Математические структуры и моделирование
2015. № 4(36). С. 40–48

УДК 510.2 + 101.1

ТЕОРИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ КАНТОРА В КОНТЕКСТЕ ГЕНЕЗИСА ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

Н.В. Михайлова
к.филос.н., доцент, e-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
г. Минск, Беларусь

Аннотация. В работе предпринята попытка философско-математического анализа теории бесконечных множеств Кантора, оказавшей существенное влияние на развитие математической науки двадцатого столетия с методологической точки зрения генезиса философии современной математики.

Ключевые слова: теория множеств Кантора, бесконечные множества, философия математики.

В начале XX века математика столкнулась с определёнными трудностями при решении некоторых внутренних задач, проливающих свет на степень точности формализованных теорий. Речь идёт, прежде всего, о проблемах обоснования современной математики, связанных с теорией бесконечных множеств Кантора. Следует подчеркнуть, что математическая теория выдающегося немецкого учёного Георга Кантора (1845 – 1918) оказала существенное влияние не только на самоопределение науки двадцатого века, но и стала общефилософским событием. Он был чрезвычайно настойчив, трудолюбив и одарён в искусствах, играл на скрипке и великолепно рисовал. Очень начитанный и хорошо образованный, всегда наполненный светлой радостью осенявших его мыслей, он не знал усталости. По свидетельству современников, участие импозантного Кантора в любом собрании математиков всегда было захватывающим духовным наслаждением для собравшихся благодаря гениальной интуиции его мысли как в области математических, так и нематематических интересов. Когда математики осознали, что натуральные, вещественные числа и многое другое можно трактовать как множества, то это побудило их заняться теорией множеств. В частности, по поводу фундаментального в математике понятия «множество» можно сказать, что весь опыт становления современной математики и анализ её направлений обоснования показывают, что множества служат тем основным элементарным материалом, из которого строятся все основные математические объекты.

Отсюда вытекает универсальность идеи множества и языка теории бесконечных множеств для всей современной математики. По существу, Кантор выдвинул плодотворную методологическую идею построения всей современной математики на базе теории множеств. Кроме того, понятия теории множеств по степени общности сравнялись с понятиями логики, хотя при этом пришлось расстаться с привычными нормами мышления. Например, в теории бесконечных множеств высказывание «целое больше своей части» потеряло свой прежний смысл. Философские определения понятия множества содержатся в переписке Георга Кантора с Давидом Гильбертом, где вводится важное понятие «завершённое множество», которое, в философской интерпретации Кантора, является «актуально существующей целостностью». Философско-методологические трудности специальной математической терминологии для профессионалов не так уж сложны, и их всегда можно устранить. Взаимодействие математики и философии в учении Кантора проявлялось в том, что, полемизируя с философами, он использовал новые математические конструкции, пытаясь обосновать ограниченность прежних представлений, а говоря с математиками, был вынужден использовать философскую терминологию в оправдание своих нетрадиционных подходов.

Известно, что древнегреческая философия осознала идею потенциальной бесконечности, но критически отнеслась к актуальной бесконечности, и лишь в рамках христианской культуры идея актуальной бесконечности постепенно становится привычной. В работе «О различных точках зрения на актуально бесконечное» Георг Кантор писал: «Несмотря на существенное различие понятий потенциального и актуального бесконечного — причём первое означает «переменную» конечную величину, «растущую» сверх всяких конечных границ, а последнее — некоторое «замкнутое в себе, постоянное», лежащее по ту сторону всех конечных величин, количество, — к сожалению, слишком часто встречаются случаи смешения этих понятий» [1, с. 210]. Кроме того, как считал сам Кантор, часто происходит смешение двух форм актуально бесконечного другого рода, когда смешивается «трансфинитное» с «абсолютным». Их отличие в том, что первое следует, конечно, мыслить «бесконечным», хотя еще доступным увеличению, а второе следует мыслить «недоступным увеличению» и поэтому «математически неопределимым». Канторовскую теорию множеств можно охарактеризовать как теорию конечных и актуально бесконечных множеств, в которой актуализируются основные принципы, принимаемые математиками в качестве верных утверждений относительно множеств. Основной предмет канторовской теории множеств — это бесконечные множества, существование которых предполагается. С тех пор вся философия математики колеблется в своих формах выражения между математикой и философией. Гильберт считал теорию Кантора «высочайшим проявлением математического гения». Хотя канторовская теория множеств стала «миром», вместившим почти всю математику, постепенно угасает тот восторг, который в своё время охватил многих математиков после знаменитого канторовского «прорыва в бесконечность».

Методологическая сложность ситуации состоит в том, что теория бесконечных множеств привнесла в математику целый набор частных случаев актуальной бесконечности, большинство из которых нельзя разумно интерпретировать в реальном мире. У Кантора множество рассматривается как «единство», в котором нет взаимодействия элементов, а имеет место лишь внешняя унификация, а любое бесконечное множество может иметь столько же элементов, сколько и некоторые его собственные подмножества, то есть его части, отличные от множества. Даже в книгах по математике, посвящённых «наивной теории множеств», избегают точного определения понятия множества. Роль понятия «множество» в математике была осознана лишь во второй половине XIX века. В процессе размышления над логическими основами математики и её структурой осознавалась важность понятия множества, особенностью которого, в частности, является то, что оно не требует вычислений. При этом Кантор заложил основы теории абстрактных множеств и внёс существенный вклад в основание математического анализа и в изучение множества вещественных чисел. Следует отметить, что со времён Аристотеля философы отвергали концепцию «завершённых бесконечностей» в основном из-за логических парадоксов, к которым, как казалось, они приводят. Поэтому, чтобы избегнуть подобных философских возражений, математики стремились различать бесконечность, рассматриваемую в качестве завершённой величины, и бесконечность, рассматриваемую как потенциально осуществимый процесс, например, сходимости членов ряда, стремящихся к некоторому пределу, то есть бесконечность рассматривалась как способ выражения математического понятия предела последовательности.

В частности, Кантор предположил, что всякое иррациональное число может быть представлено бесконечной последовательностью рациональных чисел. Но «самое значительное достижение Кантора состояло в доказательстве того, что не все бесконечные множества количественно эквивалентны, т. е. имеют одинаковую мощность, а потому их можно сравнивать друг с другом» [2, с. 76]. Другими словами, было впервые показано, что не все бесконечные множества имеют одинаковый «размер», или, как говорят об этом математики, «мощность». Идеи Георга Кантора оказались настолько радикальными и неожиданными для математики и так противоречащими интуиции, что Анри Пуанкаре в своё время даже назвал теорию трансфинитных чисел «болезнью», от которой, как он надеялся, математика когда-нибудь должна будет излечить. Понятие трансфинитных чисел в математике представляет собой распространение понятия порядкового числа на бесконечные множества, также как обобщение понятия количественного числа приводит к соответствующему понятию мощности множества. Свои индексы для обозначения множеств фактически образовывали у Кантора новый вид чисел, и он назвал их трансфинитными числами, которые являются самостоятельным и систематическим обобщением натуральных чисел. Для понимания такого философско-критического отношения к работам Кантора достаточно привести следующий пример. Согласно его теории множеств, несмотря на «плотность» расположения рациональных чисел на прямой и «разреженность» множества целых чисел, может показаться крайне противоречащим интуиции то, что эти два множества оказываются количественно эквивалентными.

Даже сам Георг Кантор сначала воздерживался от введения трансфинитных чисел, обоснованно считая, что идею актуальной бесконечности нельзя сформулировать непротиворечиво, поэтому ей нет места в строгой математической науке. Но именно эти первоначальные сомнения позволили Кантору предвосхитить критическую оппозицию разных сторон, тем самым дав ему возможность «вооружиться» философскими и математическими аргументами, преодолев своё «предубеждение» в отношении трансфинитных чисел. Математическая сущность трудов Кантора состоит в том, что, разработав арифметику трансфинитных чисел, он придал математическое содержание идее актуальной бесконечности. В существовании актуально бесконечных множеств был убеждён Готфрид Лейбниц, считавший, что природа не только не терпит бесконечного, а напротив, выражает свою любовь к ней, чтобы таким способом наглядно продемонстрировать совершенство Творца. Кроме того, считая эквивалентными любые два множества, для которых существует взаимно однозначное соответствие, теория множеств не принимает во внимание природу элементов этих множеств. С одной стороны, это позволило применить результаты математики к разнообразным абстрактным математическим объектам, равнозначным с точки зрения теории множеств, а с другой стороны, приходилось постоянно преодолевать шлейф сомнения насчёт того, насколько содержательны полученные математические утверждения. Всякое множество чисел, элементы которого можно расположить один за другим, то есть фактически сосчитать, используя для этого множество целых положительных чисел, Кантор назвал «счётным множеством». Счётные множества, например, натуральные или рациональные числа, допускают трактовку с соответствующими модификациями, как в смысле актуальной бесконечности, так и в смысле потенциальной бесконечности, а несчётные множества можно интерпретировать только в смысле актуальной бесконечности.

Даже метод математической индукции применим только к счётным множествам, но не применим к несчётным множествам. Ярким примером последнего является континуум, но в отличие от счётных множеств, где точки или элементы этих множеств первичны по отношению к целому, для континуума первичным является целое множество. Невзирая на профессиональные возражения против актуализации бесконечности, Георг Кантор сформулировал тезис: «существует актуальная бесконечность», то есть все бесконечные множества современной математики, включая любую аксиоматическую теорию множеств, являются актуально-бесконечными множествами. Полагая, что потенциальная бесконечность в действительности зависит от логически предшествующей ей актуальной бесконечности, Кантор не только стал изучать бесконечные множества как «готовые», но и занялся задачей классификации бесконечных множеств. Актуальная бесконечность, по определению Кантора, есть некоторая вещь-для-себя. «И эта «вещь-для-себя» никогда не становится «вещью-для-нас». Мы познаем её только на основании её, так сказать, «проявлений» и «внешних» свойств» [3, с. 63]. Концепция Кантора понятия бесконечности показывает, что «платоновские симпатии» создателя теории множеств, в специфической форме «христианизированного платонизма», имели свои границы. Они навязывались актуальной бесконечностью, как предметом рассмотрения, и потому были обусловлены соответствующей традицией «приручения» этого объекта познания, понимание которого основывалась на двух дополнительных потоках идей, один из которых был чисто математического содержания, а другой состоял из философских интерпретаций. Основная идея математического проекта Кантора сводилась к установлению взаимнооднозначного соответствия между множествами.

В соответствии с этим он определил бесконечное множество как такое множество, которое можно поставить во взаимнооднозначное соответствие со своим собственным подмножеством, отличным от всего множества. Кроме того, Кантор построил одну из конструкций вещественных чисел, доказал несчётность континуума и равномощность пространств разного числа измерений и привёл доказательство существования трансцендентных чисел. С одной стороны, для математики понятие бесконечности важно и является необходимым, так как большинство математических утверждений, не имеющих отношения к бесконечности, с точки зрения теоретического оснащения математики конца двадцатого века, можно считать «тривиальными». С другой стороны, появление большого комплекса вычислительных наук, в силу своей специфики, должно учитывать финитность ресурсов вычислительной компьютерной техники, а это формирует естественное стремление к «финитизации» математики, что явно проглядывает, например, у интуиционистов и конструктивистов. Начиная с Аристотеля, математики проводили различие между актуальной бесконечностью и потенциальной бесконечностью, которые Кантор называл также «несобственной бесконечностью» и «собственной бесконечностью». Обе они, в свою очередь, делятся на бесконечно большие и бесконечно малые, появившиеся с возникновением математического анализа. Кроме того, бесконечность в математике может проявляться в форме величины, числа, множества и последовательности, на которые распространяются арифметические, геометрические, алгебраические и логические процедуры или правила действий. Но мы имеем дело с актуальной бесконечностью, например, когда, по мнению Георга Кантора, рассматриваем натуральный ряд так, как если бы все натуральные числа были даны нам одновременно, или в частности, когда рассматриваем произвольное функциональное пространство как бесконечное множество элементов-точек.

Понятие о потенциальной бесконечности состоит в рассмотрении бесконечной совокупности математических объектов, исходя из процесса последовательного построения этих объектов. Каноническим примером может служить бесконечность натурального ряда, рассматриваемого как процесс образования натуральных чисел, учитывая, что построение слишком больших натуральных чисел в реальных условиях невозможно. Понятие об актуальной бесконечности состоит в рассмотрении бесконечной совокупности математических объектов как завершённой совокупности, независимо от процесса построения этих объектов. В связи с этим академик П.С. Александров утверждал, что во второй половине XIX века не существовало математика, оказавшего наибольшее влияние на развитие математических теорий, чем создатель абстрактной теории множеств Георг Кантор: «Огромное большинство математиков той эпохи считали, что работы Кантора вообще относятся не к математике, а в лучшем случае к философии. Но история науки, как и во многих более ранних аналогичных случаях, вынесла свой приговор, в силу которого сделанное Кантором является неотъемлемой и фундаментальной частью математики» [4, с. 291]. В частности, для профессиональных математиков понятие «бесконечное» — это специфический элемент математического метода или «метафора конечного», поскольку при изучении «бесконечное» заменяется множественным числом «конечного». Заметим, что представители разных направлений философии математики стараются избежать явных определений конечности и бесконечности, в отличие от попыток математиков конца XIX — начала XX веков. Хотя и на этом, и на предшествующих этапах развития современной математики так и не были выработаны дефиниции конечности и бесконечности, которые удовлетворили бы большинство учёного сообщества философов и математиков, в конце девяностых годов XIX века Кантор осознает наличие парадоксов теории множеств. К этому времени относятся его работы по созданию теории трансфинитных чисел, и тогда же Георг Кантор обнаруживает первые парадоксы теории множеств.

После обнаружения парадоксов теории бесконечных множеств, которые Кантор обсуждает с Гильбертом, математики и логики предприняли отчаянные попытки для «профилактического ремонта» всей теории в целом. Даже обнаруженные изъяны теории, успешно применявшейся в математике XX века, сами математики предпочитали называть «парадоксами» или «антиномиями», хотя они и производили тягостное впечатление противоречий. Эти противоречия заключались в том, что в рамках теории множеств можно было предъявить два высказывания о множествах, одновременно истинных и таких, что одно из них являлось отрицанием другого. Наибольшую известность среди этих парадоксов получил «парадокс Рассела». В надежде на скорое устранение этих «нелепостей в математике» сами математики пытались смягчить неприятную для них ситуацию «чисто лингвистическими средствами». Но предпринятый «ремонт» теории, к сожалению, оказался лишь «косметическим» и не дал никаких надёжных гарантий на будущее, поэтому теорию множеств пришлось «деформировать» ценою её естественности и простоты. Поэтому Кантор, предпринимая попытки осмыслить и защитить свои исследования бесконечного, пишет цикл философских работ, в частности, работу «Принципы теории порядковых чисел», опубликованную уже после его смерти. Все структуры, изучаемые в математических теориях, основанных на канторовской теории множеств, априорно жёстко заданы. Например, после того, как было обнаружено, что «множество всех множеств» является нечётко заданной совокупностью, оно было «запрещено», хотя аксиома выбора, постулирующая существование функции выбора, имеющей явно нечёткий характер, до сих пор активно используется в современной математике.

Бесконечность процесса познания, вообще говоря, не обязана означать чрезмерного обилия его событий. Математики уже сталкивались с такими феноменами в обосновании своей науки, для понимания которых они нуждаются в какой-то другой более глубокой уверенности. Историки науки указывают на определённый религиозный пафос научной деятельности Кантора, хотя в математических работах Кантора практически нет обращений к теологии или теологам. Когда Кантор отказался читать лекции по математике, то стал читать философию, хотя его лекции по философии не пользовались успехом, и он отказался от этой затеи. С этого времени его научные интересы смещаются в область философского обоснования теории множеств. Анализируя теорию множеств, Ю.И. Манин высказался о Канторе так: «Встроенная в теорию аутореферентность и мощное расширение области, доступной математической интуиции (принципы построения новых множеств), вносят дополнительные штрихи в эту картину художественной смелости, соединённой с самоограничением» [5, с. 110]. Заметим, что несмотря на некоторые философско-математические проблемы теоретико-множественная концепция позволила разобраться в разнообразии возможных математических теорий, а также систематизировать и структурировать их. Отметим также, что одним из требований, предъявляемым философами математики к системной классификации, является структурированность, которая связана с генезисом методологической концепции абстрактной математической структуры. Французский математик Рене Том считал, что одним из важнейших философских утверждений, на которые должна опираться современная математика, является утверждение о существовании математических структур независимо от человеческого разума. Это положение он объясняет тем, что философские надежды показать, как математические структуры естественно вытекают из иерархии множеств, их подмножеств и их комбинаций не осуществились.

Поэтому нельзя ни по каким разумным причинам отказаться от мысли, что важные математические структуры существуют во внешнем мире, и их огромное многообразие находит единственное оправдание в реальности. Обратим также внимание на мнение влиятельной группы математиков, объединившейся под именем Бурбаки, которая считала, что математика говорит не о специфических математических объектах, а только о структурах. Точка зрения группы Бурбаки состояла в том, что существует одна математика с разнообразными математическими дисциплинами, а объединяют эти разные математические разделы в единую науку понятие «математическая структура» и аксиоматический метод. Структуру, например, можно интерпретировать как список операций, отношений и их свойств, которые обычно выражены аксиомами и сформулированы так, что представляются как свойства, которым удовлетворяет некоторый класс специфических математических объектов, возможно, даже различных между собой. Наиболее важной чертой математических структур является то, что, пользуясь аксиоматическим методом, они репрезентируют, образно говоря, философскую «экологию мысли». Теоретико-множественная аксиоматика позволяет с единой точки зрения рассмотреть строение математических теорий, предметное содержание которых раскрывается через систему аксиом. Поэтому можно заключить, что в настоящее время внутренняя эволюция современной математики, которая является открытой, связной и целостной системой, вопреки видимости более чем когда-либо упрочила единство своих направлений и создала своего рода фундаментальное ядро, что не всегда заметно в её внешних проявлениях.

Математиков иногда упрекают в том, что они присвоили себе право решать, какие утверждения о бесконечных множествах справедливы, поставив себя на место творца, который эти множества может созерцать. Анализируя работы по теории множеств, историки науки сделали следующие три главных вывода. Во-первых, основные понятия теории множеств «имеют математические истоки», и интерес к канторовской теории множеств проявили, прежде всего, сами математики. Во-вторых, в силу абстрактности и теоретической общности своих понятий, в теории множеств «звучат философские мотивы», не случайно Кантор в своих философских изысканиях рассматривал такие категории, как бесконечность и континуум, интересующие философов со времён античности. В связи с этим уместно заметить, что в ранний период становления теории множеств, отсутствие в работах Георга Кантора позитивных результатов и обилие философских рассуждений служило препятствием в её признании со стороны крупных и влиятельных математиков. В-третьих, следует отметить, что, несмотря на решающий вклад самого Кантора, теория множеств — это совместное творение многих выдающихся математиков, то есть она оказалась закономерным этапом в развитии математики XIX века. Теория множеств, созданная Георгом Кантором, была самым глубоким проникновением в природу бесконечного и поэтому имела более философский, чем математический характер, в духе платоновской онтологии. В качестве дополнительной аргументации напомним о влиянии существования самостоятельного «мира идеальных объектов», содержащего абстрактные понятия математики, о котором говорили Кантор и его последователи.

Георг Кантор провозгласил принцип, согласно которому «сущность математики заключается в её свободе», выражая тем самым свою философскую установку на то, что всякое свободное творение математического разума имеет идеальное платоническое существование. Но если бы ему был предоставлен такой выбор, то «чистую математику» Кантор, по его собственному признанию, назвал бы «свободной» математикой, поскольку математика в своём развитии совершенно свободна. Она связана лишь тем условием, что её понятия должны быть «свободны» от внутренних противоречий и должны находиться в неизменных, установленных определениями отношениях к образованным и испытанным раньше понятиям. Принцип свободы Кантора удобен в философском отношении, так как он не стесняет математического творчества, заранее оправдывая любые абстрактные построения. Георг Кантор не видел в этом принципе также какой-либо опасности для науки и считал, что большая опасность заключается во всяком «излишнем ограничении» математического стремления к творчеству, поскольку в пользу таких ограничений нельзя привести убедительных доводов, исходя из сущности науки.

Хотя теория бесконечных множеств лежит в основе всех математических наук, и практически все математики верят в то, что она непротиворечива, Георг Кантор также говорил, что свобода математики — это вовсе не произвол. Генезис философии математики показывает, что такого никогда и не было. Поэтому этот философский принцип Кантора вовсе не стесняет математического творчества, тем самым как бы оправдывая возможность построения новых абстрактных теорий, а многие математики по-прежнему продолжают придерживаться философской и математической сути канторовского принципа «свободы математики». Поэтому и знаменитое утверждение Кантора о «свободе математики» отчасти утратило свой пафосный и гордый смысл «свободного полёта математической мысли», постепенно выходя из употребления. Но необходимо признать, что построение мира классической математической науки было бы невозможно без допущения гипотетически мощного интеллекта, не ограниченного ни пространством, ни временем.

Литература

1. Кантор Г. О различных точках зрения на актуально бесконечное // Парадоксы бесконечного. Минск : Издатель В.П. Ильин, 2000. С. 204–213.
2. Даубен Дж.У. Георг Кантор и рождение теории трансфинитных множеств // В мире науки. 1983. № 8. С. 76–86.
3. Катасонов В.Н. Боровшийся с бесконечным. Философско-религиозные аспекты генезиса теории множеств Г. Кантора. М. : Мартис, 1999. 207 с.
4. Александров П.А. О вкладе Георга Кантора в математику // Историко-математические исследования. 1983. Вып. 27. С. 290–292.
5. Манин Ю.И. Георг Кантор и его наследие // Математика как метафора. М. : Изд-во МЦНМО, 2008. С. 110–124.

THE THEORY OF INFINITE SETS OF CANTOR IN THE CONTEXT OF GENESIS OF PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

N.V. Michailova
Ph.D.(Philosophy), Associate Professor, e-mail: michailova_mshrc@mail.ru

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Abstract. The article shows an attempt of philosophical and mathematical analysis of the theory of infinite sets of Cantor which had a significant impact on the development of the mathematics of the twentieth century from a methodological point of view of the genesis of philosophy of modern mathematics.

Keywords: Cantor's set theory, infinite sets, philosophy of mathematics.