Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Контрольные задания
для студентов радиотехнических специальностей
заочной формы обучения

3-е издание, переработанное и дополненное

Минск 2008

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73

Составители:

А. А. Карпук, О. А. Феденя

В 93 **Высшая** математика: Контрольные задания для студ. радиотех. спец. заоч. формы обуч. / Сост. А. А. Карпук, О. А. Феденя. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУИР, 2008. – 36 с.
ISBN 978-985-488-264-2

Учебные планы радиотехнических специальностей предусматривают выполнение 8 контрольных работ по курсу высшей математики. В данном методическом издании контрольные работы представлены в 10 вариантах.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73

ISBN 978-985-488-264-2

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить соответствующие разделы курса по рекомендуемым источникам. При затруднении в освоении теоретического или практического материала он может получить консультацию на кафедре высшей математики.

Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради, на обложке которой студенту следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, шифр, номер контрольной работы, название дисциплины и дату отправки работы в университет.

Задачи для контрольной работы следует выбирать в соответствии с номером, который совпадает с последней цифрой учебного шифра студента. Условие задачи должно быть полностью переписано перед решением.

В зачтенной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть все рекомендации и советы. Если же работа не зачтена, то ее выполняют еще раз и отправляют на повторную рецензию. Зачтенные контрольные работы предъявляются студентом при сдаче зачета или экзамена.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1 – 10. Даны четыре вектора $\vec{a}$ $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\vec{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$, $\vec{c}(c_1;\ c_2;\ c_3)$ и $\vec{d}(d_1;\ d_2;\ d_3)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

1.	$\vec{a}(4;\ 5;\ 2)$,	$\vec{b}(3;\ 0;\ 1)$,	$\vec{c}(-1;\ 4;2)$,	$\vec{d}(5;7;8)$.
2.	$\vec{a}(3;\ -5;\ 2)$,	$\vec{b}(4;5;1)$,	$\vec{c}(-3;0;-4)$,	$\vec{d}(-4;5;-16)$.
3.	$\vec{a}(-2;\ 3;\ 5)$,	$\vec{b}(1;-3;4)$,	$\vec{c}(7;8;-1)$,	$\vec{d}(1;20;1)$.
4.	$\vec{a}(1;\ 3;\ 5)$,	$\vec{b}(0;2;0)$,	$\vec{c}(5;7;9)$,	$\vec{d}(0;4;16)$.
5.	$\vec{a}(2;\ 4;\ -6)$,	$\vec{b}(1;3;5)$,	$\vec{c}(0;-3;7)$,	$\vec{d}(2;3;52)$.
6.	$\vec{a}$ $(4;\ 3;\ -1)$,	$\vec{b}(5;0;4)$,	$\vec{c}(2;1;2)$,	$\vec{d}(0;12;-6)$.
7.	$\vec{a}$ $(3;\ 4;\ -3)$,	$\vec{b}(-5;5;0)$,	$\vec{c}(2;1;-4)$,	$\vec{d}(8;-16;17)$.
8.	$\vec{a}$ $(-2;1;\ 7)$,	$\vec{b}(3;-3;8)$,	$\vec{c}(5;4;-1)$,	$\vec{d}(18;25;1)$.
9.	$\vec{a}$ $(1;\ 0;\ 5)$,	$\vec{b}$ $(3;2;7)$,	$\vec{c}(5;0;9)$,	$\vec{d}(-4;2;-12)$.
10.	$\vec{a}$ $(2;\ 1;\ 0)$,	$\vec{b}(4;3;-3)$,	$\vec{c}(-6;5;7)$,	$\vec{d}(34;5;-26)$.

11 – 20. Даны координаты вершин пирамиды $\mathbf{A_1A_2A_3A_4}$. Найти: 1) длину ребра $\mathbf{A_1A_2}$; 2) угол между ребрами $\mathbf{A_1A_2}$ и $\mathbf{A_1A_4}$; 3) угол между ребром $\mathbf{A_1A_4}$ и гранью $\mathbf{A_1A_2A_3}$; 4) площадь грани $\mathbf{A_1A_2A_3}$; 5) объём пирамиды; 6) уравнения прямой $\mathbf{A_1A_2}$; 7) уравнение плоскости $\mathbf{A_1A_2A_3}$; 8) уравнения высоты, опущенной из вершины $\mathbf{A_4}$ на грань $\mathbf{A_1A_2A_3}$. Сделать чертёж.

11.	$A_1(3;1;4)$,	$A_2(-1;6;1)$,	$A_3(-1;1;6)$,	$A_4(0;4;-1)$.
12.	$A_1(3;3;9)$,	$A_2(6;9;1)$,	$A_3(1;7;3)$,	$A_4(8;5;8)$.
13.	$A_1(3;5;4)$,	$A_2(5;8;3)$,	$A_3(1;9;9)$,	$A_4(6;4;8)$.
14.	$A_1(2;4;3)$,	$A_2(7;6;3)$,	$A_3(4;9;3)$,	$A_4(3;6;7)$.
15.	$A_1(9;5;5)$,	$A_2(-3;7;1)$,	$A_3(5;7;8)$,	$A_4(6;9;2)$.
16.	$A_1(0;7;1)$,	$A_2(4;1;5)$,	$A_3(4;6;3)$,	$A_4(3;9;8)$.
17.	$A_1(5;5;4)$,	$A_2(3;8;4)$,	$A_3(3;5;10)$,	$A_4(5;8;2)$.
18.	$A_1(6;1;1)$,	$A_2(4;6;6)$,	$A_3(4;2;0)$,	$A_4(1;2;6)$.
19.	$A_1(7;5;3)$,	$A_2(9;4;4)$,	$A_3(4;5;7)$,	$A_4(7;9;6)$.
20.	$A_1(6;6;2)$	$A_2(5;4;7)$,	$A_3(2;4;7)$,	$A_4(7;3;0)$.

21. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки **А (2;2)** и от оси абсцисс.

22. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки **A (3;0),** чем от оси ординат.

23. Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до начала координат к расстоянию до прямой $3x+16=0$ равно 0,6.

24. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое ближе к точке **A (1;0),** чем к точке **B (-2;0)**.

25. Составить уравнение линии, каждая точка которой является центром окружности, касающейся оси абсцисс и проходящей через точку **A (0;3)**.

26. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояния от начала координат и от точки **A (0;5)** относятся как 3:2.

27. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояние от точки **A (0;1)** вдвое меньше расстояния от прямой $y = 4$.

28. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки **A (4;2)** и от оси ординат.

29. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки **A (4;0)** вдвое дальше, чем от прямой $x=1$.

30. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки **A (-0,5; 1)** и от прямой $2x+15=0$.

31 – 40. Доказать совместность данной системы линейных уравнений и решить ее двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления:

31. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-4x_2-3x_3=-1, \\ x_1+5x_2+x_3=0. \end{cases}$

32. $\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3=7, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=9, \\ x_1+2x_2+3x_3=1. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=21, \\ x_1-4x_2-2x_3=-16, \\ -3x_1+5x_2+6x_3=41. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=4, \\ 5x_1+2x_2+13x_3=2, \\ 3x_1-x_2+5x_3=0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2, \\ 4x_1-3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} 7x_1-5x_2=34, \\ 4x_1+11x_2=-36, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 3x_2-5x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2, \\ -4x_1-x_2+3x_3=-3. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$

40. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=8, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=11, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=13. \end{cases}$

41 – 50. Найти размерность и базис пространства решений однородной системы линейных уравнений.

41. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3+6x_4=0, \\ 2x_1+5x_2+x_3-2x_4=0, \\ x_1+7x_2-10x_3+20x_4=0. \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-4x_4=0, \\ 2x_1-3x_2-2x_3+x_4=0, \\ 4x_1-x_{2.}+4x_3-9x_4=0. \end{cases}$

43. $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3+x_4=0, \\ 5x_1-8x_2-2x_3+8x_4=0, \\ -2x_1-x_2-10x_3-5x_4=0. \end{cases}$

44. $\begin{cases} 5x_1-5x_2+10x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2+7x_3+x_4=0, \\ x_1+7x_2+4x_3+3x_4=0. \end{cases}$

45. $\begin{cases} 7x_1+5x_2+3x_3+6x_4=0, \\ 2x_1-x_2-x_3+4x_4=0, \\ x_1+8x_2+6x_3-6x_4=0. \end{cases}$

46. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+5x_2-8x_3-5x_4=0, \\ x_1+4x_2+5x_3+x_4=0. \end{cases}$

47. $\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x+4x_{21}-x_3+3x_4=0, \\ x_1+3x_2-x_3+4x_4=0. \end{cases}$

48. $\begin{cases} 5x_1-3x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3+3x_4=0, \\ x_1+7x_2-6x_3+4x_4=0. \end{cases}$

49. $\begin{cases} 7x_1+5x_2-3x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3+2x_4=0, \\ x_1+x_2+3x_3-3x_4=0. \end{cases}$

50. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0, \\ 4x_1-x_2-5x_3+3x_4=0. \end{cases}$

51 – 60. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей:

51. $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$

52. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$

53. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

54. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$

55. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

56. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

57. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

58. $\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

59. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

60. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

61 – 70. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка, используя теорию квадратичных форм:

61. $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18.$

62. $4x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2 + 24.$

63. $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 = 21.$

64. $5x^2 + 4\sqrt{2}xy + 3y^2 = 14.$

65. $7x^2+6\sqrt{2}xy+4y^2=15.$ 66. $3x^2+2\sqrt{14}xy+8y^2=10.$

67. $7x^2+2\sqrt{6}xy+2y^2=24.$ 68. $9x^2+4\sqrt{2}xy+2y^2=20.$

69. $6x^2+2\sqrt{10}xy+3y^2=16.$ 70. $4x^2+4\sqrt{3}xy+5y^2=40.$

2. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

71 – 75. Построить график функции $y=f(x)$ преобразованием графика функции $y=\sin x$:

71. $y=3\sin(2x-1).$ 72. $y=-3\sin(2x+3).$

73. $y=\frac{5}{2}\sin(4x-2).$ 74. $y=2\sin\left(\frac{4}{3}x+2\right).$

75. $y=-\frac{3}{4}\sin(2x+2).$

76 – 80. Построить график функции $y=f(x)$ преобразованием графика функции $y=\cos x$:

76. $y=\frac{4}{3}\cos(3x+3).$ 77. $y=-\frac{2}{3}\cos(3x+2).$

78. $y=-\frac{6}{5}\cos\left(\frac{3}{2}x+1\right).$ 79. $y=3\cos\left(\frac{1}{2}x+1\right).$

80. $y=2\cos(2x-1).$

81 – 90. Дана функция $\rho=f(\varphi)$ на отрезке $0\le\varphi\le 2\pi$. Требуется: 1) построить график функции в полярной системе координат по точкам, давая φ значения через промежуток $\pi/8$, начиная от $\varphi=0$; 2) найти уравнение полученной линии в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью, и по уравнению определить, какая это будет линия.

81. $r=\dfrac{3}{1-\cos j}$. 82. $r=\dfrac{6}{3+2\cos j}$.

83. $r=\dfrac{4}{2+3\cos j}$. 84. $r=\dfrac{2}{1-\sin j}$.

85. $r=\dfrac{5}{4-3\cos j}$. 86. $r=\dfrac{3}{5+6\cos j}$.

87. $r=\dfrac{5}{1+\sin j}$. 88. $r=\dfrac{3}{2+\cos j}$.

89. $r=\dfrac{6}{1-2\cos j}$. 90. $r=\dfrac{4}{1+\cos j}$.

91 – 100. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

91. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^2-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{4}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$.

92. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$.

93. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-4)\left[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)\right]$.

94. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+2x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$.

95. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{1-\cos8x}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)\left[\ln(1-x)-\ln(2-x)\right]$.

96. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

97. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5-5x^2+5}{5x^5+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-1}{x\operatorname{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right]$.

98. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3x}{x\sin2x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$.

99. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}\,5x$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-7)[\ln(3x+4)-\ln 3x]$.

100. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^2+2x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{\cos x-\cos^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)[\ln(x+5)-\ln x]$.

101 – 110. Заданы функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x_1 и x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы при приближении к точке разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

101. $f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$, $x_1=3$ $x_2=5$

102. $f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}$, $x_1=2$ $x_2=4$.

103. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}$, $x_1=4$, $x_2=3$.

104. $f(x)=7^{\frac{1}{x-5}}$, $x_1=7$, $x_2=5$.

105. $f(x)=10^{\frac{1}{x-6}}$, $x_1=8$, $x_2=6$.

106. $f(x)=25^{\frac{1}{x-8}}$, $x_1=10$, $x_2=8$.

107. $f(x)=9^{\frac{1}{x-7}}$, $x_1=9$, $x_2=7$.

108. $f(x)=4^{\frac{1}{x-1}}$, $x_1=3$, $x_2=1$.

109. $f(x)=16^{\frac{1}{x-2}}$, $x_1=6$, $x_2=2$.

110. $f(x)=8^{\frac{1}{x-2}}$, $x_1=4$, $x_2=2$.

111 –120. Задана функция $y=f(x)$ различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

111. $y=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1, \\ 2x, & 1<x\le 3, \\ x+2, & x>3. \end{cases}$ 112. $y=\begin{cases} x-3, & x<0, \\ x+1, & 0\le x\le 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x>4. \end{cases}$

113. $y=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0, \\ x, & 0<x\le 1, \\ x+2, & x>1. \end{cases}$ 114. $y=\begin{cases} x-1, & x\le 0, \\ x^2, & 0<x<2, \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$

115. $y=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x\le 0, \\ 1, & 0<x<2, \\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$ 116. $y=\begin{cases} \cos x, & x\le 0, \\ 1-x, & 0<x\le 2, \\ x^2, & x>2. \end{cases}$

117. $y=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ x, & 0\le x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$ 118. $y=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le p/4 \\ 2, & x>p/4. \end{cases}$

119. $y=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x<p/2, \\ x, & x\ge p/2. \end{cases}$ 120. $y=\begin{cases} \cos x, & x\le p/2, \\ 0, & p/2<x<p, \\ p/2, & x\ge p. \end{cases}$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

121 – 130. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций:

121. а) $y=\sqrt[3]{x^4+5x}-\sqrt[4]{(5x-1)^3}$; б) $y=\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$;

в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$; г) $y=x^{2/x}$; д) $x\sin y-y\cos x=0$.

122. а) $y=\frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}}-6\sqrt[3]{2+x};$ б) $y=\sin^3 2x;$

в) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2};$ г) $y=x^{e^x};$

д) $e^{xy}-x^2+y^2=0.$

123. а) $y=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$ б) $y=e^{1+\ln^2 x};$

в) $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x};$ г) $y=x^{\arcsin x};$

д) $y\sin x+\cos(x-y)=\cos y.$

124. а) $y=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x}};$ б) $y=\operatorname{tg}\ln\sqrt{x};$

в) $y=3^{\cos^2 x};$ г) $y=x^{e^{-x}};$

д) $\cos(x-y)-2x+4y=0.$

125. а) $y=x+\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}};$ б) $y=\sin\sqrt{1+x^2};$

в) $y=\ln\operatorname{ctg}\sqrt[3]{x};$ г) $y=x^{\frac{1}{x^2}};$ д) $xe^y+ye^x=xy.$

126. а) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{5}{\sqrt[4]{\left(x^3+2\right)^3}};$ б) $y=\cos\ln^2 x;$

в) $y=\left(e^{\sin x}-1\right)^2;$ г) $y=2x^{\sqrt{x}};$ д) $\cos(xy)=y/x.$

127. а) $y=x\sqrt[3]{\frac{2}{1+x}};$ б) $y=\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x};$

в) $y=2^{\frac{1-x}{1+x}};$ г) $y=(\ln x)^x;$ д) $xy+\ln y-2\ln x=0.$

128. а) $y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}};$ б) $y=\sqrt{1+\ln^2 x};$

в) $y=e^{1/x^2}$; г) $y=(\sin x)^{\cos x}$; д) $e^{x+y}=\sin\frac{y}{x}$.

129. а) $y=\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$; б) $y=x\arcsin\frac{2x+1}{3}$;

в) $y=e^{-\cos^4 5x}$; г) $y=(\operatorname{arctg}2x)^{\sin 3x}$;

д) $(x+y)^2=(x-2y)^3$.

130. а) $y=\frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y=e^{-x^2}\cos^3(2x+3)$;

в) $y=x\operatorname{arctg}^3 5x+\ln\operatorname{tg}x$; г) $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$;

д) $y\ln x-x\ln y=x+y$.

131 – 140. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

131. а) $y=\frac{x-1}{x+1}e^{-x}$; б) $\begin{cases} x=t+\ln\cos t, \\ y=t-\ln\sin t. \end{cases}$

132. а) $y=\operatorname{arctg}x^2$; б) $\begin{cases} x=2t-\sin 2t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$

133. а) $y=x^2\ln x$; б) $\begin{cases} x=t+\frac{1}{2}\sin 2t, \\ y=\cos^3 t. \end{cases}$

134. а) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $\begin{cases} x=t^5+2t, \\ y=t^3+8t-1. \end{cases}$

135. а) $y=\ln\operatorname{ctg}4x$; б) $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t, \\ y=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{t}. \end{cases}$

136. а) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}$; б) $x=\arcsin(t^2-1)$, $y=\arccos 2t$.

137. а) $y=\cos^2 x$; б) $x=t^2+t+1$, $y=t^3+t$.

138. а) $y=xe^{\frac{1}{x}}$; б) $x=\operatorname{ctg} t$, $y=\dfrac{1}{\cos^2 t}$.

139. а) $y=xe^{-x}$; б) $x=\dfrac{2-t}{2+t^2}$, $y=\dfrac{t^2}{2+t^2}$.

140. а) $y=\ln\ln x$; б) $x=2\cos^3 2t$, $y=\sin^3 2t$.

141. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на сжатие пропорционально площади этого сечения. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на сжатие было наибольшим?

142. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V, причем стоимость квадратного метра материала, из которого изготавливается дно бака, равна p_1 (руб.), а стоимость квадратного метра материала, идущего на стенки, равна p_2 (руб.). При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут наименьшими?

143. В прямоугольной системе координат через точку **(1;2)** проведена прямая с отрицательным угловым коэффициентом, которая вместе с осями координат образует треугольник. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

144. Из полосы жести шириной 11 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равно-

бедренной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 7 см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

145. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на изгиб пропорционально произведению ширины этого сечения и квадрата высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим?

146. В прямоугольной системе координат через точку **(1;4)** проведена прямая, пересекающаяся с положительными полуосями координат. Написать уравнение прямой, если сумма отрезков, отсекаемых ею на осях координат, принимает наименьшее значение.

147. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

148. Из полосы жести шириной 30 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобедренной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10 см. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

149. Стрела прогиба балки прямоугольного поперечного сечения обратно пропорциональна произведению ширины этого сечения на куб его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, с наименьшей стрелой прогиба (наибольшей жесткости)?

150. Найти отношение радиуса цилиндра к его высоте, при котором цилиндр имеет при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

151 – 160. Провести полное исследование функции и построить ее график:

151. $y=\frac{x}{x^2+1}$.

152. $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

153. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

154. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

155. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

156. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

157. $y=\dfrac{x^3+16}{x}$.

158. $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$.

159. $y=\dfrac{x^3-4}{4x^2}$.

160. $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$.

161. Дана функция $z=e^{xy}$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

162. Дана функция $z=e^{-\cos(ax+y)}$. Показать, что $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

163. Дана функция $z=\ln\left(x^2+y^2+2y+1\right)$. Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

164. Дана функция $z=\sin^2(y-ax)$. Показать, что

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

165. Дана функция $z=\dfrac{y}{x}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

166. Дана функция $z=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

167. Дана функция $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

168. Дана функция $z=arctg\dfrac{x}{y}$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

169. Дана функция $z=\dfrac{\sin(x-y)}{x}$. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)-x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

170. Дана функция $z=e^{x/y}$. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

171 – 180. Даны функция $z=f(x,y)$ и две точки $A\ (x_0\,;y_0)$ и $B\ (x_1;y_1)$. Требуется: 1) вычислить значение z_1 функции в точке B; 2) вычислить приближенное значение z_1 функции в точке B исходя из значения z_0 функции в точке A, заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом; оценить в процентах относительную погрешность, возникающую при замене приращения функции ее дифференциалом; 3) составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $C\ (x_0;\,y_0;\,z_0)$.

171. $z=x^2+3xy+y^2$, A (1; 2), B (1,03; 1,97).

172. $z=xy+y^2-2x$, A (2; 1), B (2,03; 0,96).

173. $z=x^2+y^2-x+y$, A (–2; 2), B (-2,02; 2,05).

174. $z=2x^2+2xy-y^2$, A (1; 3), B (0,95; 2,94).

175. $z=x^2+3xy-y^2$, A (1; 3), B (0,96; 2,95).

176. $z=xy+2x-y$, A (2; 2), B (1,93; 2,05).

177. $z=3y^2-9xy+y$, A (1; 3), B (1,07; 2,94).

178. $z=xy+x-y$, A (1,5; 2,3), B (1,43; 2,35).

179. $z=y^2-xy-x^2$, A (–4; –5), B (–3,92; 5,06).

180. $z=x^2+y^2-x-y,\qquad A\,(1;\,–3),\quad B\,(1{,}08;\,–2{,}94).$

4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

181 – 190. Найти неопределенные интегралы (результаты в случаях «а» и «б» проверить дифференцированием):

181. а) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int x^3e^{2x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$; г) $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$; д) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}dx$.

182. а) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$; б) $\int x^2\cos^2 x\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^4-1}$; г) $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}dx$; д) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$.

183. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$; б) $\int x^3\ln x\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+4x+4}$; г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\left(1+e^x\right)^2}$.

184. а) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$; б) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; г) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; д) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

185. а) $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$; б) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$; в) $\int \frac{x^2}{x^4-16}dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; д) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

186. а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}\,dx$; б) $\int (x+1)\ln^2(x+1)\,dx$;

в) $\int \frac{x}{x^3-1}dx$; г) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$; д) $\int (3+\cos 2x)\sin^2 x\,dx$.

187. а) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{5+x^6}}$; б) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; в) $\int \frac{(x-1)dx}{x^3+x}$;

г) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$; д) $\int ctg^4 xdx$.

188. а) $\int \frac{\cos x\sin 2x}{3\cos^3 x+2}dx$; б) $\int x^2\cos xdx$;

в) $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$; г) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}dx$; д) $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^4 x}$.

189. а) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$; б) $\int x^3 arctgxdx$; в) $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt{2x+1}}$; д) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

190. а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; б) $\int x^3e^{x^2}dx$; в) $\int \frac{(x^3-2x)\,dx}{x^4+2x^2+1}$;

г) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; д) $\int \mathrm{tg}^4 xdx$.

191 – 200. Вычислить определенный интеграл:

191. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$. 192. $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

193. $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}$. 194. $\int_0^{p/6} x\cos 3xdx$.

195. $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx.$

196. $\int\limits_0^{p/2} \cos^5 x \sin 2x\,dx.$

197. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$

198. $\int\limits_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx.$

199. $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx.$

200. $\int\limits_0^{1,5} \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$

201 – 210. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

201. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

202. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\,dx.$

203. $\int\limits_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^5}}\,dx.$

204. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}.$

205. $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}.$

206. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}.$

207. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

208. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx.$

209. $\int\limits_2^3 \frac{x}{\sqrt{(x^2-4)^3}}\,dx.$

210. $\int\limits_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

211. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=e^x$, $y=e^{-x}$ и прямой $x=1$.

212. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2=3x$ и $x^2=3y$.

213. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x^2=4y$ и локоном Аньези $y=\frac{8}{x^2+4}$.

214. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 4\cos 2\theta$.

215. Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой

розой $r = 5\sin 3\theta$.

216. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x \left(0 \le x \le p\right)$.

217. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox астроиды $x = 4\cos^3 t,\quad y = 4\sin^3 t$.

218. Вычислить длину полукубической параболы $y = \sqrt{x^3}$ от точки O (0; 0) до точки A $(5; 5\sqrt{5})$.

219. Вычислить длину дуги кривой $x = 8\sin t + 6\cos t$, $y = 6\sin t - 8\cos t$, от $t = 0$ до $t = p/2$.

220. Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $r = a > 0$.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

221 – 230. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

221. $xy' = y\left[1 + \ln(y/x)\right]$.

222. $y' + y = e^{-x}$.

223. $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'$.

224. $xy' + y = \sin x$.

225. $\left[x - y\cos(y/x)\right]dx + x\cos(y/x)dy = 0$.

226. $\left(1 - x^2\right)y' + xy = 1$.

227. $\left(2x - y\right)dx + \left(x + y\right)dy = 0$.

228. $\left(x^2 - 1\right)y' - xy = x^3 - x$.

229. $\left(x^2 + y^2\right)dx + xy\,dy = 0$.

230. $xy' - 2y + x^2 = 0$.

231 – 240. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

231. $y'' - 3y' = x + \cos x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1/9$.

232. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

233. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

234. $y'' - y' = 9xe^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$.

235. $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

236. $y'' - y' = x + 1$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

237. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

238. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

239. $y'' + 2y' + y = x + \sin x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

240. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/9$.

241 – 250. Найти общее решение системы уравнений:

241. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

242. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 11y. \end{cases}$

243. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

244. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

245. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

246. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

247. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

248. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$

249. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=5x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-3x+9y. \end{cases}$ 250. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+6y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+9y. \end{cases}$

251. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству x. Найти зависимость x от времени t, если известно, что по истечении 1600 лет остается половина первоначального количества радия. Принять первоначальное количество радия $x_0 = 2$.

252. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти угловую скорость диска через 3 мин после начала вращения, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 200 об/мин, по истечении 1 мин вращается со скоростью 120 об/мин.

253. Катер движется в спокойной воде со скоростью $v_0 =$ = 10 км/ч. На полном ходу двигатель катера был выключен, и через 2 мин скорость катера уменьшилась до $v_1 = 0{,}5$ км/ч. Определить скорость, с которой двигался катер через 40 с после выключения двигателя, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.

254. По закону Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20°C и тело в течение часа охлаждается от 100 до 30°C, то через сколько минут (с момента начала охлаждения) его температура понизится до 60°C?

255. Найти уравнение кривой, проходящей через точку **(3;1)** и обладающей тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью Оx делится пополам в точке пересечения с осью Оy.

256. Найти уравнение кривой, проходящей через точку **(1;1)** и обладающей тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой точке M кривой вдвое больше углового коэффициента прямой, соединяющей начало координат с точкой M.

257. Найти уравнение кривой, проходящей через точку **(–1;–1)** и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси Оx касательной, проведенной в любой точке кривой, равен квадрату абсциссы точки касания.

258. Найти уравнение кривой, проходящей через точку **(1;0)** и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси Оy, равен длине радиуса-вектора точки касания.

259. Найти уравнение кривой, проходящей через точку **(1;2)** и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен абсциссе точки касания.

260. Найти уравнение кривой, проходящей через точку **(1;3)** и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси Оx касательной, проведенной в любой точке кривой, равен половине абсциссы точки касания.

6. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

261. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB}(x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$$

вдоль линии $y = |x|$ от точки A (–1;1) до точки B (2;2).

262. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} xdy - ydx$ вдоль дуги циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ от точки A $(2\pi a;0)$ до точки B (0;0).

263. Вычислить криволинейный интеграл $\int_C (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$ вдоль окружности $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, обходя ее против хода часовой стрелки.

264. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (x^2 + y)\,dx + (y^2 + x)\,dy$$

от точки A (1;2) до точки B (3;5) вдоль ломаной линии, состоящей из отрезков прямых $x = 1,\ y = 5$.

265. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{C} xdy - ydx$ вдоль треугольника с вершинами A (–2; 0), B (2; 0), D (0; 2), обходя его против хода часовой стрелки.

266. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} xe^{x^3} dy + ydx$ вдоль дуги параболы $y = x^2$ от точки A (0, 0) до точки B (1; 1).

267. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{OA} 2xydx - x^2\ dy$ вдоль дуги параболы $x = 2y^2$ от точки O (0, 0) до точки A (2; 1).

268. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$ вдоль дуги астроиды $x = 8\cos^3 t, y = 8\sin^3 t$ от точки A (8;0) до точки B (0;8).

269. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{AB} (x^2 - y^2)\,dx + xydy$ от точки A (1; 1) до точки B (3; 4) вдоль прямой, проходящей через эти точки.

270. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{OAB} (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$ вдоль ломаной OAB, где O(0; 0), A(2; 0), B (4; 2).

271–280. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Данное тело и его проекцию на плоскость *xOy* изобразить на чертежах:

271. $z = 0,\ \ z = 2x,\ \ x + y = 3,\ \ \ x = \sqrt{y/2}.$

272. $z = 0,\ z = \sqrt{1 - y},\ \ \ y = x^2.$

273. $z = 0,\ x = 0,\ \ y = 0,\ \ \ x + y = 1,\ \ \ z = x^2 + 3y^2.$

274. $z = 0,\ z = x^2,\ \ 2x - y = 0,\ x + y = 9.$

275. $z = 0, \quad z = 2 - x, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{4}x^2.$

276. $z^2 = 4 - y, \quad x^2 + y^2 = 4y.$

277. $z = 0, \quad x = 0, \quad z = y^2, \quad 2x + 3y = 6.$

278. $z = 0, \quad z = (x-1)^2, \quad y^2 = x.$

279. $z = 0, \quad z = 4 - x^2, \quad x^2 + y^2 = 4.$

280. $z = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = y^2 + 1, \quad x + y = 1.$

281 – 290. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах. Параметр a положителен.

281. $(x^2 + y^2)^5 = a^4 x^4 y^2.$

282. $(x^2 + y^2)^7 = a^8 x^2 y^4.$

283. $(x^2 + y^2)^5 = a^6 x^3 y.$

284. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + 2y^2).$

285. $(x^2 + y^2)^3 = a^2 y^4.$

286. $(x^2 + y^2)^2 = a x^3.$

287. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(5x^2 + 7y^2).$

288. $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4).$

289. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$

290. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 xy.$

291 – 300. Даны векторное поле $\vec{F}$ и плоскость P: $Ax + By + Cz + D = 0$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V. Требуется вычислить:

1) поток векторного поля $\vec{F}$ через часть плоскости P, ограниченной координатными плоскостями, в том направлении нормали к плоскости P, которая образует с осью Oz острый угол;

2) поток векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к ее поверхности.

Сделать чертеж.

291. $\vec{F} = (x + z)\,\vec{i}; \ (p): x + y + z - 2 = 0.$

292. $\vec{F} = (y - x + z)\,\vec{j}; \ (p): 2x - y + 2z - 2 = 0.$

293. $\vec{F} = (x + 7z)\,\vec{k}; \ (p): 2x + y + z - 4 = 0.$

294. $\vec{F} = (x + 2y - z)\,\vec{i}; \ (p): -x + 2y + 2z - 4 = 0.$

295. $\vec{F} = (2x + 3y - 3z)\,\vec{j}; \ (p): 2x - 3y + 2z - 6 = 0.$

296. $\vec{F} = (2x + 4y + 3z)\,\vec{k}; \ (p): 3x + 2y + 3z - 6 = 0.$

297. $\vec{F} = (x - y + z)\,\vec{i}$; $(p): -x + 2y + z - 4 = 0$.
298. $\vec{F} = (3x + 4y + 2z)\,\vec{j}$; $(p): x + y + 2z - 4 = 0$.
299. $\vec{F} = (5x + 2y + 3z)\,\vec{k}$; $(p): x + y + 3z - 3 = 0$.
300. $\vec{F} = (x - 3y + 6z)\,\vec{i}$; $(p): -x + y + 2z - 4 = 0$.

301 – 310. Проверить, будет ли поле вектора $\vec{F}$: а) потенциальным; б) соленоидальным? В случае потенциальности поля найти его потенциал $U(x, y, z)$:

301. $\vec{F} = (-2x - yz)\,i + (-2y - xz)\,j + (-2z - xy)\,k$.
302. $\vec{F} = (2x - yz)\,i + (2y - xz)\,j + (2z - xy)\,k$.
303. $\vec{F} = (2x + yz)\,i + (2y + xz)\,j + (2z + xy)\,k$.
304. $\vec{F} = (2x - 4yz)\,i + (2y - 4xz)\,j + (2z - 4xy)\,k$.
305. $\vec{F} = (2x - 3yz)\,i + (2y - 3xz)\,j + (2z - 3xy)\,k$.
306. $\vec{F} = (-3x + yz)\,i + (-3y + xz)\,j + (-3z + xy)\,k$.
307. $\vec{F} = (2x + 2yz)\,i + (2y + 2xz)\,j + (2z + 2xy)\,k$.
308. $\vec{F} = (4x + yz)\,i + (4y + xz)\,j + (4z + xy)\,k$.
309. $\vec{F} = (2x + 5yz)\,i + (2y + 5xz)\,j + (2z + 5xy)\,k$.
310. $\vec{F} = (2x + 3yz)\,i + (2y + 3xz)\,j + (2z + 3xy)\,k$.

7. РЯДЫ

311 – 320. Исследовать сходимость числового ряда:

311. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n3^n}}$.

312. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$.

313. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(2n+1)}$.

314. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}$.

315. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

316. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

317. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n!}$.

318. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

319. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3 - 2}$.

320. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

321 – 330. Найти интервал сходимости степенного ряда:

321. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt[n]{n}} x^n$.

322. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

323. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$.

324. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} x^n$.

325. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(2^n+1)} x^n$.

326. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$.

327. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$.

328. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(n+1)^n} x^n$.

329. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$.

330. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/3}}{n!} x^n$.

331 – 340. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001. Для этого подынтегральную функцию следует разложить в ряд, который затем почленно проинтегрировать:

331. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x^2 dx}{x^2}$.

332. $\int\limits_0^{0,5} x \ln(1+x^2) dx$.

333. $\int\limits_0^1 e^{-x^2/2} dx$.

334. $\int\limits_0^1 x \sin x^2 dx$.

335. $\int\limits_0^1 \sqrt{x} \cos x dx$.

336. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{x} e^{-x} dx$.

337. $\int\limits_0^{0,5} \operatorname{arctg} x^2 dx$.

338. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^2}\, dx$.

339. $\int\limits_0^{1} \cos\sqrt[3]{x}\, dx$.

340. $\int\limits_0^{0,5} x^2 \ln(1+\sqrt{x})\, dx$.

341 – 350. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = y_0$:

341. $y' = \cos x + y^2,\qquad y(0) = 1.$

342. $y' = e^x + y^2,\qquad y(0) = 0.$

343. $y' = y + y^2,\qquad y(0) = 3.$

344. $y' = 2e^y - xy,\qquad y(0) = 0.$

345. $y' = \sin x + y^2,\qquad y(0) = 1.$

346. $y' = e^x + y,\qquad y(0) = 4.$

347. $y' = x^2 + y^2,\qquad y(0) = 2.$

348. $y' = \sin x + 0{,}5y^2,\qquad y(0) = 1.$

349. $y' = 2e^y + xy,\qquad y(0) = 0.$

350. $y' = x + x^2 + y^2,\qquad y(0) = 5.$

351 – 360. На интервале $(-p, p)$ задана периодическая с периодом $2p$ функция $f(x)$. Требуется:

1) разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье;
2) построить график суммы ряда Фурье.

351. $f(x) = x^2$.

352. $f(x) = |\sin x|$.

353. $f(x) = \begin{cases} 0, & -p < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < p. \end{cases}$

354. $f(x) = |x|$.

355. $f(x) = x$.

356. $f(x) = \dfrac{p}{2} - x$.

357. $f(x) = sign x = \begin{cases} -1, & -p < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < p. \end{cases}$

358. $f(x) = 2x$.

359. $f(x) = x + 1$.

360. $f(x) = \begin{cases} 2, & -p < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < p. \end{cases}$

8. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

361 – 370. Представить заданную функцию $w = f(z)$, где $z = x + iy$, в виде $w = u(x, y) + iv(x, y)$; проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение ее производной в заданной точке z_0:

361. $w = 1/z$, $z_0 = -i$.

362. $w = iz^3$, $z_0 = 1 + i$.

363. $w = z^3 + z - i$, $z_0 = i$

364. $w = ze^z$, $z_0 = -1 + ip$.

365. $w = e^{1-2iz}$, $z_0 = p/6$.

366. $w = \dfrac{1}{2z+3}$, $z_0 = (3i - 3)/2$.

367. $w = (z+1)e^{2z}$, $z_0 = 0$.

368. $w = 2z^2 - iz$, $z_0 = 1 - i$.

369. $w = e^{1-2z}$, $z_0 = pi/3$.

370. $w = z^3 + z^2 + i$, $z_0 = 2i/3$.

371 – 380. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

371. $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0 = 2$.

372. $f(z) = \sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0 = 1$.

373. $f(z) = z \cdot e^{\frac{z}{z-5}}$, $z_0 = 5$.

374. $f(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$, $z_0=i$.

375. $f(z)=z^2\sin\dfrac{z+3}{z}$, $z_0=0$.

376. $f(z)=\cos\dfrac{3z}{z-i}$, $z_0=i$.

377. $f(z)=z\cdot e^{\frac{pz}{z-p}}$, $z_0=p$.

378. $f(z)=\dfrac{2}{z(z-1)}$, $z_0=0$.

379. $f(z)=\sin\dfrac{5z}{z-2i}$, $z_0=2i$.

380. $f(z)=z\cdot e^{\frac{z}{z-4}}$, $z_0=4$.

381 – 390. Определить область (круг) сходимости данного ряда и исследовать сходимость его (расходится, сходится условно, сходится абсолютно) в точках z_1, z_2, z_3 .

381. $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\dfrac{(z+i-1)^n}{n(n+1)}$, $z_1=0$, $z_2=1-i$, $z_3=-i$.

382. $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\dfrac{2^n(z-1)^n}{n(n^2+1)}$, $z_1=0$, $z_2=1+\dfrac{i}{2}$, $z_3=\dfrac{5}{4}$.

383. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2i)^n(z+1)^n}{n^2}$, $z_1=0$, $z_2=-1+\dfrac{i}{2}$, $z_3=-\dfrac{3}{4}$.

384. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-i)^n(z-2)^n}{3^n(n+1)}$, $z_1=0$, $z_2=2+3i$, $z_3=5-2i$.

385. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{2^n n}$, $z_1=1+i$, $z_2=3i$, $z_3=-3+i$.

386. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2+i)^n}{2^n(n^2+1)}$, $z_1=2+3i$, $z_2=4-i$, $z_3=2-i$.

387. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{3^n(2n-1)}$, $z_1=0$, $z_2=2i$, $z_3=4+i$.

388. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1+i)^n}{2^n(n^2+1)}$, $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=-1+i$.

389. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{3^n(n+1)}$, $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=1+4i$.

390. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{3^n n^2}$, $z_1=0$, $z_2=-5i$, $z_3=2+2i$.

391 – 400. При помощи вычетов вычислить данный интеграл по контуру l.

391. $\oint\limits_l \frac{z^2+1}{(z+1)^2(z-2i)}dz$, $l:|z+1-i|=3$.

392. $\oint\limits_l \frac{\sin z}{z^2(z+i)}dz$, $l:|z+1+i|=2$.

393. $\oint\limits_l \frac{z}{(z-3i)(z+2)^2}dz$, $l:|z+1-2i|=3$.

394. $\oint\limits_l \frac{e^{-2z}}{z^2(z+3i)}dz$, $l:|z+2i|=3$.

395. $\oint\limits_l \frac{1-z}{(z+1)(z+i)^2}dz$, $l:|z|=2$.

396. $\oint\limits_l \frac{z^2+1}{(z+2i)^2(z-1)}dz$, $l:|z+i|=3$.

397. $\oint\limits_l \frac{\cos z}{z^2(z+i)}dz$, $l:|z-i|=3$.

398. $\oint\limits_l \frac{1-z^2}{(z-i)^2(z+2)}dz$, $l:|z|=3$.

399. $\oint\limits_{l} \dfrac{e^{-3z}}{z^2(z+i)}dz$, $\quad l: |z-1+i| = 3.$

400. $\oint\limits_{l} \dfrac{z^3}{(z-1)^2(z+i)}dz$, $\quad l: |z| = 2.$

401 – 410. Найти изображение заданного оригинала $f(t)$.

401. $f(t) = t\cos 2t\, ch2t.$

402. $f(t) = t^2 e^{3t} ch2t$.

403. $f(t) = t^2 \sin 3t$.

404. $f(t) = t\sin 2t\, sh2t$.

405. $f(t) = t^2 sh3t$.

406. $f(t) = \sin 2t\, e^{-2t} \cdot t$.

407. $f(t) = t^2 ch4t$.

408. $f(t) = e^{-t}\sin 3t \cdot t$.

409. $f(t) = e^{4t}\cos 2t \cdot sh3t$.

410. $f(t) = te^{t} \cdot \cos 2t$.

411 – 420. Найти изображение заданного оригинала $f(t)$.

411. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\cos 3t - \cos 2t}{t}dt$

412. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\sin 7t \cdot \sin 3t}{t}dt$.

413. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{ch3t - \cos 4t}{t}dt$.

414. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{e^{-2t} - t - 1}{t}dt$.

415. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{e^{2t} - 1 - 3t}{t}dt$.

416. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{1-\cos 2t}{t}dt$.

417. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\cos 2t - \cos 3t}{t}dt$.

418. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{ch2t - ch5t}{t}dt$.

419. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{e^{3t} - \cos 2t}{t}dt$.

420. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\cos 4t - e^{3t}}{t}dt$.

421 – 430. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

421. $x''' + x'' = \sin t$; $\quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1, \; x''(0) = 0$.

422. $x'' - x' = te^{t}$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

423. $x''' - 2x'' + x' = 4$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -2$.

424. $x'' - 9x = e^{-2t}$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

425. $x'' + x' = t^{2} + 2t$; $x(0) = 4$, $x'(0) = -2$.

426. $x'' + 9x = \cos 3t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

427. $x''' + x = 1$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$.

428. $x'' - 4x = t - 1$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

429. $x'' + 2x' + x = \cos t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

430. $x'' + 2x' + x = \cos t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 4-е изд. / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1980.

2. Бугров, Н.С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1980.

3. Бугров, Н.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Н.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981.

4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I, II / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1980.

5. Жевняк, М.Р. Высшая математика: В 4 ч. / М.Р. Жевняк, А.А. Карпук:

Ч.I. – Минск: Выш. шк., 1992; Ч.II – Минск: Выш. шк., 1993; Ч.III, IV. – Минск: Обозрение, 1997.

6. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – М.: Наука, 1965 –1980.

7. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения) / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1971.

8. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В 2 т. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985.

9. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1964–1978.

10. Высшая математика: Методические указания для студ. радиотех. спец. заоч. формы обуч. В 2 ч. Ч.1 / Сост. О.Ф. Борисенко, Л.А. Конюх, Н.И. Кобринец. – Минск: БГУИР, 2001. – 56 с.

11. Высшая математика: Методические указания для студ. радиотех. спец. заоч. формы обуч. В 2 ч. Ч.2 / Сост. О.Ф.Борисенко, Л.А.Конюх, Н.И. Кобринец. – Минск: БГУИР, 2001. – 48 с.

Св. план 2007, поз. 97

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Контрольные задания для студентов
радиотехнических специальностей
заочной формы обучения

Составители: **Карпук** Андрей Андреевич
Федeня Ольга Александровна

Редактор Т. Н. Крюкова
Компьютерная верстка Г. М. Кореневская

Подписано в печать 10.04.2008. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая. Усл. печ. л. 2,3.
Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 1000 экз. Заказ 31.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6