа, с которыми люди имели дело, были представимы как целые числа или обыкновенные дроби, но иррациональные числа игнорировали традиционное представление чисел. Не существует иного способа описать число, равное корню из 2, как записать его в виде $\sqrt{2}$. Любая попытка записать $\sqrt{2}$ не позволяет получить ничего, кроме приближения, например, такого, как 1,414213562373… С точки зрения математики, но не здравого смысла, довольно тривиально утверждение о том, что произведение двух иррациональных чисел может быть равно рациональному числу. Действительно, $\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2$, хотя доказательство того, что иррациональное число в иррациональной степени тоже может быть рациональным числом уже не столь явно математически конструктивно. Искомое доказательство использует разбор случаев. Пусть $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – рациональное число, тогда $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ и искомая пара иррациональных чисел была бы найдена. Пусть теперь $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – иррациональное число, тогда $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$, то есть тогда его степень $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ – рациональное число. Это короткое, но неэффективное рассуждение “чистого существования”, которое характерно для классической математики.

Другое доказательство, позволяющее исключить неэффективный разбор случаев, несравненно сложнее, поскольку использует глубокий результат советского математика А.О. Гельфонда, что из иррациональности $\sqrt{2}$ следует трансцендентность и, следовательно, иррациональность $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Его основное отличие в том, что “если утверждается существование конструкции, то предполагается, что онтологически имеется потенциально осуществимый процесс построения этой конструкции” [3, с. 15]. Приведенный в этом примере способ доказательства – разбор случаев – был известен уже в XIX веке, хотя в то время еще было неизвестно, является ли число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рациональным. Только в 30-е гг. XX в. было дано довольно сложное доказательство того, что это число иррационально. В рассмотренных примерах мы по существу не пользовались никакой математической техникой. На первый взгляд, более простой следующий вопрос: является ли число $2^{\sqrt{2}}$ рациональным или иррациональным? Он известен под названием “7-й проблемы Гильберта”. Хотя она была поставлена Давидом Гильбертом в более общем виде, сам он считал, вопрос о числе $2^{\sqrt{2}}$ в этой проблеме является наиболее показательным. Ответ на этот вопрос удалось найти не сразу, а лишь спустя три десятка лет, еще при жизни Давида Гильберта, русскому математику Р.О. Кузьмину. Он доказал иррациональность числа $2^{\sqrt{2}}$. Заметим, что непонимание математики происходит иногда от того, что в ней пытаются найти что-то сверхъестественное, а надо искать именно естественное, не только вне себя, а что-то и в себе, чего мы, несмотря на естественность математики, не понимаем. Кроме того, нестандартные примеры не только стимулируют творческую активность, но и дают нам прочувствовать сущность математического знания.

Как правило, математическое рассуждение осуществляется в следующих двух формах: во-первых, как основанное на интуитивно ясной конструкции объекта, а во-вторых, как вывод из принятых посылок, посредством некоторого набора логических принципов. Для философии математики Брауэра первичной является первая форма. Но тогда, если конструктивность математических объектов признается им в качестве необходимого свойства, то закон исключенного третьего не имеет универсальной значимости для математических рассуждений, так как он требует признания существования математических объектов, недопустимых с точки зрения конструктивного анализа. Например, числовое множество считается заданным, если на основании его определения относительно каждого числа можно определенным образом установить, принадлежит оно этому множеству или нет. Проблема состоит в том, что вопрос о принадлежности элемента к бесконечному множеству не может быть решен как в случае конечного множества, когда гипотетически в этом случае достаточно перебрать его элементы один за другим. Но гораздо труднее дать ответ на следующий вопрос: существует ли в бесконечном множестве, например во множестве рациональных чисел, подмножество, удовлетворяющее некоторым заданным условиям? Ведь математики по существу оперируют с множествами, которые заданы с помощью каких-то характерных для элементов этого множества свойств.

Вероятно, трудность состоит в том, что в основе использования в современной математике актуальной бесконечности лежит концепция экзистенциальности, которая иногда обуславливает указанную неэффективность математических методов, когда существование некоторого математического объекта устанавливается не при помощи последовательного применения какой-либо конструкции к более простым объектам, а апелляцией к его логической неизбежности. Вопрос "Правомерен ли такой подход к существованию математического объекта?" остается без надлежащей философской рефлексии, поскольку сам предмет исследования довольно сложен. Подытоживая, выдающийся немецкий математик, сторонник интуиционизма Герман Вейль сказал: "Теория множеств откидывает все эти идеалистические сомнения, связанные с размышлениями о том, как множества могут быть задаваемы по самому своему смыслу; она убеждена в том, что ответ на вопрос: "существует или не существует?" в применении к бесконечному множеству элементов или подмножеств кроется при любых условиях в некотором существующем само по себе фактическом обстоянии, хотя бы нашему разуму удавалось лишь благодаря счастливому случаю набрести на математический метод, позволяющий найти и высказать этот, до того сокровенный ответ" [4, с. 15]. Такая точка зрения на "абсолютистскую концепцию существования" хорошо коррелирует с аналогичными убеждениями, согласно которым в процессах внешнего мира не заключается никакой неопределенности, несмотря на то, что наша врожденная интуиция лишь приближенно различает качества и не в состоянии разделить их одни от других абсолютно точно.

Мотивы, которые побуждали математиков принимать некоторые положения интуиционистской, а затем и развивающей ее конструктивистской программы обоснования математики, носили и чисто математический, и философский характер. Они вытекали из размышлений о роли интуиции в математическом познании вообще. Согласно интуиционизму, математическое высказывание должно быть утверждением о выполнении некоторого построения, которое должно быть ясным само по себе, чтобы не нуждаться ни в каких обоснованиях. В интуиционистской программе можно выделить негативный и позитивный аспекты: первый состоит в отрицании существования некоторых понятий теоретико-множественной математики, а второй – в разработке конструктивных аспектов математики. Философский вопрос об экзистенциальных математических высказываниях, то есть о высказываниях, которые утверждают существование математических объектов, представляет интерес не только в связи с проблемами, поднятыми в программе обоснования Брауэра. С такой же остротой он стоит и в физических теориях. Так, понятие "формального существования элементарных частиц" приобретает смысл в рамках теоретической системы или, как принято сейчас говорить, парадигмы, используемой для описания природы. Безусловно, тезис Брауэра "существовать – значит быть построенным" потенциально произвел огромное впечатление на его современников. Из этого радикального тезиса о доказательстве экзистенциального высказывания вытекают различные ограничения, налагаемые интуиционизмом на допустимые методы математики.

Для новой философской идеи "математической конструкции", осознанной Брауэром, в философии науки его времени не были выработаны механизмы концептуализации в виде точного понятия алгоритма, то он предпочел ссылаться на интуицию как инструмент познания. В соответствии с таким подходом к обоснованию математики, использующей в математическом анализе чистые теоремы существования, он дал ему название "интуиционизм", хотя, подчеркивая процессуальную роль конструкции, использовал также название "конструктивизм", видя в требовании конструктивности математических объектов способ их непротиворечивого существования. Философ математики В.Н. Тростников утверждает, что "здание анализа не может стать логически прочным, если не узаконить "декретивным образом", т. е. взять в качестве постулата одно из следующих шести эквивалентных утверждений, относящихся к свойствам действительных чисел: 1. Лемма Гейне–Бореля. 2. Теорема Больцано–Вейерштрасса. 3. Аксиома дедекиндова сечения. 4. Критерий Коши. 5. Лемма Кантора. 6. Теорема о монотонной возрастающей последовательности. Чтобы построить наиболее естественный вариант анализа, нужно взять за аксиому то утверждение, которое ближе всего соответствует нашему интуитивному представлению о действительных числах" [5, с. 18]. Интуиционисты исключают из математической практики чистые теоремы существования. Но ценность доказательства чистого существования состоит в том, что благодаря ему исключаются отдельные лишние построения. Поэтому отказ от экзистенциальности усложняет некоторые способы аргументации и рассуждений в современной математике.

Критика обоснования классической математики представляет собой основу последовательного проведения позитивной программы Брауэра. Отличие конструктивизма от интуиционизма состоит в том, что конструктивная математика не разделяет интуиционистское убеждение в первоначальном характере математической интуиции, считая, что сама эта интуиция формируется под влиянием деятельности человека, кроме того, в ее основе лежит формализованное понятие алгоритма. В конструктивистском направлении интуиционизма Брауэра исследуется конструктивная часть математики в отвлечении от неконструктивных разделов. Следует подчеркнуть, что термин "конструктивный" в обоснованной или необоснованной математике, часто используется неформальным образом, так как его уточнение не является простым делом, в силу открытости этого понятия. Тем не менее, до сих пор многие философы предпочитают употреблять первое название, интуиционизм, так как оно отводит ведущую философско-методологическую роль понятию математической истины и проблеме обоснования математики, а не только задачам математики и конструктивным способам их решения.

Понимание конструктивности в современной математике предполагает, во-первых, использование абстракции потенциальной бесконечности, а, во-вторых, рассмотрение в математике исключительно конструктивных объектов. Речь идет о конструктивном понимании математических объектов, как возможности их построения, которое исторически традиционно для математического мышления многих ученых, начиная с античности. Говоря о математике прошлого столетия, философ математики М.И. Панов подчеркнул: "Интуиционисты в XX в. были первыми, кто ввел требование конструктивного характера математических объектов. Они также первыми в нашем столетии реализовали это требование на практике, построив интуиционистскую математику. Но было бы неверным считать интуиционистов «первооткрывателями» конструктивности" [6, с. 92]. Так, например, эмпирическая математика "догреческого периода" была по своей сути конструктивной, так как она занималась способами построений математических объектов, выдавая практические способы действий с ними. В настоящее время в связи с развитием компьютерной математики и компьютерных доказательств, аргументы о некоторых необоснованных запретах интуиционизма, препятствующих получению новых результатов в современной математике, во многом сняты. Тем не менее, сравнительная громоздкость конструктивных теорий сдерживает пока внедрение интуиционистской техники в математику. Кроме того, для математиков-прикладников, использующих в доказательствах компьютеры, важна не потенциальная, а фактическая осуществимость.

Современную ориентацию не только на методологическое совершенство математических теорий, но и на практику их применений можно проследить, сравнивая две крупнейшие дискуссии прошлого века. Во-первых, между немецким физиком Альбертом Эйнштейном и датским физиком Нильсом Бором по вопросам квантовой механики и, во-вторых, между немецким математиком Давидом Гильбертом и голландским математиком Лёйтзеном Брауэром по вопросам обоснования математики. В ходе создания квантовой механики возникло несколько конкурирующих программ ее осмысления и обоснования, которые физики, а затем и философы физики назвали интерпретациями, соответственно "эйнштейновской" и "копенгагенской". Такая же ситуация, возникшая в математике, есть определенная аналогия дискуссии Эйнштейна–Бора с дискуссией Гильберта–Брауэра, порожденная теорией бесконечных множеств Кантора, наиболее отличительным признаком которых является их мощность. Для сторонников интуиционистского направления, в отличие от формалистского направления, важнейшим критерием является интуитивная ясность определений математических объектов и интуитивная ясность законов логики. В связи с этим заметим, что в философии математики можно выделить два направления. Согласно одному из них, философская точка зрения является следствием занятий основаниями математики, а согласно другому, философские поиски в математике сами по себе не менее важны, чем математические основания.

Заключение

Не ставя перед собой трудно разрешимую задачу экспликации всего философско-теоретического ядра методологических программ формализма и интуиционизма в плане критического анализа контекста их дополнительности, необходимо все же зафиксировать наличие таких направлений обоснования в современной философии математике. Идейный раскол в среде философов математики выявил, с одной стороны, проблему неполноты программы формализации математических теорий, а с другой – наличие элементов субъективизма в основаниях математики. Но в различных работах по философии математики проанализировано, какие понятия, утверждения и методы доказательств могут быть приняты как не внушающие опасения в рамках указанных программ обоснования математики. Противоборствующие стороны, прежде всего сторонники программ Гильберта и Брауэра, не нашли веских доводов в обосновании предлагаемых ими изменений математических принципов. Сам Лёйтзен Брауэр говорил: "Для того чтобы разобраться в развитии существующих в этой области противостоящих друг другу теорий, необходимо сначала достигнуть ясного понимания относительно понятия "наука", поскольку именно как ее часть математика изначально и возникает в человеческой мысли (культуре)" [7, с. 149]. Хотя не только математики, но и ученые естественных и технических наук считают математику наиболее объективной наукой, изучающей предельно строгие преобразования произвольных абстрактных объектов, их свойств и связей с действительностью.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Брауэр, Л. Э. Я.*** Математика, наука и язык / Л. Э. Я. Брауэр // Вестник Российского государственного гуманитарного университета. – 2010. – № 13. – С. 249–258.
2. ***Перминов, В. Я.*** Об аргументах Брауэра против закона исключенного третьего / В. Я. Перминов // Бесконечное в математике: философские и исторические аспекты. – М. : Янус-К, 1997. – С. 199–221.
3. ***Драгалин, А. Г.*** Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств / А. Г. Драгалин. – М. : Наука, 1979. – 256 с.
4. ***Вейль, Г.*** О философии математики / Герман Вейль. – 2-е изд., стереотипное. – М. : КомКнига, 2005. – 128 с.
5. ***Тростников, В. Н.*** Конструктивные процессы в математике (философский аспект) / В. Н. Тростников. – М. : Наука, 1975. – 255 с.
6. ***Панов, М. И.*** Можно ли считать Л. Э. Я. Брауэра основателем конструктивной философии математики? / М. И. Панов // Методологический анализ математических теорий. – М. : АН СССР, 1987. – С. 77–119.
7. ***Брауэр, Л. Э. Я.*** Интуиционизм и формализм / Л. Э. Я. Брауэр // Метафизика. Век XXI. Альманах. Вып. 4: метафизика и математика. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – С. 149–161.

Поступила в редакцию 22.12.2014 г.
Контакты: e-mail: michailova_mshrc@mail.ru (Михайлова Наталия Викторовна)

Summary

The article analyses Brouwer's idea of "mathematical structure" in intuitionistic existence of infinite mathematical objects that rejects the non-constructive proof of the existence of abstract objects, the existence of actual infinity and some laws of classical mathematical logic.