Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики



# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
для студентов радиотехнических специальностей
заочной и дистанционной форм формы обучения
В 2-х частях

Часть 1

2-е издание

Минск БГУИР 2009

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я73
В93

С о с т а в и т е л и:
О. Ф. Борисенко, Л. А. Конюх, Н. И. Кобринец

**Высшая математика**: метод. указания для студ. радио-тех. спец. заоч. и дистанц. форм обуч. В 2 ч. Ч.1 / сост. О. Ф. Борисенко, Л. А. Конюх, Н. И. Кобринец. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУИР, 2009. – 44 с. : ил.
ISBN 978-985-488-382-3(ч.1)

Часть 1 методических указаний предназначена для студентов-заочников БГУИР. Она содержит основные теоретические сведения, общие рекомендации по самостоятельному изучению курса высшей математики, методические указания к выполнению контрольных работ № 1 – 4 и примеры решения типовых задач.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я.73



**ISBN 978-985-488-384-7(ч.2)**
**ISBN 978-985-488-383-0**

# ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – 4-е изд. – М. : Наука, 1980.

2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов. В 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.

3. Бугров, Н. С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980.

4. Бугров, Н. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Н.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1981.

5. Гурский, Е. И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский – Минск : Высш. шк., 1982.

6. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 т. / Е. И. Гурский – Минск : Высш. шк., 1990.

7. Жевняк, Р. М. Высшая математика : В 4 ч. / М. Р. Жевняк, А. А. Карпук : Ч.I. – Минск : Выш. шк., 1992; Ч.II – Минск : Выш. шк., 1993; Ч.III, IV. – Минск : Обозрение, 1997.

8. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник. – М. : Наука, 1965 –1980.

9. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1964–1978.

10. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения) / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1971.

11. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1980.

12. Методические указания по высшей математики для студентов заочной формы обучения (с применением учебного телевидения). В 2 ч. / Р. М. Жевняк [и др.] . – Минск : МРТИ, 1989.

## Контрольная работа №1

## ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Литература: [1], гл.1, § 1–3, гл. 2, 3, § 1–3; [2], гл. 1, § 1–3;
[5], ч.1, § 1.1 – 1.5; [6], гл.4, 7, 9; [6] ч.1.;
[1], гл.5, § 1–5, гл.6; [5], ч.I, § 1.6;
1.10; § 1.15 – 1.19; [9], ч.I; [10], ч.I.

### 1. Основные теоретические сведения

1.1. Базисом пространства $R^3$ называется совокупность линейно независимых векторов, на которые можно разложить любой вектор этого пространства.

Если векторы $\overline{p},\ \overline{q},\ \overline{r}$ образуют базис, то любой вектор $\overline{a} \in R^3$ можно представить в виде

$$\overline{a} = a\,\overline{p} + b\,\overline{q} + g\,\overline{r}. \qquad (1.1)$$

При этом числа $a$, $b$ и $g$ называются координатами вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{p},\ \overline{q},\ \overline{r}$ и определяются однозначно. Если известны координаты векторов $\overline{p},\ \overline{q},\ \overline{r}$ и $\overline{a}$ в некотором базисе, то из (1.1) может быть получена система трех уравнений с тремя неизвестными $a$, $b$, $g$. Для нахождения $a$, $b$, $g$ такая система может быть решена по правилу Крамера

$$a = \Delta_a / \Delta, \quad b = \Delta_b / \Delta, \quad g = \Delta_g / \Delta,$$

где определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}, \qquad \overline{p}(p_1, p_2, p_3), \qquad \overline{q}(q_1, q_2, q_3), \qquad \overline{r}(r_1, r_2, r_3),$$

а $\Delta_a$, $\Delta_b$, $\Delta_g$ – определители, полученные из основного определителя $\Delta$ заменой 1, 2, 3-го столбцов соответственно столбцом из координат вектора $\overline{a}$.

1.2. Скалярным произведением двух векторов $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\,\overline{j} + a_3\overline{k}$ и $\overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\,\overline{j} + b_3\overline{k}$ называется число, определяемое равенством

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos j = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

где $j$ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

При этом длина вектора определяется по формуле

$$|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}\,. \qquad (1.2)$$

1.3. Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который направлен перпендикулярно векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ так, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку, и длина вектора $c$ равна $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin j$ (рис. 1.1).

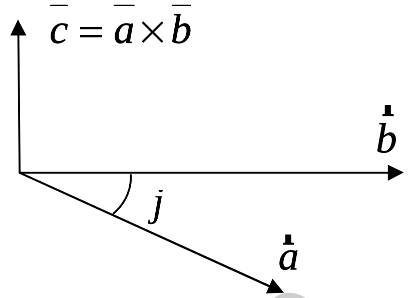


Рис. 1.1

Геометрически $|\bar{c}|$ равен площади $S$ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$S = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin j \, .$$

В координатной форме

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

1.4. Смешанное произведение трех векторов

$$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}, \quad \bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}, \quad c = c_1\bar{i} + c_2\bar{j} + c_3\bar{k}$$

есть число, равное

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

1.5. Общее уравнение плоскости $P$ имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $\bar{n} = (A, B, C)$ – вектор, нормальный (перпендикулярный) плоскости (рис. 1.2).

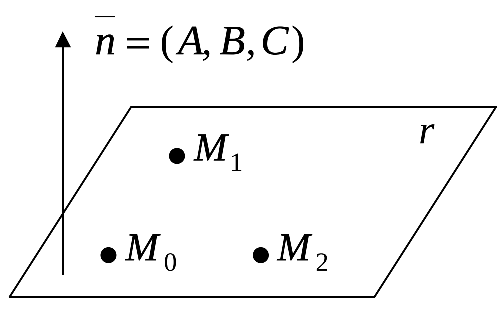


Рис. 1.2

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B, C)$, записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{1.5}$$

Угол $j$ между двумя плоскостями с нормальными векторами $\overline{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ определяется по формуле

$$\cos j = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - x_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.6}$$

1.6. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \tag{1.7}$$

1.7. Уравнение прямой на плоскости в виде $y = kx + b$ называется уравнением с угловым коэффициентом $k$. Если две прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно –1, т. е. $k_1 \cdot k_2 = -1$; если они параллельны, то $k_1 = k_2$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$.

1.8. Пусть $L$ – некоторая линия, каждая точка $M$ которой обладает следующим свойством: отношение расстояний от точек $L$ до данной точки $F$ и до данной прямой $Ax + By + C = 0$ ($d$) равно числу $e$, т.е. $\frac{|MF|}{d} = e$. Число $e$ называется эксцентриситетом. Если $e < 1$, то множество точек $L$ определяет эллипс: $(x - x_0)^2 / a^2 + (y - y_0)^2 / b^2 = 1$.

Если $e > 1$, то $L$ – гипербола: $(x - x_0)^2 / a^2 - (y - y_0)^2 / b^2 = 1$.

Если $e = 1$, то $L$ – парабола: $y = p(x - x_0)^2$.

**Пример 1.1.** Показать, что векторы $\overline{p} = (3;-2;1)$, $\overline{q} = (-1;1;-2)$ и $\overline{r} = (2;1;-3)$ образуют базис, и найти разложение вектора $\overline{d} = (11;-6;5)$ по базису $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$.

***Решение.*** Базисом в пространстве $R^3$ являются любые три некомпланарные векторы. Условием компланарности трех векторов является равенство их смешанного произведения нулю. Итак, находим

$$(\overline{p},\overline{q},\overline{r})=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot(-3)+2\cdot(-2)(-2)+1\cdot(-1)\cdot1-$$

$$-(2\cdot1\cdot1+1\cdot(-2)\cdot3+(-2)(-1)\cdot(-3))=-9+8-1-(2-6-6)=8\neq0.$$

Значит, векторы $\overline{p},\overline{q},\overline{r}$ некомпланарны и образуют базис. Составим систему уравнений (1.1) в координатном виде $\begin{cases}3a-b+2g=11\\ -2a+b+g=-6\\ a-2b-3g=5\end{cases}$ и найдем $\Delta_a,\Delta_b,\Delta_g$. Определитель $\Delta$ найден выше и $\Delta=8$.

$$\Delta_a=\begin{vmatrix}11 & -1 & 2\\ -6 & 1 & 1\\ 5 & -2 & -3\end{vmatrix}=16,\qquad \Delta_b=\begin{vmatrix}3 & 11 & 2\\ -2 & -6 & 1\\ 1 & 5 & -3\end{vmatrix}=-24,$$

$$\Delta g=\begin{vmatrix}3 & -1 & 11\\ -2 & 1 & -6\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=8.$$

Имеем $\quad a=\dfrac{\Delta_a}{\Delta}=2;\quad b=\dfrac{\Delta_b}{\Delta}=-3;\quad g=\dfrac{\Delta_g}{\Delta}=1.$

Значит, $\quad \underline{\overline{d}=2\overline{p}-3\overline{q}+\overline{r}}.$

**Пример 1.2.** Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Требуется найти: 1) длину ребра $A_1A_2$; 2) угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$; 3) угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнения прямой $A_1A_2$; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнения высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж, если $A_1(1;2;1)$, $A_2(3;-1;7)$, $A_3(2;0;2)$, $A_4(7;4;-2)$.

***Решение.*** 1. Находим координаты вектора $\overline{A_1A_2}=(3-1\,;-1-2;\ 7-1)=$ $=(2;-3;6)$ и длину ребра $\left|\overline{A_1A_2}\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=7$ по формуле (1.2).

2. Угол $j$ между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_4$ вычисляется по формуле

$$\cos j = \frac{(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4})}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_4}|}$$ из скалярного произведения. $\overline{A_1A_2} = (2;-3;6)$,

$$\overline{A_1A_4} = (6;2;-3); (\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}) = 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = -12;$$

$$|\overline{A_1A_4}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = 7.$$

Поэтому $\cos j = \frac{-12}{7 \cdot 7} = -\frac{12}{49}$, $\arccos(-\frac{12}{49}) = p - \arccos\frac{12}{49}$.

3. Угол θ между ребром $A_1A_4$ и плоскостью $A_1A_2A_3$ – это угол между вектором $\overline{A_1A_4}$ и его ортогональной проекцией $A_1A_4'$ на грань $A_1A_2A_3$ (рис. 1.3).

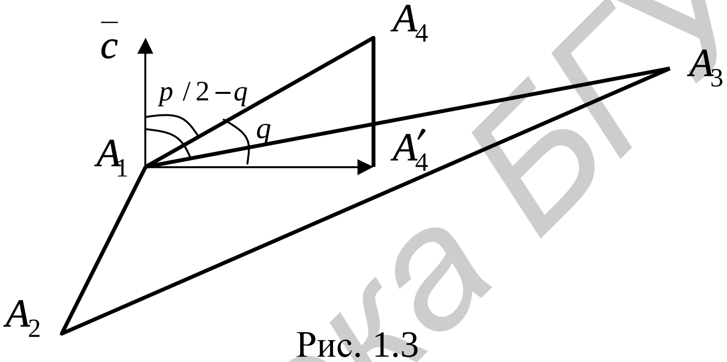


Рис. 1.3

Вектор $\bar{c} = \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}$ перпендикулярен грани $A_1A_2A_3$, что вытекает из определения векторного произведения векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ (1.3):

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k} \text{ (здесь } \overline{A_1A_2} = (2;-3;6); \ \overline{A_1A_3} = (1;-2;1)).$$

Как и в предыдущем пункте, находим

$$\cos(p / 2 - q) = \sin q = \frac{(\overline{A_1A_4}, \bar{c})}{|\overline{A_1A_4}| \cdot |\bar{c}|} = \frac{6 \cdot 9 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1)}{7 \cdot \sqrt{81 + 16 + 1}} = \frac{65}{49\sqrt{2}},$$

$$q = \arcsin\frac{65}{49\sqrt{2}}.$$

4. Площадь грани $A_1A_2A_3$ находим, используя геометрический смысл векторного произведения

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}| = \frac{1}{2}|9\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}| = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

5. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ численно равен одной шестой модуля смешанного произведения векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$ (1.4).

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4})\right| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{65}{6}.$$

6. Для составления уравнений прямой $A_1A_2$ воспользуемся формулой (1.7), где $x_0, y_0, z_0$ – координаты точки $A_1$; $x_1, y_1, z_1$ – координаты точки $A_2$.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{6}.$$

В таком виде уравнения прямой называются каноническими. Они могут быть записаны и в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-1}{6} \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x - z - 2 = 0 \\ 3x + 2y - 7 = 0 \end{cases},$$

т.е. уравнение прямой как линии пересечения двух плоскостей.

7. Для составления уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ воспользуемся формулой (1.6), где $x_0, y_0, z_0$ – координаты $A_1$; $x_1, y_1, z_1$ – координаты $A_2$; $x_2, y_2, z_2$ – координаты $A_3$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9x + 4y - z - 16 = 0.$$

8. Искомые уравнения высоты получим из канонических уравнений прямой $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, лежащая на искомой прямой; $m, n, p$ – координаты вектора $\bar{l}$, параллельного искомой прямой. При этом в качестве точки $M_0$ возьмем точку $A_4(7;4;-2)$, а в качестве вектора $\bar{e}$ – нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$, т.е. $\bar{n} = (9;4;-1)$. Имеем $\dfrac{x-7}{9} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z+2}{-1}$.

9. Сделаем чертеж (рис. 1.4).

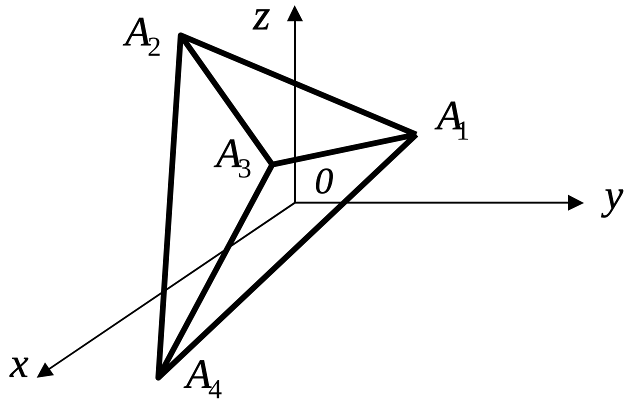


Рис. 1.4

**Пример 1.3.** Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A=(4;-1)$ и уравнения двух биссектрис $x-1=0$ и $x-y-1=0$.

***Решение.*** Нетрудно проверить, что координаты точки $A$ не удовлетворяют уравнениям биссектрис, т.е. $4-1\neq 0$ и $4-(-1)-1\neq 0$. Пусть $BD$ и $CE$ – биссектрисы (рис. 1.5). Найдем координаты точки $A_1$, симметричной точке $A$ относительно биссектрисы $CE$. Она лежит на стороне $BC$. Для этого:

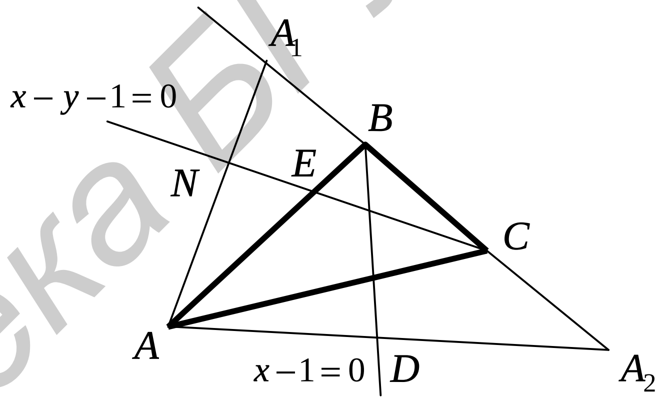


Рис. 1.5

1. Напишем уравнение прямой $AA_1 \perp CE$ $\quad y=-x+b$ (угловые коэффициенты перпендикулярных прямых $k_1$ и $k_2$ связаны соотношением $k_1k_2=-1, k_1=1 \;\Rightarrow\; k_2=-1$). Подставляем в это уравнение координаты точки $A$, находим $b=-1+4=3$; итак, уравнение $AA_1: y=-x+3$.

2. Из системы $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=x-1 \end{cases}$ находим точку пересечения прямых $AA_1$ и $CE$, т.е. точку $N=(2;1)$.

3. Находим координаты точки $A_1(x,y)$, зная координаты $A_1(4;-1)$ и середины отрезка $AA_1$, т.е. точки $N(2;1)$:

$$\begin{cases} 2=\dfrac{x+4}{2} \\ 1=\dfrac{y-1}{2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}.$$

Аналогично находим координаты точки $A_2$, симметричной точке $A$ относительно биссектрисы $BD: A_2(-2;-1)$. Составляем уравнение стороны $BC$ как прямой, проходящей через точки $A_1$ и $A_2$:

$$BC: \quad \frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-3}{-1-3} \quad \Rightarrow \quad \underline{2x-y+3=0}.$$

Находим координаты точки $B$ как точки пересечения прямых $BD$ и $BC$:

$$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}.$$

По точкам $A=(4;-1)$ и $B=(1;5)$ записываем уравнение прямой $AB: \dfrac{x-4}{-3} = \dfrac{y+1}{6} \Rightarrow 2x+y-7=0$.

Аналогично из системы уравнений $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ находим координаты точки $C(-4;-5)$. По точкам $A$ и $C$ составляем уравнение стороны $AC$:

$$\frac{x-4}{-8} = \frac{y+1}{-4} \Rightarrow \underline{x-2y-6=0}.$$

**Пример 1.4.** Построить на плоскости область решений системы линейных неравенств

$$\begin{cases} x+y-2 \le 0 \\ 2y-x-1 \le 0 \\ x+3y \ge -3. \end{cases}$$

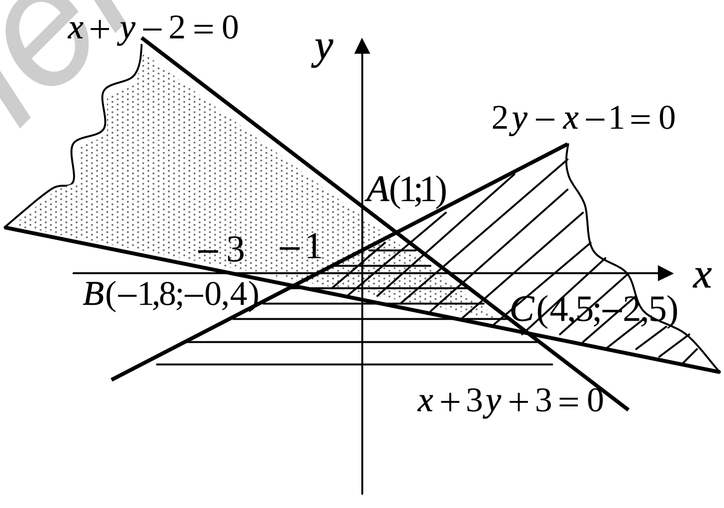


Рис. 1.6

***Решение.*** Чтобы решить неравенство $x+y-2 \le 0$, рассмотрим прямую $x+y=2$. Она проходит через две точки $(2;0)$ и $(0;2)$. При $x=0, y=0$ неравенство $x+y-2 \le 0$ является верным. Следовательно, ему удовлетворяют все точки, лежащие ниже прямой $x+y-2 \le 0$ и на прямой. Для решения второго неравенства $2y-x-1 \le 0$ строим прямую $2y-x=1$, проходящую через точки $(-1;0)$ и $(0;1/2)$. Точка $(0;0)$ удовлетворяет неравенству $2y-x-1 \le 0$, следовательно, ему удовлетворяют все точки, лежащие ниже прямой $2y-x=1$ и на этой прямой. Находим точку $A$ пересечения прямых $x+y=2$ и $2y-x=1$, решая систему

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2y-x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Наконец, решаем неравенство $x+3y \geq -3$. Для этого строим прямую $x+3y=-3$, проходящую через точки $(0;-1;)$ и $(-3;0)$. Точка $(0;0)$ также удовлетворяет этому неравенству $x+3y \geq -3$, поэтому его решением является множество точек плоскости выше прямой $x+3y=-3$ и на самой прямой.

Решая системы уравнений $\begin{cases} x+y=2 \\ x+3y=-3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2y-x=1 \\ x+3y=-3 \end{cases}$, находим координаты точек $B\left(-\frac{9}{5};-\frac{2}{5}\right)$ и $C\left(\frac{9}{2};-\frac{5}{2}\right)$. Данной системе неравенств удовлетворяют все точки внутри треугольника $ABC$ и на его границе (рис. 1.6).

**Пример 1.5.** Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояния до данной точки $F(-4;0)$ к расстоянию до данной прямой $4x+25=0$ равно $\frac{4}{5}$.

***Решение.*** Обозначим произвольную точку искомой линии $M(x,y)$ (рис. 1.7). Тогда по условию $5|FM|=4|PM|$, где $P$ – основание перпендикуляра из точки $M$ к прямой $4x+25=0$. Но $|FM|=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$;

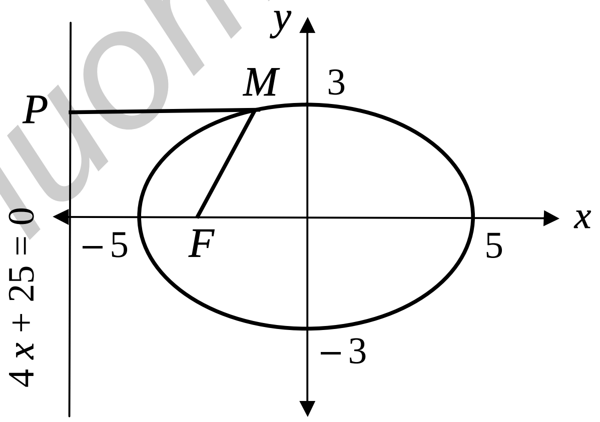


Рис. 1.7

$|PM|=\sqrt{|x+25/4|}$. Значит, $5\sqrt{(x+4)^2+y^2}=4|x+25/4|$. Возводя в квадрат, получаем $9x^2+25y^2=225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $a = 5, \quad b = 3$ и центром в начале координат.

1. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными $x_1, x_2, x_3$ имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

или в матричном виде $AX = B$, где $a_{ij}$ – коэффициенты системы; $b_i$ – свободные члены. Если определитель матрицы $A$ системы $|A| = \Delta \neq 0$, то система совместна и ее решение может быть получено матричным способом:

$$X = A^{-1}B,$$

где $A$ – матрица системы; $A^{-1}$ – обратная матрица.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

В случае когда определитель матрицы $\Delta = 0$, для исследования совместности системы следует найти ранги матрицы $A(r_A)$ и расширенной матрицы $\tilde{A}(r_{\tilde{A}})$, где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}.$$

Если система совместная, т.е. $r_A = r_{\tilde{A}}$, но меньше числа неизвестных, в данном случае $r_A = r_{\tilde{A}} < 3$, то система имеет бесконечное множество решений, которые можно найти, например, методом Гаусса [1]. Он применим также и в случае, когда $\Delta \neq 0$.

2. Однородная система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

или в матричном виде $AX = 0$, всегда совместна и имеет только тривиальное решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, если ранг $r$ матрицы $A$ равен числу неизвестных $n$. Если ранг $r$ матрицы $A$ меньше $n$, то множество решений однородной системы $AX = 0$ образует линейное подпространство размерности $n - r$ пространства $R^n$. Совокупность $n - r$ линейно независимых решений однородной системы называется фундаментальной системой решений и образует базис пространства решений $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_{n-r}$. Тогда любое решение однородной системы линейных уравнений есть линейная комбинация базисных векторов, т.е. $\bar{x} = c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \ldots + c_{n-r} \bar{x}_{n-r}$, где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ – произвольные постоянные.

3. Пусть даны два линейных преобразования $f$ и $q$ с матрицами $A$ и $B$ соответственно и пусть $\bar{y} = f(\bar{x})$, $\bar{z} = q(\bar{y})$. Тогда последовательное применение этих преобразований равносильно линейному преобразованию $h$, переводящему вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$, матрица которого $C$ вычисляется как произведение матриц $B$ и $A$: $C = B \cdot A$.

4. Вектор $\bar{x} \neq \bar{0}$ называется собственным вектором некоторого линейного преобразования с матрицей $A$ в некотором базисе, если $A\bar{x} = l\,\bar{x}$. При этом число $\lambda$ называется собственным значением матрицы $A$.

Для нахождения собственных векторов линейного преобразования с матрицей $A$ находим сначала собственные значения из уравнения

$$\det(A - lE) = 0.$$

Координаты $(x_1, x_2, x_3) = X^T$, соответствующие собственному значению $\lambda$, являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - l)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - l)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - l)x_3 = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Подставляя собственные значения в систему (1.8), находим с точностью до постоянного множителя соответствующие собственные векторы.

5. Однородный многочлен второй степени относительно переменных $x$ и $y$

$$\Phi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{1.9}$$

называется квадратичной формой от этих переменных.

Матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ называется матрицей квадратичной формы; отметим, что она является симметричной матрицей, т.е. $a_{12} = a_{21}$. Пусть $A$ – матрица квадратичной формы (1.9) в некотором ортонормированном базисе, например, в базисе $\bar{i}\,(1,0)$, $\bar{j}(0,1)$. Если в качестве нового базиса взять ортонормированные собственные векторы матрицы $A$, т.е. $\bar{e}_1(d_{11}, d_{21})$, $\bar{e}(d_{12}, d_{22})$, то в этом базисе матрица квадратичной формы будет иметь канонический вид

$$\Phi(x_1, y_1) = l_1 x_1^{\ 2} + l_2 y_1^{\ 2}, \tag{1.10}$$

где переменные $x, y$ и $x_1, y_1$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = d_{11}x_1 + d_{12}y_1 \\ y = d_{21}x_1 + d_{22}y_1, \end{cases} \tag{1.11}$$

а $l_1, l_2$ – собственные числа матрицы $A$.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду можно использовать для приведения к каноническому виду уравнений линии (поверхности) второго порядка.

**Пример 1.6.** Методом Гаусса решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

***Решение.*** При решении системы методом Гаусса действия производятся над строками расширенной матрицы

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

с целью приведения ее путем элементарных преобразований к треугольному или трапециевидному виду. Для этого прибавим ко 2-й строке 1-ю, умноженную на (–2), к 3-й строке прибавим 1-ю, умноженную на (–1), получим

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Из 3-й строки вычтем 2-ю, получим

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, ранги основной и расширенной матриц равны 3. Система имеет единственное решение. Она сводится к системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ \quad 3x_2 - 4x_3 = 10 \\ \qquad\quad x_3 = -1. \end{cases}$$

Отсюда, подставляя $x_3 = -1$ во второе уравнение, получим $x_2 = 2$, а из первого уравнения $x_1 = 1$. Итак, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

**Пример 1.7.** Решить систему матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

***Решение.*** Определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -26$ отличен от нуля, значит, находим решение по формуле $X = A^{-1}B$ или $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$

$= \dfrac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot B$, где $B = \begin{bmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A_{ij}$ – алгебраические дополнения элементов $a_{ij}$ матрицы $A$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{31} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5.$$

Проверим правильность вычисления обратной матрицы

$A^{-1} = -\dfrac{1}{26}\begin{bmatrix} -89 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$, исходя из определения обратной матрицы

$$A^{-1}A = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$
=-\frac{1}{26}\begin{bmatrix} -8\cdot 2+(-6)\cdot 1+(-4)\cdot 1) & -8\cdot 1+(-6)(-2)+(-4\cdot 1) & -8\cdot(-3)+(-6)\cdot 2+(-4)\cdot 3 \\ -1\cdot 2+9\cdot 1+(-7)\cdot 1 & -1\cdot 1+9\cdot(-2)+(-7)\cdot 1 & -1\cdot(-3)+9\cdot 2+(-7)\cdot 3 \\ 3\cdot 2+(-1)\cdot 1+(-5)\cdot 1 & 3\cdot 1+(-1)(-2)+(-5)\cdot 1 & 3(-3)+(-1)\cdot 2+(-5)\cdot 3 \end{bmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{bmatrix} -26 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E.
$$

Значит, матричное решение системы имеет вид

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{bmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{bmatrix}=-\frac{1}{26}\begin{bmatrix} -78 \\ 130 \\ -52 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}.
$$

Откуда следует, что $x_1=3, \quad x_2=-5, \quad x_3=2.$

**Пример 1.8.** Найти общее решение однородной системы

$$
\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}
$$

***Решение.*** Находим ранг основной матрицы системы с помощью элементарных преобразований:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 3 & 18 & -15 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow r_A=2.
$$

Так как ранг системы меньше числа неизвестных, то система имеет ненулевые решения. Размерность пространства решений этой системы $n-r=2.$ Преобразованная система, эквивалентная исходной, имеет вид

$$
\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ x_2+6x_3-5x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=-4x_3+3x_4 \\ x_2=-6x_3+5x_4 \end{cases}.
$$

Отсюда $\begin{cases} x_1=8x_3-7x_4 \\ x_2=-6x_3+5x_4. \end{cases}$

Эти формулы дают общее решение. В векторном виде его можно записать следующим образом:

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8x_3-7x_4\\-6x_3+5x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}8\\-6\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-7\\5\\0\\1\end{bmatrix},$$

где $x_3$ и $x_4$ – произвольные числа. Вектор-столбцы $\bar{x}^1=\begin{bmatrix}8\\-6\\1\\0\end{bmatrix}$ и

$\bar{x}^2=\begin{bmatrix}-7\\5\\0\\1\end{bmatrix}$ образуют базис пространства решений данной системы.

Полагая $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, где $c_1, c_2$ – произвольные постоянные, получим общее решение в векторном виде $\bar{x}=c_1\bar{x}_1+c_2\bar{x}_2$.

**Пример 1.9.** Найти линейное преобразование, выражающее $x_1''$, $x_2''$, $x_3''$ через $x_1, x_2, x_3$, если

$$\begin{cases}x_1'=2x_1+x_2\\x_2'=3x_1+5x_2\\x_3'=x_1+x_2-x_3\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}x_1''=2x_1'+x_3'\\x_2''=x_1'-x_2'+3x_3'\\x_3''=-5x_1'+x_2'+x_3'.\end{cases}$$

***Решение.*** Первое линейное преобразование $\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ имеет матрицу $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\3&5&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$, второе $\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}$ имеет матрицу

$B=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&-1&3\\-5&1&1\end{bmatrix}$. Тогда произведение (т.е. последовательное выполнение) линейных преобразований имеет матрицу $C = B \cdot A$, т.е.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -6 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому искомое линейное преобразование имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -6 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

**Пример 1.10.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

***Решение.*** Составляем характеристическое уравнение матрицы

$$|A - lE| = \begin{vmatrix} 2-l & -2 & 3 \\ 1 & 1-l & 1 \\ 1 & 3 & -1-l \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad l^3 - 2l^2 - 5l + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (l-1)(l+2)(l-3) = 0 \Leftrightarrow \quad l_1 = 1, \quad l_2 = -2, \quad l_3 = 3.$$

При $l_1 = 1$ система (2.1) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 \qquad + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

Таким образом, числу $l_1 = 1$ соответствует собственный вектор

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $x_3$ – произвольное действительное число. В частности, при $x_3 = 1$ имеем $\bar{x}_1 = [-1 \quad 1 \quad 1]^T$.

Аналогично для $l = -2$ имеем

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11x_2 \\ x_3 = -14x_1 \end{cases}.$$

Откуда второй собственный вектор $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11x_1 \\ x_2 \\ -14x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$.

При $x_2 = 1$ получаем собственный вектор $\bar{x}_2 = [11 \quad 1 \quad -14]^T$.

Наконец, при $l_3 = 3$ решаем систему

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}, \text{ т.е. вектор } \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Итак, матрица $A$ имеет три собственных значения $l_1 = 1$, $l_2 = -2$, $l_3 = 3$. Соответствующие им собственные векторы (с точностью до постоянного множителя) равны

$$\bar{x}_1 = [-1 \quad 1 \quad 1]^T, \bar{x}_2 = [11 \quad 1 \quad -14]^T, \bar{x}_3 = [1 \quad 1 \quad 1]^T.$$

**Пример 1.11.** Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16$, используя теорию квадратичных форм.

***Решение.*** Левая часть уравнения $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16$ представляет собой квадратичную форму с матрицей $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. Решаем характеристическое уравнение

$$|A - lE| = 0, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} 3 - l & 5 \\ 5 & 3 - l \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad l_1 = 8, \ l_2 = -2.$$

Находим собственные векторы из системы уравнений $\begin{cases} (3 - l)x_1 + 5x_2 = 0 \\ 5x_1 + (3 - l)x_2 = 0 \end{cases}$ при $l_1 = 8$, $l_2 = -2$ (см. пример 1.10).

Получаем $x_1 = x_2$, т.е. собственный вектор $\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ для $l_1 = 8$, и $x_1 = -x_2$, т.е. собственный вектор $\bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ для $l_2 = -2$. Нормируем собственные векторы $\left(\bar{e} = \dfrac{\bar{X}}{|X|}\right)$, получаем $\overline{e_1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$, $\bar{e}_2 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$. Составляем матрицу перехода от старого базиса к новому $T = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, в которой координаты нормированных собственных векторов записаны по столбцам. Выполняя преобразование

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y');\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

получаем из исходного уравнения кривой

$$\frac{3}{2}(x' - y')^2 + 5(x'^2 - y'^2) + \frac{3}{2}(x'^2 + y'^2) = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x_1'^2 - 2y_1'^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x_1'^2}{2} - \frac{y_1'^2}{8} = 1.$$

Последнее уравнение есть каноническое уравнение гиперболы.

## Контрольная работа №2

### ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Литература: [2] гл.1, §1–8; гл. 2, §1–5; [3], гл.2, 3;
[5], §2.1– 2.6; [10], ч.I.

### 2. Основные теоретические сведения

2.1. Первое задание контрольной работы заключается в построении графика функции $y = kf(mx+a)+b$ путем преобразования исходного графика $y = f(x)$.

2.2. Полярные $(r, j)$ и прямоугольные декартовы координаты $(x, y)$ связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = r\cos j \\ y = r\sin j \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg j = \dfrac{y}{x}. \end{matrix}$$

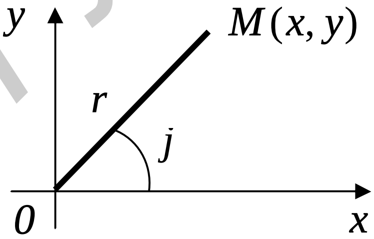

Рис. 2.1

Если известно уравнение линии в полярных координатах $r = r(j)$, то, подставляя $r$ и $j$ в уравнение данной линии, получим уравнение линии в декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью.

2.3. Для выполнения задания №3 необходимо знание следующих определений и правил:

а) определение конечного предела функции в точке: число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $e > 0$ найдется такое $d > 0$, что $|f(x) - A| < e$ при $0 < |x - a| < d$; записывается: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$;

б) функция $f(x)$ называется бесконечно малой (бесконечно большой) при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \left(\lim_{x\to a} f(x) = \infty\right);$$

в) две функции $f(x)$ и $q(x)$, бесконечно малые при $x \to a$, называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{q(x)} = 1$; записывается: $f(x) \sim q(x)$ при $x \to a$;

г) справедливы следующие основные правила вычисления пределов. Пусть $a$ – постоянная, $f(x)$ и $q(x)$ имеют пределы при $x \to a$. Тогда

1) $\lim\limits_{x\to a} a\, f(x) = a \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm q(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} q(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot q(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} q(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{q(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} q(x)}, \quad \lim\limits_{x\to a} q(x) \neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot q(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot q_1(x)$; $\qquad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{q(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{q_1(x)}$;

где $q(x) \sim q_1(x)$ при $x \to a$;

д) вычисление пределов может привести к неопределенностям вида $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty, 1^{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$. Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

1) сокращение на множитель, создающий неопределенность;
2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x \to \infty$);
3) применение эквивалентных бесконечно малых функций;
4) использование замечательных пределов

$$\lim\limits_{\substack{a(x)\to 0\\ (x\to a)}} \frac{\sin a(x)}{a(x)} = 1; \quad \lim\limits_{\substack{a(x)\to 0\\ (x\to a)}} \left(1 + a(x)\right)^{1/a(x)} = e.$$

2.4. Функция называется непрерывной в точке $x = a$, если функция определена в этой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$ справа (слева), если существует правый (левый) предел функции, равный значению функции в этой точке. Обозначается

$$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) = f(a) \qquad \text{(правый предел)},$$

$$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) = f(a) \qquad \text{(левый предел)}.$$

Если функция непрерывна в точке $a$ слева и справа, то она непрерывна в этой точке.

Точка $x = a$ является точкой разрыва функции $f(x)$, если в этой точке функция не является непрерывной, т.е. функция в ней либо неопределена: $f(x) = \dfrac{1}{x}, x = 0$, либо предел функции не равен значению функции в этой точке: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$

Точка $x=a$ называется точкой устранимого разрыва, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=A\neq f(a).$$

Точка $x=a$ называется точкой разрыва первого рода, если правый и левый пределы функции в этой точке конечны, но не равны друг другу:

$$B=\lim_{x\to a+0} f(x)\neq \lim_{x\to a-0} f(x)=A.$$

Точка $x=a$ называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из пределов (правый или левый) не существует или равен $\infty$.

Для выполнения первого задания контрольной работы следует знать, что если известен график функции $y=f(x)$, то график функции $y=Af(bx+c)$ строится с помощью следующих преобразований графика $y=f(x)$.

2.4.1. График $f(bx)$ получается сжатием графика $f(x)$ в $b$ раз к оси $Oy$ при $b>1$ или растяжением в $\dfrac{1}{b}$ раз от этой оси при $0<b<1$ (рис. 2.2).

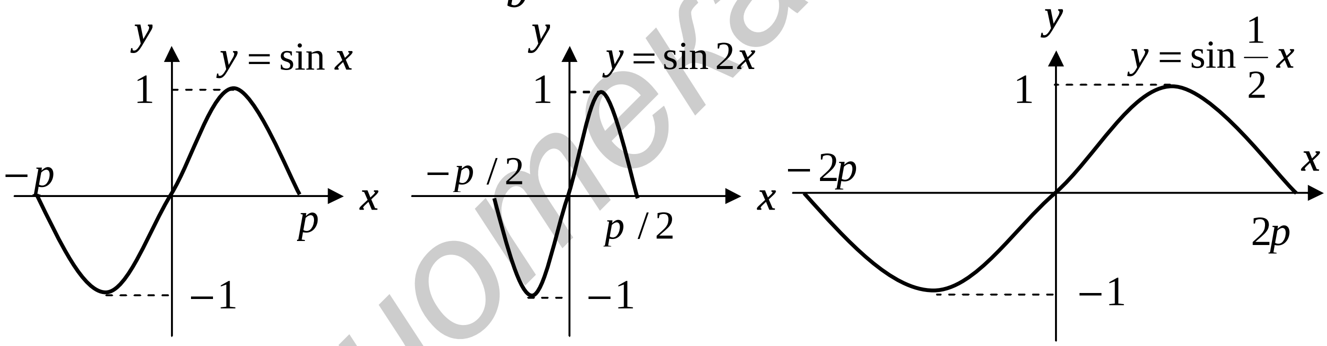


Рис. 2.2

2.4.2. График $f(x+c)$ получается параллельным переносом графика $f(x)$ в положительном направлении оси $Ox$ при $c<0$ на $c$ и в отрицательном направлении этой оси при $c>0$ (рис. 2.3).

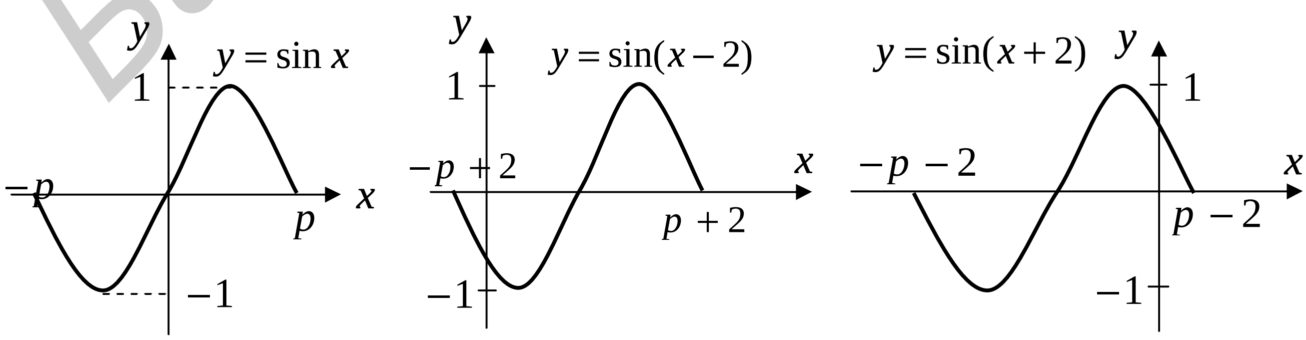


Рис. 2.3

2.4.3. График функции $y = Af(x)$ получается растяжением графика $f(x)$ вдоль оси $Oy$ в $A$ раз при $A > 1$ или сжатием вдоль этой оси в $\dfrac{1}{A}$ раз при $0 < A < 1$ (рис. 2.4).

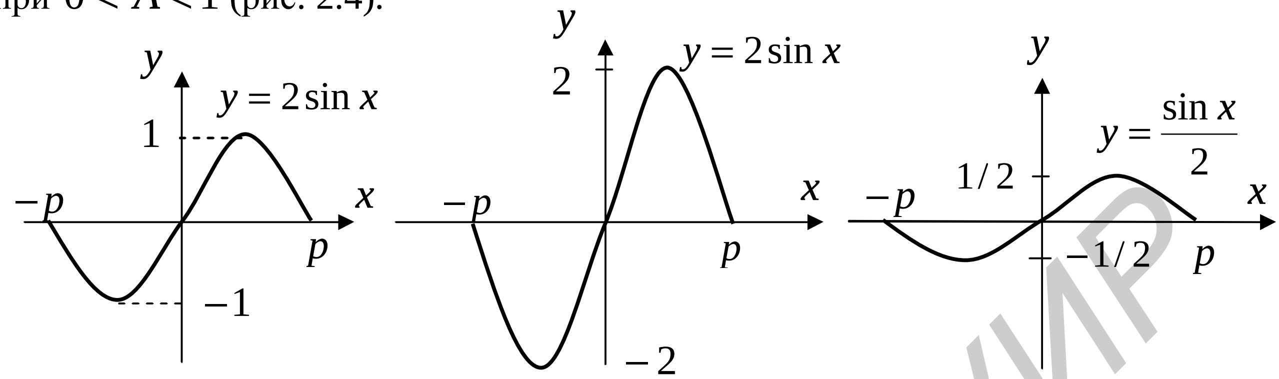


Рис. 2.4

**Пример 2.1.** Дана линия своим уравнением в полярной системе координат $r = \dfrac{3}{1 + 2\cos\varphi}$.

Требуется:

1) построить линию по точкам; 2) найти уравнение данной линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; по полученному уравнению определить, какая это линия.

***Решение***

1. Составим таблицу.

| $\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3}{8}\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5}{8}\pi$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{7}{8}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 1 | ≈1,1 | ≈1,2 | ≈2 | 3 | ≈6 | ∞ | <0 | <0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | $\frac{9\pi}{8}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{8}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{13}{8}\pi$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{15\pi}{8}$ | $2\pi$ |
| <0 | <0 | <0 | ∞ | ≈6 | 3 | ≈2 | ≈1,2 | ≈1,1 | 1 |

Из таблицы видно, что при $\varphi \to \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}$ $r \to \infty$; при $\varphi \in \left(\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}\right)$ точек линии нет, так как не может быть $r < 0$. Для вычерчивания линии проведем радиусы-векторы, соответствующие углам $\varphi$, взятым с интервалом $\frac{p}{8}$.

На каждом из этих радиусов-векторов откладываем отрезки, равные значению $r$ при соответствующем значении $j$ из таблицы. Соединяя точки, являющиеся концами этих отрезков, получаем график данной линии (рис. 2.5);

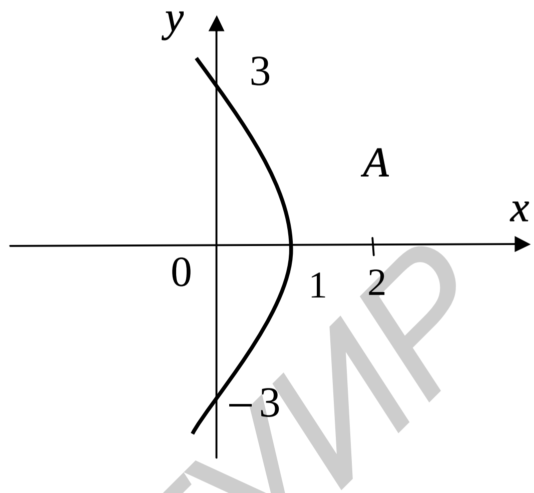

Рис. 2.5

2. Подставляя $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\cos j = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в уравнение заданной линии, получим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{1 + \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Полученное уравнение есть уравнение ветви гиперболы с полуосями $a = 1,\quad b = \sqrt{3}$ с центром в точке $A(2;0)$.

**Пример 2.2.** Найти $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{ctg(x-3)}{\ln(4-x)}$.

***Решение.*** Подставляя вместо $x$ его предельное значение, равное 3, получаем в числителе бесконечно большую, а в знаменателе – бесконечно малую функцию: $\lim\limits_{x \to 3} ctg(x-3) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 3} \ln(4-x) = 0$. Поэтому $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{ctg(x-3)}{\ln(4-x)} = \infty$.

**Пример 2.3.** Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{12x^4 + 5x}{-4x^4 + 7x}$.

***Решение.*** Подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т.е. на $x^4$. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^4+5x}{-4x^4+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{12+\dfrac{5}{x^3}}{-4+\dfrac{7}{x^4}}=\frac{+12+0}{-4+0}=-3,$$

так как при $x\to\infty$ $\dfrac{5}{x^3}$ и $\dfrac{7}{x^4}$ – бесконечно малые функции.

**Пример 2.4.** Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

***Решение.*** Непосредственная подстановка аргумента $x=2$ приводит к неопределенности $\dfrac{0}{0}$. Так как $x=2$ является корнем многочленов в числителе и знаменателе, то, разложив на множители, сократим дробь на $x-2$, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{1}{8}.$$

**Пример 2.5.** Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{x^2+x-2}$.

***Решение.*** Пределы числителя и знаменателя при $x\to 1$ равны 0, т.е. имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в числителе, домножив числитель и знаменатель на $\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8)-(8x+1)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-7(x-1)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=$$

$$=-7\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1})}=-\frac{7}{18}.$$

**Пример 2.6.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x tg x}$.

***Решение.*** Заменяя $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$, $tgx=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{xtgx}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\cos x=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Здесь использован первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

**Пример 2.7.** Найти $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$.

***Решение.*** Подстановка $x=-2$ приводит к неопределенности $1^{\infty}$. Сделаем замену переменной $y=x+2$, $\lim\limits_{x\to -2}y=0$. Тогда

$$\lim_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}=\lim_{y\to 0}(1+2y)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}\left((1+2y)^{\frac{1}{2y}}\right)^2=e^2.$$

Здесь использован второй замечательный предел $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$.

**Пример 2.8.** Задана функция $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$ и значения аргумента $x_1=0,\quad x_2=1$. Исследовать данную функцию на непрерывность в точках $x_1$ и $x_2$. В случае разрыва функции найти левый и правый пределы функции в данной точке, сделать схематический чертеж.

***Решение.*** Функция в точке $x_1=0$ непрерывна, так как в этой точке непрерывны функции $y=\dfrac{1}{1-x}$, $1+e^{\frac{1}{1-x}}$, а также $1/\left(1+e^{\frac{1}{1-x}}\right)$. Точка $x_2=1$ есть точка разрыва этой функции, так как $f(x)$ в этой точке не определена.

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}=1\left(e^{-\infty}=0\right),\qquad \lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}=0\left(e^{\infty}=\infty\right).$$

Значит, $x_2=1$ – точка разрыва первого рода.

Чтобы сделать схематический чертеж, найдем

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}.$$

Изобразим схематично график этой функции (рис. 2.6).

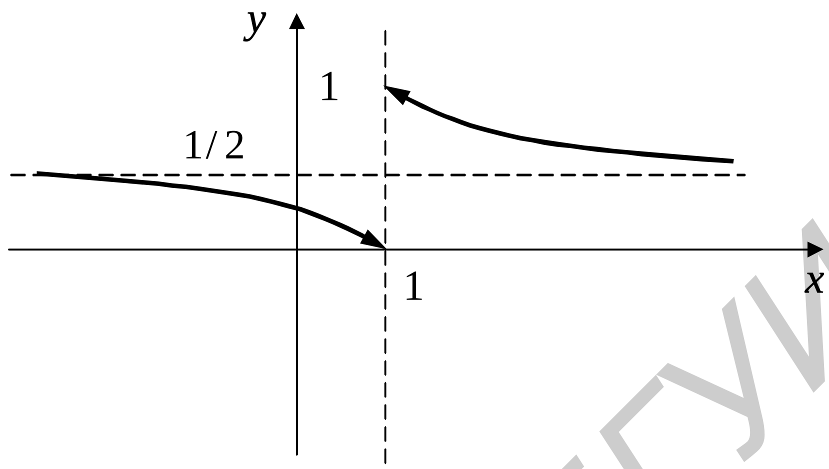


Рис. 2.6

**Пример 2.9.** Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5, & \text{если} \quad x \le -1, \\ x^2+1, & \text{если} \ -1 < x \le 1, \\ \sqrt{x^2+3}, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти точки разрыва, если они существуют. Сделать чертеж.

***Решение.*** Функция $2x+5$ непрерывна на $(-\infty;-1]$, функция $x^2+1$ непрерывна на $(-1;1]$, а $\sqrt{x^2+3}$ непрерывна на $(1;+\infty)$, значит $f(x)$ непрерывна на интервалах $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$. Остается исследовать точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Находим правые и левые пределы функции в этих точках:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} (2x+3) = 3;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} (x^2+1) = 2, \qquad f(-1) = (x^2+1) = 3,$$

т.е. $x_1 = -1$ является точкой разрыва 1-го рода, так как

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) \ne \lim_{x\to -1-0} f(x),$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x^2+1) = 2,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \sqrt{x^2+3} = 2.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} = f(1) = 2$, то $f(x)$ в точке $x_2 = 1$ непрерывна.

Сделаем ее чертеж (рис. 2.7).

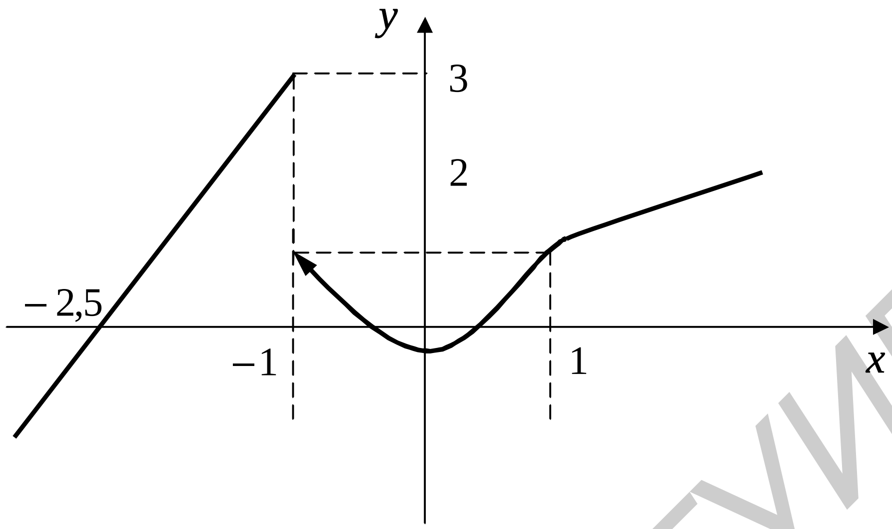


Рис. 2.7

## Контрольная работа №3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Литература: [2], гл.3–6, 8; [3], гл.4, 8;
[5], ч. I, §3.1– 3.7, ч.II, гл.6; [10], ч.II.

3. Основные теоретические сведения

3.1. Производной функции $f(x)$в точке $x_0$ называется число, обозначаемое $f'(x_0)$ и равное пределу разностного отношения $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \to x_0$, т.е. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; $\Delta y = f(x)-f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$.

Для решения задачи № 1 следует знать:

а) таблицу производных;

б) правила дифференцирования функций

$$[af(x)]' = af'(x), \qquad a \in R,$$
$$[f(x) \pm q(x)]' = f'(x) \pm q'(x),$$
$$[f(x)\cdot q(x)]' = f'(x)\cdot q(x) + f(x)\cdot q'(x),$$
$$[f(x)/q(x)]' = \frac{f'(x)\cdot q(x) - f(x)\cdot q'(x)}{q^2(x)}, \qquad q(x) \neq 0,$$
$$[f(x)^{q(x)}]' = q(x)\cdot f(x)^{q(x)-1}\cdot f'(x) + f(x)^{q(x)}\cdot \ln f(x)\cdot q'(x);$$

в) правила дифференцирования

– сложной функции $y = f[j\,(x)]$, $\qquad y' = f'_j \cdot j\,'(x)$;

– обратной функции $x = f^{-1}(y)$; $\qquad x'_y = \dfrac{1}{f'(y)}$;

– функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = j\,(t) \\ y = y\,(t) \end{cases} \qquad t \in (a\,, b\,), \qquad y'_x = \frac{y\,'(t)}{j\,'(t)};$$

– функции, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

В последнем случае надо продифференцировать равенство $F(x, y) = 0$ по $x$, считая $y$ функцией от $x$. Из полученного выражения найти $y'$;

г) производные высших порядков.

3.2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $\quad x_0 \le c \le x$ или $x \le c \le x_0$.

При $x_0 = 0$ эта формула называется формулой Маклорена. Для решения задачи №2 следует знать разложения основных элементарных функций по формуле Маклорена $y = e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^a$ .

Так, $e^x = 1 + x + x^2 / 2! + \ldots + x^n / n! + R_n(x)$,

$\sin x = x - x^3 / 3! + \ldots + (-1)^n x^{2n+1} /(2n + 1)! + R_{2n+1}(x)$,

$\cos x = 1 - x^2 / 2! + \ldots + (-1)^n x^{2n} /(2n)! + R_{2n}(x)$,

$\ln(1 + x) = x - x^2 / 2 + \ldots + (-1)^{n+1} x^n / n + R_n(x)$,

$$(1 + x)^a = 1 + ax + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a \cdot n + 1)}{n!} x^n + R_n(x).$$

Если задана погрешность $e$ вычисления приближенного значения, то из условия $|R_n(x)| < e$ можно найти число $n$ членов разложения функции по формуле Тейлора. Пример с подробным описанием можно найти в [11].

3.3. Если в некоторой окрестности точки $x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)(f(x) > f(x_0))$, то точка $x_0$ называется точкой экстремума (точкой максимума или точкой минимума). Необходимое условие экстремума: если $x_0$ – экстремальная точка, то либо $f'(x_0) = 0$ или $\infty$, либо $f'(x_0)$ не существует. Достаточное условие экстремума: если первая производная при переходе через точку $x_0$, в которой функция непрерывна, меняет знак, то $x_0$ – точка экстремума, причем $x_0$ – точка максимума, если знак $f'(x)$ меняется с «+» на «–», $x_0$ – точка минимума в противном случае.

В задаче №3 следует выразить искомую величину как функцию некоторой переменной и исследовать полученную функцию на экстремум.

3.4. При отыскании наибольшего и наименьшего значений функции, заданной на отрезке, можно пользоваться следующим алгоритмом:

а) находим точки возможного экстремума на $[a, b]$;

б) вычисляем значения функции в этих точках, а также на концах отрезка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$;

в) выбираем наибольшее и наименьшее из этих значений.

3.5. Общая схема исследования функции и построения ее графика:

а) найти область определения $f(x)$;

б) исследовать функцию на периодичность, четность или нечетность;

в) исследовать функцию на монотонность и экстремум с помощью первой производной;

г) найти промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной;

д) выяснить существование асимптот графика функции;

е) по полученным результатам построить график функции.

3.6. Частной производной первого порядка функции нескольких переменных (ф.н.п.) $z = f(x, y)$ по аргументу $x$ называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x f}{\Delta x}.$$

Обозначается $z'_x$, $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Отыскание частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ сводится к дифференцированию функции $z = f(x, y)$ по одной из переменных, когда другие переменные фиксируются, т.е. постоянны.

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет две производные первого порядка: $\partial z / \partial x$ и $\partial z / \partial y$. Частных производных второго порядка у нее уже четыре: $\partial^2 z / \partial x^2$, $\partial^2 z / \partial y^2$; $\partial^2 z / \partial x \partial y$, $\partial^2 z / \partial y \partial x$. Последние две называются смешанными производными. При определенных условиях выполняется равенство $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3.7. Часто в приближенных вычислениях используется формула $\Delta z \approx dz$, где $\Delta z$ – приращение функции в точке $A(x_0, y_0)$; $dz$ – дифференциал функции в данной точке:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Поэтому приближенная формула для вычисления значения функции в точке $B(x_1, y_1)$ имеет вид

$$f(x_1, y_1) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y_1 - y_0).$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

3.8. При решении задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений ф.н.п. необходимо помнить, что если ф.н.п. дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значений или в стационарной точке (т.е. точке, где частные производные обращаются в ноль), или на границе области.

Поэтому при решении задачи № 3 используется следующая схема:

а) находятся стационарные точки, т.е. решается система уравнений $z'_x = 0,\ z'_y = 0,$ причем эти точки должны принадлежать рассматриваемой области, и вычисляются значения функции в этих точках;

б) используется функция на границе области, где задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на некотором отрезке;

в) сопоставляя все полученные значения функции $z$, находим наибольшее и наименьшее значения. Подробное решение см. в [11].

**Пример 3.1.** Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = \sin ax$.

***Решение.*** $\Delta y = \sin a(x + \Delta x) - \sin ax = 2\sin\frac{a}{2}\Delta x \cdot \cos\left(ax + \frac{a}{2}\Delta x\right);$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\Delta x \cdot \cos\left(ax + \frac{a}{2}\Delta x\right)}{\Delta x};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{a}{2}\Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(ax + \frac{a}{2}\Delta x\right) =$$

$$= 2\frac{a}{2} \cdot \cos ax = a \cdot \cos ax.$$

**Пример 3.2.** Найти производную функции $y = \cos^4 x$.

***Решение.*** Внешней функцией здесь служит степенная функция: $\cos x$ возводится в четвертую степень. Дифференцируя эту степенную функцию по промежуточному аргументу ($\cos x$), получим

$$(\cos^4 x)'_{\cos x} = 4\cos^3 x,$$

но промежуточный аргумент $\cos x$ – функция независимой переменной $x$; поэтому надо полученный результат умножить на производную от $\cos x$ по независимой переменной $x$. Таким образом, получим

$$y'_x = (\cos^4 x)'_{\cos x} \cdot (\cos x)'_x = 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4\cos^3 x \cdot \sin x.$$

При дифференцировании функций нет необходимости в таких подробных записях. Результат следует писать сразу, представляя последовательно в уме промежуточные аргументы.

**Пример 3.3.** Найти производную функции $y = \ln arctg\sqrt{1-e^{3x}}$.

***Решение.*** $$y' = \frac{1}{arctg\sqrt{1-e^{3x}}} \cdot \frac{1}{1+(1-e^{3x})^2} \cdot \frac{1}{2}\left(1-e^{3x}\right)^{-1/2} \cdot \left(-e^{3x}\right) \cdot 3 =$$
$$= \frac{-3e^{3x}}{2arctg\sqrt{1-e^{3x}}\left(2-e^{3x}\right)\sqrt{1-e^{3x}}}.$$

В некоторых случаях, если, например, нужно найти производную функции $y = (u(x))^{v(x)}$ или функции, заданной в виде произведения большого числа сомножителей, используется так называемый способ логарифмического дифференцирования.

**Пример 3.4.** Найти производную функции $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$.

***Решение.*** Применим метод логарифмического дифференцирования. Рассмотрим функцию

$$Z = \ln|y| = \ln\sqrt[3]{\frac{\left|x^3(x^2+1)\right|}{\sqrt[5]{|5-x|}}} = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{1}{15}\ln|5-x|.$$

Учитывая, что $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$, будем иметь

$$z' = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{15(5-x)} = \frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}.$$

Но $z' = (\ln|y|)' = \dfrac{y'}{y}$, откуда

$$y' = yz' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \cdot \frac{24x^3 - 125x^2 + 14x - 75}{15x(x^2+1)(x-5)}.$$

**Пример 3.5.** Найти производную функции $y = x^{e^x}$.

***Решение.*** $\ln y = e^x \cdot \ln x;\quad \frac{y'}{y} = e^x \ln x + \frac{e^x}{x};$

$$y' = y\left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right) = x^{e^x}\left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right).$$

**Пример 3.6.** Найти производную $y'_x$ функции $y(x)$, заданной неявно:

$$x^4 + x^2 y + y^3 + 5 = 0.$$

***Решение.*** Продифференцируем уравнение по *x*, рассматривая *y* как функцию от *x*, и решим полученное уравнение относительно $y'_x$.

$$4x^3 + 2xy + x^2 y' + 3y^2 \cdot y' = 0; \qquad y' = -\frac{4x^3 + 2xy}{x^2 + 3y^2}.$$

**Пример 3.7.** Найти производную первого и второго порядка функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{cases}.$

***Решение.*** $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};\quad y'_t = 3b\sin^2 t \cdot \cos t;\quad x'_t = -3a\cos^2 t \sin t;$

$$y'_x = -\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t \cdot \sin t} = -\frac{b}{a}tgt.$$

Далее будем искать $y''_{xx}$ по формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}; \qquad (y'_x)'_t = -\frac{b}{a\cos^2 t}.$$

Отсюда $y''_{xx} = -\frac{b}{a\cos^2 t(-3a\cos^2 t \cdot \sin t)} = \frac{b}{3a^2\cos^4 t \cdot \sin t}.$

Производную второго порядка также можно было найти по формуле

$$y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

**Пример 3.8.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y = x + \dfrac{8}{x^4}$ на отрезке [–1; 3].

***Решение.*** $y' = 1 - \dfrac{32}{x^5} = \dfrac{x^5 - 32}{x^5}$.

Критическая точка одна: $x_1 = 2$ $(f'(x) = 0)$. Эта точка принадлежит отрезку [1;3]. (Точка $x = 0$ не является критической, так как $0 \notin [1;3]$).

Вычисляем значения функции на концах отрезка и в критической точке.

$$f(-1) = -9, \qquad f(2) = \frac{5}{2}, \qquad f(3) = 3\frac{8}{81}.$$

Отсюда: $f_{нм} = \dfrac{5}{2}$ при $x = 2$; $\qquad f_{нб} = 3\dfrac{8}{81}$ при $x = 3$.

**Пример 3.9.** Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом $32 м^3$, так чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

***Решение.*** Обозначим сторону основания через $x$, а высоту через $y$. Тогда объем $V$ бассейна будет равен

$$V = x^2 y = 32 \Leftrightarrow y = \frac{32}{x^2},$$

а облицовочная поверхность $S$ бассейна равна

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{128}{x}.$$

Исследуем полученную функцию на минимум на промежутке $(0;+\infty)$.

$S' = 2x - \dfrac{128}{x^2}$. Так как $x \neq 0$, критические точки определяются из условия $2x^3 - 128 = 0$; $x = 4$. При переходе через точку $x = 4$ слева направо $S'$ меняет знак с «–» на «+». Точка $x = 4$ является точкой минимума.

Итак, искомые размеры бассейна $x = 4$ м, $y = 2$ м.

**Пример 3.10.** Построить график функции $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

***Решение.***

1. Область определения функции $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
2. Функция не является четной или нечетной.
3. Найдем точки пересечения графика с осью $OX$; имеем $\dfrac{x^3 + 4}{x^2} = 0$;

$x = -\sqrt[3]{4}$.

4. Точка разрыва $x=0$, причем $\lim\limits_{x\to\pm 0} y=+\infty$; следовательно, $x=0$ является вертикальной асимптотой графика.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Наклонная асимптота имеет уравнение $y=x$.

5. Найдем экстремум функции и интервалы возрастания и убывания. Имеем $y'=1-\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3-8}{x^3}$. Существует единственная критическая точка $x=2$. В промежутках $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(2;+\infty)$ $y'>0$, следовательно, функция возрастает; в промежутке $x\in(0;2)$ $y'<0$, функция убывает. Далее находим $y''=\dfrac{24}{x^4}$; $y''(2)>0$, следовательно, $x=2$ – точка минимума $y_{\min}=3$.

6. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба. Так как $y''>0$ $(x\neq 0)$, то график функции всюду вогнут. Точек перегиба кривая не имеет.

Строим график функции (рис. 3.1).

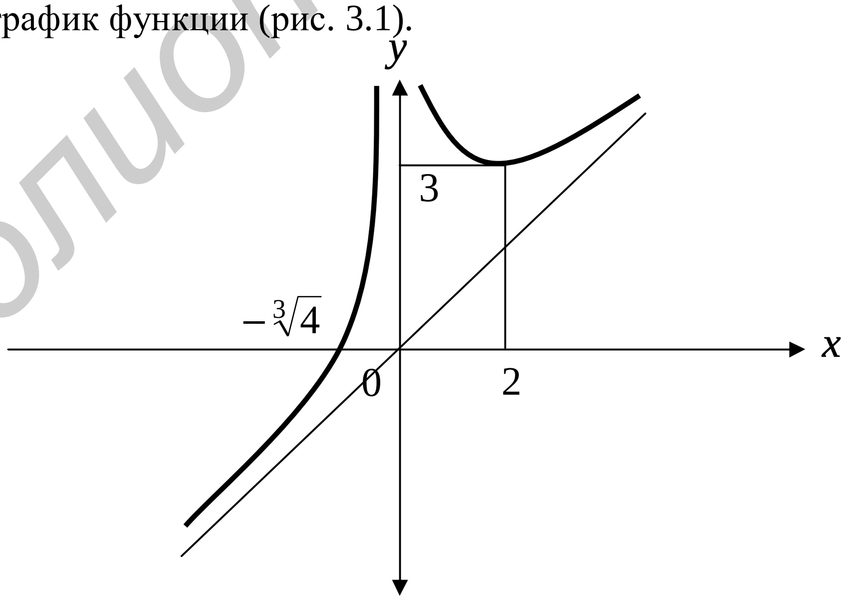


Рис. 3.1

**Пример 3.11.** Показать, что функция $2 = \sqrt{x} \cdot \sin\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $2x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

***Решение.*** Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x} + \sqrt{x} \cdot \cos\frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x} \cdot \cos\frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}.$$

Подставим их в уравнение

$$\frac{2x}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x} + 2x \cdot \sqrt{x}\cos\frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{2y}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x} = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}.$$

Получим тождество. Следовательно, функция $z$ удовлетворяет данному уравнению.

**Пример 3.12.** Дана функция $z = \sqrt{x^2 + y^3 + 1}$ и две точки $A(4;2)$ и $B(4{,}03;1{,}96)$. Требуется: 1) вычислить значение функции в точке $B$; 2) вычислить приближенное значение функции в точке $B$, исходя из значения $z_0$ функции в точке $A$, заменив приращение функции при переходе от точки $A$ к точке $B$ дифференциалом; 3) оценить в процентах относительную погрешность, возникшую при замене приращения функции ее дифференциалом.

***Решение.*** 1. $z_1 = \sqrt{(4{,}03)^2 + (1{,}96^3 + 1)} = \sqrt{24{,}770436} \approx 4{,}976.$

2. $x_0 = 4, \quad y_0 = 2, \quad \Delta x = 0{,}03, \quad \Delta y = -0{,}04, \quad f(4;2) = \sqrt{16 + 8 + 1} = 5.$

Итак, $z_0 = 5, \ z \approx z_0 + df(A)$; $df(A) = \frac{\partial z(A)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(A)}{\partial y}\Delta y.$

Найдем $df(A)$. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^3 + 1}}, \quad \frac{\partial z(A)}{\partial x} = \frac{4}{5} = 0{,}8;$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3 + 1}}, \quad \frac{\partial z(A)}{\partial y} = \frac{6}{5} = 1{,}2;$$

$$f(4{,}03;1{,}96) \approx 5 + 0{,}8 \cdot 0{,}03 + 1{,}2(-0{,}04) = 5{,}072.$$

$$d = \frac{|\Delta a|}{|a|} \cdot 100\%; \ d = \frac{5{,}072 - 4{,}976}{4{,}976} \cdot 100\% \approx 1{,}9\%.$$

**Пример 3.13.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ в треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $2x + 3y - 6 = 0$.

***Решение.*** Найдем критические точки локального экстремума внутри указанной области и значения данной функции $z = f(x; y)$ в этих точках (рис. 3.2). Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y - 6$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x - 2y - 2$, то система для отыскания критических точек имеет вид

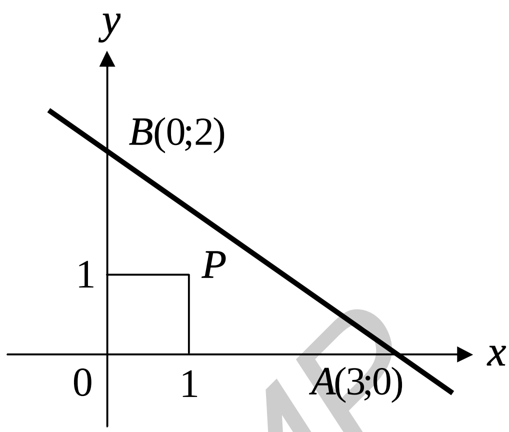


Рис. 3.2

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Точка $P_0(1;1)$ находится внутри области, причем $z(P_0) = -4$. Исследуем функцию $z$ на границе области. На отрезке $OA$ имеем : $y = 0$, $z = f(x;0)$ или $g_1(x) = x^2 - 6x$, где $x \in [0;3]$; $g_1'(x) = 2x - 6$; $g_1'(3) = 0$; $g_1(3) = f(3;0) = -9$. На отрезке $OB$ имеем: $x = 0$, $z = f(0; y)$ или $z = g_2(y) = -y^2 - 2y$, где $y \in [0;2]$; $g_2'(y) = -2y - 2$; $g_2'(-1) = 0$, $-1 \notin [0;2]$. На отрезке $AB$ имеем $y = 2 - \dfrac{2}{3}x$, $z = f\left(x; 2 - \dfrac{2}{3}x\right)$ или

$z = g_3(x) = -\dfrac{19}{9}x^2 + 6x - 8$, где $x \in [0;3]$; $g_3'(x) = -\dfrac{38}{9}x + 6$; $g_3'\left(\dfrac{27}{19}\right) = 0$, $g_3\left(\dfrac{27}{19}\right) = f\left(\dfrac{27}{19}; \dfrac{20}{19}\right) = -\dfrac{71}{19}$. Найдем значения функции $z$ в точках $O, A, B$.

$$z(0) = f(0;0) = 0; \quad z(A) = f(3;0) = -9; \quad z(B) = f(0;2) = -8.$$

Сравнивая значения $f(0;0)$, $f(0;2)$, $f(3;0)$, $f\left(\dfrac{27}{19}; \dfrac{20}{19}\right)$, $f(1;1)$, приходим к выводу:

наибольшее значение $z_{наиб} = 0$ в т. $O(0;0)$;

наименьшее значение $z_{наим} = -9$ в т. $A(3;0)$.

## Контрольная работа №4

### НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Литература: [2], гл.10, 11; [3], гл.5 – 7; [5], ч. II, гл.5; [9], ч.II.

### 4. Основные теоретические сведения

4.1. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется выражение $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной для данной функции $f(x)$.

При интегрировании наиболее часто используются следующие методы и свойства:

а) свойство линейности

$\int [a\ f(x) + b\ g(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx, \qquad a, b \in R$;

б) подведение под знак дифференциала

$\int f(j\,(x)) \cdot j\,'(x)dx = \int f(j\,(x))d j\,(x)$, так как $j\,'(x)dx = d j\,(x)$;

в) формула интегрирования по частям

$\int u dv = u \cdot v - \int v du$.

К классам функций, интегрируемым по частям, относятся функции вида $P(x)e^{ax}$, $P(x)\sin ax$, $P(x)\cos ax$, $P(x)\ln x$, $P(x)\arcsin x$, $P(x) arctgx$, где $P(x)$ – многочлен от $x$. В первых трех случаях за $u$ принимается функция $P(x)$, в последних трех – $\ln x$, $\arcsin x$, $arctgx$;

г) интегрирование рациональных дробей, т.е. отношения двух многочленов $\dfrac{P_n(x)}{Q_k(x)} = R(x)$, сводится к разложению подынтегральной функции $R(x)$ на элементарные, всегда интегрируемые дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^e},$$

где $m, l \in N$, а $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней. В случае неправильной дроби $n \geq k$ нужно предварительно выделить целую часть;

д) интегрирование методом замены переменной (способ подстановки) заключается в переходе от старой переменной $x$ к новой переменной $t$ : $x = j\,(t)$. Наиболее целесообразная для данного интеграла замена переменной, т.е. выбор $x = j\,(t)$, не всегда очевидна. Подробно о подстановках см. [7], гл. 4.

4.2. Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

если $F'(x) = f(x)$ и первообразная $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

4.3. Если интервал интегрирования $[a, b]$ не ограничен (например $b = \infty$) или функция $f(x)$ не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (например при $x = b$), то по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{e \to +0} \int_a^{b-e} f(x)dx.$$

Интегралы слева называются несобственными интегралами. Несобственный интеграл называется сходящимся, если существует конечный предел правой части. Если же предел не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

4.4. Определенный интеграл применяется при решении различных геометрических задач. Вот некоторые из них.

4.4.1. Площадь криволинейной трапеции (рис. 4.1), ограниченной графиком кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, осью $Ox$, вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$. Здесь $f(x) \ge 0$.

Если кривая задана параметрически в виде $x = j(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, то $S = \int_a^b y(t)j'(t)dt$.

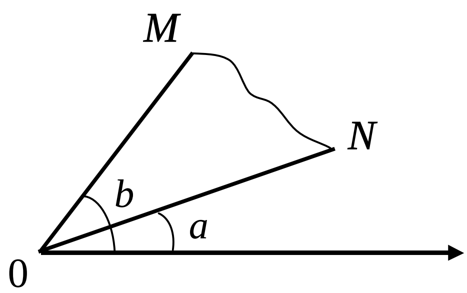


Рис. 4.1

Площадь сектора $MON$, ограниченного кривой $MN$, заданной уравнением в полярных координатах $r = r(j)$ и лучами $j = a$ и $j = b$, определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(j)dj.$$

4.4.2. Длина дуги кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$ выражается по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Если кривая задана параметрически: $x = j(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{[j'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

Длина дуги в полярных координатах $r = r(j)$, $a \le j \le b$ задается формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{r^2(j) + [r'(j)]^2}\, dj \ .$$

4.4.3. Объем $V_x$ тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции $y = f(x),\ x = a,\ x = b$, вычисляется по формуле

$$V_x = p\int_a^b y^2(x)dx.$$

## Примеры и решения

**Пример 4.1.** Вычислить $J = \int (3x+15)^{17}\, dx$.

***Решение.*** Возводить двучлен в 17-ю степень нецелесообразно. Исходя из табличного интеграла $\int u^{17} du = \dfrac{u^{18}}{18} + c$, получаем

$$J = \int (3x+15)^{17}\, dx = \frac{1}{3}\int (3x+15)^{18}\, d(3x+15) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+15)^8}{18} + c = \frac{1}{54}(3x+15)^{18} + c.$$

**Пример 4.2.** Вычислить $J = \int \dfrac{dx}{2-3x^2}$.

***Решение.*** Аналогично предыдущему,

$$J = \int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x}\right| + c.$$

**Пример 4.3.** Вычислить $J = \int \dfrac{xdx}{4+x^4}$.

***Решение.*** Поскольку

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(u/a)}{1+(u/a)^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + c,$$

то

$$\int \frac{xdx}{4+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2} = \frac{1}{4} arctg\frac{x^2}{2} + c.$$

**Пример 4.4.** Вычислить $J=\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

***Решение.*** Так как

$$\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=\frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}}=\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{-2x}+1}}=-\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2+1}},$$

то

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2+1}}=-\ln\left(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1}\right)+c.$$

**Пример 4.5.** Вычислить $J=\int x\sqrt{x-5}dx$.

***Решение.*** Применим подстановку $\sqrt{x-5}=t$.

Отсюда $x-5=t^2,\quad x=t^2+5,\quad dx=2tdt$.

Подставив в интеграл, получим

$$J=\int(t^2+5)\cdot t\cdot 2tdt=2\int(t^4+5t^2)dt=2\frac{t^5}{5}+\frac{10t^3}{3}+c=$$

$$=\frac{2(x-5)^{5/2}}{5}+\frac{10(x-5)^{3/2}}{3}+c.$$

**Пример 4.6.** Вычислить $J=\int x^2e^xdx$.

***Решение.*** Положим $u=x^2,\quad dn=e^xdx$; тогда $du=2xdx,\quad n=e^x$. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx.$$

Мы добились понижения степени $x$ на единицу. Чтобы найти $\int xe^xdx$, применим еще раз интегрирование по частям. Полагаем $u=x,\quad dv=e^xdx$; тогда $du=dx,\quad v=e^x$ и

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2(xe^x-\int e^xdx)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c.$$

**Пример 4.7.** Вычислить $J=\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

***Решение.*** Выделяя целую часть, получим

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}=1-\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}.$$

Учитывая, что $x^4+5x^2+4=(x^2+1)(x^2+4)$, для второго слагаемого получаем разложение

$$\frac{-5x^2-4}{x^4+5x^2+4}=\quad\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Приводя к общему знаменателю, получим равенство числителей:

$$-5x^2-4=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем

$$\begin{array}{r|l} x^3 & \;\;0=A+C \\ x^2 & -5=B+D \\ x & \;\;0=4A+C \\ x^0 & -4=4B+D\,. \end{array}$$

Отсюда находим $A=C=0;\ B=\frac{1}{3};\ D=-\frac{16}{3}$. Подставляя найденные коэффициенты в разложение и интегрируя его, получаем

$$\int\frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}=x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c\,.$$

**Пример 4.8.** Вычислить $J=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

***Решение.*** Так как $\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$, то подынтегральное выражение есть рациональная функция от $x$ и $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$; поэтому введем подстановку: $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t$; $\frac{x+2}{x-1}=t^4$, откуда

$$x=\frac{t^4+2}{t^4-1};\quad x-1=\frac{3}{t^4-1};\quad x+2=\frac{3t^4}{t^4-1};\quad dx=\frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}dt\,.$$

Следовательно,

$$J=-\int\frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3dt}{3\cdot 3t^4\cdot t(t^4-1)^2}=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+c=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+c\,.$$

**Пример 4.9.** Вычислить $J=\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

***Решение.*** Подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$; применим подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, тогда $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2} \text{ и } \int\frac{dx}{4\sin+3\cos+5}=\int\frac{2dt/1+t^2}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+c.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+c.$$

**Пример 4.10.** Вычислить $J=\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$.

***Решение.*** Произведем замену $1+3x^8=z^2$. Тогда $x^7dx=\frac{zdz}{12}$,

$x^{15}dx=\frac{z(z^2-1)}{36}dz$; таким образом,

$$J=\frac{1}{36}\int\limits_1^2 z^2(z^2-1)dz=\frac{1}{36}\left(\frac{z^5}{5}-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{29}{270}.$$

Следует обратить внимание, что при замене переменной в определенном интеграле пределы интегрирования в общем случае изменяются.

**Пример 4.11.** Вычислить несобственный интеграл $J=\int\limits_1^e\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ или доказать его расходимость.

***Решение.*** Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ не ограничена в окрестности точки $x=1$. На любом же отрезке $[1+e;e]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому

$$\int\limits_1^e\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{e\to+0}\int\limits_{1+e}^e\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{e\to+0}\int\limits_{1+e}^e(\ln x)^{-\frac{1}{3}}d(\ln x)=$$

$$=\lim_{e\to+0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\right)\Bigg|_{1+e}^{e}=\lim_{e\to+0}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+e)}\right)=\frac{3}{2}.$$

**Пример 4.12.** Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$

и прямой $x + y = 2$.

***Решение.*** Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 2 - x$. Решая уравнение $x^2 = 2 - x$, находим $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Так как фигура ограничена сверху прямой, а снизу параболой, по известной формуле находим

$$S = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 4{,}5.$$