DOI: 10.15643/libartrus-2015.6.12

Программа формализма Гильберта как работающее философское направление обоснования математики

© Н. В. Михайлова

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Беларусь, 220013, г. Минск, ул. Петруся Бровки, 6.

Email: michailova_mshrc@mail.ru

В работе предложен философско-методологический анализ программы формализма Гильберта как реально работающего направления обоснования современной математики. Для профессиональных математиков методологические преимущества программы формализма, выдвинутой Давидом Гильбертом, состоят прежде всего в том, что в ней был практически репрезентирован максимально возможный уровень теоретической строгости современных математических теорий. Для разрешения принципиальных трудностей проблемы обоснования математики необходима, согласно Гильберту, теория математического доказательства, хотя вопреки широко распространенному мнению жесткая формализация доказательства все же не является синонимом надежности и строгости математических рассуждений с точки зрения философии обоснования математики. В действительности, согласованность теорий «важнее» их логической непротиворечивости, так как не всякое утверждение, не противоречащее обоснованным, может быть отнесено к истинным высказываниям. Но для работающих математиков Гильберт логичен и последователен, а аксиоматический метод и формализм являются существенной частью их правил мышления.

Ключевые слова: *философия математики, проблема обоснования современной математики, программа формализма.*

1. Введение

В начале двадцатого века, после рождения квантовой механики, казалось, что физики знают о мире так много, что места для веры в научной картине мира уже не осталось. Сегодня для нас очевидна преждевременность этого философского заключения, но тогда практически одновременно в философии науки снова появился интерес к проблеме о том, что же представляют собой геометрические нематериальные образы, которые с «непреодолимой силой» облекают собой материальный мир. Если рассматривать «геометрию как математику», то возникает философско-методологический вопрос: каким способом можно охватить всю систему формально-логических зависимостей геометрии, а не только выделять их на отдельных примерах. Ответ на этот вопрос дает аксиоматическое построение геометрии. В конце девятнадцатого века гениальный немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943) в фундаментальном труде «Основания геометрии», первое издание которого появилось в 1899 году, продемонстрировал математикам сущность и возможности аксиоматического метода, способного, его по замыслу, объединить всю математику. В последующих изданиях своей книги автор вносил некоторые исправления и уточнения в исходную аксиоматику, которые вместе с тем существенно не изменяли ее характера. Следует особо подчеркнуть, что творчество Гильберта охватывало по существу всю математику, потому он был в своем роде математиком-универсалом. В круг его математических интересов входили не только основания геометрии, но и теория инвариантов, теория алгебраических чисел, проблемы вариационного исчисления, теория интегральных уравнений, математическая физика и логические основы математики. Впервые систематическое математическое изложение основ геометрии в том виде, в каком она сложилась в античную эпоху в период ее формирования в течение примерно трех веков развития математики в древнегреческой культуре, было представлено Евклидом. С того времени евклидовы «Начала» получили статус канонического образца строгого научного математического стиля изложения, что не давало повода для их пересмотра.

2. Проблема обоснования в философии математики

Древнегреческие математики представляли геометрию как дедуктивную науку, основанную на логических выводах из небольшого количества однажды установленных аксиом. Такой программы придерживались и Евклид, и Гильберт, хотя список аксиом Евклида был далеко неполным, а у Гильберта он уже полон, и в его рассуждениях нет логических пробелов. Необходимо также подчеркнуть, что в «Началах» Евклида еще не было полноценной фактической реализации принципиальной аксиоматической установки в современной математической интерпретации этого слова, но в них была изначально заложена мощная методологическая тенденция движения в этом направлении, которая и продолжала математически развиваться в дальнейшем. Поэтому доподлинно не известно, какие именно аксиомы и постулаты принадлежат Евклиду, а какие были добавлены впоследствии в работах его многочисленных комментаторов. Кроме того, философ и историк математики А. В. Родин обращает внимание на следующее философское обстоятельство: «…Евклид нам не представляет полных самообоснований математики…» [1, с. 14]. Именно в «Основаниях геометрии» Гильберт сформулировал полную систему аксиом евклидовой геометрии, классифицировал их по группам, стараясь определить пределы методологических возможностей каждой из групп аксиом, изучая для этого не только следствия каждой из них изолированно, но «различные геометрии», которые могут быть получены при исключении некоторых из этих аксиом. В первое десятилетие после опубликования «Оснований геометрии» в аксиоматику, разработанную Гильбертом, были внесены дополнительные исправления, касающиеся аксиом инцидентности, но затем гильбертовская аксиоматика уже сохраняется в неизменном виде, поскольку ни одна из аксиом не считается лишней, и никто из математиков не ставит под сомнение их достаточность для геометрической теории.

Для дальнейшего развития математики очень важным оказался методологический вывод о том, что логико-аксиоматическое развитие геометрии может реализовываться независимо от наглядных представлений, заимствованных из опыта. В связи с этим следует отметить заслуги Давида Гильберта в области аксиоматического построения геометрии. Разница во взглядах Евклида и Гильберта состоит в том, что Евклид пытался дать описательное определение основных геометрических объектов. Гильберт же отказался от такого методологического подхода, поскольку считал, что все, что требуется знать о них, уже содержится в аксиомах, как неявных или неполных определениях. Евклид утверждал, что аксиомы должны быть очевидными в рассматриваемом им реальном физическом пространстве, а Гильберт предполагал, что очевидность и истинность аксиом несущественны, поскольку они служат предположениями, из которых затем логически выводятся следствия. По мнению математика и философа математики Германа Вейля: «Гильберт – страстный поборник аксиоматического подхода. Он считал, что этот подход имеет универсальное значение не только для математики, но и для всех наук» [2, с. 511]. Но при построении геометрии на аксиоматической основе естественно пытаться делать это по возможности экономно, чтобы прояснять методологическую роль различных групп аксиом. Математики уже сталкивались с подобной философско-методологической проблемой, когда длительное неприятие неевклидовых геометрий было обусловлено не наличием математических ошибок, а сложившимися философскими представлениями. Следование с должной строгостью законам современного математического языка делает математическую теорию более отчетливой и позволяет, в известном смысле, сформулировать «невыразимое», а также «поймать в сети языка» ускользающую сущность некоторых объектов математического мира. Дополнительная сторона этой замечательной возможности чисто психологического толка, поскольку мысль, опередившую свое формальное воплощение в духе совершенной точности современных доказательств, работающие математики в настоящее время всерьез не рассматривают.

Согласно формалистской точке зрения, разрабатываемой в духе философских воззрений Гильберта, математику можно рассматривать как чисто «формальную игру» с единственным требованием, чтобы она не приводила ни к какому противоречию. Однако для полного описания «формальной игры» потребовалось уточнить правила математической логики, после чего математики, специализировавшиеся на проблемах обоснования математики, занялись доказательством непротиворечивости различных аксиом. Когда Гильберта обвиняли в стремлении свести математику к «игре», он указывал, в частности, на то, что введение идеальных элементов для достижения полноты является общим методом для всех областей математики. Вспомним, что еще Платон пришел к выводу о необходимости обоснования математического знания, которое понималось им как проблема обоснования исходных посылок математических выводов и как проблема правильности этих выводов. Слово «обоснование» довольно часто употребляется в научном лексиконе. В современной литературе по философии и методологии науки используются различные способы и методы обоснования, например, доказательство, опровержение, подтверждение, объяснение, интерпретация, оправдание. Можно также привести следующее философское определение, согласно которому, обоснование научной теории – это «способ рациональной аргументации» в пользу истинности теории. Отметим, что словосочетание «обоснование математики» звучит иногда, возможно, парадоксально, так как математика всегда считалась эталоном достоверности научного познания.

Но, начиная с XVII века, проблема обоснования научного знания становится центральной и получает название «эпистемологического поворота». Но необходимо прояснить, что понимается под словосочетанием «обоснование математики». В философской литературе содержание категории «обоснование» традиционно сопрягается с содержанием категории «основа», или «основание», как целостной сущности, которую составляет основание в концептуальном плане. Продолжавшиеся в течение первых десятилетий XX века дискуссии по обоснованию математики не привели к решению ни одной из обсуждавшихся философских проблем. В такой ситуации обоснованием математики можно также считать любую деятельность, направленную на объяснение оснований таких свойств математического познания, как достоверность, строгость и необходимость. Важность такой философской работы становится понятной, если учесть изменившийся характер взаимоотношений между формированием математической теории и практической проверкой построенной теории. К началу XX века философия математики заявила себя как область, имеющая значение для математических проблем. К числу важнейших философских проблем математики относится ее обоснование, где эта проблема разрешается в виде методологической процедуры рефлексии оснований и принципов математической теории. С точки зрения эпистемологии следует разделять оправдание математики через ее использование и обоснование. В этом одно из существенных отличий математики от других наук, в том смысле, что вопрос о ее обосновании не может быть решен только на аргументах опыта. Основная методологическая и философская трудность заключена в отсутствии однозначного восприятия самого понятия «обоснование», а также в разногласиях по поводу допустимых логик. Например, аксиомы, положенные Эрнестом Цермело в основание своей системы, содержат некоторые содержательные предложения, принимая которые, мы переходим в область проблематичного, опирающуюся на мнения различных людей.

Пытаясь вернуть математике абсолютно достоверный характер, Давид Гильберт выбрал нестандартный путь для решения проблемы обоснования. В докладе «Проблемы обоснования математики», прочитанном на Международном математическом конгрессе в Болонье 3-го сентября 1928 года, Давид Гильберт сказал: «С помощью этого нового обоснования математики, которое справедливо может быть названо теорией доказательства, я надеюсь с вопросами обоснования математики, как таковыми, покончить тем, что каждое математическое высказывание я превращу в конкретно предъявляемую и строго выводимую формулу и тем самым перемещу весь комплекс вопросов в область чистой математики» [3, с. 450]. Программа перестройки оснований современной математики, предложенная Гильбертом, состояла из двух дополняющих друг друга задач. Решение одной из них предполагало довести до конца процесс аксиоматизации математики, точнее представить существующую математику в виде формальной теории, на основе «очищенной» от парадоксов теории множеств. Таким образом, впервые была поставлена задача формализации классической математики с помощью уточнения понятия математического языка и логического вывода. Другая задача представляла собой радикально новое в то время предприятие, а именно, доказать непротиворечивость полученной всеобъемлющей теории. Методологически строго проблема обоснования математики была сформулирована Давидом Гильбертом как проблема обоснования непротиворечивости математических теорий.

Его понимание обоснования математики, интерпретируемой как совокупность абстрактных структур, сводилось к философской задаче обоснования надежности доказательных утверждений и установлению непротиворечивости ее теорий. Пересекаясь хотя бы частично с областью интуитивной математики, нельзя говорить об абсолютном доказательстве непротиворечивости математики. Каждая из задач, взятая в отдельности, недостаточна для решения проблемы обоснования математики, предложенной Гильбертом. Сам Гильберт понял, что только решение до конца первой задачи делает осмысленной постановку второй. Особый интерес для философов в обосновании математического знания в программе Гильберта представляют не формализация и доказательство непротиворечивости, на чем обычно ставится акцент, а обоснование вводимых идеализаций и «идеальных элементов» математической теории. Идеальные объекты необходимы для эффективности нашего мышления, поэтому возникает необходимость хотя бы в принципе обосновать их устранимость из выводов реальных утверждений, даже невзирая на увеличивающуюся сложность получающихся преобразований. Математическим примером идеальных элементов служат мнимые величины, используемые для придания простого вида теореме о существовании корней уравнения. Введением идеальных элементов, например, бесконечно удаленных точек и одной бесконечно удаленной прямой, можно добиться, чтобы теорема о том, что две прямые, в том числе и параллельные, всегда пересекаются в одной и только одной точке, была справедлива во всех случаях.

3. Программа формализма обоснования математики

Величайшая заслуга Давида Гильберта состоит в том, что он впервые попытался определить общий вид математического утверждения, поддающегося математическому доказательству. Он уловил философскую суть проблемы, положив в основу своих построений «абсолютных» доказательств непротиворечивости различие между формальным исчислением и его описанием. Строго говоря, он поставил общую философско-методологическую задачу развития специального метода, позволяющего проводить доказательства непротиворечивости с той же степенью убедительности, что и доказательства, использующие конечное число структурных свойств выражений в полностью формализованных исчислениях. Благодаря работам самих математиков была понята простая истина, что математика определяется не предметом, а методом, поскольку может иметь дело с любым явлением, которое поддается дедуктивному анализу. Когда было философски осознано, что само представление о том, будто математическая теория строится только на одних аксиомах, вообще говоря, неверно, в силу того, что она строится еще посредством строгих логических рассуждений, то математический идеал аксиоматического метода в его теоретико-множественной реализации стал постепенно методологически размываться. Именно Давид Гильберт взялся восстановить «прежнюю добрую славу» строгости математики, как будто потерянную ею под ударами открывшихся парадоксов теории множеств, которые поставили под сомнение ценность всех теоретико-множественных построений.

Раскрывая философский замысел гильбертовской программы, Герман Вейль поясняет: «Но для того, чтобы получить доказательство непротиворечивости, Гильберт должен прежде всего „формализовать“ математику. Подобно тому как в системе геометрических аксиом не играет никакой роли реальный смысл в действительном пространстве понятий „точка“, „плоскость“, „между“ и т. д. и все внимание сосредоточивается на логической связи геометрических понятий и теорем, так и здесь, только еще более решительным образом, должно быть изгнано какое бы то ни было, хотя бы чисто логическое значение понятий» [4, с. 27]. Суть подхода Гильберта состояла в том, что классическую математику, использующую абстракцию актуальной бесконечности, нужно формализовать. С этой точки зрения, программа Гильберта наиболее известная разновидность формализма, хотя, в отличие от мнения большинства, это не единственный вид его реализации. Но именно формализм оспаривает у платонизма звание любимой математиками философии, поскольку претендует по сути на философское разрешение математических проблем. Гильберт как основоположник программы формализма существенно опирался в процессе обоснования на метод формализации содержательной математики, поскольку одной из наиболее заметных особенностей современной математики является тенденция к более высокой степени абстракции математических теорий и языка теории множеств. В таком контексте формализм Гильберта можно интерпретировать как своеобразную «натурализованную эпистемологию» для математики. И хотя в программе Гильберта современная математика рассматривается как «формальная игра», доставляющая беспокойство лишь своей непротиворечивостью, такой подход к обоснованию математики следует из убеждений, основанных на благих намерениях.

В представленном контексте проблема обоснования математики сводится к философскому анализу следующих двух вопросов: обоснованию строгости или законченности математических доказательств и обоснованию непротиворечивости математических теорий, гарантирующих надежность содержательных теорий, которые составляют фундамент математического знания. Слово «формализм» по разным причинам приобрело устойчивый «отрицательный привкус», благодаря чему само его звучание вызывало предвзятое отношение. Сейчас уже не время обсуждать, удачно ли был выбран термин, важно понять существо выдвинутой Гильбертом программы. Ее философская суть состоит в том, что можно пренебрегать смысловыми значениями математических выражений, рассматривая их строками символов некоторой формальной системы. Но при таком подходе к обоснованию математики возникает постоянная необходимость подтверждения надежности математических теорий на новых более высоких уровнях строгости. Критерий непротиворечивости, несмотря на его существенную роль в аксиоматических системах как формального, так и содержательного характера, является таким же вспомогательным логическим критерием, как и доказуемость. В частности, чем более востребована математическая теория, тем больше имеется оснований предполагать ее защищенность от противоречий. Идея программы обоснования Гильберта состояла также в нахождении аксиом и правил вывода, обеспечивающих полноту теории. Для этого Гильберт разделил математику на реальную и идеальную части, например, отнеся логику к идеальной части. Но поскольку математика состоит из суждений и утверждений, которые и составляют ее подлинное знание, то идеальные элементы и формальные структуры не дают исчерпывающего описания специфики тех или иных математических отношений. Для этого необходимо было дополнить описание этих отношений различными содержательными характеристиками, под которыми понимается все то, что доступно интуиции или прямо выводимо из нее.

Хотя традиционно в философии математики методологическое направление Давида Гильберта в обосновании математики принято называть формалистским, в действительности программа с названием «теория доказательств» лучше отражает мировоззренческие взгляды Гильберта и его последователей как основное направление обоснования современной математики, чем просто формалистическое понимание математического знания. С помощью нового обоснования математики, которое Гильберт называл теорией доказательства, он надеялся каждое математическое высказывание превратить в конкретную строго выводимую формулу и тем самым «переместить весь комплекс вопросов» в область чистой математики. Для полного разрешения принципиальных трудностей была необходима теория математического доказательства, как вполне обоснованно считал сам Гильберт. В связи с этим заметим, что вопреки широко распространенному мнению жесткая формализация доказательства все же не является синонимом надежности и строгости математических рассуждений с точки зрения обоснования математики. Отметим, что философ математики Л. Б. Султанова тоже считает, что повышение уровня строгости в математике не всегда ведет к повышению надежности, и в своей монографии «Неявное знание в развитии математики» проводит «историко-математический анализ развития взаимосвязей надежности и строгости как основных характеристик математического знания» [5, с. 160]. Давид Гильберт выдвинул также важное методологическое требование, а именно предложил обосновывать математику на базе эпистемологически прочного фундамента финитизма, тем самым сознательно ограничив круг средств, которые он считал допустимыми и надежными, то есть в его теории доказательств разрешалось применять только так называемые «финитные», или конечные, методы. Хотя Гильберт все же не обозначил точно совокупность финитных рассуждений, он, по-видимому, надеялся на умение математиков непосредственно узнавать, финитно имеющееся рассуждение или нет.

Так что же такое «финитные» средства в математике? Это такой аппарат, который не содержит элементов, апеллирующих к канторовской идее бесконечных множеств, которые мыслятся как «актуальные» или законченные образования. Программа обоснования математики Гильберта состояла в сведении всей математики к арифметике Пеано, а смысл этой процедуры состоял в том, чтобы после формализации последней использовать полученную формализацию в доказательстве ее непротиворечивости финитным образом. «Целью программы Гильберта было окончательное решение всех проблем в основаниях с помощью чисто математических средств. В действительности ее цель была скромнее, чем принято было считать, из-за неявного предположения о том, что „реальны" лишь те задачи в основаниях, которые связаны с доказательствами финитистских теорем. При этом, чтобы соответствовать своей философской установке, нельзя сужать класс финитных рассуждений, требуя от последних не только самоочевидности, но и других дополнительных свойств» [6, с. 61]. К финитным высказываниям, считал он, мы должны присоединить идеальные высказывания, чтобы сохранить простую форму законов обычной аристотелевской логики. Говоря о программе Гильберта, следует иметь в виду, что она осмысленна в ситуациях, когда она может быть реализована. Используя терминологию Гильберта, математики и философы науки «верят» в обоснование. Можно даже предположить, что согласованность теорий «важнее» их логической непротиворечивости, так как не всякое высказывание, не противоречащее обоснованным, должно быть отнесено к истинным высказываниям. Для профессиональных математиков Гильберт логичен, последователен и ясен, поскольку аксиоматический метод и формализм являются существенной частью их правил математического мышления. Они верят в надежность математических доказательств не только из-за отсутствия в них контрпримеров, а исходя из «генетического обоснования», исходя из убеждения в истинности математических посылок и в корректности проведенных формальных логико-математических умозаключений.

4. Метатеоретическое обоснование математики

История развития математики подтверждает, что довольно легко впасть в заблуждение, когда к бесконечным совокупностям применяется метод, допустимый в финитной области. Примеры подобных ошибок хорошо известны из математического анализа. Например, правильность вывода при переносе теорем, справедливых для конечных сумм и произведений, на бесконечные суммы и произведения подтверждается специальными исследованиями сходимости. Согласно философской программе обоснования Гильберта математическое утверждение является осмысленным, то есть реальным, высказыванием, если оно само или его отрицание могут быть установлены каким-нибудь финитным рассуждением. Это тот круг средств, которые он считает допустимыми и надежными, хотя никогда не описывает это ограничение в четкой форме. Даже интуиционисты не возражали бы против такого обоснования классической математики, лишь бы сами математики классического направления перестали говорить о реальном смысле, стоящем за идеальными объектами и утверждениями. Но современная история эволюции математического знания показала, что принципиальное для программы

Гильберта методологическое допущение с финитностью оказалось недостаточно убедительным в той части положений, согласно которым достоверным обоснованием математической теории может быть только финитное обоснование.

В своих исследованиях по обоснованию математики Гильберт старался устранить, «вошедшее в моду» сомнение в надежности математических выводов. Для разрешения принципиальных трудностей, считал он, необходима «теория математического доказательства». Поэтому все, что составляет математику, подлежит строгой формализации, чтобы превратить «собственно математику», или математику в узком смысле, в набор формул. В докладе «Логические основания математики», сделанном в Обществе немецких естествоиспытателей в сентябре 1922 года, сам Давид Гильберт разъясняет свою позицию так: «Наряду с собственно математикой, формализованной указанным выше образом, возникает в определенной мере новая математика, метаматематика, необходимая для обеспечения надежности собственно математики, в которой (в отличие от чисто формальных выводов собственно математики) используются содержательные выводы, но только для доказательства непротиворечивости аксиом. В этой метаматематике оперируют доказательствами собственно математики, и эти доказательства и составляют предмет содержательного исследования» [7, с. 419]. Объектом метаматематики является «абстракция математики», в которой математические теории заменяются формальными системами, а доказательства – последовательностями формул. Однако ее достоинство состоит в том, что в философской программе Гильберта удалось систематизировать весь накопившийся в теоретической математике опыт реальной истории математики предыдущих поколений. Философское обоснование современной математической теории предполагает, что критерии метатеоретического обоснования математики удовлетворяют определенным требованиям философского характера. Но в утверждении, что метатеория, достаточная для доказательства непротиворечивости теории, более богата, чем сама теория, тоже скрыта некоторая двусмысленность.

С одной стороны, в таком доказательстве может быть использована только некоторая часть аксиом теории, а с другой стороны, это доказательство может содержать дополнительные утверждения, выходящие за пределы теории, но это не означает, что они всегда более сомнительны. Хотя нет никаких оснований предполагать, что если множество утверждений лежит «вне» математической теории, и оно достаточно для доказательства ее непротиворечивости, то оно будет более сомнительным, чем всякое конечное множество суждений, принадлежащих теории. После того, как математики осознали неясность и туманность объектов, называемых «множествами», которые были кодифицированы в виде формальных аксиом, они установили некоторые их основные различия, сравнимые с различиями между натуральными, рациональными и действительными числами. Парадоксы теории множеств чаще всего возникали тогда, когда собирали вместе свойства, представляющие интерес для разных видов чисел. Идея плана Гильберта по спасению теории множеств состояла в предложении аксиоматизировать эту теорию в духе разработанной им метаматематики, или теории доказательств, а затем доказать непротиворечивость полученной системы аксиом. В противоположность интуиционистам Гильберт предлагал такую программу обоснования математики, которая сохранила бы в целостности всю теоретико-множественную, или как ее сейчас называют классическую, математику, но гарантировав при этом, что никакие парадоксы или противоречия в ней возникнуть уже не смогут. Например, в классическом изложении математический анализ полностью основан на рассуждениях о нефинитных математических объектах. Кроме того, следует обратить особое внимание еще на то, что до сих пор пока не найдено значимой формальной математической теории, в которой можно было бы доказать непротиворечивость ее же средствами. Профессиональные математики считают, что методологически очень трудно постоянно оставаться в рамках исключительно финитных рассуждений.

Строго говоря, процедура обоснования математики, согласованная с гильбертовскими идеализациями, предполагает формализацию математической теории с помощью содержательной «метатеории», которая, наряду с описанием структуры формализма, рассматривает принципы допустимой логики и соответствующие ей правила доказательства и преобразования математических утверждений, допустимые в рамках данной теории. Заметим, что сам Гильберт не дал исчерпывающего определения метатеории, снимающего всякие сомнения относительно ее расширенного толкования. Метатеория как сфера абсолютной надежности предполагает обращение к гносеологическим критериям. Но гносеологически обоснованная метатеория не обязана быть исключительно финитной или конструктивной. Такая установка позволяет снять неоправданные ограничения на состав метатеории, имеющиеся в программе Гильберта, поскольку «определение по содержанию» важнее «определения по объему». Методологический замысел Гильберта состоял в таком ограничении метатеоретических рассуждений математиков, которое должно было бы гарантировать их максимально возможную достоверность. «Точнее, Гильберт хотел избежать спекулятивных споров между интуиционистами и платонистами. Именно в этом смысле программа Гильберта часто рассматривается как часть „великой троицы" в философии математики» [8, с. 8]. Речь идет о трех действующих направлениях обоснования современной математики, точнее о формализме, интуиционизме и платонизме, философская сущность которых состоит в том, что формализм ищет наиболее надежные «эпистемологические структуры» математики, интуиционизм пытается описать существование и раскрыть «интуицию континуума», а платонизм сосредоточен на восприятии «мира идей и неизменных форм». Здесь не идет речь о сведении математических истин исключительно к логическим утверждениям, а имеется в виду философская проблема соотношения логики и математики.

Кроме того, Гильберт считал, что метатеория должна иметь не только чисто философское, но также и внутреннее математическое содержание. Ведь если отбросить требование непротиворечивости, то тогда «все возможно», и эпистемология в таком случае будет не нужна. Поэтому методологической особенностью программы обоснования Гильберта является доказательство непротиворечивости формальной символической системы. Согласно гильбертовской интерпретации философии непротиворечивости и принципа полноты математической системы, условие непротиворечивости математической теории поддается не только сугубо философской, но и арифметической трактовке. Впоследствии выяснилось, что финитистские методы пригодны для обоснования непротиворечивости сравнительно бедных формальных теорий, например, без аксиомы полной математической индукции. В частности, как отмечает авторитетный философ математики В. Я. Перминов: «Важно, однако, понять тот факт, что требования финитности и конструктивности в математике существенно связаны с идеологией эмпирического мышления» [9, с. 157]. Что касается принципа полноты математической системы, то следует заметить, что он фактически реально достигается только на некоторых математических моделях. Если иметь в виду целостность программы обоснования математики, то придется признать, что стремление к полноте – это все же стратегия философско-методологического поиска в рамках прежней обосновательной парадигмы, так как при достижении полноты описания формальной системы, она останавливается в своем развитии. Но, в конечном счете, доказательства непротиворечивости и полноты оказывались зависимыми от конкурирующих философских направлений. Осознавая эту философскую дилемму, Давид Гильберт надеялся, что доказательство полноты и непротиворечивости математических теорий удастся найти с помощью специальных методов рассуждения, признаваемых математиками.

5. Заключение

Хотя классическая математика согласуется с коллективным опытом и не противоречит ему, достоверное обоснование математики, как считал Гильберт, дает теория доказательств, существенной частью которой является формализм и аксиоматический метод. Известно, что обоснование в науке в принципе достигается на теоретическом уровне. Поэтому актуальной задачей программы Гильберта обоснования математики было решение философско-методологических проблем в основаниях современной математики с помощью современных логико-математических средств, которые связаны с финитистскими доказательствами теорем. Вообще говоря, нет никаких философских оснований предполагать, что ограничения, накладываемые финитизмом Гильберта, столь уж необходимы для исключения вызывающих сомнение элементов в практике математического мышления. Так как математическая практика не обусловлена финитистскими рассмотрениями, то важно также осознавать, что финитизм Гильберта – это, прежде всего, часть его философской программы. «Это так называемая конечная установка играет существенную роль в философских взглядах Гильберта и во многом предопределяет его программу обоснования математики. Поскольку бесконечность выходит за пределы непосредственного опыта, постольку Гильберт рассматривает ее вслед за Кантом как идею, существующую только в человеческом представлении» [10, с. 109]. Любое направление обоснования современной математики призвано выявить то, что неявно содержится в соответствующей математической практике. Несмотря на то, что были получены финитные доказательства непротиворечивости довольно значительного фрагмента элементарной теории чисел, пока не удалось финитно установить непротиворечивость арифметики в полном объеме, а тем более теории множеств.

Суть философско-методологического подхода Гильберта состояла в том, что всю классическую математику, использующую абстракцию актуальной бесконечности, нужно формализовать. По общему философскому замыслу Давида Гильберта всякую надежную математическую теорию надо строить как формальную аксиоматическую теорию, а затем в рамках этого формализма надо попытаться доказать ее непротиворечивость. Трудности реализации обоснования математики не являются причиной отказа от практического вывода о надежности современной математики. Философская программа Гильберта как работающее направление обоснования математики с некоторыми методологическими поправками фактически остается одним из главных подходов к обоснованию математики и оказывается наиболее продвинутой как в самой современной математике, так и в методологических вопросах обоснования, поскольку содержит не только собственно формальные, но также и многие содержательные аспекты. Поэтому такое философское исследование не может быть чисто формальным, так как в метаматематике все рассуждения должны иметь содержательный и интуитивно убедительный характер. Если метаматематике соответствует лозунг «раз и навсегда», то в математике результаты появляются как бы «одно вослед другому», поскольку математика готова обойти неразрешимые на данный момент проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Родин А. В. *Математика Евклида в свете философии Платона и Аристотеля.* М.: Наука, **2003.** 211 с.
2. Вейль Г. Давид Гильберт и его математические труды // Гильберт Д. *Избранные труды: в 2 т.* М.: Факториал, **1998.** Т. II. С 480–520.
3. Гильберт Д. Проблемы обоснования математики // Гильберт Д. *Избранные труды: в 2 т.* М.: Факториал, **1998**. Т. I. С. 449–456.
4. Вейль Г. Символическая математика Гильберта // Вейль Г. *О философии математики. 2-е изд., стереотипное.* М.: КомКнига, **2005**. С. 26–33.
5. Султанова Л. Б. *Неявное знание в развитии математики: монография.* Уфа: РИЦ БашГУ, **2009.** 260 с.
6. Еровенко В. А., Михайлова Н. В. Методологическая программа Гильберта как философско-математическое исследование // *Вестник Белорусского государственного университета. Серия 3*. **2003**. №2. С. 55–62.
7. Гильберт Д. Логические основания математики // Гильберт Д. *Избранные труды: в 2 т.* М.: Факториал, **1998**. Т. II. С. 418–430.
8. Целищев В. В., Хлебалин А. В. Интуиция, формальная онтология и семантика знаков в формализме Гильберта // *Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Философия.* **2014.** Т. 12. Вып. 3. С. 5–11.
9. Перминов В. Я. *Философия и основания математики.* М.: Прогресс–Традиция, **2001.** 320 с.
10. Рузавин Г. И. Гильбертовская программа и формалистическая философия математики // *Методологический анализ оснований математики*. М.: Наука, **1988**. С. 108–116.

Поступила в редакцию 22.11.2015 г.

DOI: 10.15643/libartrus-2015.6.12

Hilbert program of formalism as a working philosophical direction for consideration of the bases of mathematics

© N. V. Mikhailova

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
6 P. Browka St., 220013 Minsk, Belarus.

Email: michailova_mshrc@mail.ru

In the article, philosophical and methodological analysis of the program of Hilbert's formalism as a really working direction for consideration of the bases of modern mathematics is presented. For the professional mathematicians methodological advantages of the program of formalism advanced by David Hilbert, consist primarily in the fact that the highest possible level of theoretical rigor of modern mathematical theories was practically represented there. To resolve the fundamental difficulties of the problem of bases of mathematics, according to Hilbert, the theory of mathematical proof is needed, but contrary to popular belief rigorous formalization of the proof is not a synonym of reliability and rigor of mathematical reasoning from the point of view of the philosophy of the foundations of mathematics. In fact, the consistency of the theories is "more important" than their logical consistency because not every statement, which does not contradict to the reasonable ones, can be attributed to a true statement. However, for working mathematicians, Hilbert is logical and consistent and the axiomatic method and formalism are an essential part of their rules of thinking.

Keywords: *philosophy of mathematics, the problem of bases of modern mathematics, program of formalism.*

Published in Russian. Do not hesitate to contact us at edit@libartrus.com if you need translation of the article.

Please, cite the article: Mikhailova N. V. Hilbert program of formalism as a working philosophical direction for consideration of the bases of mathematics // *Liberal Arts in Russia*. **2015**. Vol. 4. No. 6. Pp. 534–545.

REFERENCES

1. Rodin A. V. *Matematika Evklida v svete filosofii Platona i Aristotelja [Euclid mathematics in the light of the philosophy of Plato and Aristotle].* Moscow: Nauka, **2003.**
2. Vejl' G. *Izbrannye trudy: v 2 t.* Moscow: Factorial, **1998**. Vol. II. Pp. 480–520.
3. Hilbert D. *Izbrannye trudy: v 2 t.* Moscow: Factorial, **1998.** Vol. I. Pp. 449–456.
4. Vejl' G. *O filosofii matematiki.* Moscow: KomKniga, **2005.** Pp. 26–33.
5. Sultanova L. B. *Neyavnoe znanie v razvitii matematiki: monografiya [Implicit Knowledge in Development of Mathematics: Monograph].* Ufa: RIC BashGU, **2009.**
6. Erovenko V. A., Mihajlova N. V. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija 3.* **2003.** No. 2. Pp. 55–62.
7. Hilbert D. *Izbrannye trudy: v 2 t.* Moscow: Factorial, **1998.** Vol. II. Pp. 418–430.
8. Celishhev V. V., Hlebalin A. V. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Filosofija.* **2014.** Vol. 12. Issue 3. Pp. 5–11.
9. Perminov V. Ja. *Filosofija i osnovanija matematiki.* Moscow: Progress–Tradicija, **2001.**
10. Ruzavin G. I. *Metodologicheskij analiz osnovanij matematiki [Philosophy and bases of mathematics].* Moscow: Nauka, **1988.** Pp. 108–116.

Received 22.11.2015.