УДК 101.1:510.2

Н.В. Михайлова

канд. филос. наук, доц., зав. каф. социально-гуманитарных дисциплин Минского государственного высшего радиотехнического колледжа

ФИЛОСОФСКИЕ ИМПЛИКАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ МАТЕМАТИКИ

Статья посвящена философско-методологическому анализу гёделевских результатов о принципиальной неполноте аксиоматизированного математического знания. В таком контексте теорему Гёделя о неполноте в философии математики можно вполне заслуженно считать важнейшей теоремой теории познания. Традиционный взгляд на обоснование уже не работает в современной математике, что, в частности, убедительно подтверждается гёделевской незавершенностью аксиоматических систем. Поэтому философия постгёделевской математики ориентируется на открытие новых способов коммуникации знаний, а также реконструкцию подходов к обоснованию на основе философско-математических интерпретаций непротиворечивости и полноты.

Введение

Принципиальный вопрос проблемы обоснования современной математики: существуют ли в математике окончательные доказательства? Некоторые философы математики предполагают, что содержательные доказательства только гипотетичны. Более того, формальные доказательства, хотя и могут быть сами по себе вполне надежными, тоже являются гипотетичными, так как могут противоречить неформальным теориям, выступающим в качестве интуитивной основы формализованной теории. В силу этого философское значение теоремы Гёделя о неполноте довольно трудно переоценить в решении проблемы обоснования математической надежности и строгости. Основной философский смысл результатов Курта Гёделя состоит в том, что мышление человека богаче любых его дедуктивных форм и что нельзя, основываясь на формальной логике, смоделировать искусственный интеллект. В связи с проблемой искусственного интеллекта человеческое мышление сопоставляется с возможностями компьютерного анализа, но поскольку сами компьютеры являются продуктом человеческой деятельности, то фундаментальное различие между возможностями «творца» и его «творения» отчасти характеризуется теоремой Гёделя о неполноте.

Этот результат состоит в том, что для арифметики Пеано строятся неразрешимые предложения, в силу чего его называют теоремой о неполноте формальной арифметики Пеано натуральных чисел. В связи с этим приходится философски анализировать природу простейших математических объектов, точнее, как они открываются математиками и входят в мир повседневного опыта. Так, например, некоторые философы математики считают, что мысль Курта Гёделя о математических объектах в платонистском духе так же законна, как и мысль о существовании физических объектов. Поэтому в указанном контексте Гёделя можно охарактеризовать как убежденного платониста, даже если бы он и сомневался в абсолютности существования всех мыслимых математических конструкций. Возникающее при этом методологическое затруднение в существовании математических объектов связано с тем, что понятия непротиворечивости и полноты используются и для характеристики мышления человека. В действительности Гёдель доказал, что современная математика – это не произвольные несистемные методологические поиски, определяемые в основном прихотью математиков, а нечто абсолютное, которое не изобретается, а открывается.

Например, ряд натуральных чисел, существующий как актуально бесконечное множество в мире платоновских идей, одновременно присутствует где-то еще и в понимаемом нами мире, делая окружающую действительность более доступной для нас. Такая мировоззренческая точка зрения была существенна и для Гёделя, но не менее существенной она является в новом подходе к проблеме обоснования математики. С точки зрения современной теории познания историческая эволюция математики, представляющая собой аксиоматизацию математических теорий, включает в себя экспликацию оснований, на которые математик опирается (насколько это возможно) в своей работе, но он должен помнить о том, что принятое им основание не защищено от «гёделианского скептицизма». Из логических результатов Гёделя следует, что понятие математической истины не может быть заключено ни в одну из формальных систем. «В терминологии Канта философия анализирует понятия, а математика их создает. Гёдель искал соединения там, где Кант видел только различие. А именно, для одной и той же задачи иногда возможны два альтернативных решения: либо применить философский анализ и простую математику, либо использовать изощренные или тонкие построения» [1, с. 177]. Важнейшее условие, при котором была доказана теорема Гёделя о неполноте, состоит в непротиворечивости системы аксиом математической теории. Гёдель показал, что доказать непротиворечивость системы аксиом в рамках самой системы нельзя, т.е. утверждение о непротиворечивости само по себе является неразрешимым.

По существу вопрос идет о том, являются ли данные абстрактные понятия характеристиками реального мышления и в какой степени они являются стандартными нормами человеческого мышления. Абстрактные математические понятия отражают, по Гёделю, некоторые аспекты объективной реальности, но, вообще говоря, иные, чем те, что даются посредством ощущений. Но в силу недостаточной определенности критериев рациональности эти идеи Гёделя не получили должного признания в качестве методологически значимых для обоснования математики, поскольку они не позволяют даже решить какие именно из очевидных аксиом теории множеств следует принять в качестве непосредственно истинных. Необходимо также предостеречь от излишне радикального истолкования результата Гёделя, поскольку такой подход исходит из ошибочного допущения, что теоремы Гёделя истинны для всех формальных выражений, которые могут быть истолкованы в качестве утверждений о непротиворечивости теории. Поэтому достаточно убедительная философско-методологическая программа обоснования современной математики не может быть построена в рамках упрощенной теории познания. Постоянный философский интерес к теоремам Гёделя обусловлен еще и тем, что необходимость и эффективность математического знания подтверждают: они говорят нечто методологически важное о пределах возможностей абстрактного мышления человека. Известно, что не Курт Гёдель изобрел математическую логику, но он своими исследованиями глубоко изменил содержание этой науки. Так, например, Гёдель доказал, что если достаточно богатая формальная система непротиворечива, то в ней обязательно имеются формулы, которые истинны, но не являются доказуемыми.

Но так ли уж необходимо нам знать все истины? Истинность теоремы – это лишь часть знания, содержащегося в ее доказательстве. Загадочное несоответствие естественной и формальной логик отражено в несоответствии между понятием «истинность» и понятием «доказуемость». Удивительно и то, что даже способы рассуждений Гёделя, используемые им в доказательстве, по-видимому, невозможно описать в рамках формальных систем. Основная причина этого состоит в том, что Гёдель исходил из философского допущения, что человеческий интеллект «схватывает» абстрактные качества математических объектов, не сводимые к их конкретным свойствам, что создает в нашем сознании особые отношения между человеком и реальностью. В связи с этим отметим следующее важное наблюдение философа математики В.В. Целищева: «Тесное переплетение математических и философских мотивов в рассуждениях Гёделя приводит его к интересному выводу. Если мы достигаем достаточной ясности в философии математики, тогда философские выводы приобретут статус математически определенных утверждений. Другими словами, философия математики должна стать частью самой математики, приобретая определенность, и в то же время теряя характер собственно философский» [2, с. 20–21]. Но такая математическая определенность противоречит сущности философской аргументации с её относительной свободой и неопределенностью. Это, скорее всего, романтический взгляд на довольно сложную ситуацию, а более реалистичный взгляд предполагает необходимость глубокого понимания того, каким образом смысл выражается в формальных системах. Методологическая значимость результатов Гёделя состоит в том, что он показал, как при принятии определенных мер предосторожности можно известные парадоксы превратить в неразрешимые предложения. В действительности, как считают некоторые философы математики, исследования Гёделя были лишь частью долгих поисков, предпринятых математиками в надежде выяснить, что же такое доказательство.

Философские формулировки результатов Гёделя могут создать некоторую путаницу в их правильном понимании из-за того, что доказательство для философов-нематематиков является весьма приблизительным понятием. Для профессиональных математиков доказательства являются таковыми лишь внутри определенных жестких систем. В работе Гёделя такой жесткой системой, к которой собственно относится слово «доказательство», является фундаментальный труд английских логиков и философов Бертрана Рассела и Альфреда Уайтхеда «Principia Mathematica». Первая теорема Гёделя по существу утверждает, что какая бы непротиворечивая система аксиом ни использовалась, всегда найдутся вопросы, на которые математика не сможет найти ответ, т.е. полнота недостижима. Но есть еще дополнительная трудность в современных формальных системах. Вторая теорема Гёделя утверждает, что математики никогда не смогут быть уверены в том, что их выбор аксиом не приведет к противоречию, точнее непротиворечивость достаточно сильной теории никогда не может быть доказана внутри нее самой. Философами науки и интерпретаторами теорем Гёделя упускается иногда следующее важное дополнение. Требование непротиворечивости системы аксиом не должно вызывать принципиальных затруднений, так как это естественная «присказка», без которой возможны любые выводы. В формальном варианте второй теоремы Гёделя о неполноте, которую было бы правильнее называть «теоремой Гёделя о непротиворечивости», утверждается, что если богатая система, включающая арифметику, непротиворечива, то доказательство этой непротиворечивости не может быть достигнуто в метаязыке этой системы, допускающем представление в арифметическом формализме.

Из второй теоремы Гёделя о неполноте следует, что доказательство непротиворечивости не может быть формализовано. Это говорит о необходимости использования для этих целей новых нефинитных методов, то есть опять появляется тема бесконечности. Теоремы Гёделя указывают нам на то, что ни одна система аксиом не может охватить всех истин. Теорема Гёделя показывает не просто ограниченность логических средств, она говорит о каком-то фундаментальном свойстве мышления, в том смысле, что если мы хотим что-то понять в мышлении человека, то это можно сделать не вопреки теореме Гёделя, а благодаря ей. В среде математиков вполне естественным выглядело убеждение, что для любого раздела математики можно указать набор аксиом, достаточный для вывода всех истинных предложений этой науки. Работа Гёделя показала несостоятельность такого глубоко укоренившегося представления. Итальянский философ и логик Эвандро Агацци пишет: «По мнению Гёделя, некоторые математические суждения, которые на сегодня не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты, могут и даже должны стать доказуемыми или опровержимыми после того, как будут найдены новые аксиомы, полученные в результате более глубокого понимания нашим интеллектом соответствующих математических объектов» [3, с. 41]. Но хотя такая математическая деятельность является практически весьма эффективной, она все же остается лишь фрагментом творческой деятельности и не является, ни философским, ни математическим обоснованием.

Фундаменталистское направление философии математики не признает этого математического факта. Провозгласив, что непротиворечивость должна на самом деле доказываться средствами математических теорий, Гёдель проложил путь к новому теоретическому направлению в философии математики, по отношению к которому старое понимание непротиворечивости выглядело слишком наивным. Почему, несмотря на то, что непротиворечивость системы Цермело – Френкеля (одной из самых распространенных аксиоматик теории множеств) до сих пор не доказана, математики довольно сдержанно реагируют на столь неопределенное положение, сложившееся в теории, претендующей быть «фундаментом» всей математики? Здесь возможны разные ответы, отличающиеся подходом к проблеме и их аргументированностью. Однако что касается современного состояния математики, то рассуждения о противоречивости систем являются иногда довольно бесплодными, поскольку ни одна из формальных систем, широко используемых сегодня, не находится под серьезным подозрением оказаться в итоге противоречивой. Важность теоретико-множественных противоречий иногда сильно преувеличена. Проблема в том, что углубленные занятия профессиональных математиков «продвинутой» областью знаний порождают иногда корыстную заинтересованность и нежелание рассматривать методологические альтернативы. Современные поиски доказательства непротиворечивости мотивируются по-разному и имеют более серьезные цели, чем просто избежание противоречий. Можно даже сказать, что Курт Гёдель своими логическими и методологическими результатами о неполноте изменил философскую проблему обоснования современной математики тем, что по-своему уточнил ее, дав ей новую философско-математическую формулировку.

Но что в математике означает слово «непротиворечива»? Непротиворечивость системы аксиом означает, что не существует такого утверждения, которое в этой системе чисто логическим путем выводимо одновременно с отрицанием этого утверждения. Противоречивые системы аксиом математически вредны, поэтому их желательно не вводить в математический оборот, но реальность такова, что противоречивость может не сразу выявиться. Математики, безусловно, хотели бы знать заранее, что противоречащие друг другу утверждения не появятся. Исчерпывающее объяснение по этой проблеме, скорее всего, невозможно, но некоторые косвенные, психологически убедительные признаки всеже существуют. Какой математикам прок в непротиворечивости самой по себе? Противоречивая система была бы бессмысленна, так как в ней была бы выводима любая формула. Противоречие ставит под сомнение прежде всего только те математические доказательства, которые непосредственно связаны с противоречивыми понятиями. Гёделевские определения непротиворечивости и доказательства признаны наиболее методологически естественными, но если определить их иначе, то непротиворечивость системы может быть доказана в ней самой. Возможно, результаты Гёделя еще долго бы игнорировались математическим сообществом, как не имеющие отношения к ее реальным проблемам, если бы Поль Коэн не поколебал эту уверенность своим окончательным результатом о неразрешимости знаменитой континуум-гипотезы в традиционной системе аксиом теории множеств. В логической интерпретации Курта Гёделя «континуум-проблема Кантора заключается в простом вопросе: сколько точек находится на прямой линии в евклидовом пространстве. …Конечно, этот вопрос мог возникнуть, только после того как понятие “числа” было распространено на область бесконечных множеств» [4, с. 163]. Поэтому если взглянуть на гёделевский подход исторически, т.е. с точки зрения нефундаменталистского направления, то можно понять его ограниченность контекстом определенного подхода и рассматриваемых в то время задач.

Работы Гёделя о неразрешимости внесли элемент сомнения и в вопрос о том, разрешима ли проблема Ферма, но истинных фанатиков великой теоремы Ферма это ничуть не разочаровало. Принципиальная трудность теоремы Ферма, а также других математических проблем состоит в том, что рассматриваемое множество объектов (в данном случае натуральных чисел) бесконечно, поэтому проверить его все целиком нет даже принципиальной возможности. Однако математическое доказательство позволяет нам единым образом обозреть все это бесконечное множество и получить, если повезет, точный ответ. Проблема, верно или неверно на множестве натуральных чисел арифметическое утверждение $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall n\ \ ((x+1)^{n+3} + (y+1)^{n+3}) \neq (z+1)^{n+3}$, стояла более 350 лет. Эта проблема хорошо известна под названием «великой теоремы Ферма». Математики довольно часто хронометрируют свое время не столько конкретной датой получения решения той или иной проблемы, сколько временем поиска идеи этого решения. Поиск доказательства великой теоремы Ферма последний из примеров такого рода. На обычном математическом языке она формулируется следующим образом. Доказать, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не имеет решений в положительных целых числах. Несмотря на то, что это невероятно трудная задача, ее формулировка понятна любому школьнику. Примечательно также то, что при $n = 2$ существует бесконечно много таких решений: это так называемые пифагоровы тройки вида (3, 4, 5), (5, 12, 13) и так далее. В философии математики важнейшим мировоззренческим положением является четкое осознание того, что подавляющее большинство математических понятий и теорем не имеют никаких прообразов в реальном мире. Например, реальным является утверждение $2 \times 2 = 4$, а теорема Ферма – это уже идеальное высказывание. Поскольку идеальные результаты можно рассматривать как промежуточные стадии рассуждений для получения реальных результатов, то являются ли они в таком контексте столь необходимыми? После основополагающих открытий Гёделя о неразрешимых предложениях математики задавали и такой вопрос: может быть гипотеза Ферма неразрешима в существующей системе математики? Пьер Ферма сумел сформулировать такой вопрос, который, несмотря на его естественность и простоту, не додумались задать даже древние греки, и в результате он стал автором труднейшей головоломки, решать которую пришлось другим поколениям математиков.

Ценность для философии математики этой просто формулируемой арифметической проблемы состоит в том, что с позиций крайнего интуиционизма утверждение гипотезы Ферма или ее отрицание более 350 лет нельзя было признать истинным. Такую конъюнктурность понятия математической истины вряд ли можно признать приемлемой, поскольку будет ли официально признана доказанность знаменитой математической гипотезы, а если будет, то когда именно, является весьма субъективной процедурой, зависящей также от «общественно-значимого критерия». Статус великой головоломки Ферма со временем вышел за рамки замкнутого мира математики. И все же английскому математику Эндрю Уайлсу удалось в 1995 г. получить завершающее сверхмощное доказательство последней теоремы Ферма, представляющее несомненный триумф математического интеллекта. Философско-методологическая значимость решения этой классической проблемы для других нерешенных проблем и новых подходов к обоснованию современной математики состоит в том, что математическое доказательство Уайлса представляет собой идеальный синтез направлений современной математики и примером вдохновения на будущее. Тем не менее «все еще остается открытым вопрос о методологических выводах, следующих из теорем Гёделя, после успеха, достигнутого коллективными усилиями современных математиков в доказательстве Великой теоремы Ферма» [5, с. 103]. Заметим, что доказательство этой теоремы занимает несколько десятков журнальных страниц и использует очень тонкий математический аппарат, формировавшийся почти три столетия. Это отчасти мешало его окончательному признанию, поскольку найти ошибку в длинном рассуждении труднее, чем написать его.

Теперь можно наверняка утверждать, что Ферма лишь показалось, что он нашел доказательство этой теоремы. В его рассуждениях явно была спрятана ошибка. Сейчас уже очевидно, что во времена Ферма просто не существовало еще математических методов, позволяющих доказать его теорему. Гильберт не включил теорему Ферма в перечень 23 важнейших проблем, стоящих перед математикой XX века. Правда, он включил в этот ряд проблем общую проблему разрешимости диофантовых уравнений, а именно, указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли заданное диофантово уравнение в целых числах. Это и есть знаменитая десятая проблема Гильберта. Невозможность существования алгоритма, распознающего разрешимые диофантовы уравнения, т.е. того, что требуемого в проблеме способа не существует, была окончательно установлена только в 1970 г. Это сделал тогда еще молодой российский математик, сейчас уже широко известный академик Ю.В. Матиясевич, который является представителем четвертого поколения школы конструктивного направления в логике и математике, возглавляемой в то время А.А. Марковым. Заметим, что для диофантовых уравнений не выше второй степени общий метод, следуя которому можно было бы за конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в числах или нет, был найден. Однако диофантовы уравнения третьей степени никаким усилиям не поддавались, но в начале XX в. даже Давид Гильберт не подозревал, что соответствующего алгоритма не существует!

В отличие от нахождения искомого общего метода для доказательства несуществования некоего общего метода для решения определенного класса задач требуется дать точное определение тому, что представляет собой этот общий метод и какими средствами он может быть реализован. Соответствующие определения были выработаны в новом направлении современной математики – теории алгоритмов. Именно десятая проблема Гильберта послужила одним из стимулов для создания этой теории. С доказательством теоремы Матиясевича в математической логике выделился законченный теоретико-числовой фрагмент, а именно «теория диофантовых множеств», которая может завершить любой курс элементарной теории чисел. Хотя в связи с неудачами в этом направлении изначально возникло подозрение, что общего метода, о котором говорится в проблеме Гильберта не существует. Преодолев трудности доказательства этой рабочей гипотезы, математикам на этот раз, так же как и четверть века спустя в случае проблемы Ферма, удалось все же уйти с проблемного поля теоремы Гёделя о неполно-те. Чаще всего негативные выводы из гёделевских результатов традиционно делаются при методологическом предположении, что достоверным доказательством непротиворечивости формализованной теории является лишь финитное доказательство. Непротиворечивость математической системы, возможно, может быть доказана более сильными методами, если ее методы доказательства оказываются недостаточными.

Это достаточно традиционное понимание второй теоремы Гёделя о неполноте, хотя и не вполне точное, так как в этом случае упускается из вида философский дуализм интуитивного и формального в гёделевских результатах. В связи с этим следует отметить следующие философские уточнения гёделевских импликаций, на которые указал В.А. Успенский. Тот вариант теоремы Гёделя, о котором говорилось до сих пор, – это так называемый ее «семантический вариант», который использует в своей формулировке представление об истинности подлежащих доказательству математических утверждений. Но в философии математики известен и так называемый «синтаксический вариант», который не использует указанного представления. В первом приближении можно сказать, что Курт Гёдель доказал существование утверждений, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. «В более аккуратной формулировке синтаксический вариант Теоремы Гёделя гласит, что какую бы формализацию понятия доказательства ни предъявить, всегда найдется такое утверждение – причем даже в арифметике, то есть среди утверждений о натуральных числах, – что ни его само, ни его отрицание невозможно доказать в рамках предъявленной формализации» [6, с. 38]. Но в синтаксическом варианте тоже есть свои ограничения, а именно, когда требование «семантической непротиворечивости» заменяется на «синтаксическую непротиворечивость», то есть когда отрицание утверждения, обладающего формальным доказательством, само не должно обладать им.

По сравнению с первой теоремой Гёделя о неполноте вторая теорема Гёделя, говорящая о недостижимости непротиворечивости, по мнению некоторых логиков, демонстрирует меньшую устойчивость логического результата, который может исчезнуть при изменении кодировки математических формул. С одной стороны, некоторые исследователи полагают, что если концепция натуральных чисел противоречива, то тогда наше мышление вообще не приспособлено к строго рациональному мышлению. С другой стороны, высказываются и такие мнения, что формальная система не вырождается в бессмысленную игру как раз по причине того обстоятельства, что она содержит противоречие. Другими словами, математическая теория может быть «локально непротиворечивой», даже если она в принципе не является глобально непротиворечивой. Поэтому в дальнейшем имеет смысл говорить, например, о локальной непротиворечивости, так как глобальная непротиворечивость может оказаться избыточной. Следует отметить, что кодировки, при которых можно доказать непротиворечивость, вообще говоря, неестественны и даже неформально возможно включают в себя предположение о непротиворечивости. Поэтому современные математики довольно уверенно смотрят в будущее своей науки, так как представления об актуальной бесконечности не привели к бессмыслице, пока все обходилось хорошо.

Вторая теорема Гёделя о неполноте – это не просто теорема в привычном смысле этого слова. По своему гносеологическому статусу она располагается в области взаимодействия неформальной и формальной математик, а в работах Гёделя была доказана неосуществимость идеи универсальной формализации мышления на границе между неформальной и формальной математикой. Успехи математики и математизированных областей знания питали надеждой многих мыслителей, в том числе Декарта и Лейбница, на существование универсальных законов, из которых все остальные истины могут быть выведены теоретически. Но, как заключает выдающийся современный математик Ю.И. Манин, «после работы Геделя, однако, мы можем быть уверенными в беспочвенности этих надежд. Если даже оставить в стороне вопрос, насколько сложен мир, мы знаем, что метод дедуктивных выводов недостаточно мощен. Его не хватает даже на то, чтобы вывести из конечного числа принципов все истинные утверждения о целых числах, формулируемые на языке школьной алгебры: таков смысл теоремы Геделя» [7, с. 80]. Поэтому все еще остается открытым вопрос об эпистемологических выводах, следующих из логических теорем Гёделя. В чем же тогда состоит философско-методологический эффект открытия Гёделя? Можно сказать, что он состоит в том, что модифицированное высказывание Эпименида создает парадокс, так как оно не является ни истинным, ни ложным, а высказывание Гёделя не доказуемо, хотя и является истинным. Это означает, что система неполна, в силу того что существуют истинные суждения теории чисел, не доказуемые с помощью методов рассуждений, принятых в системе.

По замыслу Гильберта, всякую математическую теорию, в том числе большую часть классической математики, надо строить как формальную аксиоматическую теорию, а затем в рамках этого формализма попытаться доказать ее непротиворечивость. Почему же вопрос о непротиворечивости арифметики имеет столь большое значение в обосновании математики? Это обусловлено тем, что формулировка и доказательство Гёделя допускают ряд «расширительных толкований», определяющих общефилософское значение его результатов. В частности, существование альтернативных подходов, т.е. отличных от гёделевского подхода, к математическому доказательству указывает на реальную сложность перевода неформального понятия на язык формальной математики. Философская суть импликаций гёделевских результатов о неполноте сводится к тому, что современная математика не может быть с достоверностью обоснована исключительно внутренними, т.е. логическими средствами. При аргументации этого тезиса иногда неправомерно ссылаются на то, что теорема Гёделя утверждает, будто существуют истинные утверждения, которые нельзя доказать, поскольку в такой интерпретации заключено некое противоречие, ведь если утверждение невозможно доказать, то откуда возникает убеждение в его истинности.

Всеобщему употреблению аксиоматического изложения математических теорий и математического моделирования способствовало также то, что при их изложении, пользуются понятиями предыдущих теорий, поскольку сами аксиомы предлагаются исходя из некоторого интуитивного понимания или реального знания. Дело еще в том, что аксиоматические теории кроме интуитивной идеи натурального числа, используют также неожиданные философские интерпретации правил следований, отождествлений и различений. Но эти дополнительные средства по существу содержатся в любой аксиоматической теории, хотя и не описываются ими, поэтому нет оснований считать какие-то из них более сильными в указанном смысле. Т.е. ситуация с результатами Гёделя намного тоньше и сложнее, чем она представляется математикам и философам науки. Не случайно математики призывают не верить никаким философским комментариям к теореме Гёделя, поскольку практически все популярные философские комментарии к этой теореме неверны. Тем не менее российский математик академик А.Н. Паршин однажды высказался в том духе, что «если бы не было теоремы Гёделя, то жизнь не только не была бы приятнее, ее просто не было бы» [8, с. 94]. Вопреки определенным усилиям философов представить результаты Гёделя как сенсацию, его теоремы все же не оказали «революционного влияния» ни на представление о своей науке большинства работающих математиков, ни тем более на их практическую деятельность. Как принято иногда говорить в философии науки, смены научной парадигмы (в смысле Томаса Куна) не произошло.

К этому можно добавить, что теорема Гёделя о неполноте не может опровергнуть ни одной из уже добытых математических истин. Основная проблема состоит в том, что в программе Гёделя используется фундаментальная двойственность теории чисел в логике: когда она аксиоматизирована, она становится «объектом» изучения, а с другой стороны, используемая неформально, она является «орудием», при помощи которого могут изучаться формальные системы. Тем не менее в настоящее время нет никаких математических оснований говорить о принципиальной невозможности достаточно достоверного обоснования современной математики, поскольку соответствующий «философский скептицизм» основывается на методологических результатах Гёделя, полученных при специфических методологических предпосылках, которые эксплицируют философские воззрения на надежность математических рассуждений. Развитые аксиоматические теории описывают не все средства, которые используются в рассуждениях, поэтому вторая теорема Гёделя не дает философских оснований предполагать, что для доказательства непротиворечивости некоторой богатой аксиоматизированной математической теории нужны более сильные средства в виде дополнительных постулатов, чем те, что уже фактически используются.

Заключение

В контексте физических приложений современной математики в качестве промежуточного итога можно сказать, что у нас нет психологических оснований верить в то, что теорема Гёделя о неполноте накладывает реальные ограничения на нашу способность отыскать высшие законы природы. В окрестностях теоремы Гёделя нет простых и однозначных истолкований, так как существующие методы рассуждений не дают средств, которые позволяют решить, является ли конкретная математическая теория противоречивой или неполной. «Поэтому точнее было бы сказать не “теоремы о неполноте”, а “теоремы о несовершенстве”. Всякая фундаментальная теория несовершенна: она либо противоречива, либо недостаточна для решения некоторых возникающих в ней проблем» [9, с. 149–150]. В заключение можно сказать, что теоретико-множественная концепция современной математики не только доставила основной в настоящее время стандарт математической строгости и надежности, но и позволила в значительной мере разобраться в разнообразии возможных математических теорий и даже систематизировать их. С точки зрения внутренних факторов развития математической теории она может считаться логически выверенной и построенной, если при ее развитии не используются не упомянутые в аксиомах или не выводимые из них свойства изучаемых объектов и отношений между ними.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крайзель, Г. Биография Курта Гёделя / Г. Крайзель // Успехи математических наук. – 1988. – Т. 43, Вып. 2. – С. 175–216.
2. Целищев, В. В. Рационалистический оптимизм и философия Курта Гёделя / В. В. Целищев // Вопр. философии. – 2013. – № 8. – С. 12–23.
3. Агацци, Э. Влияние Гёделя на философию математики / Э. Агацци // Эпистемология и философия науки. – 2010. – Т. XXV, № 3. – С. 16–41.
4. Гёдель, К. Что такое континуум-проблема Кантора? / К. Гёдель // Метафизика. Век XXI : альманах. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – Вып. 4: Метафизика и математика. – С. 163–174.
5. Еровенко, В. А. Проблема Ферма в контексте Гёделевских теорем / В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова // Математическое образование. – 2003. – № 4. – С. 97–103.
6. Успенский, В. А. Теорема Гёделя о неполноте и четыре дороги, ведущие к ней / В. А. Успенский // Математическое просвещение. Сер. 3. – 2011. – Вып. 15. – С. 25–75.
7. Манин, Ю. И. Теорема Геделя / Ю. И. Манин // Природа. – 1975. – № 12. – С. 80–87.
8. Паршин, А. Н. Размышление над теоремой Гёделя / А. Н. Паршин // Вопр. философии. – 2000. – № 6. – С. 92–109.
9. Подниекс, К. М. Вокруг теоремы Геделя / К. М. Подниекс. – Рига : Зинатне, 1992. – 191 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 09.03.2015

Michailova N.V. **Philosophical Implications of Gödel's Results of Incompleteness of Mathematics**

The article is devoted to the philosophical and methodological analysis of Gödel’s results of the principle incompleteness of the axiomatized mathematical knowledge. In this context Gödel’s incompleteness theorem can be quite deservedly considered as the most important theorem of epistemology in the philosophy of mathematics. The traditional view of justification is no longer working in modern mathematics that is, in particular, convincingly confirmed by Gödel’s incompleteness of axiomatic systems. Therefore the philosophy of post-Gödel’s mathematics focuses on the discovery of new ways of knowledge communications and reconstruction of approaches to the justification based on the philosophical and mathematical interpretations of the consistency and completeness.