Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

ВЕКТОРНАЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
для специальностей направлений образования
36 «Оборудование», 39 «Радиоэлектронная техника»,
40 «Информатика и вычислительная техника», 45 «Связь»
в качестве пособия для проведения практических занятий
по высшей математике*

Минск БГУИР 2013

УДК [514.742+512.64+514.12](076.5)
ББК 22.143я73+22.151.5я73
В26

Авторы:

В. В. Цегельник, Г. И. Амелькина, Н. В. Князюк,
Н. И. Кобринец, Л. А. Конюх, В. М. Метельский, Л. К. Юхо

Рецензенты:

кафедра высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный экономический университет»
(протокол №7 от 14.03.2013);

заведующий кафедрой общей математики и информатики
Белорусского государственного университета,
доктор физико-математических наук, профессор В. А. Еровенко

В26 **Векторная** и линейная алгебра. Аналитическая геометрия : пособие для проведения практ. занятий по высш. матем. / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2013. – 84 с.
ISBN 978-985-543-017-0.

В пособии приводятся задачи по линейной и векторной алгебре и аналитической геометрии – разделам курса высшей математики, изучаемым в высших технических учебных заведениях в первом семестре.

Предлагаются контрольные работы и задачи для самостоятельного решения. Пособие входит в состав методического комплекса вместе со сборниками задач в 10 частях.

УДК [514.742+512.64+514.12](076.5)
ББК 22.143я73+22.151.5я73

ISBN 978-985-543-017-0

Занятия 1–2

Матрицы и определители

Пример 1. Найти матрицу X, если: $2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 8 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Δ $X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 8 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. ▲

Пример 2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Найти AB, BX, $B^T BX$, AY, $A^T AY$. Показать, что матрица A является корнем многочлена $f(x) = x^2 - 4x - 9$.

Δ $AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 & 12 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

$BX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$B^T BX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 10 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$;

$AY = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$A^T AY = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 20 \\ 20 & 37 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -17 \end{pmatrix}$;

$f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} -$

$- \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. ▲

Пример 3. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&3\\0&0&4\end{pmatrix}$. Найти $A\cdot A^T$ и $A^T\cdot A$.

$$\Delta\ A\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&3\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&4\\5&14&12\\4&12&16\end{pmatrix};$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&3\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&7\\-2&1&-3\\7&-3&26\end{pmatrix}.\ \blacktriangle$$

Пример 4. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&4&-1\\2&3&0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}6&5&7\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}$.

Покажите, что $AX=BX$, хотя $A\neq B$.

$$\Delta\ A\cdot X=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5&7\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&11&19\\5&5&10\\18&16&26\end{pmatrix};$$

$$B\cdot X=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&4&-1\\2&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&5&7\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&11&19\\5&5&10\\18&16&26\end{pmatrix}.\ \blacktriangle$$

Пример 5. Вычислить $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&2\\2&2&3\\3&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. **Отв.:** $\begin{pmatrix}5\\15\\25\\35\end{pmatrix}$.

Пример 6. Пусть $\overline{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$. Найти размерность матрицы $C=X^TAX$. **Отв.:** $C_{1\times1}$ – это число.

Пример 7. Пусть

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Найти $X^T AX$.

$$\Delta \ (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ \ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ \ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3). \ \blacktriangle$$

Пример 8. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Delta \ \ x^2 + x + 4x + 4 = 0, \ \ x^2 + 5x + 4 = 0, \ \ x_1 = -1, x_2 = -4.$ ▲

Пример 9. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}:$$

а) по определению; б) по правилу Саррюса; в) разложив его по второму столбцу; г) приведя его к треугольному виду.

$$\Delta \ \text{а)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 15 + 70 + 2 = 87;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 40 + 6 - 4 + 10 + 30 = 87;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 70 + 1 + 16 = 87;$$

г) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -8 & 7 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 87 \end{vmatrix} = 87.$ ▲

Пример 10. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 2 & -4 & -8 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 27 \\ -9 & 3 & 0 \\ 15 & 6 & -3 \end{vmatrix}$.

Δ а) $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 2 & -4 & -8 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -1{,}5 \begin{vmatrix} 2 & -4 & -8 \\ 2 & -4 & -8 \\ 7 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$;

б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 27 \\ -9 & 3 & 0 \\ 15 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 3^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 27\left(1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\right) =$

$= 27(-1-99) = -2700.$ ▲

Пример 11. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}.$$

Δ $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 15323 & 37527 \\ 0 & 23735 & 17417 \\ 0 & 23737 & 17418 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 23735 & 17417 \\ 23737 & 17418 \end{vmatrix} =$

$= 2\begin{vmatrix} 23735 & 17417 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -22198.$ ▲

Пример 12. Доказать тождество

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1x & 2a_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & 2a_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_1 & c_1 \\ a_2 & 2a_2 & c_2 \\ a_3 & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} b_1x & 2a_1 & c_1 \\ b_2x & 2a_2 & c_2 \\ b_3x & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \blacktriangle$$

Пример 13. Вычислить определитель, предварительно упростив его:

$$\begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} + a^2\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -x^2+y^2 & y-x & 0 \\ z^2-x^2 & z-x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a\,((y^2-x^2)(z-x)-(z^2-x^2)(y-x) = a(y-x)(z-x)(y-z).\ \blacktriangle$$

Пример 14. Вычислить определитель путем преобразования его к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \sim \begin{matrix} (2)\to(2)-2\,(1) \\ (3)\to(3)-3\,(1) \\ (4)\to\ 4\ -4\,(1) \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} \sim \begin{matrix} (3)\to 3-2(2) \\ (4)\to 4-7(2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} \sim (4)\to(4)+(3) \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\,(-1)(-4)\,40 = 160.\blacktriangle$$

Пример 15. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\Delta \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & -8 & 6 & -1 \\ 2 & 9 & 1 & -6 \\ 1 & 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & -20 & 3 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -15 & -8 \\ 1 & 6 & 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -9 & -20 & 3 \\ -14 & -2 & -2 \\ -3 & -15 & -8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 9 & 20 & -3 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & 15 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 30 & 23 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -53 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 30 & 23 \\ -53 & 7 \end{vmatrix} = -2\,(210 + 1219) = -2858\,. \quad \blacktriangle$$

Пример 16. Вычислить определитель n-го порядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \cdots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 5 & 5 & 5 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

Δ Вычитая первую строку из всех остальных, получим

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \cdots & 5 \\ 0 & -5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot 5^n. \quad \blacktriangle$$

Пример 17. Вычислить определитель n-го порядка: $D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$.

Δ Из каждой строки вычитаем стоящую ниже строку. Получим

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко второму столбцу первый, к третьему столбцу сумму первых двух столбцов и к k-му столбцу сумму первых $(k-1)$ столбцов, где $k = 2, 3, ..., n$. Будем иметь

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 2 & 2+2 & 2+4 & \cdots & 3+2(n-1) \end{vmatrix} = 3 + 2(n-1) = 2n+1. \ ▲$$

Пример 18. Выяснить, существует ли матрица, обратная матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, и если существует, найти ее.

Δ Так как $\det A = 3 \neq 0$, матрица A является невырожденной и для нее существует обратная матрица.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A: $A_{11} = 9$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -5$, $A_{22} = 2$. Присоединенная матрица $B = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Обратная матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot B^T = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 19. Методом присоединенной матрицы найти A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Δ Находим

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8, \ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \ A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-4,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3,\ A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2.$$

Присоединенная матрица

$$B=\begin{pmatrix}8 & 1 & -2\\ -12 & -4 & 3\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,B^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-8 & 12 & -3\\ -1 & 4 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}.\ \blacktriangle$$

Пример 20. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, путем элементарных преобразований строк.

Δ Запишем матрицу (A/E) и выполним элементарные преобразования ее строк в следующем порядке:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\ (2)\to(2)-3\,(1)\ \sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\sim\ (1)\to(1)+(2)\ \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\sim(2)\to-0{,}5\,(2)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1{,}5 & -0{,}5\end{array}\right).$$

Таким образом, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

Пример 21. Решить матричное уравнение:

$$X\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 1 & 14 & -7\\ 1 & 20 & -12\end{pmatrix}.$$

Δ Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 1 & 14 & -7\\ 1 & 20 & -12\end{pmatrix}.$$

Тогда $X\cdot A=B\sim X\,(A\cdot A^{-1})=BA^{-1}\sim\ XE=BA^{-1}\sim\ X=B\cdot A^{-1}$. Таким образом, надо найти матрицу A^{-1} и умножить ее справа на матрицу B. Найдем определитель матрицы A и алгебраические дополнения ее элементов:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8;$$

$A_{11} = 8,\ A_{12} = -2,\ A_{13} = -4,\ A_{21} = -4,\ A_{22} = 3,\ A_{23} = 2,\ A_{31} = 0,\ A_{32} = 2,\ A_{33} = 4;$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 14 & -7 \\ 1 & 20 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 16 \\ 8 & 24 & 0 \\ 16 & 32 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 22. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Δ Пусть

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда $A \cdot X \cdot B = C \sim\ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \sim\ X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$. Таким образом, надо найти матрицы A^{-1}, B^{-1} и найти произведение $A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$. Найдем определители матриц A и B и алгебраические дополнения их элементов:

$\det A = -1,\ \ A_{11} = 1,\ \ A_{12} = 0,\ \ A_{21} = -2,\ \ A_{22} = -1;$

$\det B = 4,\ \ B_{11} = 4,\ \ B_{12} = -2,\ \ B_{21} = 0,\ \ B_{22} = 1.$

Тогда $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \ B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$

$$X = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Показать, что:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}$.

2. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-x & -2 & 3 \\ 10 & -4-x & 5 \\ 5 & -4 & 6-x \end{vmatrix} = 0.$$

Отв.: $x_{1,2} = 1,\ x_3 = 2$.

3. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. **Отв.:** 54;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 9 & 1 & 25 \\ 8 & 27 & -1 & 125 \end{vmatrix}$. **Отв.:** 432.

4. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$:

а) методом присоединенной матрицы;

б) путем элементарных преобразований строк.

Отв.: $A^{-1} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Решить матричное уравнение:

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. **Отв.:** $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Занятия 3–4

Векторная алгебра

Пример 1. По заданным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ построить вектор $2\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$.

Δ Решение задачи приведено на рис. 1.

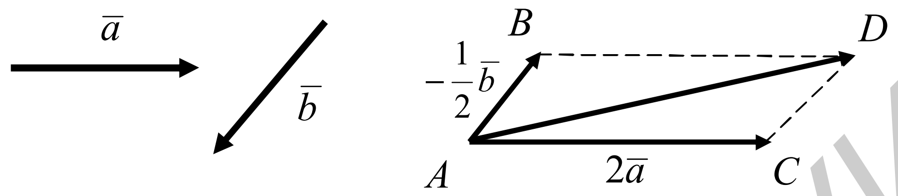

Рис. 1

$\overline{AD}=2\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$. ▲

Пример 2. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{a}-\overline{b}|$.

Δ Построим на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на сторонах параллелограмм. Тогда $|\overline{a}+\overline{b}|$ и $|\overline{a}-\overline{b}|$ – это длины его диагоналей. Из множества параллелограммов свойством равенства длин диагоналей обладают только прямоугольники. Таким образом, угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $90°$. ▲

Пример 3. Найти координаты и длину вектора $3\overline{a}+2\overline{b}$, если $\overline{a}=(0;-2;-3)$, $\overline{b}=(3;2;3)$.

Δ Согласно свойству линейности $3\overline{a}+2\overline{b}=(0;-6;-9)+(6;4;6)=$ $=(6;-2;-3)$. Поэтому $|2\overline{a}+3\overline{b}|=\sqrt{36+4+9}=7$. ▲

Пример 4. Заданы три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(0;1;-1)$, $B(1;0;2)$, $C(2;3;0)$. Найти координаты точки D.

Δ Пусть $D(x;y;z)$. Поскольку $\overline{BC}=(1;3;-2)$, $\overline{AD}=(x;y-1;z+1)$, а векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ равны, $1=x$, $3=y-1$, $-2=z+1$. Отсюда $x=1$, $y=4$, $z=-3$, т. е. $D(1;4;-3)$. ▲

Пример 5. Даны проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на оси координат $X=5$, $Y=-4$, зная, что его начало в точке $M_1(-2;3)$, найти координаты его конца.

Δ Если известны координаты точек $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, то проекции X и Y на оси координат направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ могут быть определены по формулам $X=x_2-x_1, Y=y_2-y_1$. Таким образом, $x_2=X+x_1=3$, $y_2=Y+y_1=-1$; $M_2(3;-1)$. ▲

Пример 6. Точки $A(1;1)$, $B(0;-3)$, $C(2;2)$ – вершины треугольника. Найдите длину медианы AK и координаты точки M пересечения медиан $\Delta\, ABC$ (рис.2).

Δ $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}=(-1;-4)+(1;1)=(0;-3)$; $\overline{AK}=\dfrac{1}{2}\overline{AD}=\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$;

$AK=\sqrt{0+\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$; $\overline{AM}=\dfrac{2}{3}\overline{AK}=(0;-1)$.

Пусть $O(0;0)$. Тогда

$\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{AM}=(1;1)+(0;-1)=(1;0)$,

т. е. $M(1;0)$. ▲

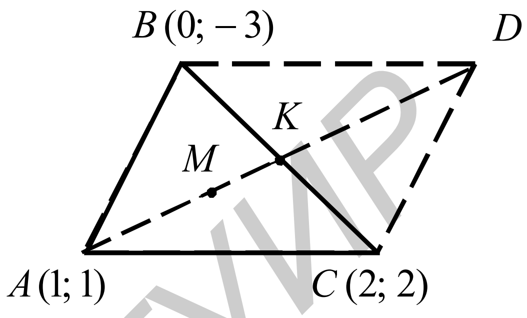

Рис. 2

Пример 7. Найти вектор $\bar{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}=7\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k}$ и $\bar{b}=-2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$, если $|\bar{x}|=5\sqrt{6}$.

Δ Найдем орты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. $\bar{a}_0=\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=\dfrac{7\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k}}{\sqrt{81}}=\dfrac{1}{9}\left(7\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k}\right)$;

$\bar{b}_0=\dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|}=\dfrac{-2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}}{\sqrt{9}}=\dfrac{1}{3}\left(-2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}\right)$. На векторах $\bar{a}_0$ и $\bar{b}_0$ как на сторонах построим ромб. Тогда его диагональ будет направлена по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}_0$ и $\bar{b}_0$, т. е. $\bar{x}=\lambda(\bar{a}_0+\bar{b}_0)=\lambda\left(\dfrac{1}{9}\bar{i}-\dfrac{7}{9}\bar{j}+\dfrac{2}{9}\bar{k}\right)$, $\lambda>0$. Так как $|\bar{x}|=5\sqrt{6}$, то $\dfrac{\lambda}{9}\sqrt{1+49+4}=5\sqrt{6}$, $\lambda=15$. Таким образом, $\bar{x}=\dfrac{5}{3}\left(\bar{i}-7\bar{j}+2\bar{k}\right)$. ▲

Пример 8. Найти значение параметра t, при котором вектор $\bar{a}=-\bar{i}+t\bar{j}+4\bar{k}$ имеет длину, равную 5, и образует с вектором $\bar{j}$ тупой угол.

Δ Очевидно, $t<0$. Далее $|\bar{a}|=\sqrt{1+t^2+16}=5$, $t=-2\sqrt{2}$. ▲

Пример 9. К вершине куба приложены три силы, равные по величине соответственно $1, 2, 3$ и направленные по диагоналям граней куба, выходящих из одной вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

Δ Так как $\overline{F_1}=\lambda_1(\bar{i}+\bar{j}), \overline{F_2}=\lambda_2(\bar{i}+\bar{k}), \overline{F_3}=\lambda_3(\bar{j}+\bar{k})$ и $\left|\overline{F_1}\right|=\lambda_1\sqrt{2}=1$, $\left|\overline{F_2}\right|=\lambda_2\sqrt{2}=2$, $\left|\overline{F_3}\right|=\lambda_3\sqrt{2}=3$, то $\overline{F_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{i}+\bar{j}), \overline{F_2}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}(\bar{i}+\bar{k}),\ \overline{F_3}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}(\bar{i}+\bar{k})$.

Таким образом, $\overline{F}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3}=\frac{3}{\sqrt{2}}\,\bar{i}+\frac{4}{\sqrt{2}}\,\bar{j}+\frac{5}{\sqrt{2}}\,\bar{k}$, $|\overline{F}|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5$.▲

Пример 10. Доказать, что векторы $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}, \bar{b}=\bar{i}-3\bar{j}$ и $\bar{c}=4\bar{i}-2\bar{j}$ линейно зависимы.

Δ Как известно, любые три вектора плоскости линейно зависимы. Покажем, например, что $\bar{c}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}$:

$$\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix},\ \begin{cases}\alpha+\beta=4,\\2\alpha-3\beta=-2,\end{cases}\ \alpha=2,\ \beta=2,$$

т.е. векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ являются линейно зависимыми. ▲

Пример 11. Даны векторы $\bar{a}=2\bar{e}_1-\bar{e}_2$, $\bar{b}=\bar{e}_1+3\bar{e}_2$, где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ – базис. Показать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\bar{c}=3\bar{e}_1-2\bar{e}_2$ в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Δ Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не являются коллинеарными, так как $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{3}$. Поэтому они тоже образуют базис. Любой вектор можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов. Для нахождения координат вектора $\bar{c}$ в этом базисе составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \begin{cases}2\alpha+\beta=3,\\-\alpha+3\beta=-2,\end{cases}\ \alpha=\frac{11}{7},\ \beta=-\frac{1}{7}.$$

Таким образом, в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$ координаты вектора $\bar{c}=\left(\frac{11}{7};-\frac{1}{7}\right)$. ▲

Пример 12. Задана тройка векторов $\bar{e}_1=(1;0;0), \bar{e}_2=(1;1;0), \bar{e}_3=(1;1;1)$. Доказать, что эта тройка векторов образует базис в V_3. Вычислить координаты вектора $\bar{a}=(7;3;1)$ в этом базисе.

Δ Составим линейную комбинацию векторов $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ и приравняем ее нулевому вектору:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0,\\ \beta+\gamma=0,\\ \gamma=0,\end{cases}\quad \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Указанная тройка векторов образует базис. Найдем координаты вектора $\bar{a}$ в этом базисе:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix},\ \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=7,\\ \beta+\gamma=3,\\ \gamma=1,\end{cases}\quad \alpha=4,\ \beta=2, \gamma=1,$$

т. е. в базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ вектор $\bar{a}=(4;2;1)$. ▲

Пример 13. Может ли некоторый ненулевой вектор образовывать с векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ углы, равные соответственно: а) $120, 135, 45°$; б) $120, 135, 60°$?

Δ Направляющие косинусы любого вектора связаны единственным соотношением: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, так как:

а) $\cos^2 120° + \cos^2 135° + \cos^2 45° = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$, следовательно с векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ никакой вектор не может образовывать углы $120, 135$ и $45°$ соответственно;

б) $\cos^2 120° + \cos^2 135° + \cos^2 60° = 1$, поэтому такие углы возможны. ▲

Пример 14. Дан треугольник: $A(4;1), B(7;5)$ и $C(-4;7)$. Найти координаты точки D пересечения биссектрисы угла A со стороной BC.

Δ Найдем длины сторон треугольника AB и AC:

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; \quad AC = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10.$$

Как известно, $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|DB|}$. Таким образом, точка D делит отрезок CD в отношении $\lambda = 2$. Поэтому $X_D = \frac{X_C + 2X_B}{1+2} = \frac{10}{3}$; $Y_D = \frac{Y_C + 2Y_B}{1+2} = \frac{17}{3}$. Итак, $D\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}\right)$. ▲

Пример 15. Найти две точки A и B, если известно, что точка $C(-5;4)$ делит отрезок AB в отношении $3:4$, а точка $D(6;-5)$ – в отношении $2:3$.

Δ Пусть $A(X_A; Y_A), B(X_B; Y_B)$. Тогда имеем

$$-5 = \frac{X_A + \frac{3}{4}X_B}{\frac{3}{4}+1}, \quad 4 = \frac{Y_A + \frac{3}{4}Y_B}{\frac{3}{4}+1}, \quad 6 = \frac{X_A + \frac{2}{3}X_B}{\frac{2}{3}+1}, \quad -5 = \frac{Y_A + \frac{2}{3}Y_B}{\frac{2}{3}+1}.$$

Решая полученную систему, найдем $X_A = 160, X_B = -225, Y_A = -131, Y_B = 184$; $A(160; -131), B(-225; 184)$. ▲

Пример 16. Полюс полярной системы координат совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, полярная ось направлена по биссектрисе первого координатного угла. Даны декартовы прямоугольные координаты точек $M_1(-1;1), M_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2}), M_3(1;\sqrt{3}), M_4(-\sqrt{3};1)$ и $M_5(2\sqrt{3}; -2)$. Определить полярные координаты этих точек.

Δ Найдем длины радиус-векторов этих точек:

$r_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, r_2 = \sqrt{2+2} = 2, r_3 = \sqrt{1+3} = 2, r_4 = \sqrt{3+1} = 2, r_5 = \sqrt{12+4} = 4$.

Найдем углы, которые образуют радиус-векторы этих точек с осью OX:

$$\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}, \varphi_2 = -\frac{\pi}{4}, \varphi_3 = \frac{\pi}{3}, \varphi_4 = \frac{5}{6}\pi, \varphi_5 = -\frac{\pi}{6}.$$

Тогда, очевидно,

$\theta_1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$, $\theta_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, $\theta_4 = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{12}\pi$, $\theta_5 = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{5}{12}\pi$. Таким образом, указанные точки имеют следующие полярные координаты:

$$M_1\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{2}\right), M_2\left(2; -\frac{\pi}{2}\right), M_3\left(2; \frac{\pi}{12}\right), M_4\left(2; \frac{7}{12}\pi\right), M_5\left(4; -\frac{5}{12}\pi\right). \blacktriangle$$

Пример 17. Найти уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат, если в полярной системе координат эта линия задана уравнением

$$r = \frac{3}{4 - \cos\theta}.$$

Δ Так как $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{4 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \sim 1 = \frac{3}{4\sqrt{x^2 + y^2} - x} \sim 4\sqrt{x^2 + y^2} = 3 + x \sim$$

$$\begin{cases} 16\,(x^2 + y^2) = 9 + 6x + x^2 \\ x \geq -3 \end{cases} \sim 15x^2 + 16y^2 - 6x - 9 = 0. \blacktriangle$$

Пример 18. Найти угол, образованный единичными векторами $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, если известно, что векторы $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ и $\bar{b} = 5\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2$ перпендикулярны.

Δ Находим скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$(\bar{a}, \vec{b}) = (\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, 5\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2) =$$

$$= 5\bar{e}_1^2 - 4\,(\bar{e}_1, 2\bar{e}_2) + 10\,(\bar{e}_2, 2\bar{e}_1) - 8\bar{e}_2^2 = -3 + 6\,(\bar{e}_1, 2\bar{e}_2),$$

так как $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $(\bar{a}, \vec{b}) = 0$. Отсюда $(\bar{e}_1, 2\bar{e}_2) = 1 \cdot 1 \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. $\blacktriangle$

Пример 19. Даны три вектора: $\bar{a} = (1; -3; 4)$, $\bar{b} = (3; -4; 2)$ и $\bar{c} = (-1; 1; 4)$. Вычислить $пр_{\,\bar{b} + \bar{c}}\, \bar{a}$.

Δ Пусть $\bar{d} = \bar{b} + \bar{c} = (2; -3; 6)$. Тогда

$$np_{\bar d}\,\bar a=\frac{(\bar d,\bar a)}{|\bar d|}=\frac{2+9+24}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{35}{7}=5.\ \blacktriangle$$

Пример 20. Найти проекцию вектора $\bar a=(4;-3;2)$ на вектор, составляющий одинаковые тупые углы с осями координат.

Δ В качестве вектора, составляющего одинаковые тупые углы с осями координат, можно взять вектор $\bar b=-\bar i-\bar j-\bar k$. Действительно,

$$\bar b^{o}=-\frac{1}{\sqrt3}i-\frac{1}{\sqrt3}\bar j-\frac{1}{\sqrt3}\bar k\,.$$

Следовательно, $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt3}$. Тогда

$$np_{\bar b}\,\bar a=\frac{(\bar b,\bar a)}{|\bar b|}=\frac{-4+3-2}{\sqrt3}=-\sqrt3.\ \blacktriangle$$

Пример 21. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AD=1$, $AB=2$, $AA_1=3$. Найти угол между скрещивающимися прямыми AC_1 и B_1D_1.

Δ Выберем систему координат с началом в точке A и с осями OX, OY и OZ, совпадающими соответственно с ребрами AD, AB и AA_1. Тогда $\overline{AC_1}=\bar i+2\bar j+3\bar k$, $\overline{B_1D_1}=\bar i-2\bar j$, $\cos\varphi=\left|\dfrac{(\overline{AC_1},\overline{B_1D_1})}{|\overline{AC_1}|\cdot|\overline{B_1D_1}|}\right|=\left|\dfrac{1-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt5}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{70}}$,

$\varphi=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{70}}$. $\blacktriangle$

Пример 22. В треугольнике ABC точка H – точка пересечения высот. Известно, что $\overline{AB}=(6;-2)$, $\overline{AC}=(3;4)$. Найти координаты вектора $\overline{AH}$.

Δ Пусть $\overline{AH}=(X;Y)$. Тогда $\overline{BH}=\overline{AH}-\overline{AB}=(X-6;Y+2)$. Так как $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ и $\overline{BH}\perp\overline{AC}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}3x-6y=0,\\3(x-6)+4(y+2)=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x-2y=0,\\3x+4y=10,\end{cases}\quad x=2,\ y=1.\ \overline{AH}=(2;1).\ \blacktriangle$$

Пример 23. Упростить выражение $[\bar i,\bar j+\bar k]-[\bar j,\bar i+\bar k]+[\bar k,\bar i+\bar j+\bar k]$.

Δ Как известно, $[\bar i,\bar j]=\bar k$, $[\bar j,\bar k]=\bar i$, $[\bar k,\bar i]=\bar j$ и векторное произведение обладает свойством антикоммутативности. Поэтому

$$[\bar i,\bar j+\bar k]-[\bar j,\bar i+\bar k]-[\bar k,\bar i+\bar j+\bar k]\sim\bar k-\bar j-(-\bar k+\bar i)+(\bar j-\bar i)=-2\bar i+2\bar k.\ \blacktriangle$$

Пример 24. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$, если $\bar a=3\bar p+2\bar q$, $\bar b=2\bar p-\bar q$, $|\bar p|=4$, $|\bar q|=3$, $\angle(\bar p,\bar q)=\dfrac{3\pi}{4}$.

Δ $S=\big|[a,b]\big|=\big|[3\bar p+\bar q,\,2\bar p-\bar q]\big|=|\,6[\bar p,\bar p]-3[\bar p,\bar q]+2[\bar q,\bar p]-[\bar q,\bar q]\,|=$

$= \left|5[\overline{p},\overline{q}]\right| = 5\cdot 4\cdot 3\cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 30\sqrt{2}$. ▲

Пример 25. Найти координаты вектора $\overline{x}$, если он перпендикулярен векторам $\overline{a}_1 = (4;\,-2;\,-3)$ и $\overline{a}_2 = (0;\,1;\,3)$, образует с ортом $\overline{j}$ тупой угол и $|\overline{x}| = 26$.

Δ В качестве вектора, перпендикулярного векторам $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$, можно взять вектор $\overline{b} = [\overline{a}_1, \overline{a}_2]$. Тогда

$$\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\overline{i} - 12\overline{j} + 4\overline{k}.$$

Вектор $\overline{x} = \lambda\overline{b}$, причем $\lambda > 0$. Так как $\lambda\sqrt{9+144+16} = 26$, то $\lambda = 2$. Таким образом $\overline{x} = -6\overline{i} - 24\overline{j} + 8\overline{k}$. ▲

Пример 26. Объем прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 6. Определить координаты вершины A_1, если координаты вершин одного из оснований призмы известны: $A\,(1;\,0;\,1)$, $B\,(2;\,0;\,0)$, $C\,(0;\,1;\,0)$.

Δ Так как координаты точки A известны, то для нахождения координат точки A_1 достаточно знать координаты вектора $\overline{AA_1}$. Найдем вектор:

$$\overline{n} = [\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}.$$

Так как $|\overline{n}| = \sqrt{6}$, то $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}|\overline{n}| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Высота призмы $h = \left|\overline{AA_1}\right| = 6 : \dfrac{\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$.

Призма прямая, поэтому $\overline{AA_1} = \pm 2\,(\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k})$. Если $O\,(0;\,0;\,0)$, то $\overline{OA_1} = \overline{OA} + \overline{AA_1}$:

1) $\overline{OA_1} = (1;\,0;\,1) + (2;\,4;\,2) = (3;\,4;\,3)$;

2) $\overline{OA_1} = (1;\,0;\,1) - (2;\,4;\,2) = (-1;\,-4;\,-1)$.

Следовательно, существуют две точки, удовлетворяющие условиям задачи: $A_1'(3;\,4;\,3)$ и $A_1''(-1;\,-4;\,-1)$. ▲

Пример 27. Показать, что векторы $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + m\,\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} + (m+1)\,\overline{k}$ и $\overline{c} = \overline{i} - \overline{j} + m\,\overline{k}$ ни при каком значении m не могут быть компланарными.

Δ Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Найдем

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ не являются компланарными. ▲

Пример 28. Даны вершины тетраэдра $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$. Найдите его объем и длину высоты, опущенной из вершины D.

Δ Имеем

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overline{AB},\ A\overline{C},\ A\overline{D})\right|,\ h = \frac{\left|(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})\right|}{\left|[\overline{AB}, \overline{AC}]\right|}.$$

Так как $\overline{AB}(3; 0; 3)$, $\overline{AC}(1; 1; -2)$, то

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3; 9; 3),\text{ и } \left|[\overline{AB}, \overline{AC}]\right| = 3\sqrt{11}.$$

Далее,

$$\overline{AD} = (4; 1; 0), \qquad (\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = (\overline{AD}, [\overline{AB}, \overline{AC}] = 4(-3) + 1\cdot 9 + 0\cdot 3 = -3.$$

Следовательно, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{2}$, $h = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Доказать, что $ABCD$ – параллелограмм, если $\overline{AB} = 2\overline{a} - 3\overline{b} + \overline{c}$, $\overline{AC} = \overline{a} - \overline{b} + 2\overline{c}$, $\overline{AD} = -\overline{a} + 2\overline{b} + \overline{c}$.

2. Доказать, что векторы $\overline{a} = \bar{i} + 2\bar{j}, \overline{b} = i - 3\bar{j}$ и $\overline{c} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$ линейно зависимы. Можно ли выразить вектор $\overline{b}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$? **Отв.:** нет.

3. Найти работу силы $\overline{F} = \bar{i} + \bar{k}$ при перемещении материальной точки на вектор $\overline{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$. **Отв.:** 4.

4. Длины базисных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ равны соответственно $1, 1, 2$; углы между ними равны $\angle(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 90°$, $\angle(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = \angle(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 60°$. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (-1; 0; 2)$, $\overline{b} = (2; -1; 1)$. **Отв.:** $\sqrt{94}$.

5. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны. При каких значениях скаляра λ коллинеарны векторы $\lambda\overline{a} + \overline{b}$ и $3\overline{a} + \lambda\overline{b}$? **Отв.:** $\lambda = \pm\sqrt{3}$.

6. Векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны. При каких значениях скаляра λ компланарны векторы $\overline{a} + 2\overline{b} + \lambda\overline{c}$, $4\overline{a} + 5\overline{b} + 6\overline{c}$, $7\overline{a} + 8\overline{b} + \lambda^2\overline{c}$?

Отв.: $\lambda = 3, \lambda = -4$.

7. Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

8. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2;0;2)$ и $D(5;-2;0)$ разделен на три равные части. **Отв.:** $(-1;2;4)$ и $(8;-4;-2)$.

9. Даны векторы $\overline{a}=(1;1)$ и $\overline{b}=(1;-1)$. Найти косинус угла между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$, удовлетворяющими системе уравнений $\begin{cases} 2\overline{x}+\overline{y}=\overline{a} \\ \overline{x}+2\overline{y}=\overline{b} \end{cases}$. **Отв.:** $-\frac{4}{5}$.

10. Даны векторы $\overline{a}=(1;3)$, $\overline{b}=(2;-1)$ и $\overline{c}=(-4;1)$. Найти числа α и β такие, что $\alpha\,\overline{a}+\beta\,\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$, $\alpha=\frac{2}{7}$, $\beta=\frac{13}{7}$.

11. Проверить, что векторы $\overline{a}=(-5;-1)$ и $\overline{b}=(-1;3)$ образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов $\overline{c}=(-1;2)$ и $\overline{d}=(2;-6)$ в этом базисе.

Отв.: $\overline{c}=\left(\frac{1}{16};\frac{11}{16}\right)$, $\overline{d}=(0;-2)$.

12. В полярной системе координат даны две точки $M_1\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ и $M_2\left(8;-\frac{\pi}{12}\right)$. Найти расстояние d между ними. **Отв.:** $d=7$.

Занятие 5

Прямая линия на плоскости

Пример 1. Прямая L задана общим уравнением: $x-3y+6=0$.

Записать уравнение прямой L: 1) с угловым коэффициентом; 2) в отрезках; 3) каноническое; 4) параметрическое; 5) нормальное.

Δ 1) $y=\frac{1}{3}x+2$; 2) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{2}=1$; 3) $x-6=3y$, $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{1}$;

4) $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{1}=t$, $x=3t+6$, $y=t$; 5) $-\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{6}{\sqrt{10}}=0$. ▲

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$ и параллельной прямой:

1) $x-2y+5=0$; 2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$; 3) $x=2$; 4) $y=-1$; 5) $x=3+t, y=4-7t$.

Δ 1. Нормальный вектор прямой $x-2y+5=0$ $\overline{n}=(1;-2)$. Так как прямые параллельны, в качестве нормального вектора искомой прямой можно взять вектор $\overline{n}$.

Уравнение прямой: $(x+3)-2(y-4)=0 \sim x-2y+11=0$.

2. В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\overline{q}=(2;3)$.

Уравнение прямой: $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-4}{3}$.

3. Очевидно, $x=-3$.

4. Очевидно, $y=4$.

5. Вектор $\overline{q}=(1;-7)$ является направляющим вектором прямой. Уравнение прямой: $x=-3+t$, $y=4-7t$. ▲

Пример 3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;4)$, и перпендикулярной прямой: 1) $x-2y+5=0$; 2) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}$; 3) $x=2$; 4) $y=-1$; 5) $x=3+t, y=4-7t$.

Δ 1) вектор $\overline{q}=(1;-2)$ является направляющим вектором искомой прямой. Уравнение прямой: $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-4}{-2}$; 2) вектор $\overline{n}=(2;3)$ является нормальным вектором искомой прямой. Уравнение прямой: $2(x+3)+3(y-4)=0$ ~ $2x+3y-6=0$; 3) очевидно, $y=4$; 4) очевидно, $x=-3$; 5) вектор $\overline{n}=(1;-7)$ является нормальным вектором прямой. Уравнение прямой: $1(x+3)-7(y-4)=0$ ~ $x-7y+31=0$. ▲

Пример 4. Составить уравнение прямой L, которая проходит через точку $M_0(2;10)$ и отсекает от второго координатного угла треугольник с площадью, равной 5.

Δ Запишем уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Тогда $\begin{cases}\dfrac{2}{a}+\dfrac{10}{b}=1,\\ -ab=10,\\ a<0,\end{cases}$ $\begin{cases}2b+10a=ab,\\ ab=-10,\\ a<0,\end{cases}$ $a=-2, b=5$.

Уравнение прямой L: $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{5}=1$, $5x-2y+10=0$. ▲

Пример 5. Найти угол между прямыми $2x+3y-5=0$ и $x-3y-7=0$.

Δ Углом между прямыми называется наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми. Значение φ (меньшего из углов) можно вычислить по формуле $\cos\varphi=\dfrac{|(\overline{n}_1,\overline{n}_2)|}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}$, где $\overline{n}_1=(2;3)$, $\overline{n}_2=(1;-3)$ – нормальные векторы этих прямых, т. е.

$$\cos\varphi = \frac{|2-9|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{1+9}} = \frac{7}{\sqrt{130}}, \ \varphi = \arccos\frac{7}{\sqrt{130}}. \ ▲$$

Пример 6. Даны две точки: $P(2;3)$ и $Q(-1;0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку PQ.

Δ Угловой коэффициент прямой PQ $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1$. Тогда угловой коэффициент искомой прямой $k_1 = -\dfrac{1}{k} = -1$, а ее уравнение $y - 0 = -1(x+1)$, $x + y + 1 = 0$. ▲

Пример 7. Составить уравнение прямой L_3, симметричной прямой L_1: $3x - y + 5 = 0$ относительно прямой L_2: $x + y - 1 = 0$.

Δ Угловой коэффициент прямой L_1 $k_1 = 3$, угловой коэффициент прямой L_2 $k_2 = -1$. Пусть угловой коэффициент прямой L_3 равен k_3. Тогда

$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1\cdot k_2} = \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2\cdot k_3}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{3+1}{1-3} = \frac{-1-k_3}{1-k_3}, \ k_3 = \frac{1}{3}.$$

Найдем точку пересечения всех трех прямых:

$$\begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ x + y - 1 = 0, \end{cases} \quad x = -1, \ \ y = 2.$$

Уравнение прямой L_3: $y - 2 = \dfrac{1}{3}(x+1)$, $x - 3y + 7 = 0$. ▲

Пример 8. Найдите длину h высоты, опущенной из вершины $A(4;4)$ треугольника ABC, если $B(-6;-1)$, $C(-2;-4)$.

Δ Уравнение прямой:

$$BC: \ \frac{x+6}{-2+6} = \frac{y+1}{-4+1}, \ 3x + 4y + 22 = 0.$$

Поэтому $h = \dfrac{|3\cdot 4 + 4\cdot 4 + 22|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 10$. ▲

Пример 9. Напишите уравнение биссектрисы L_0 того угла, образованного прямыми L_1: $x + 7y = 0$ и $L_2: x - y - 4 = 0$, внутри которого лежит точка $A(1;1)$.

Δ Отклонения точки A от прямых L_1 и L_2 имеют знаки:

$$d_{L1}(A) = \frac{1 + 7\cdot 1}{\sqrt{50}} > 0 \ \text{ и } \ d_{L2}(A) = \frac{1-1-4}{\sqrt{2}} < 0.$$

Любая точка $M(x; y)$, принадлежащая L_0, равноудалена от прямых L_1 и L_2, имеет отклонения от этих прямых тех же знаков, что и точка A.

Таким образом, все точки биссектрисы удовлетворяют уравнению

$$\frac{x+7y}{\sqrt{50}} = -\frac{x-y-4}{\sqrt{2}} \sim 3x + y - 10 = 0. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Найти точку $B(x_1; y_1)$, симметричную точке $A(8; 12)$ относительно прямой $L: x - 2y + 6 = 0$.

Δ Приведем уравнение прямой L к каноническому виду: $\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y}{1}$. Вектор $\overline{AB} = (x_1 - 8; y_1 - 12)$ перпендикулярен вектору $\overline{a} = (2; 1)$, поэтому $2(x_1 - 8) + 1(y_1 - 12) = 0$. Точка

$$Q\left(\frac{8+x_1}{2}; \frac{12+y_1}{2}\right),$$

являющаяся серединой отрезка AB, принадлежит прямой L, т. е.

$$\frac{8+x_1}{2} - 2\,\frac{12+y_1}{2} + 6 = 0.$$

Решив полученную систему уравнений, найдем координаты точки B:

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 28 = 0, \\ x_1 - 2y_1 - 4 = 0, \end{cases} \quad x = 12,\ y = 4, \text{ т. е. } B(12; 4). \ \blacktriangle$$

Пример 11. Точка $A(3; -2)$ является вершиной квадрата $ABCD$, а точка $M(1; 1)$ – точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон квадрата.

Δ Запишем уравнение прямой AM: $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{3}$.

Угловой коэффициент этой прямой $k = -\dfrac{3}{2}$. Для одной из сторон квадрата, проходящих через точку A, выполняется равенство:

$$\frac{k_1 + \frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{2}k_1} = 1, \quad k_1 = -\frac{1}{5},$$

где k_1 – угловой коэффициент этой прямой. Тогда угловой коэффициент другой стороны, проходящей через точку A,

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = +5.$$

Найдем координаты точки C:

$$\frac{x+3}{2}=1,\ \ \frac{y-2}{2}=1;\ \ C(-1;4).$$

Запишем уравнение сторон квадрата:

$$y+2=-\frac{1}{5}(x-3),\ x+5y+7=0;\ y+2=5(x-3),\ 5x-y-17=0;$$

$$y-4=-\frac{1}{5}(x+1),\ x+5y-19=0;\ y-4=5(x+1),\ 5x-y+9=0.\ \blacktriangle$$

Пример 12. Составить уравнения сторон треугольника, зная две его вершины $A(3;5)$, $B(6;1)$ и точку пересечения его медиан $M(4;0)$ (рис.3).

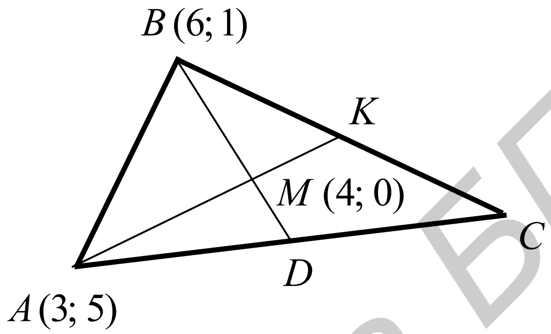

Рис. 3

Δ Пусть $O(0;0)$ – начало системы координат. Тогда

$$\overline{BM}=(-2;-1),\ \overline{BD}=\frac{3}{2}\overline{BM}=\left(-3;-\frac{3}{2}\right);$$

$$\overline{AM}=(1;-5),\ \overline{AK}=\frac{3}{2}\overline{AM}=\left(\frac{3}{2};-\frac{15}{2}\right);$$

$$\overline{OD}=\overline{OB}+\overline{BD}=\left(3;-\frac{1}{2}\right),\text{ т. е. } D\left(3;-\frac{1}{2}\right);$$

$$\overline{OK}=\overline{OA}+\overline{AK}=\left(\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right),\text{ т. е. } K\left(\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right).$$

Составляем уравнения сторон треугольника как прямых, проходящих через две заданные точки:

$$AB:\frac{x-3}{6-3}=\frac{y-5}{1-5},\ 4x+3y-27=0;\quad AC:\frac{x-3}{3-3}=\frac{y-5}{-\frac{1}{2}-5},\ x=3;$$

$$BC:\frac{x-6}{\frac{9}{2}-6}=\frac{y-1}{-\frac{5}{2}-1},\ 7x-3y-39=0.\ \blacktriangle$$

Пример 13. Даны координаты двух вершин треугольника $A(-1;3)$, $B(2;5)$ и точка пересечения его высот $H(1;4)$ (рис.4). Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.

Δ Пусть координаты точки $C(x;y)$. Тогда $\overline{AH}=(2;1)$, $\overline{HB}=(1;1)$, $\overline{AC}=(x+1;\,y-3)$, $\overline{BC}=(x-2;\,y-5)$. Так как $\overline{AC}\perp\overline{HB}$ и $\overline{BC}\perp\overline{AH}$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+1+y-3=0,\\ 2x-4+y-5=0, \end{cases} \quad C(7;-5).$$

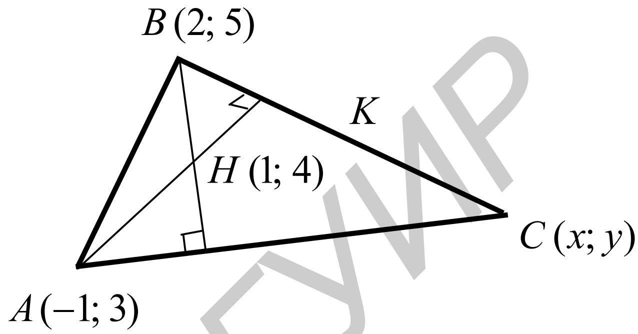

Рис. 4

Зная координаты вершин треугольника, записываем уравнения его сторон:

$$AB:\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{2},\quad 2x-3y+11=0;$$

$$AC:\frac{x+1}{8}=\frac{y-3}{-8},\ x+y-2=0;\ BC:\frac{x-2}{5}=\frac{y-5}{-10},\ 2x+y-9=0.\ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Через точку $M(3;5)$ провести прямую так, чтобы она отсекала от координатного угла равнобедренный треугольник.

Отв.: $x+y-8=0,\ x-y+2=0$.

2. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, если уравнение гипотенузы $y=7x-4$ и вершина прямого угла $C(3;4)$.

Отв.: $y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4},\ y=-\frac{4}{3}x-8$.

3. Из точки $M(5;4)$ выходит луч света под углом $\varphi=\mathrm{arctg}2$ к оси Ox и отражается от нее. Написать уравнение падающего и отраженного лучей.

Отв.: $y=2x-6,\ y=-2x+6$.

4. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2;-4)$, и уравнения биссектрис двух его углов: $x+y-2=0$ и $x-3y-6=0$.

Отв.: $x+7y-6=0,\ x-y-6=0,\ 7x+y-10=0$.

Занятия 6–7

Плоскость и прямая в пространстве

Пример 1. Заданы плоскость $P: -2x + y - z + 1 = 0$ и точка $M_0(1; 1; 1)$. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку M_0 параллельно плоскости P, и вычислить расстояние $\rho(P, P')$.

Δ Так как плоскости P и P' параллельны, нормальный вектор плоскости P' $\overline{n} = (-2; 1; -1)$. Если точка $M(x; y; z)$ принадлежит плоскости P', то $(\overline{n}, \overline{M_0M}) = 0$, $-2(x-1) + 1(y-1) - 1(z-1) = 0$. Искомое общее уравнение плоскости $-2x + y - z + 2 = 0$.

Расстояние $\rho(P, P') = \rho(M_0, P) = \dfrac{|-2\cdot 1 + 1\cdot 1 - 1\cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. ▲

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 2; 3)$, $M_2(2; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $3x + 4y + z - 6 = 0$.

Δ Если точка $M(x; y; z)$ принадлежит искомой плоскости, то векторы $\overline{M_1M}(x-1; y-2; z-3)$, $\overline{M_1M_2}(1; -1; -2)$ и $\overline{n} = (3; 4; 1)$ являются компланарным и их смешанное произведение равно нулю.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad x - y + z - 2 = 0. \ ▲$$

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\overline{a}_1(3; 1; -1)$ и $\overline{a}_2(1; -2; 1)$.

Δ Векторы $\overline{M_1M}(x-3; y-4; z+5)$, $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ компланарны. Следовательно,

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad x + 4y + 7z + 16 = 0. \ ▲$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1; 2; 0)$, $M_2(2; 1; 1)$ и $M_3(3; 0; 1)$.

Δ Векторы $\overline{M_1M} = (x-1; y-2; z)$, $\overline{M_1M_2} = (1; -1; 1)$ и $\overline{M_1M_3} = (2; -2; 1)$ являются компланарными, поэтому

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad x + y - 3 = 0. \ ▲$$

Пример 5. Основанием треугольной пирамиды $DABC$ с вершиной $D(2; 2; -\sqrt{3})$ служит треугольник с вершинами в точках $A(0; 0; 0)$, $B(0; 1; 1)$,

$C\,(1;\,1;\,0)$. Найдите длину h высоты пирамиды.

Δ Найдем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A, B, C. Векторы $\overline{AM}\,(x;\,y;\,z)$, $\overline{AB}\,(0;\,1;\,1)$, $\overline{AC}\,(1;\,1;\,0)$ компланарны. Поэтому $0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x + y - z$. Длина высоты есть расстояние от точки D до этой плоскости. Таким образом, $h = \dfrac{\left|-2+2+\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+1+1}} = 1$. ▲

Пример 6. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $P: 2x + 3y - 5z - 30 = 0$ и координатными плоскостями.

Δ Уравнение этой плоскости в отрезках имеет вид $\dfrac{x}{15} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{z}{-6} = 1$. Плоскость P отсекает от осей OX, OY и OZ отрезки, длины которых соответственно равны $15, 10$ и 6. Поэтому $V = \dfrac{1}{6}\left|a \cdot b \cdot c\right| = \dfrac{1}{6} \cdot 15 \cdot 10 \cdot 6 = 150$. ▲

Пример 7. Даны две плоскости P_1 и P_2. Найти косинус угла между ними, если $P_1: -x + 2y - z + 1 = 0,\ P_2: y + 3z - 1 = 0$.

Δ Векторы $\overline{n}_1\,(-1;\,2;\,-1)$ и $\overline{n}_2\,(0;\,1;\,3)$ являются нормальными векторами к этим плоскостям. Поэтому

$$\cos(P_1 \hat{,} P_2) = \left|\cos(\overline{n}_1 \hat{,} \overline{n}_2)\right| = \frac{\left|(\overline{n}_1, \overline{n}_2)\right|}{\left|\overline{n}_1\right|\left|\overline{n}_2\right|} = \frac{\left|2-3\right|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{15}}.\ ▲$$

Пример 8. Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные пересекающимися плоскостями $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $2x - 10y + 4z - 2 = 0$.

Δ Биссекторной плоскостью является геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей. Для любой точки $M\,(x_0;\,y_0;\,z_0)$

$$d_1 = \frac{\left|2x_0 - y_0 + 5z_0 + 3\right|}{\sqrt{30}},\ d_2 = \frac{\left|2x_0 - 10y_0 + 4z_0 - 2\right|}{\sqrt{120}}.$$

Поскольку $d_1 = d_2$, то

$$2\,(2x_0 - y_0 + 5z_0 + 3) = \pm(2x_0 - 10y_0 + 4z_0 - 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_0 - 6y_0 + 7z_0 + 2 = 0, \\ x_0 + 4y_0 + 3z_0 + 4 = 0. \end{array}\right.$$

Таким образом, существует две биссекторные плоскости: $3x - 6y + 7z + 2 = 0$ и $x + 4y + 3z + 4 = 0$. ▲

Пример 9. Плоскость P задана общим уравнением: $x + 3y - 4z + 10 = 0$.

Записать нормальное уравнение этой плоскости.

Δ Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду нужно все члены этого уравнения умножить на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, при этом знак μ выбирается противоположным знаку свободного члена D. Так как $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{26}}$, нормальное уравнение плоскости имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{26}}x - \frac{3}{\sqrt{26}}y + \frac{4}{\sqrt{26}}z - \frac{10}{\sqrt{26}} = 0. \ \blacktriangle$$

Пример 10. Прямая L задана уравнениями

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-5}{0}.$$

Укажите координаты каких-либо четырех точек этой прямой.

Δ Запишем уравнение прямой в параметрическом виде: $x = 1-2t$, $y = -3+t$, $z = 5+0t$. Полагая, например, что $t = 0, 1, 2, 3$, получим $A(1;-3;5)$, $B(-1;-2;5)$, $C(-3;-1;5)$, $D(-5;0;5)$. $\blacktriangle$

Пример 11. Прямая L задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0. \end{cases}$$

Написать канонические уравнения прямой, а также уравнения ее проекций на координатные плоскости.

Δ Положив, например $y = 0$, получим

$$\begin{cases} 2x-z=4, \\ 3x+2z=-1, \end{cases} \quad x=1,\ z=-2.$$

Таким образом, мы уже знаем одну точку прямой: $M_0(1;\,0;\,-2)$. В качестве направляющего вектора прямой может быть взят вектор

$$\bar{q} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} - 7\bar{j} - 19\bar{k}.$$

Канонические уравнения прямой таковы: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-7} = \dfrac{z+2}{-19}$. Полученная пропорция эквивалентна системе трех уравнений $\begin{cases} 7x+y-7=0, \\ 19x+z-17=0, \\ 19y-7z-14=0, \end{cases}$ описывающих три плоскости, проектирующие прямую на координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz соответственно (уравнение прямой в проекциях). ▲

Пример 12. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;\ 2;\ 3)$ и $M_2(2;\ 4;\ 7)$.

Δ В качестве направляющего вектора прямой подходит вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(1;\ 2;\ 4)$. Искомые уравнения прямой: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{4}$. ▲

Пример 13. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;\ 2;\ 5)$ перпендикулярно плоскости $2x-3y+4z-5=0$.

Δ В качестве направляющего вектора прямой можно взять нормальный вектор плоскости $\overline{n}=(2;-3;4)$. Тогда

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-5}{4}=t,\quad \begin{cases} x=2t+1,\\ y=-3t+2,\\ z=4t+5. \end{cases} \quad ▲$$

Пример 14. Найти тупой угол между прямыми $x=3t-2,\ y=0,\ z=-t+3$ и $x=2t-1,\ y=0,\ z=t-3$.

Δ В качестве направляющих векторов прямых можно взять следующие векторы: $\overline{q}_1=(3;\ 0;\ -1)$ и $\overline{q}_2=(2;\ 0;\ 1)$. Тупой угол между прямыми определяется соотношением

$$\cos\varphi=-\frac{|(\overline{q}_1,\overline{q}_2)|}{|\overline{q}_1|\cdot|\overline{q}_2|}=-\frac{|6-1|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi=135°.$$

Пример 15. При каком значении m угол φ между прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{1}$ и плоскостью $mx+y+z+4=0$ равен $45°$?

Δ Направляющий вектор прямой $\overline{q}=(2;-1;1)$, нормальный вектор плоскости $\overline{n}=(m;\ 1;\ 1)$.

Как известно,

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|(\overline{q},\overline{n})|}{|\overline{q}|\cdot|\overline{n}|}=\frac{|2m|}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+2}},\ m=\pm\sqrt{6}.\ ▲$$

Пример 16. Найти координаты точки B, симметричной точке $A(2;3;-1)$ относительно прямой $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Δ Геометрическое построение точки B осуществим следующим образом: а) через точку A проводим плоскость P, перпендикулярную прямой L; б) находим точку M пересечения прямой L и плоскости P; в) отрезок AM удлиняем до отрезка AB так, чтобы точка M оказалась в середине отрезка AB. Запишем уравнение плоскости P и параметрическое уравнение прямой L:

$$1(x-2)+(-1)(y-3)+2(z+1)=0,$$
$$x=1+t,\ y=-2-t,\ z=1+2t.$$

Подставив эти выражения для координат точки на прямой в уравнение плоскости, получим уравнение для параметра t

$$(1+t-2)-(-2-t-3)+2(1+2t+1)=0,$$

решение которого дает значение параметра для точки M. Найдя это значение $t=-\frac{4}{3}$ и подставив его в параметрические уравнения прямой, получим координаты точки пересечения:

$$x=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3},\ \ y=-2+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3},\ \ z=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}.$$

Поскольку эта точка делит отрезок AB пополам, координаты точки $B\,(x';y';z')$ получим, решив уравнение

$$\frac{2+x'}{2}=-\frac{1}{3},\ \ \frac{3+y'}{2}=-\frac{2}{3},\ \ \frac{-1+z'}{2}=-\frac{5}{3}.$$

Отсюда $x'=-\frac{8}{3}$, $y'=-\frac{13}{3}$, $z'=-\frac{7}{3}$. ▲

Пример 17. Убедиться, что прямые $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$ и $L_2:\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$ принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

Δ Прямая L_1 проходит через точку $M_1(1;-2;5)$ и имеет направляющий вектор $\bar{q}_1=(2;-3;4)$. Прямая L_2 проходит через точку $M_2(7;2;1)$ и имеет направляющий вектор $\bar{q}_2=(3;2;-2)$. Эти прямые принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}\,(6;4;-4)$, $\bar{q}_1=(2;-3;4)$ и $\bar{q}_2=(3;2;-2)$ компланарны. Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\left(\overline{M_1M_2},\bar{q}_1,\bar{q}_2\right)=\begin{vmatrix}6 & 4 & -4\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=0.$$

Прямые L_1 и L_2 принадлежат одной плоскости. Пусть $M\,(x;y;z)$ – любая точка плоскости. Запишем условие компланарности векторов $\overline{M_1M}\,(x-1;y+2;z-5)$, $\bar{q}_1=(2;-3;4)$ и $\bar{q}_2=(3;2;-2)$.

$$0=\left(\overline{M_1M},\bar{q}_1,\bar{q}_2\right)=\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z-5\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=-2x+16y+13z-31.$$

Уравнение плоскости: $2x-16y-13z+31=0$. ▲

Пример 18. Убедиться, что прямые $L_1:\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$ и $L_2:\dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$ являются скрещивающимися, и найти расстояние между ними.

Δ Находим смешанное произведение векторов $\overline{M_1M_2}\,(28;-1;5)$, $\bar{q}_1=(3;4;-2)$ и $\bar{q}_2=(6;-4;-1)$:

$$\left(\overline{M_1M_2},\bar{q}_1,\bar{q}_2\right)=\begin{vmatrix}28 & -1 & 5\\ 3 & 4 & -2\\ 6 & -4 & -1\end{vmatrix}=-507\neq 0.$$

Прямые являются скрещивающимися. На векторах $\overline{M_1M_2}$, $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ можно построить параллелепипед. Объем этого параллелепипеда нам уже известен: $V=507$. Расстояние между прямыми равно высоте h этого параллелепипеда. В свою очередь, высоту параллелепипеда можно вычислить как отношение объема параллелепипеда к площади его основания, но

$$S_{\text{осн.}}=\left|[\bar{q}_1,\bar{q}_2]\right|=\left\|\begin{matrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 4 & -2\\ 6 & -4 & -1\end{matrix}\right\|=\left|-12\bar{i}-9\bar{j}-36\bar{k}\right|=3\sqrt{16+9+144}=39.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми $h=\dfrac{507}{39}=13$. ▲

Пример 19. Написать каноническое уравнение прямой L_1, которая проходит через точку $M_0\,(3;-2;-4)$ параллельно плоскости $P_1:3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую $L_2:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Δ Запишем уравнение плоскости P_2, параллельной плоскости P_1 и проходящей через точку $M_0\,(3;-2;-4)$.

$$P_2:3(x-3)-2(y+2)-3(z+4)=0,\ 3x-2y-3z-25=0.$$

Найдем точку пересечения плоскости P_2 и прямой L_2.

$$\begin{cases}3x-2y-3z-25=0,\\ \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z-1}{2}=t,\end{cases}\quad \begin{cases}x=3t+2,\ y=-2t-4,\ z=2t+1,\\ 3(3t+2)-2(-2t-4)-3(2t+1)-25=0,\end{cases}$$

$$t=2,\ x=8,\ y=-8,\ z=5.\ \ M_1\,(8;-8;5).$$

Искомая прямая проходит через точки M_0 и M_1. Ее уравнение: $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}$. ▲

Пример 20. На плоскости Oxy найти такую точку M, сумма расстояний от которой до точек $A(-1;2;5)$ и $B(11;-16;10)$ была бы наименьшей.

Δ Пусть $B'(11;-16;-10)$. Очевидно, что $\left|\overline{MA}\right|+\left|\overline{MB}\right|=\left|\overline{MA}\right|+\left|\overline{MB'}\right|$. Но $\min\left|\overline{MA}\right|+\left|\overline{MB'}\right|=\left|\overline{AB'}\right|$. Таким образом, нужно провести прямую через точки $A(-1;2;5)$ и $B'(11;-16;-10)$ и найти точку пересечения этой прямой с плоскостью Oxy.

$$AB': \frac{x+1}{12}=\frac{y-2}{-18}=\frac{z-5}{-15}.$$

Положив $z=0$, получим $x=3$, $y=-4$, т. е. $M(3;-4;0)$. ▲

Дополнительные задачи

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

а) через ось Ox и точку $M_1(4;-1;2)$;

б) через ось Oy и точку $M_2(1;4;-3)$;

в) через ось Oz и точку $M_3(3;-4;7)$.

Отв.: а) $2y+z=0$; б) $x-z-1=0$; в) $5x+y-13=0$.

2. Определить, при каких значениях l и m плоскости $2x+ly+3z-5=0$ и $mx-6y-6z+2=0$ параллельны. **Отв.:** $l=3$, $m=-4$.

3. Определить, при каком значении l плоскости $3x-5y+lz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярны. **Отв.:** $l=6$.

4. Доказать, что три плоскости $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.

5. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x-2y+4z-5=0$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a=-2, b=\frac{2}{3}$. **Отв.:** $x-3y-2z+2=0$.

6. Доказать параллельность прямых $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

7. Даны прямые $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$. При каком значении l они пересекаются? **Отв.:** $l=3$.

8. Найти точку пересечения прямой и плоскости: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$. **Отв.:** $(2;-3;6)$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2},\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

Отв.: $6x-20y-11z+1=0$.

10. Точка A лежит на прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{1}$. Расстояние от точки A до плоскости $x+y+z+3=0$ равно $\sqrt{3}$. Найти координаты точки A.

Отв.: $A(1;0;-1)$ или $A(-1;-3;-2)$.

11. Даны точка $A(3;-1;1)$ и плоскость $x+2y+2z+6=0$. Найти координаты точки, симметричной с A относительно этой плоскости. **Отв.:** $(1;-5;-3)$.

12. Составьте уравнение плоскости, проецирующей прямую

$$\begin{cases}2x-3y-4z+5=0,\\ x+y+z-2=0\end{cases}$$

на плоскость xOz. **Отв.:** $5x-z-1=0$.

Занятия 8–9

Кривые и поверхности второго порядка

Пример 1. Составить уравнение окружности, зная, что она касается оси Oy в точке $A(0;-3)$ и имеет радиус $r=2$.

Δ Очевидно, центр окружности находится в точке $O_1(-2;-3)$ или $O_2(2;-3)$. Соответственно уравнения этих окружностей:

$$(x+2)^2+(y+3)^2=4,\quad (x-2)^2+(y+3)^2=4. \ ▲$$

Пример 2. Дана окружность:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=25.$$

Составить уравнение ее касательной в точке $A(5;5)$.

Δ Запишем уравнение прямой O_1A, где $O_1(1;2)$ – центр окружности:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}.$$

Касательная к окружности проходит через точку $A(5;5)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n}=(4;3)$. Ее уравнение: $4(x-5)+3(y-5)=0$, $4x+3y-35=0$. ▲

Пример 3. Определить тип кривой $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$.

Δ $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \sim (x+A)^2+(y+B)^2=A^2+B^2-C$. Если $A^2+B^2-C>0$ – окружность; $A^2+B^2-C=0$ – точка; $A^2+B^2-C<0$ – $\varnothing$. ▲

Пример 4. Найти длины полуосей, эксцентриситет, координаты фокусов, составить уравнения директрис эллипса:

1) $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{12^2}+\dfrac{y^2}{13^2}=1$.

Δ 1. Большая полуось равна 5, малая полуось равна 4;

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{25-16}}{5}=\frac{3}{5};$$

координаты фокусов:

$$F_1(c;0) \text{ и } F_2(-c;0), \text{ т. е. } F_1(3;0) \text{ и } F_2(-3;0);$$

уравнение директрис:

$$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\pm\frac{25}{3}.$$

2. Большая полуось равна 13, малая полуось равна 12;

$$\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{169-144}}{13}=\frac{5}{13};$$

координаты фокусов:

$$F_1(0;c) \text{ и } F_2(0;-c), \text{ т. е. } F_1(0;5) \text{ и } F_2(0;-5);$$

уравнение директрис:

$$y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}=\pm\frac{169}{5}. \ ▲$$

Пример 5. Определить, какая линия определяется уравнением

$$x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}.$$

Изобразить ее на чертеже.

Δ Преобразуем заданное уравнение:

$$x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}, \quad \begin{cases} 9(x+5)^2-4(8+2y-y^2)=0, \\ x\ge -5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(x+5)^2+4(y^2-2y-8)=0, \\ x\ge -5, \end{cases} \quad \begin{cases} 9(x+5)^2+4(y-1)^2=36, \\ x\ge -5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+5)^2}{2^2}+\dfrac{(y-1)^2}{3^2}=1, \\ x\geq -5. \end{cases}$$

Это правая половина эллипса с центром в $M_0(-5;1)$ и полуосями $a=2$ и $b=3$ (рис. 5).

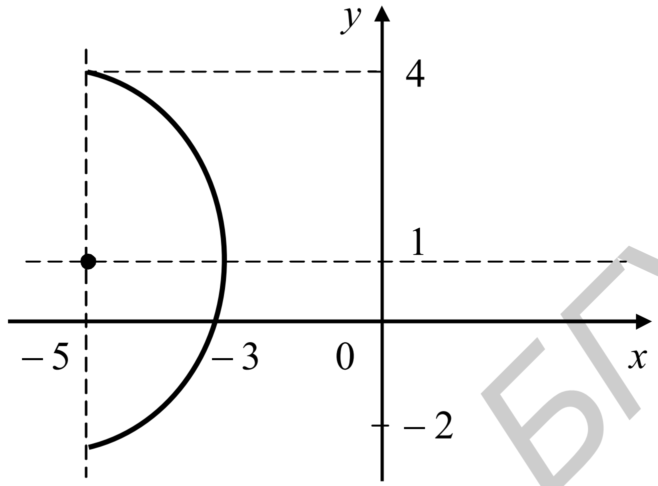

Рис. 5

Пример 6. В данной системе координат эллипс имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) расстояние между вершинами, лежащими на большой оси, равно 16, а расстояние между фокусами равно 10;

2) хорда, соединяющая две вершины эллипса, имеет длину 5 и наклонена к его большой оси под углом $\arcsin\dfrac{3}{5}$;

3) фокусами эллипса являются точки $(\pm 1;\,0)$, а точка $\left(\sqrt{3};\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ принадлежит эллипсу;

4) фокусами эллипса являются точки $(\pm 2;\,0)$, а директрисами являются прямые $x=\pm 18$;

5) расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины, лежащей на оси Oy, равно 8.

Δ 1) $\begin{cases} 2a=16, \\ 2c=10, \end{cases}$ $\begin{cases} a=8, \\ c=5, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2=64, \\ b^2=a^2-c^2=39. \end{cases}$

Уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{39}=1$;

2) $b=5\cdot\frac{3}{5}=3,\ \ a=\sqrt{25-9}=4$. Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

3) $\begin{cases} c=1, \\ \frac{3}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-b^2=1, \\ \frac{3}{1+b^2}+\frac{3}{4b^2}=1, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-b^2=1, \\ 4b^4-11b^2-3=0, \end{cases}$ $\begin{cases} b^2=3, \\ a^2=4. \end{cases}$

Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$;

4) $\begin{cases} c=2, \\ \frac{a^2}{c}=18, \end{cases}$ $\begin{cases} c=2, \\ a^2=36, \end{cases}$ $\begin{cases} c^2=4, \\ a^2=36, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2=36, \\ b^2=a^2-c^2=32. \end{cases}$

Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$;

5) $\begin{cases} \frac{a^2}{c}-a=4, \\ \frac{a^2}{c}=8, \end{cases}$ $\begin{cases} a=4, \\ c=2, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2=16, \\ b^2=a^2-c^2=12. \end{cases}$

Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. ▲

Пример 7. Найти полуоси, эксцентриситет, координаты фокусов, составить уравнения директрис и асимптот гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Начертить ее график.

Δ $\begin{cases} a^2=16, \\ b^2=9, \end{cases}$ $\begin{cases} a=4, \\ b=3. \end{cases}$

Действительная полуось равна 4, мнимая полуось равна 3; $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{5}{4}$. Координаты фокусов $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, т. е. $F_1(5;0)$ и $F_2(-5;0)$. Уравнения директрис $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{4}{5/4}=\pm\frac{16}{5}$. Уравнения асимптот $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{4}x$. График гиперболы изображен на рис. 6.

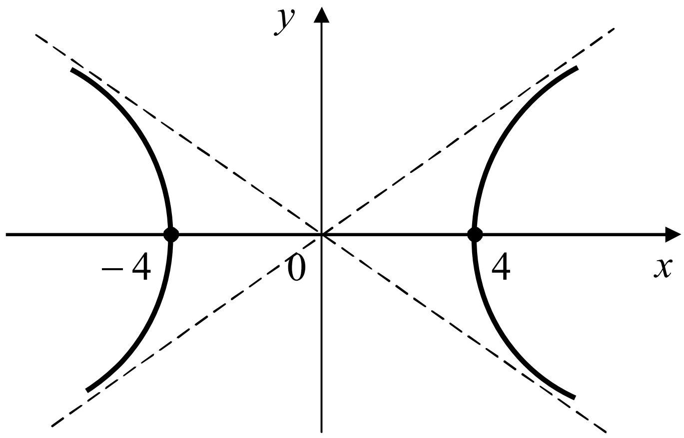

Рис. 6

Пример 8. В данной системе координат гипербола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) расстояние между вершинами равно 10, а расстояние между фокусами равно 12;

2) длина вещественной оси равна 1, а точка $(1;3)$ принадлежит гиперболе;

3) длина мнимой полуоси равна 1, а вершина гиперболы делит расстояние между фокусами в отношении $4:1$;

4) эксцентриситет гиперболы равен $\frac{7}{5}$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2.

Δ 1) $\begin{cases} 2a = 10, \\ 2c = 12, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 5, \\ c = 6, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 25, \\ a^2 + b^2 = 36, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 25, \\ b^2 = 11. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$.

2) $\begin{cases} 2a = 1, \\ \frac{1}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = \frac{1}{4}, \\ -\frac{9}{b^2} = -3, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = \frac{1}{4}, \\ b^2 = 3. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{3} = 1$.

3) $\begin{cases} b = 1, \\ \frac{2a + c}{c - a} = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1, \\ 3c = 6a, \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 = 1, \\ a^2 + b^2 = 4a^2, \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 = 1, \\ a^2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{1/3} - \frac{y^2}{1} = 1$.

4) $\begin{cases} \dfrac{c}{a} = \dfrac{7}{5}, \\ c - a = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} 5c - 7a = 0, \\ c - a = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 5, \\ c = 7, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 25, \\ a^2 + b^2 = 49, \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 25, \\ b^2 = 24. \end{cases}$

Уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 9. В данной системе координат парабола имеет каноническое уравнение. Составить это уравнение, если:

1) точка $(5; -5)$ принадлежит параболе;

2) расстояние от фокуса до директрисы равно 12;

3) длина хорды, проходящей через фокус под углом $45°$ к оси параболы, равна 18.

Δ 1. Подставив координаты точки $(5; -5)$ в каноническое уравнение параболы, получим $25 = 2p \cdot 5$, $p = 2{,}5$. Уравнение параболы: $y^2 = 5x$.

2. $\dfrac{p}{2} - \left(-\dfrac{p}{2}\right) = p = 12$. Уравнение гиперболы: $y^2 = 24x$.

3. Запишем уравнение прямой AB: $y = x - \dfrac{p}{2}$. Имеем $\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 = 2px$, $x^2 - 3px + \dfrac{p^2}{4} = 0$. Так как $x_1 + x_2 = 3p$ и $AF + BF = AC + BD = x_1 + x_2 + p$, то $4p = 18$, $2p = 9$.

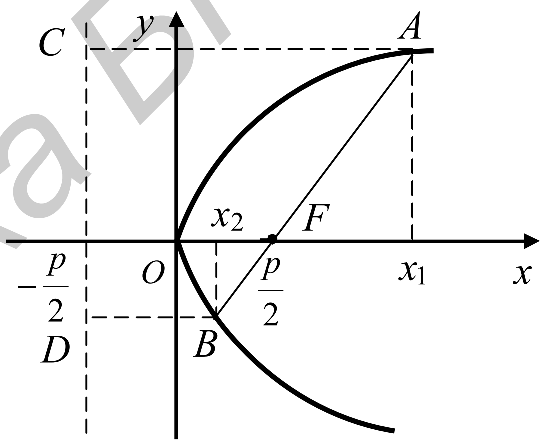

Рис. 7

Уравнение параболы: $y^2 = 9x$ (рис.7). $\blacktriangle$

Пример 10. Составить уравнение параболы с параметром p, вершина которой имеет координаты $(a; b)$, а направление оси совпадает:

1) с положительным направлением оси Ox;

2) с отрицательным направлением оси Ox;

3) с положительным направлением оси Oy;

4) с отрицательным направлением оси Oy.

Δ 1) $(y - b)^2 = 2p(x - a)$; 2) $(y - b)^2 = 2p(a - x)$;

3) $(x - a)^2 = 2p(y - b)$; 4) $(x - a)^2 = 2p(b - y)$. $\blacktriangle$

Пример 11. Составить уравнение параболы с вершиной $A(2; 1)$ и директрисой $2x - y + 2 = 0$.

Δ Найдем проекцию точки A на директрису параболы:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-1}, \\ 2x - y + 2 = 0, \end{cases} \qquad A'(0;\,2).$$

Пусть координаты фокуса параболы $F(x;\,y)$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{x+0}{2} = 2, \\ \dfrac{y+2}{2} = 1, \end{cases} \qquad F(4;\,0).$$

Возьмем любую точку $M(x;\,y)$, принадлежащую параболе. Расстояние от этой точки до директрисы равно $\dfrac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}}$, а от этой точки до фокуса параболы – $\sqrt{(x-4)^2+y^2}$. Согласно определению параболы

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2} = \frac{|2x-y+2|}{\sqrt{5}},$$

$$5(x^2-8x+16)+5y^2 = 4x^2+y^2+4-4xy+8x-4y,$$

$$x^2+4y^2+4xy-48x+4y+76=0. \quad ▲$$

Пример 12. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка $r = \dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$.

Δ Так как $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то из полярного уравнения кривой имеем:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{9}{5-4\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}, \quad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{9\sqrt{x^2+y^2}}{5\sqrt{x^2+y^2}-4x},$$

$$5\sqrt{x^2+y^2} = 9+4x, \quad \begin{cases} 25(x^2+y^2) = 81+72x+16x^2, \\ x \ge -\dfrac{9}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2-72x+25y^2-81=0, \\ x \ge -\dfrac{9}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 9(x-4)^2-144+25y^2-81=0, \\ x \ge -\dfrac{9}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(x-4)^2 + 25y^2 = 225, \\ x \ge -\dfrac{9}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} 9x'^2 + 25y'^2 = 225, \\ x' \ge -\dfrac{25}{4}, \end{cases}$$

$$9x'^2 + 25y'^2 = 225, \quad \frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9} = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 13. Семейство поверхностей задано уравнением, содержащим произвольный параметр λ. Определить тип поверхности при всевозможных λ:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$; 2) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$; 3) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$;

4) $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$; 5) $x^2 - y^2 - z^2 = \lambda$; 6) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$;

7) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = \lambda$; 8) $x^2 + y^2 = \lambda z$.

Δ 1) При $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ точка при $\lambda < 0$ Ø; 2) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ эллиптический цилиндр, при $\lambda < 0$ однополостный гиперболоид; 3) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ прямая, при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид; 4) при $\lambda > 0$ однополостный гиперболоид, при $\lambda = 0$ конус, при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид; 5) при $\lambda > 0$ двуполостный гиперболоид, при $\lambda = 0$ конус, при $\lambda < 0$ однополостный гиперболоид; 6) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ пара параллельных плоскостей, при $\lambda < 0$ двуполостный гиперболоид; 7) при $\lambda > 0$ эллипсоид, при $\lambda = 0$ плоскость, при $\lambda < 0$ однополостный гиперболоид; 8) при $\lambda \ne 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ прямая. $\blacktriangle$

Пример 14. Определить тип поверхности:

1) $2x^2 + y^2 - 3z^2 - 4x + 4y + 6 = 0$;

2) $2x^2 - y^2 + 2z + 1 = 0$;

3) $2x^2 + z^2 + 2x + z = 0$.

Δ 1) $2x^2 + y^2 - 3z^2 - 4x + 4y + 6 = 0$, $2(x-1)^2 - 2 + (y+2)^2 - 4 - 3z^2 + 6 = 0$, $2(x-1)^2 + (y+2)^2 - 3z^2 = 0$ – конус;

2) $2x^2 - y^2 + 2z + 1 = 0$, $2\left(z + \dfrac{1}{2}\right) = y^2 - 2x^2$ – гиперболический параболоид;

3) $2x^2 + z^2 + 2x + z = 0$, $2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + \left(z + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0$,

$2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$ – эллиптический цилиндр. $\blacktriangle$

Пример 15. Методом сечений установить форму однополостного гиперболоида $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} + \dfrac{z^2}{4^2} = 1$. Сделать рисунок.

Δ Будем пересекать поверхность плоскостями $y = h$ (рис.8):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{z^2}{4^2} = 1 + \dfrac{h^2}{3^2}, \\ y = h, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(2\sqrt{1+\dfrac{h^2}{3^2}}\right)^2} + \dfrac{z^2}{\left(4\sqrt{1+\dfrac{h^2}{3^2}}\right)^2} = 1, \\ y = h. \end{cases}$$

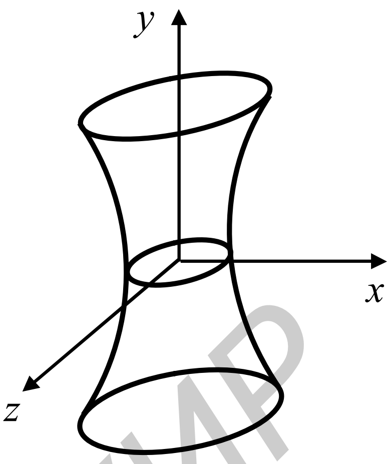

Рис. 8

В любом таком сечении получается эллипс с полуосями $a_1 = 2\sqrt{1+\dfrac{h^2}{3^2}}$ и $b_1 = 4\sqrt{1+\dfrac{h^2}{3^2}}$.

Сечения плоскостями $x = h$ и $z = h$ дает соответственно гиперболы

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1 - \dfrac{h^2}{2^2}, \\ x = h \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1 - \dfrac{h^2}{4^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Сечения плоскостями $x = \pm 2$ и $z = \pm 4$ дают пару пересекающихся прямых. При $h = 0$ получим сечения поверхности координатными плоскостями. Эти сечения называются главными.

В плоскости $y = 0$ эллипс имеет полуоси $a = 2$ и $c = 4$. В плоскости $x = 0$ гипербола имеет действительную полуось $c = 4$ и мнимую полуось $b = 3$. В плоскости $z = 0$ гипербола имеет действительную полуось $a = 2$ и мнимую полуось $b = 3$. ▲

Пример 16. Установить, при каких значениях m плоскость $x + mz - 1 = 0$ пересекает двуполостный гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = -1$: а) по эллипсу, б) по гиперболе.

Δ Сечение гиперболоида плоскостью $x = 1 - mz$ представляет собой кривую

$$(1 - mz)^2 + y^2 - z^2 = -1, \;\; 1 - 2mz + m^2 z^2 + y^2 - z^2 = -1,$$

$$y^2 + (m^2 - 1)\left(z - \frac{m}{m^2 - 1}\right)^2 = \frac{2 - m^2}{m^2 - 1}, \;\; (|m| \neq 1).$$

Кривая будет представлять эллипс, если $\begin{cases} m^2 - 1 > 0, \\ 2 - m^2 > 0, \end{cases}$ $1 < |m| < \sqrt{2}$. Кривая будет представлять гиперболу, если $\begin{cases} m^2 - 1 < 0, \\ 2 - m^2 \neq 0, \end{cases}$ $|m| < 1$. При $m = \pm 1$ в сечении получим параболу $z = \pm \dfrac{y^2 + 2}{2}$. ▲

Дополнительные задачи

1. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(-1;\,0)$ вдвое меньше расстояния от прямой $x = -4$. **Отв.:** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.

2. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2;\,0)$ и от прямой $5x + 8 = 0$ относятся как $5:4$. **Отв.:** $\dfrac{(x-8)^2}{8^2} - \dfrac{y^2}{24^2} = 1$.

3. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0;\,2)$ и от прямой $y = 4$. **Отв.:** $x^2 = -4(y-3)$.

4. Установить, какие кривые определяются нижеследующими уравнениями:

а) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$; б) $\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{9}y^2 - x + \dfrac{2}{3}y - 1 = 0$;

в) $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

Построить чертежи.

Отв.: а) эллипс $\dfrac{x'^2}{225} + \dfrac{y'^2}{16} = 1$; новое начало координат $0'(1;\,-1)$; **б)** гипербола $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{9} = 1$; новое начало координат $0'(2;\,3)$; **в)** парабола $x'^2 = -y'$; новое начало $0'\left(1;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

5. Написать каноническое уравнение кривой $r = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$.

Отв.: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Правая ветвь гиперболы.

6. Определить тип поверхности при всевозможных λ:

а) $\lambda x^2 + y^2 = z$; б) $\lambda(x^2 + y^2) = z$; в) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z$.

Отв.: а) при $\lambda > 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ параболический цилиндр, при $\lambda < 0$ гиперболический параболоид; **б)** при $\lambda \neq 0$ эллиптический параболоид, при $\lambda = 0$ плоскость; **в)** при $\lambda > 0$ эллиптический параболоид; при $\lambda = 0$ плоскость, при $\lambda < 0$ гиперболический параболоид.

7. Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе; найти ее параметр и вершину.

Отв.: $15; \left(0; -6; -\frac{3}{2}\right)$.

8. Установить, при каких значениях m плоскость $x+my-2=0$ пересекает эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$: а) по эллипсу, б) по параболе.

Отв.: а) $m \neq 0$ **и** $m > -\frac{1}{4}$; **б)** $m=0$.

Занятие 10

Контрольная работа «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»

В 1

1. Доказать, что векторы $\bar{a}=(-1; 2)$ и $\bar{b}=(2; -3)$ образуют в V_2 базис. Найти координаты вектора $\bar{c}=(1; 0)$ в этом базисе. **Отв.:** $(3; 2)$.

2. Даны вершины четырехугольника $A(1; 1; -4)$, $B(-5; 3; 5)$, $C(-3; 1; 2)$ и $D(4; 0; 1)$. Методом векторной алгебры найти угол между диагоналями AC и BD. **Отв.:** $90°$.

3. Даны точки $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 2)$, $C(5; 1; 1)$ и $D(0; -1; 3)$, являющиеся вершинами тетраэдра:

а) методом векторной алгебры найти объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины C;

б) найти длину высоты, опущенной из вершины C методом аналитической геометрии. **Отв.:** $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{\sqrt{62}}$.

4. Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и параллельной прямой $15x-8y+105=0$. **Отв.:** $15x-8y-6=0$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(3; 5)$, $B(6; -2)$ и $C(-4; -1)$. Найти уравнение перпендикуляра, проведенного из вершины B на медиану, исходящую из вершины A. **Отв.:** $4x+13y+2=0$.

6. При каком значении m прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{m}$ перпендикулярна к

прямой $\begin{cases} 2x + y - 4z + 3 = 0, \\ 4x - y - 5z + 2 = 0. \end{cases}$ **Отв.:** $m = 6$.

7. Составить уравнение плоскости, проецирующей прямую $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{2}$ на плоскость $3x - 2y + 5z - 6 = 0$. **Отв.:** $x - y - z - 3 = 0$.

8. Найти уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы в вершинах эллипса $5x^2 + 8y^2 = 40$. **Отв.:** $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

9. Определить вид поверхности и изобразить ее: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1$.

Отв.: двуполостный гиперболоид.

В 2

1. Доказать, что векторы $\bar{a} = (1; -4)$ и $\bar{b} = (2; 1)$ образуют в V_2 базис. Найти координаты вектора $\bar{c} = (5; -11)$ в этом базисе. **Отв.:** $(3; 1)$.

2. Даны вершины четырехугольника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Методом векторной алгебры найти угол между диагоналями AC и BD. **Отв.:** $90°$.

3. Даны точки $A(3; 5; 4)$, $B(8; 7; 4)$, $C(5; 10; 4)$ и $D(4; 7; 8)$:

а) методом векторной алгебры найти объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины D.

б) найти длину высоты, опущенной из вершины D методом аналитической геометрии. **Отв.:** 14 и 4.

4. Запишите общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 5)$ и параллельной прямой $17x - 5y - 97 = 0$. **Отв.:** $17x - 5y - 9 = 0$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(-10; -13)$, $B(-2; 3)$ и $C(2; 1)$. Найти уравнение перпендикуляра, проведенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C. **Отв.:** $4x + 3y - 1 = 0$.

6. При каком значении n прямая $\frac{x-1}{n} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-1}$ параллельна прямой $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ x - y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$ **Отв.:** $n = -3$.

7. Составить уравнение плоскости, проецирующей прямую $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{4}$ на плоскость $3x + y - z + 2 = 0$. **Отв.:** $x - 5y - 2z + 11 = 0$.

8. Найти уравнение эллипса, вершины которого находятся в фокусах, а фо-

кусы в вершинах гиперболы $4x^2 - 3y^2 = 12$. **Отв.:** $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1$.

9. Определить вид поверхности и изобразить ее: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Отв.: однополостный гиперболоид.

Занятие 11

Линейные пространства. Ранг матрицы

Пример 1. Рассмотрим множество P положительных чисел со следующими операциями – для любых x и y из P $x \oplus y = xy$; для любого x из P и любого действительного числа a $a \otimes x = x^a$. Доказать, что множество P с указанными операциями образует линейное пространство. Найти размерность и базис этого пространства.

Δ Очевидно, обе операции корректны. Проверим выполнение восьми аксиом определения линейного пространства.

1. Для любых x и y из P $x \oplus y = y \oplus x$, так как $xy = yx$.

2. Для любых x, y, z из P $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, так как $(xy)z = x(yz)$.

3. Существует такое число θ из P, что $x \oplus \theta = x$. Этим числом является 1, так как $x \cdot 1 = x$.

4. Для каждого числа x из P существует такое число x', что $x \oplus x' = \theta$. Этим числом является $\frac{1}{x}$, так как $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

5. Для каждого x $1 \otimes x = x$, так как $x^1 = x$.

6. $a \otimes (b \otimes x) = (ab) \otimes x$, так как $(x^b)^a = x^{ab}$.

7. $(a + b) \otimes x = a \otimes x + b \otimes x$, так как $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$.

8. $a \otimes (x \oplus y) = a \otimes x + a \otimes y$, так как $(xy)^a = x^a \cdot y^a$.

Найдем размерность этого пространства. Возьмем любое число, отличное от 1. Например 2. Покажем, что любое число x может быть выражено в виде линейной комбинации числа 2: $x = a \otimes 2 = 2^a$. Отсюда $a = \log_2 x$. Таким образом, размерность линейного пространства P равна 1. В качестве базиса можно взять любое число этого множества, отличное от 1. ▲

Пример 2. Показать, что все многочлены степени не выше n образуют линейное пространство. Найти базис и размерность этого пространства.

Δ Сумма двух многочленов не выше n и умножение многочлена степени не выше n на число a есть многочлен степени не выше n. Выполнение всех восьми аксиом линейного пространства очевидно. Рассмотрим следующую систему векторов: $\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = x, \bar{e}_3 = x^2, \dots, \bar{e}_{n+1} = x^n$. Она является линейно независимой, так как равенство $c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_{n+1} x^n \equiv 0$, выполняется только тогда, когда $c_1 = c_2 = \dots = c_{n+1} = 0$. Любой многочлен степени не выше n $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n+1} x^n = a_0 \cdot \bar{e}_1 + a_1 \bar{e}_2 + \dots + a_{n+1} \bar{e}_{n+1}$ может быть представлен в виде линейной комбинации указанных векторов. Таким образом, указанная система векторов (многочленов) является базисом. Размерность рассмотренного линейного пространства равна $n+1$. ▲

Пример 3. Доказать линейную зависимость векторов $\bar{a} = (1; 2; -1; 0)$, $\bar{b} = (1; -1; 2; -2)$, $\bar{c} = (3; 3; 0; -2)$.

Δ Очевидно, что $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$. Система векторов линейно зависима. ▲

Пример 4. Показать, что в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка векторы $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ образуют базис, и найти в указанном базисе координаты вектора $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Δ Составим линейную комбинацию указанных векторов и приравняем ее нулевому вектору:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 & 4\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Покажем, что любой вектор $\bar{x}$ выражается через линейную комбинацию указанных векторов:

$$\bar{x} = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + \beta_3 \bar{e}_3 + \beta_4 \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 2\beta_2 \\ 3\beta_3 & 4\beta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = x_1, \beta_2 = \frac{x_2}{2}, \beta_3 = \frac{x_3}{3}, \ \beta_4 = \frac{x_4}{4},$$

$$\bar{x} = \left(x_1; \frac{x_2}{2}; \frac{x_3}{3}; \frac{x_4}{4} \right).$$

Вектор $\bar{a}$ имеет координаты $(3; 4; -2; 1)$. ▲

Пример 5. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\bar{x}_1 = e^t, \bar{x}_2 = e^{2t}, \bar{x}_3 = e^{3t}, t \in \boldsymbol{R}$.

Δ Предположим, что система векторов линейно зависима. Тогда

$$\alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{2t} + \alpha_3 e^{3t} \equiv 0, \ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0.$$

Сократив на e^t и продифференцировав равенство, получим $\alpha_2 e^t + 2\alpha_3 e^{2t} \equiv 0$.

Опять сокращаем на e^t и дифференцируем равенство: $2\alpha_3 e^t \equiv 0$. Положив во всех равенствах $t = 0$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет только нулевое решение. Полученное противоречие указывает на то, что система функций e^t, e^{2t} и e^{3t} является линейно независимой на множестве $-\infty < t < \infty$. ▲

Пример 6. Используя определение ранга матрицы, найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Δ Среди миноров второго порядка есть отличный от нуля минор, например $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$. Все миноры третьего порядка за исключением, быть может, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix}$ заведомо равны нулю. Вычислим указанный минор:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры третьего порядка равны нулю. Следовательно, $r = 2$.

Пример 7. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \quad (1) \leftrightarrow (2) \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 2 & -2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{matrix}(2)\to(2)-2\cdot(1)\\ (4)\to 4-4\cdot(1)\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 12 & -3\end{pmatrix}\sim\ (2)\leftrightarrow(3)\ \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 12 & -3\end{pmatrix}\sim\ (4)\leftrightarrow(4)-(2)\ \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4\end{pmatrix}\sim\ (4)-(4)-(3)\ \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Полученная матрица ступенчатого типа имеет три ненулевые строки, поэтому ранг этой матрицы и, следовательно, матрицы A равен трем. Базисным минором в последней матрице является $M_{1,2,3}^{1,2,4}$. ▲

Пример 8. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$.

Δ Как известно, если матрица содержит минор k-го порядка D, отличный от нуля, а все миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие минор D, равны нулю, то ранг матрицы равен k. Можно проверить, что

$$D=\begin{vmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Существуют два минора четвертого порядка, окаймляющие данный минор:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен трем.

Пример 9. В R^6 задана система векторов $\bar{x}_1 = (1; 1; 1; 1; 1; 7)$, $\bar{x}_2 = (3; 2; 1; 1; -3; -2)$, $\bar{x}_3 = (0; 1; 2; 2; 6; 23)$, $\bar{x}_4 = (5; 4; 3; 3; -1; 12)$. Пусть $L = L(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3; \bar{x}_4)$ – линейная оболочка. Найти размерность и базис L.

Δ Составим матрицу системы векторов и методом элементарных преобразований определим ее ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу с двумя ненулевыми строками. Значит, $r(L) = 2$. Так как минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, то в качестве базисных векторов линейной оболочки можно взять векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$. ▲

Пример 10. Найти матрицы перехода от базиса $x^2, x, 1$ к базису $(x+1)^2$, $(x+1), 1$ и от базиса $(x+1)^2$, $(x+1), 1$ к базису x^2, $x, 1$.

Δ Так как $\bar{e}_1 = x^2$, $\bar{e}_2 = x$, $\bar{e}_3 = 1$, $\bar{e}' = x^2 + 2x + 1$, $\bar{e}_2' = x + 1$, $\bar{e}_3' = 1$, то $\bar{e}_1' = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{e}_3' = \bar{e}_3$. Матрица перехода от первого базиса ко второму будет иметь вид $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Так как $x^2 = (x+1)^2 - 2(x+1) + 1$, $x = (x+1) - 1$, то $\bar{e}_1 = \bar{e}_1' - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{e}_2 = \bar{e}_2' - \bar{e}_3'$, $\bar{e}_3 = \bar{e}_3'$. Матрица перехода от второго базиса к первому имеет вид

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 11. Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ к базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$. Найти координаты вектора $\bar{a} = 4\bar{e}_1' + \bar{e}_2'$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и координаты вектора $\bar{b} = 4\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ в базисе $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$.

Δ Известно, что $x = Tx'$ и $x' = T^{-1}x$, где x и x' – векторы столбцы из координат векторов соответственно в базисах $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$. Так как

$$T^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ то } x = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \ x' = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 12. Найти матрицу перехода от базиса $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ к базису $\bar{b}_1, \bar{b}_2$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Δ $\bar{a}_1 = \bar{e}_1 + 4\bar{e}_2, \bar{a}_2 = 3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2, \ \bar{b}_1 = 7\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{b}_2 = \bar{e}_2$.

Так как $\begin{cases} \bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 = \bar{a}_1, \\ 3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 = \bar{a}_2, \end{cases}$ то $\begin{aligned} \bar{e}_1 &= -\frac{1}{7}(5\bar{a}_1 - 4\bar{a}_2), \\ \bar{e}_2 &= \frac{1}{7}(3\bar{a}_1 - \bar{a}_2). \end{aligned}$

$$\bar{b}_1 = 7\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = -\frac{32}{7}\bar{a}_1 + \frac{27}{7}\bar{a}_2. \ \bar{b}_2 = \bar{e}_2 = \frac{3}{7}\bar{a}_1 - \frac{1}{7}\bar{a}_2. \ T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -32 & 3 \\ 27 & -1 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Доказать, что множество всех матриц размером $m \times n$ с определенными ранее операциями над матрицами является линейным пространством. Найти размерность этого пространства и указать простейший базис.

Отв.: размерность равна $m\,n$.

2. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j}$. Доказать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\bar{c} = 2\bar{i} - 4\bar{j}$ в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Отв.: $(-2; 2)$.

3. В R^4 даны векторы $\bar{x}_1 = (1;\ 2;\ 0;\ 6)$, $\bar{x}_2 = (2; 0; 3; 1)$, $\bar{x}_3 = (3; 2; 3; 7)$, $\bar{x}_4 = (7; 2; 9; 3)$. Найти ранг системы векторов и указать базисные векторы.

Отв.: $r = 2$. Любые два вектора системы векторов образуют базис.

4. Пусть даны векторы $\overline{x}_1 = (1;1;1)$, $\overline{x}_2 = (1;2;3)$, $\overline{x}_3 = (2;1;0)$, $\overline{x}_4 = (3;4;5)$. Доказать, что $L(\overline{x}_1;\overline{x}_2) = L(\overline{x}_3;\overline{x}_4)$.

5. Найти матрицу перехода от базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ к базису $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и матрицу перехода от базиса $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ к базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, если $\overline{a} = 2\overline{e}_1' + 2\overline{e}_3'$, $\overline{b} = 3\overline{e}_3 - \overline{e}_2$, $\overline{c} = 3\overline{e}_1 + \overline{e}_3$. **Отв.:** $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

Занятия 12–13

Системы линейных уравнений

Пример 1. Средствами матричного исчисления решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ -3x_1 + 2x_2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Δ 1. Данную систему можно заменить матричным уравнением $AX = C$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Вычислим определитель матрицы A: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13$. Так как $\Delta \neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}, и система имеет единственное решение.

Вычислим алгебраические дополнения матрицы A:

$A_{11} = 2,\ A_{12} = 3,\ A_{21} = -3,\ A_{22} = 2$.

Присоединенная матрица B имеет вид $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ (совпадение с матрицей A случайное). Следовательно, $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} B^T = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Умножив обе части равенства $AX = C$ на A^{-1} слева, получим $X = A^{-1}C$, или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -13 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отв.: $x_1 = -1,\ x_2 = 2$.

2. Заменим систему линейных уравнений матричным уравнением $AX = C$. Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 1 & -7\\ 3 & -4 & 2\end{vmatrix}=-20.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то существует обратная матрица, и система имеет единственное решение. Вычислим алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -7\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-26;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -7\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-25;\ A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-11;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-12;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-10;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & -7\end{vmatrix}=10;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -7\end{vmatrix}=15;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5.$$

Присоединенная матрица B имеет вид $B=\begin{pmatrix}-26 & -25 & -11\\ -12 & -10 & -2\\ 10 & 15 & 5\end{pmatrix}$. Следовательно, $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}B^T=-\dfrac{1}{20}\begin{pmatrix}-26 & -12 & 10\\ -25 & -10 & 15\\ -11 & -2 & 5\end{pmatrix}$. Отсюда получаем

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{20}\begin{pmatrix}-26 & -12 & 10\\ -25 & -10 & 15\\ -11 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{20}\begin{pmatrix}-60\\ -40\\ -20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Отв.: $x_1=3,\ x_2=2;\ x_3=1$. ▲

Пример 2. Решить системы по правилу Крамера:

1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=3,\\ 3x_1+x_2+2x_3=7,\\ 2x_1+3x_2+x_3=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1+x_3=4,\\ x_2+x_3=5,\\ x_1+2x_2+4x_3=17.\end{cases}$

Δ 1. Вычислим определитель системы: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=18$. Так как $\Delta\neq 0$, система имеет единственное решение.

Вычисляем определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\ 7 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=36,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 7 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-18,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=18.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -1,\ \ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$

2. Вычислим определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$ Система имеет единственное решение. Вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 17 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 3.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{1}{1} = 1,\ x_2 = \dfrac{2}{1} = 2,\ \ x_3 = \dfrac{3}{1} = 3.$ ▲

Пример 3. Решить системы методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6. \end{cases}$

Δ 1. Преобразуем расширенную матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right).$$

Мы пришли к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ \qquad\quad -8x_3 = 8, \end{cases}$$

обладающей единственным решением $x_1 = 2,\ \ x_2 = -3,\ \ x_3 = -1.$

2. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4, \end{cases}$$

и значит, $x_2 = -\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}x_3 + x_4$; $x_1 = -2x_2 - 3x_3 + x_4 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{5}{3}x_3 - x_4$, $x_3, x_4 \in \boldsymbol{R}$.

3. Имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right),$$

и, значит, система несовместна, так как равносильная ей система содержит уравнение $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 14$. ▲

Пример 4. Система линейных уравнений задана своей расширенной матрицей

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 5 \end{array}\right).$$

Исследовать систему на совместность.

Δ Преобразуем расширенную матрицу этой системы при помощи элементарных преобразований к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь видно, что в преобразованной матрице минор $M_{1,2}^{1,2}$ является базисным для матрицы системы, а минор $M_{1,2,4}^{1,2,5}$ – базисным для расширенной матрицы. Так как $r(A) = 2, r(\widetilde{A}) = 3$, то согласно теореме Кронекера – Капелли система несовместна. ▲

Пример 5. Найти общее решение однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Δ Можно увидеть, что третья строка равна разности второй и первой строк. Вычеркнув третью строку, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы равен 2, фундаментальная система решений состоит из $n-2=3-2=1$ решения. В качестве базисных переменных можно выбрать x_1 и x_2. Тогда положив свободную переменную $x_3 = 1$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 = 1. \end{cases}$$

Решим ее по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3,\ \ x_2 = \frac{-10}{5} = -2.$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид $\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, или $\begin{matrix} x_1 = 3c, \\ x_2 = -2c, \\ x_3 = c. \end{matrix}$ ▲

Пример 6. Найти общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Δ Запишем матрицу системы и преобразуем ее при помощи элементарных преобразований строк к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисный минор в преобразованной матрице находится вверху слева и имеет второй порядок. Это значит, что ранг r матрицы системы равен двум, фундаментальная система решений состоит из $n-r=4-2=2$ решений. Система уравнений эквивалентна следующей преобразованной системе:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0.$$

Найдем фундаментальную систему решений однородной системы. В качестве базисных переменных можно выбрать x_1 и x_2. Тогда x_3 и x_4 будут свободными переменными. Положив $x_3 = 1, x_4 = 0$, находим $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = -0{,}5$. Положив $x_3 = 0, x_4 = 1$, находим $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Нормальная фундаментальная система решений имеет вид

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение однородной системы: $\bar{x} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2$, или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Пример 7. Дана неоднородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

Доказать, что эта система совместна, и найти ее общее решение.

Δ Можно увидеть, что последний столбец расширенной матрицы, умноженный на 6, равен разности пятого и четвертого столбцов матрицы A. Следовательно, ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $\widetilde{A}$. Система совместна.

Выпишем и преобразуем матрицу соответствующей однородной системы:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&-2&10&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Последнее уравнение есть следствие первых двух уравнений. Минор $\begin{vmatrix}-1&3\\-2&5\end{vmatrix}\neq 0$. Неизвестные x_1, x_4, x_5 можно считать свободными. Поэтому исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases}-x_2+3x_3=1-2x_1+2x_4-4x_5,\\-2x_2+5x_3=1-4x_1-x_4-7x_5.\end{cases}$$

Положим в ней свободные неизвестные равными, например нулю, т. е. $x_1=x_4=x_5=0$. В результате получим систему

$$\begin{cases}-x_2+3x_3=1,\\-2x_2+5x_3=1.\end{cases}$$

Решив ее, находим единственное решение: $x_2=2, x_3=1$. Таким образом, найдено частное решение системы:

$$\bar{x}_0=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Найдем фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases}-x_2+3x_3=-2x_1+2x_4-4x_5,\\-2x_2+5x_3=-4x_1-x_4-7x_5.\end{cases}$$

Положив $x_1=1, x_4=0, x_5=0$, находим $x_2=2, x_3=0$. Положив $x_1=0, x_4=1, x_5=0$, находим $x_2=13, x_3=5$. Положив $x_1=0, x_4=0, x_5=1$, находим $x_2=1, x_3=-1$. Фундаментальная система решений имеет вид:

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \bar{x}_2=\begin{pmatrix}0\\13\\5\\1\\0\end{pmatrix},\ \bar{x}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение неоднородной системы:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + c_3\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Или в координатах $\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 2 + 2c_1 + 13c_2 + c_3, \\ x_3 = 1 + 5c_2 - c_3, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$ ▲

Пример 8. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от параметра c:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = c. \end{cases}$$

Δ Найдем, при каком значении c ранги матрицы A и расширенной матрицы $\widetilde{A}$ совпадают:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 8 & 22 \\ 0 & 6 & 12 & c+28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 8 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & c-5 \end{array}\right).$$

Ранги матриц A и $\widetilde{A}$ совпадают при $c = 5$. При $c \neq 5$ система несовместна. При $c = 5$ искомая система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -4, \\ 4x_2 + 8x_3 = 22. \end{cases}$$

Положив $x_3 = c_1$, получим $\begin{cases} x_1 = -4 + c_1, \\ x_2 = \dfrac{11}{2} - 2c_1, \quad c \in \boldsymbol{R}. \\ x_3 = c_1, \end{cases}$ ▲

Пример 9. Существует ли система линейных уравнений, для которой каждая из формул

$$x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-3/5\\1/5\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1/5\\2/5\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$x=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

является общим решением?

Δ Пусть

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix}-3/5\\1/5\\1\\0\end{pmatrix},\ \bar{x}_2=\begin{pmatrix}-1/5\\2/5\\0\\1\end{pmatrix},\ \bar{x}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix},\ \bar{x}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Ранг системы векторов $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ равен двум, ранг системы векторов $\bar{x}_3$ и $\bar{x}_4$ равен двум. Найдем ранг системы векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&3\\-3&1&5&0\\-1&2&0&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&3\\0&1&-1&3\\0&2&-2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&-1&3\end{pmatrix},$$

$r(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)=2$. Множества решений соответствующих однородных систем совпадают. Выясним, является ли какое-нибудь частное решение первой системы, например $(1;1;1;1)^T$, решением второй системы.

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\ \sim\ \begin{cases}c_1=-1,\\c_2=2,\\-2c_1-c_2=0,\\c_1+3c_2=5,\end{cases}\quad c_1=-1,\ c_2=2.$$

Такая система линейных уравнений существует. ▲

Дополнительные задачи

1. Решить системы: а) матричным методом, б) по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + 5y = 1. \end{cases}$ **Отв.:** $x = 2,\ y = -1$;

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$ **Отв.:** $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$;

в) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$ **Отв.:** $x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$

2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 = -4. \end{cases}$ **Отв.:** система несовместна;

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ **Отв.:** $\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5, \\ x_2 &= -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4. \end{aligned}$

3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Отв.: $x_1 = -3c_1 + 5c_2,\ x_2 = c_1 - 3c_2,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2.$

4. Найти общее решение неоднородной системы, используя фундаментальную систему решений соответствующей однородной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1. \end{cases}$$

Отв.: $\bar{x}=\begin{pmatrix}1\\-1/2\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}0\\-3/2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}0\\-5/2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Занятие 14

Контрольная работа «Матрицы, определители, системы линейных уравнений»

1. Даны матрицы A, B и C. Какие из попарных произведений этих матриц существуют? Найдите их.
2. Вычислите определитель, приведя его к треугольному виду.
3. Найдите обратную матрицу A^{-1}.
4. Найдите ранг матрицы A.
5. Решите систему: а) по правилу Крамера, б) методом Гаусса.
6. Найдите фундаментальную систему решений однородной СЛУ и укажите размерность пространства решений системы.
7. Найдите общее решение неоднородной СЛУ.

В 1

1. $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}-3&-1&1\\2&-1&0\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}$. **Отв.:** $AB=\begin{bmatrix}-8&-1&2\\-5&-5&3\end{bmatrix}$.

2. $|A|=\begin{vmatrix}2&-3&4&1\\4&-2&3&2\\3&1&2&3\\3&-1&4&3\end{vmatrix}$. **Отв.:** $|A|=6$.

3. $A=\begin{bmatrix}5&1&-2\\1&3&-1\\8&4&-1\end{bmatrix}$. **Отв.:** $A^{-1}=\dfrac{1}{38}\begin{bmatrix}1&-7&5\\-7&11&3\\-20&-12&14\end{bmatrix}$.

4. $A=\begin{bmatrix}-2&3&-1&1&-2\\3&-1&2&2&4\\4&1&3&5&6\\0&7&1&7&2\end{bmatrix}$. **Отв.:** $r=2$.

5. а) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 3, \\ 2x + 5y + 4z = 1, \\ x + 8y + 3z = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + y - 3z = 1, \\ 3x + y - z = -4, \\ 2x + y + z = -9. \end{cases}$

Отв.: а) $(2;1;-2)$; б) $x = 2c + 5$, $y = -19 - 5c$, $z = c$.

6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$ **Отв.:** $\overline{X} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 29. \end{cases}$ **Отв.:** $\overline{X} = \begin{bmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

В 2

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. **Отв.:** $CB = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$.

2. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **Отв.:** $|A| = 69$.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. **Отв.:** $A^{-1} = -\dfrac{1}{23} \begin{bmatrix} 10 & -7 & -9 \\ -7 & -2 & 4 \\ -11 & 10 & 3 \end{bmatrix}$.

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 7 & 1 \\ -6 & 2 & 0 & -13 & -7 \\ -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \\ -8 & 3 & -4 & -20 & -8 \end{bmatrix}$. **Отв.:** $r = 2$.

5. а) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5, \\ 3x + 4y + 2z = 6, \\ 4x + 5y = 7. \end{cases}$

Отв.: а) $(3;-2;1)$; б) $x = 10c - 2$, $y = 3 - 8c$, $z = c$.

6. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=0, \\ x_1+x_2+5x_3-5x_4+6x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-7x_4+9x_5=0. \end{cases}$ **Отв.:** $\overline{X}=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\-5\\3\\2\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\3\\-3\\0\\2\end{bmatrix}.$

7. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ 8x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11. \end{cases}$ **Отв.:** $\overline{X}=\begin{bmatrix}0\\4\\3\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\-2\\-2\\1\end{bmatrix}.$

Занятия 15–16

Линейные операторы

Пример 1. Доказать линейность оператора. Записать его матрицу.
$f(\bar{x})=(x_1-x_2;\, x_1+2x_2-x_3;\, 3x_1+x_3)$.

Δ Пусть $\bar{x}=(x_1;x_2;x_3)$, $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)$. Тогда $f(\bar{x}+\bar{y})=(x_1+y_1-x_2-y_2;$ $x_1+y_1+2x_2+2y_2-x_3-y_3; 3x_1+3y_1+x_3+y_3)=(x_1-x_2; x_1+2x_2-x_3; 3x_1+x_3)+$ $+(y_1-y_2; y_1+2y_2-y_3; 3y_1+y_3)=f(\bar{x})+f(\bar{y})$.

Для любого $\alpha\in\boldsymbol{R}$ имеем

$$f(\alpha\,\bar{x})=(\alpha x_1-\alpha x_2;\, \alpha x_1+2\alpha x_2-\alpha x_3;\, 3\alpha x_1+\alpha x_3)=\alpha f(\bar{x}).$$

Так как $f(1;0;0)=(1;1;3)$, $f(0;1;0)=(-1;2;0)$, $f(0;0;1)=(0;-1;1)$, матрица A оператора f имеет вид

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Доказать, что оператор $f(\bar{x})=(x_1^2;\, x_1-x_3;\, x_2+x_3)$ не является линейным.

Δ Рассмотрим два вектора $\bar{x}_1=(1;0;0)$ и $\bar{x}_2=(2;0;0)$: $\bar{x}_2=2\bar{x}_1$, $f(\bar{x}_1)=(1;1;0)$, $f(\bar{x}_2)=(4;2;0)$. Так как $f(\bar{x}_2)\neq 2f(\bar{x}_1)$, оператор $f(\bar{x})$ не является линейным. ▲

Пример 3. Найти в базисе $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ матрицу линейного оператора f, переводящего каждый вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{y}=[\bar{x},\bar{a}]$, если $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$.

Δ Докажем линейность оператора f. Как известно,

$$[\bar{x}_1+\bar{x}_2,\bar{a}]=[\bar{x}_1,\bar{a}]+[\bar{x}_2,a],\ [\lambda\bar{x};\bar{a}]=\lambda[\bar{x},\bar{a}].$$

Следовательно, оператор f является линейным.

Найдем образы базисных векторов:

$$[\bar{i}, \bar{a}] = [\bar{i}, 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}] = \bar{k} + \bar{j};$$
$$[\bar{j}, \bar{a}] = [\bar{j}, 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}] = -2\bar{k} - \bar{i};$$
$$[\bar{k}, \bar{a}] = [\bar{k}, 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}] = 2\bar{j} - \bar{i}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 4. Найти в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ матрицу оператора f, если f – проектирование на плоскость $z + \sqrt{3}\,x = 0$ (рис.9).

Δ Линейность оператора очевидна. Найдем образы базисных векторов. Плоскость $z + \sqrt{3}\,x = 0$ проходит через ось OY. Поэтому $f(\bar{j}) = \bar{j}$. Плоскость $z + \sqrt{3}\,x = 0$ перпендикулярна плоскости ZOX.

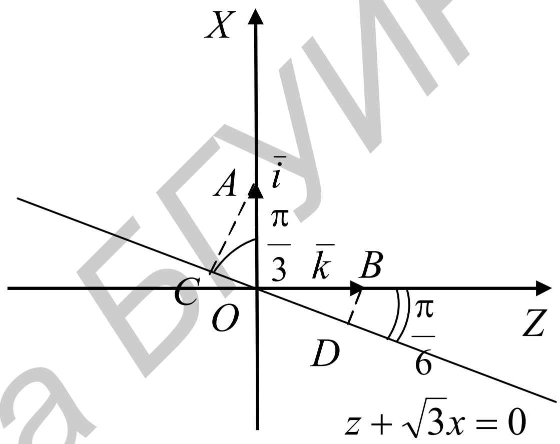

Рис. 9

$$|OC| = \frac{1}{2}, \ |OD| = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f(\bar{k}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{k}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{i} + \frac{3}{4}\bar{k},$$

$$f(\bar{i}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{k}\right) = \frac{1}{4}\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\bar{k}; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Даны два базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$ линейного пространства и матрица A линейного оператора в базисе $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_1' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$.

Δ Известно, что матрица B оператора f в базисе $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$ находится по формуле $B = T^{-1}AT$, где T – матрица перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ к базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$. В нашем случае $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдем T^{-1}:

$$\Delta=-2,\, T_{11}=-1,\, T_{12}=-1,\, T_{21}=-1,\, T_{22}=1;$$

$$T^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix};$$

$$B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -5\end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 6. Пользуясь определением доказать, что вектор $\bar{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ является собственным вектором оператора f с матрицей $A=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Найти собственное значение для указанного вектора.

$$\Delta\ A\bar{x}=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},$$

$f(\bar{x})=5\bar{x},\ \lambda=5$. ▲

Пример 7. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, если в некотором базисе он задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Δ Возьмем произвольный вектор $\bar{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ и найдем его образ:

$$f(\bar{x})=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1\\3x_2\\3x_3\end{pmatrix}=3\bar{x}.$$

Все ненулевые векторы из R^3 являются собственными для указанного оператора с собственным значением 3. Геометрически это означает растяжение всех векторов в 3 раза. ▲

Пример 8. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Δ Находим собственные значения, решая характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 2\\ 4 & -\lambda & 1\\ 3 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3)=0,$$

откуда $\lambda_1=-3, \lambda_2=1, \lambda_3=3$.

Решая для каждого из трех собственных значений однородную систему

$$\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 2\\ 4 & -\lambda & 1\\ 3 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

находим координаты собственных векторов. Для $\lambda=\lambda_1=-3$ указанная система имеет вид

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \begin{aligned}3x_1+x_2+2x_3&=0,\\ 4x_1+3x_2+x_3&=0,\\ 3x_1-x_2+4x_3&=0.\end{aligned}$$

Ранг матрицы системы равен 2, поэтому фундаментальная система решений содержит одно решение.

Отбрасывая третье уравнение системы и положив, например $x_3=1$, получим $x_1=-1,\ x_2=1$. Собственному значению $\lambda=-3$ соответствует собственный вектор $\bar{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. При $\lambda=1$ получим систему уравнений

$$\begin{cases}-x_1+x_2+2x_3=0,\\ 4x_1-x_2+\ \ x_3=0.\end{cases}$$

Ей соответствует собственный вектор $\bar{x}_2=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$. Для $\lambda=3$ получим систему уравнений $\begin{cases}-3x_1+x_2+2x_3=0,\\ 4x_1-3x_2+x_3=0.\end{cases}$ Положив $x_3=1$, получим $x_1=\dfrac{7}{5},\ x_2=\dfrac{11}{5}$.

Так как собственный вектор находится с точностью до постоянного множителя, получим

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 9. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора f, имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δ Находим собственные значения, решая характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ (1-\lambda)\,((\lambda-2)^2-1) = 0, \text{ откуда } \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Для собственного значения $\lambda = 3$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг системы равен 2. Полагая $x_1 = 1$, получим $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для собственного значения $\lambda = 1$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен 1. Размерность пространства решений этой системы равна $3 - 2 = 1$. Положив $x_2 = 1$ и $x_3 = 0$, получим $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Положим $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, получим $\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\blacktriangle$

Пример 10. Выяснить, можно ли привести к диагональному виду матрицу

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Δ Найдем собственные значения этой матрицы:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda_{1,2}=3.$$

Ранг матрицы $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ равен 1.

Размерность подпространства решений линейной системы равна $2-1=1$. Следовательно, найти два линейно независимых вектора для этого линейного оператора невозможно и базиса из собственных векторов не существует. Матрицу A нельзя привести к диагональному виду.

Пример 11. Найти матрицу T, диагонализирующую данную матрицу A, и записать соответствующую матрицу, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Δ Составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 4\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0,\ (\lambda+1)^2=4,\ \lambda_1=1, \lambda_2=-3.$$

Для собственного значения $\lambda=1$ получим систему

$$\begin{cases}-2x_1+4x_2=0,\\ x_1-2x_2=0,\end{cases}\quad \bar{x}_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}.$$

При $\lambda=-3$ система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases}2x_1+4x_2=0,\\ x_1+2x_2=0,\end{cases}\quad \bar{x}_2=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$T=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

В базисе, состоящем из векторов $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, матрица оператора будет иметь вид

$$B=T^{-1}\cdot A\cdot T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}.\ \blacktriangle$$

Пример 12. Выяснить, можно ли привести к диагональному виду матрицу

$$A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}.$$

Если это возможно, найти соответствующую диагональную матрицу и матрицу T преобразования подобия.

Δ Найдем собственные значения этой матрицы. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Находим корни этого уравнения: $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=1$. Координаты собственного вектора с собственным значением $\lambda=-1$ находим из системы

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, ранг матрицы этой системы равен двум. Отбросив третье уравнение системы и положив в первых двух уравнениях $x_3=1$, получим $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{5}{6}$.

В качестве собственного вектора можно взять вектор $\bar{x}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Для собственного значения $\lambda=1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы этой системы равен 1. Так как $n-2=2$, фундаментальная система решений имеет два столбца. Следовательно, существует базис состоящий из собственных векторов. Найдем $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$:

$$x_1-2x_2+x_3=0,\ \bar{x}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{x}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы T определяются векторами «нового» базиса $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$:

$$T=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В этом базисе матрица оператора будет иметь вид

$$B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 13. Выяснить, является ли матрица

$$A=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{30}\\ 0 & -1/\sqrt{6} & 5/\sqrt{30}\\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{30}\end{pmatrix}$$

ортогональной, и если является, то найти обратную ей.

Δ Легко проверить, что столбцы матрицы

$$\bar{x}_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\ 0\\ 2/\sqrt{5}\end{pmatrix},\quad \bar{x}_2=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{6}\end{pmatrix},\quad \bar{x}_3=\begin{pmatrix}2/\sqrt{30}\\ 5/\sqrt{30}\\ -1/\sqrt{30}\end{pmatrix}$$

удовлетворяют следующим условиям:

1) $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=(\bar{x}_1,\bar{x}_3)=(\bar{x}_2,\bar{x}_3)=0$;

2) $|\bar{x}_1|=|\bar{x}_2|=|\bar{x}_3|=1$.

Следовательно, матрица A является ортогональной. Для ортогональной матрицы $A^{-1}=A^T$. Поэтому

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6}\\ 2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30}\end{pmatrix}.\ ▲$$

Пример 14. Найти ортогональную матрицу Q, приводящую симметрическую матрицу

$$A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix}$$

к диагональному виду. Убедиться, что матрица $B=Q^TAQ$ является диагональной матрицей.

Δ Находим собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 6\\ 6 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-36=0\Rightarrow\lambda_1=-4,\lambda_2=9.$$

Для $\lambda=-4$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}9x_1+6x_2=0\\ 6x_1+4x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\ 3x_1+2x_2=0\Rightarrow\bar{x}_1=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}.$$

Нормируем этот вектор и находим $\bar{e}_1$:

$$\bar{e}_1=\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{13}\\ -3/\sqrt{13}\end{pmatrix}.$$

Аналогично для $\lambda=9$:

$$\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 = 0, \\ 6x_1 - 9x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Запишем ортогональную матрицу Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

$$B = Q^T AQ = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} & -3/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Пример 15. Найти ортогональную матрицу Q, приводящую симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

к диагональному виду.

Δ Решим уравнение $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, получим

$$(\lambda + 2)(\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = 4.$$

Для $\lambda = -2$ собственный вектор $\bar{x}_1$ находится из системы

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Находим собственный вектор $\bar{x}_2$, соответствующий собственному значению $\lambda = 4$:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для симметрической матрицы существует базис, состоящий из собственных векторов. Поскольку $\bar{x}_3 \perp \bar{x}_1$ и $\bar{x}_3 \perp \bar{x}_2$, то в качестве $\bar{x}_3$ можно взять $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$.

$$\bar{x}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} - 5\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Нормируем векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ и составляем матрицу перехода (искомую ортогональную матрицу):

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица

$$B = Q^T AQ = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 16. Известно, что симметрическая матрица третьего порядка имеет единственное трехкратное собственное значение $\lambda = a$. Найти эту матрицу.

Δ Фундаментальная система решений системы уравнений

$$(A - aE) \cdot \overline{X} = 0$$

состоит из трех векторов. Таким образом, $3 - r = 3$. Ранг матрицы $A - aE$ равен нулю. Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Дополнительные задачи

1. Доказать, что оператор $f(\overline{x}) = (x_1 + x_2, x_3 - x_1, x_2 + 1)$ не является линейным.

2. Записать в базисе $1, x, x^2$ линейного пространства многочленов степени не выше двух матрицу оператора дифференцирования.

Отв.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. В базисе, состоящем из векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, линейный оператор f задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'$, если

$$\overline{e}_1' = 2\,\overline{e}_1 - \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3,$$
$$\overline{e}_2' = -2\,\overline{e}_1 + \overline{e}_2 - \overline{e}_3,$$
$$\overline{e}_3' = -5\,\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 + \overline{e}_3.$$

Отв.: $\begin{pmatrix} -19 & 9 & -16 \\ -36 & 18 & -24 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отв.: $\lambda_1 = 1, \bar{x}_1 = (2; -1);\ \lambda_2 = -4, \bar{x}_2 = (1; 1)$.

5. Выяснить, можно ли привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отв.: матрицу A нельзя привести к диагональному виду.

6. В некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ линейный оператор f задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти базис, в котором матрица оператора f имеет диагональный вид.

Отв.: $\bar{e}_1' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_2' = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$.

7. Найти ортогональную матрицу Q, диагонализирующую симметрическую матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, и записать диагональный вид этой матрицы.

Отв.: $Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q^T A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Занятие 17

Квадратичные формы

Пример 1. По данной матрице написать соответствующую ей квадратичную форму:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Δ а) $Q(x; y) = x^2 - 4xy + 3y^2$; б) $Q(x; y; z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xz + 2yz$. ▲

Пример 2. Записать в матричном виде квадратичную форму, если:

а) $Q(x; y) = 2x^2 + 3y^2 - 5xy$;

б) $Q(x_1; x_2; x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$.

Δ а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$Q(x; y) = (x\ y) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -5/2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,

$$Q(x_1; x_2; x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

Пример 3. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа:

а) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$;

б) $x_1x_2 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$;

в) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$;

г) $8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Выяснить, какие квадратичные формы являются положительно (отрицательно) определенными, неотрицательно (неположительно) определенными и знакопеременными.

Δ а) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 4\left(x_1 + \dfrac{1}{2}x_2\right)^2 - x_2^2 + 5x_2^2 = 4x_1'^2 + 4x_2'^2$.

Квадратичная форма является положительно определенной;

б) $x_1x_2 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2) =$

$$= -\left(\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2\right) =$$

$$= -\left(\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 - \frac{2}{3}x_3\right)^2 - \frac{1}{3}x_3^2 + x_3^2\right) =$$

$$= -x_1'^2 - \frac{3}{4}x_2'^2 - \frac{2}{3}x_3'^2.$$

Квадратичная форма является отрицательно определенной;

в) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \begin{vmatrix} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \\ x_3 = x_3' \end{vmatrix} =$

$= x_1'^2 - x_2'^2 + x_1'x_3' - x_2'x_3' + x_1'x_3' + x_2'x_3' =$

$= (x_1' + x_3')^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = x_1''^2 - x_2''^2 - x_3''^2.$

Квадратичная форма является знакопеременной;

г) $8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 =$

$= 8\left(x_1 + x_2 + \frac{1}{4} \cdot x_3\right)^2 - 4x_2x_3 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 =$

$= 8x_1'^2 + 0x_2'^2 + \frac{1}{2}x_3'^2.$

Квадратичная форма является неотрицательно определенной. ▲

Пример 4. Пусть квадратичная форма задана своей матрицей A:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 19 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

С помощью критерия Сильвестра установить является ли данная квадратичная форма знакоопределенной.

Δ а) $\Delta_1 = 4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0$.

Квадратичная форма является знакоположительной;

б) $\Delta_1 = -1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0$.

Квадратичная форма является знакоотрицательной;

в) $\Delta_1 = -16,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{vmatrix} = 0$.

Квадратичная форма не является знакоопределенной;

г) $\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 19 \end{vmatrix} = 2$.

Квадратичная форма является знакоположительной;

д) $\Delta_1=-1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=-2$.

Квадратичная форма является знакоотрицательной;

е) $\Delta_1=1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$.

Квадратичная форма не является знакоопределенной.

Пример 5. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$Q(x_1;x_2)=x_1^2-2x_2^2-4x_1x_2$$

к каноническому виду. Написать этот канонический вид.

Δ Матрица квадратичной формы имеет вид $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda^2+\lambda-6=0,\ \lambda_1=-3, \lambda_2=2.$$

Найдем соответствующие ортонормированные собственные векторы:

$$\lambda=-3,\quad \begin{cases}4x_1-2x_2=0,\\ -2x_2+x_2=0,\end{cases}\quad \bar{e}_1'=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5}\end{pmatrix},$$

$$\lambda=2,\quad \begin{cases}-x_1-2x_2=0,\\ -2x_1-4x_2=0,\end{cases}\quad \bar{e}_2'=\begin{pmatrix}-2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}.$$

В базисе $(\bar{e}_1', \bar{e}_2')$ заданная квадратичная форма имеет вид $-3x_1'^2+2x_2'^2$, а соответствующее преобразование координат

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix} \text{ или } \begin{aligned}x_1&=\frac{1}{\sqrt{5}}x_1'-\frac{2}{\sqrt{5}}x_2',\\ x_2&=\frac{2}{\sqrt{5}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{5}}x_2'.\end{aligned} \quad \blacktriangle$$

Пример 6. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка

$$14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0$$

и построить эту кривую в исходной системе координат.

Δ Квадратичная форма кривой имеет вид $14x^2+24xy+21y^2$, а матрицей этой квадратичной формы является

$$A=\begin{pmatrix}14 & 12\\ 12 & 21\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение матрицы A и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix}14-\lambda & 12\\ 12 & 21-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda^2-35\lambda+150=0,\ \lambda_1=30, \lambda_2=5.$$

При $\lambda=30$, $-16x_1+12x_2=0, \bar{e}_1=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. При $\lambda=5$, $9x_1+12x_2=0, \bar{e}_2=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

Составим матрицу ортогонального преобразования

$$T=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

Этому ортогональному преобразованию соответствует линейная замена переменных:

$$x=\frac{3}{5}x_1-\frac{4}{5}y_1,$$
$$y=\frac{4}{5}x_1+\frac{3}{5}y_1.$$

В новом базисе квадратичная форма примет вид $30x_1^2+5y_1^2$. Линейные слагаемые

$$-4x+18y=-4\left(\frac{3}{5}x_1-\frac{4}{5}y_1\right)+18\left(\frac{4}{5}x_1+\frac{3}{5}y_1\right)=12x_1+14y_1.$$

Таким образом,

$$14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=$$
$$=30x_1^2+5y_1^2+12x_1+14y_1-139=0,$$

или

$$30\left(x_1+\frac{1}{5}\right)^2+5\left(y_1+\frac{7}{5}\right)^2=150.$$

Теперь параллельный перенос системы координат, определяемый соотношениями

$$\begin{cases}x_2=x_1+\frac{1}{5},\\ y_2=y_1+\frac{7}{5}\end{cases}$$

приводит к уравнению

$$30x_2^2+5y_2^2=150 \sim \frac{x_2^2}{5}+\frac{y_2^2}{30}=1.$$

Это каноническое уравнение эллипса. Построим эллипс в исходной системе координат (рис.10).

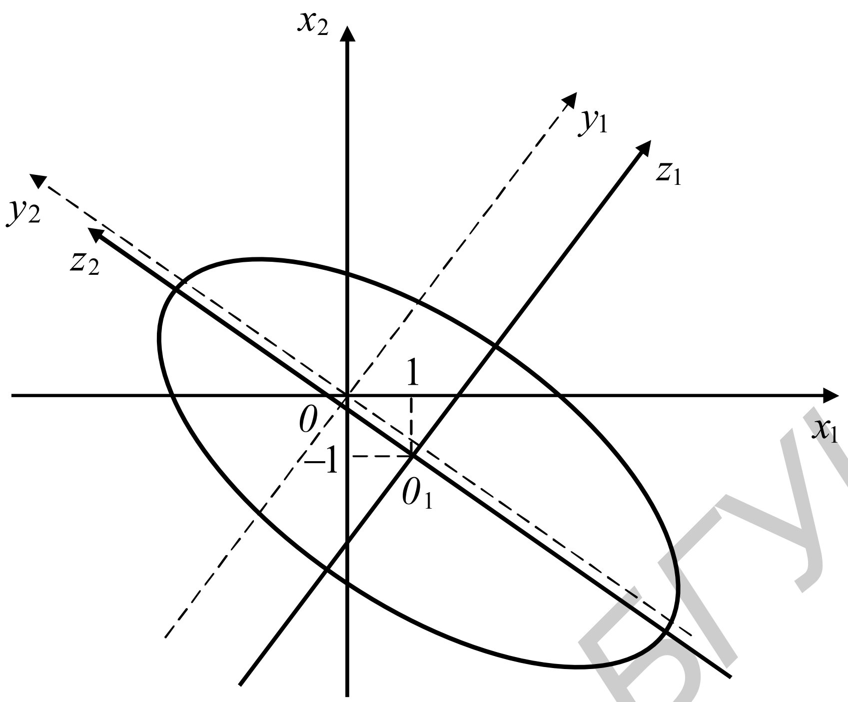

Рис. 10 ▲

Пример 7. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка

$$3x^2+6y^2+3z^2-4xy-8xz-4yz+8x-26y+8z+17=0,$$

определить ее тип и найти каноническую систему координат.

Δ Квадратичная форма данной поверхности имеет вид

$$3x^2+6y^2+3z^2-4xy-8xz-4yz.$$

Запишем ее матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda^3-12\lambda^2+21\lambda+98)=0.$$

Решая уравнение, находим его корни:

$$\lambda_1=-2, \lambda_2=7, \lambda_3=7.$$

Для собственного значения $\lambda=-2$ получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \bar{e}_1' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Для собственного значения $\lambda = 7$:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{e}_2' = \begin{pmatrix} 1/3\sqrt{2} \\ -4/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

В качестве $\bar{e}_3'$ можно взять $[\ \bar{e}_1',\ \bar{e}_2']$:

$$\bar{e}_3' = \frac{1}{9\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду:

$$x = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z',$$

$$y = \frac{1}{3}x' - \frac{4}{3\sqrt{2}}y',$$

$$z = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'.$$

Отметим, что канонический вид квадратичной формы поверхности можно было записать сразу по известным собственным значениям: $-2x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2$. Линейные слагаемые будут иметь вид

$$8x - 26y + 8z + 17 = 8\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) -$$

$$-26\left(\frac{1}{3}x' - \frac{4}{3\sqrt{2}}y'\right) + 8\left(\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) + 17 =$$

$$= 2x' + \frac{14}{\sqrt{2}}y' + 17.$$

Выполнив указанное ортогональное преобразование получаем

$$-2x'^2 + 7y'^2 + 7z'^2 + 2x' + \frac{14}{\sqrt{2}}y' + 17 = 0,$$

или

$$-2\left(x'-\frac{1}{2}\right)^2+7\left(y'+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+7z'^2=-14.$$

Второе преобразование координат имеет вид:

$$x'-\frac{1}{2}=x'',\ y'+\frac{1}{\sqrt{2}}=y'',\ z'=z'',$$

откуда окончательно получаем каноническое уравнение двуполостного гиперболоида:

$$-\frac{x''^2}{7}+\frac{y''^2}{2}+\frac{z''^2}{2}=1.$$

Результирующее преобразование будет таким:

$$x=\frac{2}{3}x'''+\frac{1}{3\sqrt{2}}y''+\frac{1}{\sqrt{2}}z''+\frac{1}{6},$$

$$y=\frac{1}{3}x''-\frac{4}{3\sqrt{2}}y''+\frac{5}{6},$$

$$z=\frac{2}{3}x''+\frac{1}{3\sqrt{2}}y''-\frac{1}{\sqrt{2}}z''+\frac{1}{6},$$

а каноническая система координат – $\left(0', \bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\right)$, где $0'\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right)$. ▲

Дополнительные задачи

1. Методом ортогональных преобразований привести следующие квадратичные формы к каноническому виду:

а) $x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$;

б) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

в) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$.

Отв.: а) $3x_1'^2-x_2'^2$; б) $5x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2$; в) $3x_1'^2+6x_2'^2-2x_3'^2$.

2. Привести к каноническому виду уравнения линий второго порядка:

а) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$;

б) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$;

в) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$;

г) $8x^2-18xy+9y^2+2x-1=0$.

Отв.: а) эллипс $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$; б) парабола $y'^2=4\sqrt{2}\,x'$; в) гипербола

$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$; г) две пересекающиеся прямые $\left[\begin{array}{l} 2x' - 3y' + 1 = 0, \\ 4x' - 3y' - 1 = 0. \end{array}\right.$

3. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка:

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 20 = 0.$$

Отв.: $\frac{x'^2}{20} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{10} = 1.$

4. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат:

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$$

Отв.: Эллипсоид $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} + \frac{z'^2}{2/3} = 1$, $0'(1;\ 2;\ -1)$, $\overline{e}_1 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\overline{e}_2 = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $\overline{e}_3 = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Литература

1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – М. : Высш. шк., 1986.

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / В. И. Беклемишев. – М. : Наука, 1984.

3. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1988.

4. Жевняк, Р. М. Высшая математика: основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992.

5. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч.1 / Д. Т. Письменный. – М. : Рольф, 2001.

6. Борисенко, О. Ф. Высшая математика для технических университетов. Линейная алгебра / О. Ф. Борисенко, А. А. Карпук. – Минск : Харвест, 2012.

7. Борисенко, О. Ф. Высшая математика для технических университетов. Аналитическая геометрия / О. Ф. Борисенко, А. А. Карпук. – Минск : Харвест, 2012.

Содержание

Св. план 2013, поз. 36

Учебное издание

Цегельник Владимир Владимирович
Амелькина Галина Ивановна
Князюк Наталья Владимировна и др.

ВЕКТОРНАЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПОСОБИЕ

Редактор *М. А. Зайцева*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Г. М. Кореневская*, *Е. Г. Бабичева*

Подписано в печать 02.12.2013. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 5,12. Уч.-изд. л. 5,2. Тираж 300 экз. Заказ 268.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6