Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания
для студентов радиотехнических специальностей
заочной и дистанционной форм формы обучения
В 2-х частях

Часть 2

2-е издание, переработанное и дополненное

Минск БГУИР 2009

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я73
В93

С о с т а в и т е л и:
О. Ф. Борисенко, Л. А. Конюх, Н. И. Кобринец

Высшая математика: метод. указания для студ. радиотехн. спец. заоч. и дистанц. форм обуч. В 2 ч. Ч.2 / сост. О. Ф. Борисенко, Л. А. Конюх, Н. И. Кобринец. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУИР, 2009. – 35 с. : ил.
ISBN 978-985-488-384-7(ч.2)

Часть 2 методических указаний предназначена для студентов-заочников БГУИР. Она содержит основные теоретические сведения, общие рекомендации по самостоятельному изучению курса высшей математики, методические указания к выполнению контрольных работ № 5 – 8 и примеры решения типовых задач.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я73

Часть 1 издана БГУИР в 2009 г.

ISBN 978-985-488-384-7(ч.2)
ISBN 978-985-488-383-0

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – 4-е изд. – М. : Наука, 1980.

2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.

3. Бугров, Н. С. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980.

4. Бугров, Н. С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Н. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1981.

5. Гурский, Е. И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский. – Минск : Высш. шк., 1982.

6. Гурский, Е. И. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 т. / Е. И. Гурский. – Минск : Высш. шк., 1990.

7. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 4 ч. / М. Р. Жевняк, А. А. Карпук : Ч.I. – Минск : Высш. шк., 1992; Ч.II – Минск : Высш. шк., 1993; Ч.III, IV. – Минск : Обозрение, 1997.

8. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1965 –1980.

9. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1964–1978.

10. Краснов, М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения) / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1971.

11. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1980.

12. Методические указания по высшей математики для студентов заочной формы обучения (с применением учебного телевидения). В 2 ч. / Р. М. Жевняк [и др.]. – Минск : МРТИ, 1989.

13. Высшая математика: метод. Указания и контрол. Задания (с программой) / под ред. Ю. А. Арутюнова. – М.: Высш. шк.,1983.

Контрольная работа №5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Литература: [2], гл.13; [4], гл.1; [5], ч. III, гл.8.

5. Основные теоретические сведения

5.1. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка $F(x, y, y') = 0$ зависит от одной произвольной постоянной: $y = j\,(x, C)$.

Решения, получающиеся из общего решения $y = j\,(x, C)$ при определенном значении произвольной постоянной C, называются частными решениями. Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$, называется задачей Коши.

а) Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на $M_2(x) \cdot N_1(y) \neq 0$, получим общий интеграл уравнения

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

б) Уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется однородным уравнением, если $f(tx, ty) = f(x, y)$ при любом $t \in R$. С помощью подстановки $u = y / x \iff y = ux, \quad u = u(x)$ уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

в) Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{5.1}$$

называется линейным.

Если $q(x) = 0$, то уравнение называется однородным линейным и его решение может быть получено путем разделения переменных. Если $q(x) \neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным; его общее решение получается из общего решения соответствующего линейного однородного уравнения с помощью вариации произвольной постоянной интегрирования C. Данное уравнение можно также решить с помощью подстановки $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – две неизвестные функции.

5.2. При решении дифференциального уравнения высшего порядка необходимо помнить, что его общее решение или общий интеграл содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения. С помощью введения новой функции в некоторых случаях можно понизить порядок уравнения, в частности, уравнение второго порядка $F(x, y, y', y'') = 0$ свести к уравнению первого порядка, метод решения которого известен.

5.3. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{5.2}$$

где p, q – числа.

Задача нахождения решения данного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, называется задачей Коши.

Если $f(x) = 0$, то уравнение (2) называется линейным однородным уравнением. Для его решения составляется характеристическое уравнение

$$l^2 + pl + q = 0. \tag{5.3}$$

а) Если корни характеристического уравнения l_1, l_2 различны и действительны, то общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{одн} = C_1 e^{l_1 x} + C_2 e^{l_2 x}.$$

б) Если корни $l_1 = l_2$, т.е. совпадают, то

$$y_{одн} = e^{l_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

в) Если корни l_1 и l_2 комплексные, т.е. $l_{1,2} = a \pm bi$, то

$$y_{одн} = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Решение линейного неоднородного уравнения (1.2) основывается на следующей теореме.

Теорема. Если $y^*(x)$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения (5.2), а $y_{одн}(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, то общее решение уравнения (5.2) имеет вид $y = y_{одн} + y^*$.

Правила для нахождения частного решения y^* неоднородного уравнения (1.2) следующие:

а) Пусть $f(x) = e^{ax}(b_0 x^2 + b_1 x + b_2)$.

Если a не является корнем уравнения (5.3), то частное решение ищется в виде

$$y^* = e^{ax}(A_0 x^2 + A_1 x + A_2).$$

Если a – k-кратный корень уравнения (5.3) $(k = 1,2)$, то

$$y^* = x^k e^{ax}(A_0 x^2 + A_1 x + A_2) \quad (k = 1 \text{ или } 2).$$

б) Пусть $f(x) = e^{ax}(B_1 \cos bx + B_2 \sin bx)$.

Если $a + bi$ не является корнем уравнения (5.3), то

$$y^* = e^{ax}(M\cos bx + N\sin bx).$$

Если $a + bi$ – корень уравнения (5.3), то

$$y^* = xe^{ax}(M\cos bx + N\sin bx).$$

Здесь числа $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, M, N$ находятся в результате подстановки частных решений в исходное уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях.

5.4. Пусть дана система двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{5.4}$$

В матричном виде систему (5.4) можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt} = AX,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Будем искать частные решения в виде $x = g_1 e^{lt}, \quad y = g_2 e^{lt}$, где g_1, g_2, l – константы.

Подставляя это решение в систему (5.4), получим систему уравнений для определения g_1 и g_2:

$$\begin{cases} (a_{11} - l)g_1 + a_{12}g_2 = 0 \\ a_{21}g_1 + (a_{22} - l)g_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача нахождения чисел g_1 и g_2 сводится к задаче нахождения координат собственных векторов матрицы A. Пусть $\overline{p}_1(g_{11}, g_{21})$ и $\overline{p}_2(g_{12}, g_{22})$ – собственные векторы матрицы A. Тогда общее решение системы (5.4) имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 g_{11} e^{l_1 t} + C_2 g_{12} e^{l_2 t} \\ y = C_1 g_{21} e^{l_1 t} + C_2 g_{22} e^{l_2 t}, \end{cases}$$

где g_1, g_2 – корни характеристического уравнения

$$\det(A - lE) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - l & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - l \end{vmatrix} = 0.$$

В матричном виде $X = C_1 \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{pmatrix} e^{l_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} e^{l_2 t}$.

5.5. При решении физических задач сначала надо решить, какую переменную нужно принять за искомую функцию. Далее, используя физические законы, составить для ее нахождения дифференциальное уравнение и решить его.

Пример 5.1. Решить уравнение

$$y(1 - x^2)dy - x(1 - y^2)dx = 0.$$

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Деля почленно на $(1 - x^2)(1 - y^2)$, получим

$$\frac{ydy}{1 - y^2} = \frac{xdx}{1 - x^2} \Leftrightarrow \int \frac{ydy}{1 - y^2} - \int \frac{xdx}{1 - x^2} = C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{d(1 - y^2)}{1 - y^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(1 - x^2)}{1 - x^2} = C_1 \Leftrightarrow \ln\left|1 - y^2\right| = \ln\left|1 - x^2\right| + \ln \tilde{C},$$

где $\tilde{C} = e^{-2c_1}$. Потенцируя последнее равенство, получим $\left|1 - y^2\right| = \tilde{C}\left|1 - x^2\right|$ и, освобождаясь от модуля, получим $1 - y^2 = \pm\tilde{C}(1 - x^2)$ или $1 - y^2 = C(1 - x^2)$, где C – произвольная постоянная, отличная от нуля (как положительная, так и отрицательная). Разделив на $(1 - x^2)(1 - y^2)$, мы могли потерять решения, обращающие в нуль произведение $(1 - x^2)(1 - y^2)$. Полагая $(1 - x^2)(1 - y^2) = 0$, находим, что $y = \pm 1$; $x = \pm 1$. Непосредственная подстановка их в уравнение показывает, что они действительно являются решениями. Но эти решения могут быть получены из общего решения $\dfrac{1 - y^2}{1 - x^2} = C$ при $C = 0$ и $C = \infty$. Таким образом, все решения содержатся в общем интеграле $\dfrac{1 - y^2}{1 - x^2} = C$, что и требовалось доказать.

Пример 5.2. Решить уравнение $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Решение. Запишем уравнение в виде $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$. Поскольку функция

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$$

удовлетворяет условию

$$f(tx,ty)=\frac{\sqrt{(tx)^2-(ty)^2}+ty}{tx}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}=f(x,y),$$

то исходное уравнение однородное. Замена переменной

$$u=\frac{y}{x}\ (y=ux,\quad y'=u'x+u)$$

приводит его к уравнению с разделяющимися переменными

$$x(u'x+u)=\sqrt{x^2-x^2u^2}+ux\Rightarrow u'x=\sqrt{1-u^2}\Rightarrow x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{dx}{x}+\ln|c|\Rightarrow\arcsin\frac{y}{x}=\ln|cx|\Rightarrow$$

$\Rightarrow y=x\sin\ln|cx|$. Последнее выражение $y=x\sin\ln|cx|$ представляет собой общий интеграл уравнения. В ходе решения мы могли потерять решения вида $x\sqrt{1-(y/x)^2}=0$ (так как делили на это выражение обе части уравнения). Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x=0$ не является решением уравнения. Множитель $\sqrt{1-(y/x)^2}=0$ дает решения $y=\pm x$, которые не могут быть получены из общего интеграла ни при каких C. Поэтому $y=\pm x$ – особые решения, а общий интеграл дается формулой $y=x\sin\ln|Cx|$.

Пример 5.3. Решить уравнение $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение первого порядка (1). Будем искать его решение в виде $y=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow y'=u'v+v'u$. Подставив y и y' в исходное уравнение, получим $u'v+v'u+uv\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\Rightarrow$ $u'v+u(v'+v\cos x)=\sin x\cos x$. Для нахождения неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$ потребуем, чтобы выражение $v'+v\cos x$ обращалось в нуль:

$$v'+v\cos x=0\Rightarrow\frac{dv}{dx}=-v\cos x\Rightarrow\frac{dv}{v}=-\cos x dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln v=-\sin x\Rightarrow v=e^{-\sin x}.$$

Тогда функцию $u(x)$ найдем из уравнения

$$u'v=\sin x\cos x,\quad u'e^{-\sin x}=\sin x\cos x\Rightarrow u'=e^{\sin x}\cdot\sin x\cos x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \int \sin x \cos x e^{\sin x} dx + C \Rightarrow u = \int \sin x e^{\sin x} d(\sin x) + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = e^{\sin x}(\sin x - 1) + C.$$

Теперь запишем решение $y = uv = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$, которое и является общим интегралом исходного уравнения.

Пример 5.4. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.

Решение. Рассмотрим соответствующее однородное линейное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $l^2 - 3l + 2 = 0$. Корни уравнения $l_1 = 1; \quad l_2 = 2$ различны и действительны. Значит, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_{одн} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Правая часть исходного уравнения $f(x) = (x^2 + x)e^{2x}$ $(a = 2; \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 1)$, т.е. $a = 2$ является также корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде

$$y^* = xe^{2x}(A_0 x^2 + A_1 x + A_2).$$

Для нахождения коэффициентов $A_0, \ A_1, \ A_2$ продифференцируем дважды y^* и подставим в первоначальное уравнение:

$$(y^*)' = e^{2x}(2A_0 x^3 + (2A_1 + 3A_0)x^2 + 2(A_2 + A_1)x + A_2),$$
$$(y^*)'' = e^{2x}(4A_0 x^3 + (4A_1 + 12A_0)x^2 + (4A_2 + 6A_1 + 3A_0)x + 4A_2 + 2A_1).$$

После сокращения на e^{2x} и приведения подобных членов получим

$$3A_0 x^2 + (2A_1 + 6A_0)x + A_2 + 2A_1 \equiv x^2 + x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождественного равенства, получим

$$\begin{cases} 3A_0 = 1 \\ 2A_1 + 6A_0 = 1 \\ A_2 + 2A_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A_0 = \dfrac{1}{3} \\ A_1 = -\dfrac{1}{2}. \\ A_2 = 1 \end{matrix}$$

Таким образом, $y^* = \left(\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x\right)e^{2x}$ и общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = y_{одн} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{2x}.$$

Чтобы найти решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=2$, продифференцируем общее решение

$$y' = C_1 e^{x} + 2C_2 e^{2x} + e^{2x}\left(\frac{2}{3}x^3 + x + 1\right)$$

и решим относительно C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Исходное частное решение имеет вид

$$y = e^{2x}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) - e^{x}.$$

Пример 5.5. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y. \end{cases}$$

Решение. Применим метод исключения. Для этого дифференцируем первое уравнение по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y + (-x + 3y) = 4y.$$

Из первого уравнения выражаем $y = \dfrac{dx}{dt} - x$ и, подставив в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

Это однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение

$$l^2 - 4l + 4 = 0,$$

корни которого $l_{1,2} = 2$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид $x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t)$. Находим $y(t) = \dfrac{dx}{dt} - x = c_1 e^{2t} + c_2 (t+1) e^{2t}$.

Таким образом, общее решение имеет вид

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t};$$
$$y = C_1 e^{2t} + C_2 (t+1) e^{2t}.$$

Пример 5.6. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

Решение. Применим метод Эйлера. Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Будем искать частное решение в виде $x = g_1 e^{lt}$, $y = g_2 e^{lt}$, где g_1, g_2, l – константы. Составляем характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} -1-l & -2 \\ 3 & 4-l \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow l^2 - 3l + 2 = 0 \Leftrightarrow l_1 = 1, l_2 = 2.$$

Находим g_1 и g_2 из системы уравнений

$$\begin{cases} (-1-l)g_1 - 2g_2 = 0 \\ 2g_1 + (4-l)g_2 = 0. \end{cases}$$

При $l_1 = 1$ получаем из системы $g_1 + g_2 = 0 \Rightarrow$ $g_1 = g_2$. Помножив $g_1 = 1$, получим $g_2 = -1$. Таким образом, характеристическому числу $l_1 = 1$ соответствует частное решение $x_1 = e^t$, $y_1 = e^{-t}$. Аналогично для $l_2 = 2$ находим $x_2 = 2e^{2t}$, $y_2 = -3e^{2t}$. Общее решение системы находим как линейную комбинацию полученных частных решений, т.е.

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 = c_1e^t + 2c_2e^{2t},$$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = -c_1e^t - 3c_2e^{2t},$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} \\ -e^t & 3e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.7. В баке находится 50 л водного раствора серной кислоты, содержащей 4 л кислоты. Вода вливается в бак со скоростью 3 л в минуту, и смесь вытекает из бака со скоростью 2 л в минуту, причем концентрация поддерживается равномерной. Сколько кислоты будет в баке через 50 мин?

Решение. Пусть количество кислоты, находящейся в баке через t мин, есть x л. Количество смеси в этот момент будет $(50 + (3-2)\cdot t) = (50 + t)$ л.

Следовательно, концентрация кислоты $c = \dfrac{x}{50+t}$ кг на 1 л. Через промежуток времени dt из бака вытекает $2dt$ л смеси, содержащих $2cdt$ л кислоты. Поэтому изменение dx количества кислоты в баке характеризуется соотношением $-dx = 2cdt$ или $-dx = \dfrac{2x}{50+t}dt$.

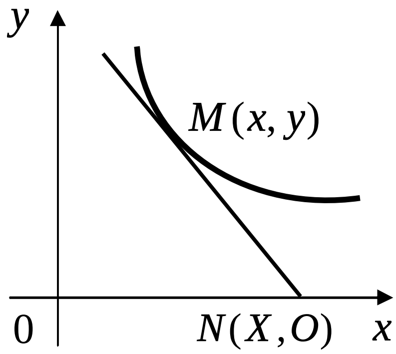

Рис. 5.1

Это есть искомое дифференциальное уравнение. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\ln x = -2\ln(50+t) + \ln c \Rightarrow x = \frac{c}{(50+t)^2}.$$

Постоянная c находится из условия, что при $t = 0$ $x = 4$, т.е. $c = 10000$. Через 50 мин в баке будет содержаться кислоты

$$x = \frac{10000}{(50+50)^2} = 1 \text{ л.}$$

Пример 5.8. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (2;1), обладающей тем свойством, что отрезок касательной от точки касания M до точки ее пересечения N с осью Ox равен длине ON (рис. 5.1).

Решение. Пусть x и y – координаты точки $M(x, y)$, принадлежащей искомой кривой $y(x)$, а текущие координаты касательной в точке M X и Y. Уравнение касательной имеет вид $Y - y = y'(X - x)$. Подставляя сюда $Y = 0$, найдем абсциссу точки N: $ON = |X| = \left| x - \dfrac{y}{y'} \right|$. Условие $MN^2 = ON^2$ дает нам уравнение относительно $y(x)$:

$$\left(x - \frac{y}{y'} \right)^2 = \frac{y^2}{y'^2} + y^2 \Rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Последнее уравнение является однородным. Решаем его путем введения новой переменной $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux;$ $y' = u'x + u$. Подставим y и y' в уравнение, получим

$$xu' + u = \frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u+u^3}{1-u^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1-u^2}{u^3+u}du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-u^2}{u^3+u} du + \ln C.$$

Интегрируя, получаем $\frac{x(u^2+1)}{u} = C$ или, возвращаясь к y, $x^2+y^2-Cy=0.$ Подставим координаты (2;1) в полученное уравнение, найдем $C=5$. Итак, искомая кривая задается уравнением

$$x^2+y^2-5y=0 \Rightarrow x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

Это окружность.

Контрольная работа №6

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ.

Литература: [2], гл.14, 15; [4], гл.2, 3;
[5], ч. IV, гл.11–13; [12], ч. III.

6. Основные теоретические сведения

6.1. Вычисление площади S плоской фигуры, ограниченной замкнутой кривой Γ, производится с помощью двойного интеграла по области D, ограниченной кривой Γ, по формуле

$$S_D = \iint_D dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy, \tag{6.1}$$

если область D определяется условиями $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

В полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ формула (6.1) принимает вид $S_D = \int_a^b d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr$, где a, b – пределы интегрирования по φ являются наименьшим и наибольшим значениями φ по области D.

6.2. Объем V некоторого пространственного тела Ω вычисляется с помощью тройного интеграла

$$V_\Omega = \iiint_\Omega dxdydz.$$

В свою очередь вычисление тройного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

где D_{xy} – проекция тела Ω на плоскость Oxy, $z = z_1(x,y)$ и $z = z_2(x,y)$ – уравнения поверхностей, ограничивающих область Ω снизу и сверху соответственно.

6.3. Криволинейные интегралы (к.и.) бывают двух типов:

$$I = \int\limits_{\Gamma} f(x, y)dl$$ – к.и. 1-го рода, Γ – кривая;

$$I = \int\limits_{\Gamma} P(x, ydx + Q(x, y)dy$$ – к.и. 2-го рода.

Вычисление к.и. обоих типов сводится к вычислению определенных интегралов. В частности, если кривая Γ задается уравнением в прямоугольной системе координат $y = f(x)$, причем изменению x от a до b соответствует движение по кривой от начальной точки до конечной, то к.и. 2-го рода вычисляется по формуле

$$I = \int\limits_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b} [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x)]\, dx.$$

Аналогично, если кривая Γ задана параметрически $x = j\,(t)$, $y = y\,(t)$, то

$$I = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{a}^{b} \left[P(j\,(t), y\,(t))j\,'(t) + Q(j\,(t), y\,(t))y\,'(t)\right] dt.$$

6.4. Вычисление поверхностного интеграла от функции $F(x, y, z)$, определенной на двусторонней поверхности S, сводится к вычислению двойного интеграла, например, вида

$$\iint\limits_{S} F(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} F(x, y, f(x, y)) \frac{dxdy}{|\cos g|},$$

если поверхность S, заданная уравнением $z = f(x, y)$, однозначно проецируется на плоскость xOy в область Dxy. Здесь g – угол между единичным вектором нормали $\bar{n}_0$ к поверхности S и осью Oz:

$$\bar{n}_0 = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \tag{6.2}$$

т.е. $\cos g = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (f')^2 + (f'_y)^2}}$, где знак выбирается в зависимости от стороны поверхности S.

Векторным полем $\bar{F}(M)$ называется векторная функция $\bar{F}(x, y, z) = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ вместе с областью ее определения. Векторное поле характеризуется скалярной величиной – дивергенцией

$$div\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

и векторной величиной – ротором

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

<u>Потоком</u> векторного поля $\overline{F}(M)$ через поверхность S называется поверхностный интеграл

$$П = \iint_S (\overline{F}, \overline{n}_0)\, dS = \iint_S (P\cos a + Q\cos b + R\cos g)\, dS,$$

где $\overline{n}_0 = (\cos a, \cos b, \cos g)$ – единичный вектор нормали к поверхности S (6.2). Формула Остроградского устанавливает связь между потоком векторного поля $\overline{F}$ через замкнутую поверхность S и дивергенцией поля:

$$П = \oiint_{S^+} (\overline{F}, \overline{n}_0) dS = \iiint_V div\overline{F} dxdydz,$$

где V – объем, ограниченный поверхностью S.

<u>Циркуляцией</u> векторного поля $\overline{F}(M)$ по замкнутой кривой C называется к.и. второго рода

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \oint_C (\overline{a}, \overline{dr}),$$

где

$$\overline{dr} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz\bar{k}.$$

<u>Формула Стокса</u> устанавливает связь между циркуляцией и ротором поля $\overline{F}(M)$:

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (rot\overline{F}, \overline{n}_0) dS,$$

где S – поверхность, ограниченная замкнутым контуром C, а $\overline{n}_0$ – единичный вектор нормали к этой поверхности. Направление нормали должно быть согласовано с направлением обхода контура C.

6.5. Векторное поле $\overline{F}$ называется потенциальным в некоторой области V, если существует такая функция j, что

$$\overline{F} = grad j = \frac{\partial j}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial j}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial j}{\partial z}\bar{k}$$

в области V. Функция $U = -j$ называется потенциалом векторного поля $\overline{F}$.

Очевидно, что потенциал определен с точностью до произвольной постоянной.

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\overline{F}$ является выполнение условия в области V:

$$rot\overline{F} = \overline{0}. \tag{6.3}$$

При выполнении условия (6.3) потенциал векторного поля может быть найден по формуле

$$U = -j = -\int\limits_{g} (\overline{F}, \overline{dr}) = -\int\limits_{M_0 M} Pdx + Qdy + Rdz, \tag{6.4}$$

где g – любой контур, лежащий в области V, начинающийся в некоторой фиксированной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и заканчивающийся в точке $M(x, y, z)$, в которой вычисляется потенциал. Интеграл в (6.4) не зависит от выбора пути интегрирования. Поэтому можно выбирать путь интегрирования удобным для вычислений.

Векторное поле $\overline{F}(M)$ называется соленоидальным в области V, если $div\overline{F} = 0$.

Пример 6.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} ydx + x(y^3 + 1)dy$ вдоль дуги параболы $x = \frac{1}{2}y^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;2)$.

Решение. Из уравнения линии интегрирования находим $dx = ydy$, $y \in [0;2]$. Вычислим криволинейный интеграл, переходя к определенному с переменной интегрирования y:

$$\int\limits_{AB} ydx + x(y^3 + 1)dy = \int\limits_0^2 y^2 dy + \int\limits_0^2 \frac{1}{2} y^2 (y^3 + 1)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(y^2 + \frac{1}{2} y^5 + \frac{1}{2} y^2 \right) dy = \left(\frac{1}{2} y^3 + \frac{1}{12} y^6 \right) \Bigg|_0^2 = \frac{28}{3}.$$

Пример 6.2. Вычислить $\int\limits_C xydx + 5y^2 dy$ вдоль дуги C эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, от точки $A(3;0)$ до точки $B(0;2)$.

Решение. Дуга C представляет собой часть эллипса в 1-й четверти. В точке A $t = 0$, в точке B $t = \frac{p}{2}$ (рис. 6.1).

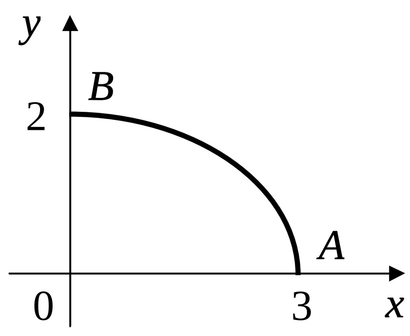

Рис. 6.1

$$\int\limits_C xydx + 5y^2dy = \int\limits_0^{p/2}(-3\cos t 2\sin t 3\sin t + 5\cdot 4\sin^2 t\cdot 2\cos t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{p/2}(-18\cos t\sin^2 t + 40\cos t\sin^2 t)dt = 22\int\limits_0^{p/2}\sin^2 t\cos t dt =$$

$$= 22\int\limits_0^{p/2}\sin^2 t d(\sin t) = 22\cdot\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{p/2} = \frac{22}{3}.$$

Пример 3. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0;\quad z = 4 - x^2;\quad y = x^2;\quad 2x^2 + 1.$

Решение. Поверхности $z = 4 - x^2$; $y = x^2$; $y = 2x^2 + 1$ – параболические цилиндры (рис. 6.2). Снизу тело ограничено плоскостью $z = 0$, сверху – поверхностью $z = 4 - x^2$ и с боков образующими, параллельными оси OZ. Тело симметрично относительно координатной плоскости *YOZ,* поэтому вычислим половину рассмотренного объема и результат умножим на 2:

$$V = 2\iiint\limits_V dxdydz = 2\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{4-x^2}dz.$$

Область D в плоскости xOy есть область, ограниченная снизу кривой $y = x^2$, сверху кривой $y = 2x^2 + 1$ и с боков прямыми $x = \pm 2$ (при $z = 0$ имеем $4 - x^2 = 0$).

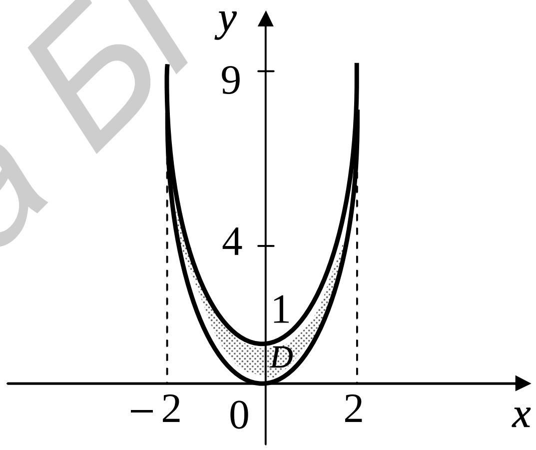

Рис. 6.2

Для первой четверти x изменяется от 0 до 2, y изменяется от нижней кривой $y = x^2$ до верхней $y = 2x^2 + 1$.

Поэтому, расставив пределы интегрирования, получим

$$V = 2\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^{2x^2+1}dy\int\limits_0^{4-x^2}dz = \int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^{2x^2+1}(4 - x^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^2(4 - x^2)(2x^2 + 1 - x^2)dx = 2\int\limits_0^2(3x^2 - x^4 + 4)dx =$$

$$= 2\left(x^3 - \frac{x^5}{5} + 4x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{96}{5} = 19{,}2.$$

Пример 6.4. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $(x^2+y^2)^2 = 2axy^2, \quad a>0$.

Решение. Из уравнения кривой видно, что кривая расположена в области, где $x \geq 0$, и симметрична относительно оси Ox. Запишем уравнение кривой в полярных координатах $x = r\cos j$, $y = r\sin j$:

$$r^4 = 2ar^3\cos j\,\sin^2 j \Rightarrow r = 2a\cos j\,\sin^2 j\,.$$

Так как $r \geq 0$, $2a\sin^2 j \geq 0$, то и $\cos j \geq 0$. Откуда следует, что $j \in \left[-\frac{p}{2};\frac{p}{2}\right]$.

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D r\,dr\,dj = 2\int\limits_0^{p/2} dj \int\limits_0^{2a\cos j\,\sin^2 j} r\,dr =$$

$$= 2\int\limits_0^{p/2}\frac{1}{2}\left(2a\cos j\,\sin^2 j\right)^2 dj = 4a^2\int\limits_0^{p/2}\left(\frac{1+\cos 2j}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2j}{2}\right)^2 dj =$$

$$= 4a^2\int\limits_0^{p/2}\frac{(1-\cos^2 2j)}{4}\frac{(1-\cos 2j)}{2}dj =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{p/2}(1-\cos 2j - \cos^2 2j + \cos^3 2j)dj =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{p}{2} - \frac{\sin 2j}{2}\Bigg|_0^{p/2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{p/2}(1+\cos 4j)dj + \frac{1}{2}\int\limits_0^{p/2}(1-\sin^2 2j)d(\sin 2j)\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{4} - \frac{\sin 4j}{8}\Bigg|_0^{p/2} + \frac{1}{2}\sin 2j\Bigg|_0^{p/2} - \frac{1}{6}\sin^3 2j\Bigg|_0^{p/2}\right) = \frac{a^2 p}{8}.$$

Пример 6.5. Вычислить поток векторного поля $\overline{F} = x^2 y\bar{i} + z^2\bar{j} - x^2\overline{k}$ через плоскость треугольника S, вырезанного из плоскости (P) $x+y+z=1$ координатными плоскостями, в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью Oz острый угол (рис. 6.3).

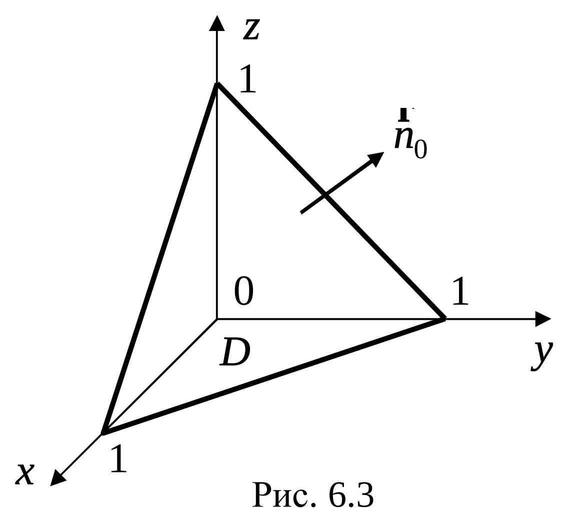

Рис. 6.3

Решение. Поток векторного поля вычисляется с помощью поверхностного интеграла по формуле

$$П = \iint_S (\overline{F}, \overline{n}_0)\, dS,$$

где $\overline{n}_0$ – единичный вектор нормали к поверхности $z = 1 - x - y$; $\overline{n}_0$ определяется по формуле

$$\overline{n}_0 = \pm \frac{z'_x \overline{i} + z'_y j - \overline{k}}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}},$$

причем берется знак «–» так как $\cos(n_0, z) > 0$, т.е. $n_0 = \dfrac{\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{3}}$, $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \sqrt{3} dxdy$. Поэтому вычисление потока по поверхности d сводится к вычислению двойного интеграла по проекции S на плоскости xOy (D), т.е.

$$П = \iint_S \frac{x^2 y + z^2 - x^2}{\sqrt{3}}\, dS = \iint_D \left(x^2 y + (1 - x - y)^2 - x^2\right) dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(y(x^2 + 2x - 2) + y^2 - 2x\right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}(x^2 + 2x - 2) + \frac{(1-x)^3}{3} - 2x(1-x) \right) dx = \frac{1}{60}.$$

Пример 6.6. Проверить, будет ли потенциальным и соленоидальным поле $\overline{F} = (3yz + x^2)\overline{i} + (2y^2 + 3xz)\overline{j} + (z^2 + 3xy)\overline{k}$. В случае потенциальности поля найти его потенциал U.

Решение. Найдем $rot\overline{F}$ по формуле

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \overline{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \overline{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \overline{i}(3x - 3x) + \overline{j}(3y - 3y) + \overline{k}(3z - 3z) = 0.$$

Итак, поле потенциально. Для вычисления потенциала по формуле $U(x, y, z) = -\int\limits_{M_0 M} F_x dx + F_y dy + F_z dz$ в качестве точки M_0 возьмем начало координат. Тогда получаем

$$U(M) = \int_0^x F_x(x,0,0)dx + \int_0^y F_y(x, y,0)dy + \int_0^z F_z(x, y, z)dz =$$

$$= \int_0^x x^2 dy + \int_0^y 2y^2 dy + \int_0^z (z^2 + 3yx) dz = \frac{1}{3}(x^3 + 2y^3 + z^3) + 3xyz + C.$$

Проверим соленоидальность поля, вычислив

$$divF = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2x + 4y + 2z \neq 0.$$

Значит, поле не является соленоидальным.

Контрольная работа №7

РЯДЫ

Литература: [2], гл.16, 17; [4], гл.9; [4], гл. 4,6;
[5], ч. III, гл. 9–10; [12], ч. III.; [11] гл.17

7. Основные теоретические сведения

7.1. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (7.1)$$

называется сходящимся, если существует предел его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Число $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда. Если же предел частичных сумм не существует или равен ∞, то ряд называется расходящимся.

Необходимый признак сходимости: если ряд (7.1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

К достаточным признакам сходимости для рядов с положительными членами $(a_n > 0)$ относятся следующие:

а) признак сравнения. Если имеются два ряда а) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и б) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и при этом $0 < a_n \le b_n$, то из сходимости ряда б) следует сходимость ряда а), а из расходимости ряда а) следует расходимость ряда б). Признак сравнения в предельной форме звучит так: если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0$, то оба ряда одновременно сходятся или расходятся. В качестве эталонных рядов для сравнения обычно служат два ряда:

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, сходящийся при $a > 1$ и расходящийся при $a \le 1$;

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, сходящийся при $0 \le q < 1$ и расходящийся при $q \ge 1$;

б) признаки Даламбера и Коши: если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \right),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$. При $q = 1$ вопрос о сходимости ряда требует дополнительного исследования;

в) интегральный признак сходимости: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$, где $f(n) = a_n$, одновременно сходятся или расходятся.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с членами, имеющими разные знаки, называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся. Для исследования сходимости знакочередующихся рядов применяется признак Лейбница.

7.2. Ряд вида

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \tag{7.2}$$

называется степенным рядом. Число R называется радиусом сходимости ряда (7.2), если ряд (7.2) сходится при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. При $|x - x_0| = R$ ряд (7.2) может как сходиться, так и расходиться. Радиус сходимости может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

7.3. Используя известные разложения основных элементарных функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$, $\operatorname{arctg} x$ в ряд Тейлора, можно разложить подынтегральную функцию в ряд и почленно проинтегрировать (что возможно внутри интервала сходимости). Для приближенного вычисления интеграла с точностью до e берется сумма n первых членов проинтегрированного ряда, где число n вычисляется из оценки остатка ряда. Если полученный ряд является знакочередующимся, то по теореме Лейбница остаток ряда не превосходит первого отброшенного члена ряда, взятого по абсолютной величине.

7.4. Пусть требуется представить в виде ряда решение дифференциального уравнения $y' = j(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$. Предположим, что решение $y = f(x)$ уравнения существует и представимо в виде ряда Тейлора

$$y = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots .$$

Входящие в этот ряд значения $f(0), f'(0) f''(0), \dots, f^{(n)}(0), \dots$ можно найти из исходного уравнения и начального условия.

Так, $f(0) = y_0$, $f'(0) = j(0, y_0)$. Далее, дифференцируя уравнение по *x*, получаем $y'' = j'_x(x, y) + j'_y(x, y) \cdot y'(x)$, откуда находим $y''(0) = f''(0)$. Дифференцируя соотношение для y'' еще раз, найдем $y'''(0) = f'''(0)$ и т.д.

Если функция $f(x)$ периода $T = 2l$ (в частности $T = 2p$) кусочно-монотонна и непрерывна или имеет лишь конечное число точек разрыва первого рода на отрезке $[-l; l]$, то во всех точках непрерывности она разложима в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{npx}{l} + bn \sin\frac{npx}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{npx}{l}dx,$$
$$(n = 0,1,2,\dots)$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{npx}{l}dx.$$

В каждой точке x_k разрыва функции $f(x)$ ряд Фурье сходится к числу $\frac{1}{2}\left(f(x_k - 0) + f(x_k + 0)\right)$.

Если $f(x)$ – четная функция, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{npx}{l},$$

где $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{npx}{l}dx \quad (n = 0,1,2,\dots)$.

Если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{npx}{l},$$

где $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{npx}{l}dx \quad (n = 0,1,2,\dots)$.

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[0; l]$, ее обычно продолжают на отрезок $[-l;0]$ четным или нечетным образом, а затем продолжают периодически на всю ось Ox. В соответствии с этим получают разложение в ряд по косинусам либо по синусам.

Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{inpx}{l}},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{inpx}{l}} dx, \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Зная комплексный ряд Фурье функции $f(x)$, можно написать ее действительный ряд Фурье, воспользовавшись тем, что

$$\frac{a_0}{2} = c_0; \quad a_n = \operatorname{Re} 2c_n; \quad b_n = -\operatorname{Im} 2c_n.$$

Пример 1. Исследовать сходимость рядов

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{3}{7}\right)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2(n+1)!}$; д) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)\ln^2(n-1)}$.

Решение.

а) сравним члены этого ряда с членами гармонического расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Имеем $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. Так как ряд с меньшими членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то и ряд с большими членами $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ будет расходиться;

б) сравним члены этого ряда с членами сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+1)^2+1} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{9n^2+6n+2} = \frac{1}{9} \neq 0, \infty \Rightarrow$$

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^2+1}$ тоже сходится;

в) если в формуле общего члена a_n имеются выражения, возведенные в степень n, то удобно пользоваться признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{7^n(n+1)}}=\frac{3}{7}<1\Rightarrow \text{ ряд сходится;}$$

г) если в формуле общего члена присутствуют факториалы, то рекомендуется применять признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot 2(n+1)!}{2((n+1)+1)!\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)!}{(n+1)!(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+2}=0<1.$$

Значит, ряд сходится;

д) в силу неравенства

$$a_n=\frac{n}{(n^2+1)\ln^2(n-1)}<\frac{n}{n^2\ln^2(n-1)}<\frac{1}{(n-1)\ln^2(n-1)}=b_n$$

сравним исходный ряд с рядом $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)\ln^2(n-1)}$. К последнему применим интегральный признак Коши, т.е. рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_3^{\infty}\frac{dx}{(x-1)\ln^2(x-1)}=\int_3^{\infty}\frac{d(\ln(x-1))}{\ln^2(x-1)}=-\frac{1}{\ln(x-1)}\bigg|_3^{\infty}=\frac{1}{\ln 2}<\infty \quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ интеграл сходится, значит, сходится ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\ln^2(n-1)}$, тогда по признаку сравнения сходится и исходный ряд.

Пример 7.2. Найти интервал сходимости степенного ряда

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n x^n}{n^n 3^n}$.

Решение.

а) радиус сходимости находим по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n\cdot(n+1)!}{n!\cdot 2^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\infty.$$

Значит, ряд сходится на всей числовой оси, т.е. на интервале $(-\infty;+\infty)$.

б) для вычисления радиуса сходимости применим формулу

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}},\text{ где } C_n=\frac{(n+1)^n}{n^n\cdot 3^n}.$$

Получим

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{(n+1)^n}{n^n \cdot 3^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 3}{n+1} = 3.$$

Значит, ряд сходится на интервале (–3; 3). Исследуем сходимость ряда на концах интервала. При $x = +3$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n 3^n}{n^n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n .$$

Этот числовой ряд расходится, так как общий член ряда $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ не стремится к нулю $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \right)$, т.е. не выполняется необходимый признак сходимости ряда. На границе $x = -3$ опять получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n 3^n}{n^n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n ,$$

который расходится по той же причине. Значит, исходный ряд сходится только внутри интервала сходимости, т.е. при $x \in (-3;3)$.

Пример 7.3. Вычислить $I = \int\limits_{-0,6}^{0} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию по формуле

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a\cdot(a-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!} x^n + ...(|x| < 1),$$

$$f(x) = (1+x^2)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6} x^4 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9} x^6 + ...$$

Так как отрезок интегрирования $[-0,6;\ 0]$ находится внутри интервала сходимости данного ряда, то ряд можно почленно интегрировать. Подставляя в интеграл вышеприведенное разложение подынтегральной функции и почленно интегрируя в указанных пределах, получаем

$$I = \int\limits_{-0,6}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_{-0,6}^{0} \left(1 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{9} x^4 - \frac{14}{81} x^6 + ... \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{1}{3\cdot 3} x^3 + \frac{2}{9\cdot 5} x^5 - \frac{14}{81\cdot 7} x^7 + ... \right) \Bigg|_{-0,6}^{0} =$$

$$= -\left(-0{,}6 + \frac{(0{,}6)^3}{9} - \frac{2\cdot(0{,}6)^5}{45} + \frac{14\cdot(0{,}6)^7}{567} - \ldots \right).$$

Ряд знакочередующийся. Погрешность замены суммы ряда суммой его первых n членов по абсолютной величине меньше первого из отброшенных членов. И поскольку $\frac{14\cdot(0{,}6)^7}{567} \approx 0{,}0007 < 0{,}001$, то для вычисления приближенного значения интеграла с требуемой точностью достаточно взять первые три слагаемых. Итак, $I \approx 0{,}6 - (0{,}6)\,3/9 + 2\cdot(0{,}6)\,5/45 \approx 0{,}579$.

Пример 7.4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = y^2 + y^3$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = \frac{1}{2}$.

Решение. Представим искомое решение в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$

Здесь $y(0)$ возьмем из начального условия, $y'(0)$ – из самого дифференциального уравнения $y'(0) = \left(y(0)\right)^2 + \left(y(0)\right)^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Чтобы получить третье слагаемое $y''(0)$, продифференцируем сначала обе части дифференциального уравнения, а затем подставим туда $x = 0,\quad y = \frac{1}{2},\quad y' = \frac{3}{8}$.

$$y'' = 2yy' + 3y^2\cdot y' \Rightarrow y''(0) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{8}\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{21}{32}.$$

Тогда решение $y(x)$ имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x + \frac{21}{32}x^2 + \ldots .$$

Пример 7.5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом $2p$, заданную на интервале $(-p\,;p)$ уравнением $f(x) = p + x$.

Решение. Определим коэффициенты ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} (p + x)dx = \int_{-p}^{p} dx + \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} xdx = x\Big|_{-p}^{p} + 0 = 2p,$$

$$a_k = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos kxdx = \int_{-p}^{p}\cos kxdx + \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} x\cos kxdx.$$

Нетрудно видеть, что оба интеграла равны нулю (подынтегральная функция второго интеграла является нечетной). Итак, $a_1 = a_2 = \ldots = 0$.

$$b_k = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin kxdx = \int_{-p}^{p}\sin kxdx + \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} x\sin kxdx.$$

Первый интеграл равен нулю. Для второго интеграла

$$b_k = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} x\sin kxdx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$u = x, \quad dv = \sin kxdx, \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{k}\cos kx, \text{ т.е.}$$

$$b_k = -\frac{2x}{kx}\cos kx\Big|_0^n + \frac{2}{kp}\int_0^n \cos kxdx = -\frac{2}{k}\cos kx + \frac{2}{pk^2}\sin kx\Big|_0^n =$$

$$= -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

Следовательно, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = p + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx = p + 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - ....\right).$$

Контрольная работа №8

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Литература: [2], гл.18, [4], гл. 6,7; [5], ч.IV, гл. 15;
[9], гл. 1; [10], ч. II, гл. 7; [12], ч. II;
[4], гл.7; [5], ч. IV, гл. 16.

8. Основные теоретические сведения

8.1. Если функция комплексного переменного (ф.к.п.) задана в виде $w = f(z)$, то, заменяя $z = x + iy$, можно выделить действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ части функции $f(z)$, т.е. представить $f(z) = u(x, y) + + iv(x, y)$. Функция комплексного переменного $f(z) = u + iv$ будет аналитической в некоторой области, если в этой области выполняются условия Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{8.1}$$

При выполнении условий (8.1) производная ф.к.п. может быть вычислена по правилам вычисления производной от функции действительной переменной.

8.2. Обобщением ряда Тейлора является ряд Лорана. Если функция $f(z)$ – аналитическая в кольце $r < |z - a| < R$, то она разлагается внутри его в сходящийся ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

который называется рядом Лорана.

Подробное рассмотрение примеров разложения функции в ряд Лорана см. в [5], ч. IV,§ 15.5; [9], гл. I.

8.3. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ с комплексными членами можно определить, пользуясь известными признаками сходимости числовых рядов, поэтому для радиуса сходимости справедливы аналитические формулы

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad \text{или} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Если точка z_1 лежит в круге $|z_1 - z_0| < R$, то в этой точке ряд сходится, если z_2 лежит вне круга сходимости, т.е. $|z_2 - z_0| > R$, то в точке z_2 ряд расходится. Если же точка z_3 лежит на границе круга сходимости, то сходимость ряда в этой точке можно исследовать как сходимость числового ряда, полученного непосредственной подстановкой числа z_3 в ряд.

8.4. Прежде чем применять теорему о вычетах для вычисления интегралов от ф.к.п., нужно рассмотреть классификацию изолированных особых точек функции $f(z)$.

Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = a$, за исключением самой точки a, то точка a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$.

Изолированные особые точки подразделяются следующим образом:

– устранимые особые точки;

– полюсы порядка $m (m \geq 1)$;

– существенно особые точки.

Вычетом функции $f(z)$ в точке $z = a$ называется c_{-1} коэффициент в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - a)$; обозначается вычет

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2pi} \oint_{g} f(z)dz,$$

где g – замкнутый контур, ориентированный положительно и окружающий точку a.

Основные формулы для вычисления вычетов:

а) если $z = a$ – устранимая особая точка, то $\mathop{\mathrm{Res}}_{z=a} f(z) = 0$;

б) если $z = a$ – полюс первого порядка, то $\mathop{\mathrm{Res}}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} [f(z)(z - a)]$;

в) если $z = a$ – полюс порядка k, то

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [f(z)(z-a)^k];$$

г) если $z = a$ – существенно особая точка, то вычет определяется непосредственно из разложения в ряд Лорана.

Теорема о вычетах. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots z_n$, лежащих внутри кривой Γ, расположенной в области D. Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2pi \sum_{k=1}^{n} \mathop{\mathrm{Res}}_{z=z_k} f(z).$$

8.5. Операционное исчисление связано с интегральным преобразованием

Лапласа

$$F(p)=\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\,, \qquad (8.2)$$

где $f(t)$ – функция действительного переменного t, определенная для $t>0$, $p=a+bi$. При этом $F(p)$ называется изображением функции $f(t)$ по Лапласу, а $f(t)$ – оригиналом. Обозначается так: $f(t)=F(p)$.

При нахождении изображения по заданному оригиналу обычно используются свойства преобразования Лапласа:

а) свойство линейности;

б) смещение в области изображения: если $f(t)=F(p)$, то $e^{at}f(t)=F(p-a)\quad \forall a\in C$;

в) свойство подобия: если $f(t)=F(p)$, то $f(lt)=\dfrac{1}{l}F(\dfrac{p}{l}),\ l>0$;

г) дифференцирование и интегрирование изображения:
если $f(t)=F(p)$, то $tf(t)=-F'(p)$;

если $f(t)=F(p)$, то $\dfrac{f(t)}{t}=\int\limits_{p}^{\infty}F(q)dq$;

д) дифференцирование и интегрирование оригинала:
если $f(t)=F(p)$, то $f'(t)=pF(p)-f(+0)$;

если $f(t)=F(p)$, то $\int\limits_{0}^{t} f(t)dt=\dfrac{F(p)}{p}$.

Пользуясь таблицей изображений для основных элементарных функций e^{t}, $\sin t$, $\cos t$, sht, cht, можно с помощью вышеуказанных свойств получить изображение функций, предложенных в задаче №1.

8.6. Если требуется найти изображение выражения $\int\limits_{0}^{t}\dfrac{f(t)}{t}dt$, то можно применить следующую цепочку свойств преобразования Лапласа: пусть $f(t)=F(p)$, тогда по свойству интегрирования изображения находим $f(t)=\int\limits_{0}^{\infty}F(q)dq$, затем по свойству интегрирования оригинала имеем $\int\limits_{0}^{t}\dfrac{f(t)}{t}dt=\dfrac{1}{p}\int\limits_{p}^{\infty}F(q)dq$.

8.7. При построении графика функции и ее изображения по данному графику необходимо применение теоремы запаздывания, а именно: если

$f(t) = F(p)$ и $a > 0$, то $f(t-a) = e^{-pa} \cdot F(p)$. С помощью функции Хевисайда $1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ заданная функция записывается одной формулой. Применяя к полученному выражению свойства преобразования Лапласа и теорему запаздывания, находим изображение (см. [5], ч. IV, пример 20, [10], ч. II, гл. VIII).

8.8. Для решения дифференциального линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t) \tag{8.3}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0, x'(0) = x_0{}^1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0{}^{n-1}$ применяем преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (8.3), в результате получаем алгебраическое уравнение для $x(t) = X(p)$. По полученному изображению для $X(p)$ находим оригинал $x(t)$ – решение уравнения (8.3).

8.9. Схема решения систем дифференциальных уравнений такая же, как и для линейных дифференциальных уравнений. Каждое из уравнений преобразуется по Лапласу, а затем получившаяся система линейных алгебраических уравнений решается относительно изображения решения. По полученному изображению восстанавливается оригинал, т.е. решение системы.

Примеры и решения

Пример 8.1. Представить заданную функцию $w = e^{3iz-2}$ в виде $w = u(x;y) + iv(x;y)$; проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение ее производной в заданной точке $z_0 = i$.

Решение. Определим действительную и мнимую части функции

$$w = e^{3iz-2};\ w = e^{3i(x+iy)-2} = e^{-3y-2} \cdot e^{3ix} = e^{-3y-2}(\cos 3x + i \sin 3x);$$

$$u(x;y) = e^{-3y-2} \cos 3x;\ \ v(x;y) = e^{-3y-2} \sin 3x.$$

Найдем частные производные этих функций, которые непрерывны на плоскости xOy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3e^{-3y-2} \sin 3x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -3e^{-3y-2} \cos 3x;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3e^{-3y-2} \cos 3x; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -3e^{-3y-2} \sin 3x.$$

При всех значениях *x* и *y* $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, следовательно, функция $w = e^{3iz-2}$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости z:

$$w' = (e^{3iz-2})' = 3ie^{3iz-2};$$

$$w'(i) = 3ie^{-3-2} = 3ie^{-5}.$$

Пример 8.2. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

$$f(z) = z \cdot e^{\frac{z}{z+3}}, \; z_0 = -3.$$

Решение.

$$z \cdot e^{\frac{z}{z+3}} = ((z+3)-3) \cdot e^{\frac{z+3-3}{z+3}} = (z+3) \cdot e^{1-\frac{3}{z+3}} - 3e^{1-\frac{3}{2+3}} =$$

$$= e \cdot (z+3)\left(1 + \frac{-3}{z+3} + \frac{3^2}{2!(z+3)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{3^n}{n!(2+3)^n} + \ldots\right) -$$

$$-3e\left(1 + \frac{-3}{z+3} + \frac{3^2}{2!(z+3)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{3^n}{n!(z+3)^n} + \ldots\right) =$$

$$= e\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{3^n}{n!(z+3)^{n-1}} - 3e\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{3^n}{n!(z+3)^n}.$$

Пример 8.3. Определить область сходимости данного ряда и исследовать сходимость его в точках $z_1, \; z_2, \; z_3$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{4^n(3n+1)}; \quad z_1 = 0, \; z_2 = 2i, \; z_3 = 3+2i.$$

Решение. Для данного степенного ряда $c_n = \dfrac{1}{4^n(3n+1)}$. Тогда

$$c_{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}(3n+4)}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}(3n+4)}{4^n(3n+1)}\right| = 4.$$

Область сходимости ряда определяется неравенством $|z+2i| < 4$, которое выражает внутренность круга с центром в точке $z_0 = -2i$ радиусом 4. Очевидно, точка $z_1 = 0$ лежит внутри круга сходимости. Поэтому ряд в точке z_1 сходится абсолютно. Точка z_3 лежит вне круга сходимости. Ряд в точке z_3 расходится.

Исследуем сходимость ряда в точке $z_2 = 2i$, которая лежит на границе круга сходимости. Положив $z = 2i$, получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4i)^n}{4^n (3n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{3n+1}.$$

Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{3n+1} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$.

Он является расходящимся.

Определим, является ли ряд условно сходящимся.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{3n+1} = \frac{i}{4} + \frac{-1}{7} + \frac{-i}{10} + \frac{1}{13} + \frac{i}{16} + \frac{-1}{19} + \ldots =$$

$$= i\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{1}{16} - \ldots\right) + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \ldots\right).$$

Действительная и мнимая части этого ряда являются сходящимися рядами по признаку Лейбница.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{4^n (3n+1)}$ в точке $z_2 = 2i$ сходится условно.

Пример 8.4. При помощи вычетов вычислить $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{2z} dz}{z(z-2)^2 (z+5)}$.

Решение. Функция $f(z) = \frac{e^{2z}}{z(z-2)^2 (z+5)}$ внутри контура интегрирования имеет особые точки: $z_1 = 0$ – полюс первого порядка; $z_2 = 2$ – полюс второго порядка.

$$\operatorname{Re}s[f(z);0] = \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z}}{z(z-2)^2 (z+5)} \cdot z = \frac{1}{20};$$

$$\operatorname{Re}s[f(z);2] = \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{2z} \cdot (z-2)^2}{z(z-2)^2 (z+5)} \right) = \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{2z}}{z(z+5)} \right) =$$

$$= \lim_{z\to 2} \frac{2e^{2z} \cdot z(z+5) - e^{2z}(2z+5)}{z^2 (z+5)^2} = \frac{19e^4}{196}.$$

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{2z} dz}{z(z-2)^2 (z+5)} = 2pi\left(\frac{1}{20} + \frac{19e^4}{196} \right).$$

Пример 8.5. Найти изображение заданного оригинала $f(t) = t^3 e^{2t}$.

Решение. По таблице оригиналов находим $t^3 = \dfrac{3!}{p^4}$. Тогда по теореме смещения $t^3 \cdot e^{2t} = \dfrac{3!}{(p-2)^4}$.

Пример 8.6. Найти изображение заданного оригинала $f(t) = t^2 \cos 3t$.

Решение. Если $f(t) = F(p)$, то

$$f(t) \cdot \cos wt = \frac{1}{2}\big(F(p-iw) + F(p+iw)\big).$$

Так как $t^2 = \dfrac{2}{p^3}$, то

$$t^2 \cdot \cos 3t = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(p-3i)^3} + \frac{2}{(p+3i)^3}\right) = \frac{(p+3i)^3 + (p-3i)^3}{(p^2+9)^3} =$$

$$= \frac{2p(p^2+3ip-9-p^2-9+p^2-6ip-9)}{(p^2+9)^3} = \frac{2p(p^2-27)}{(p^2+9)^3}.$$

Пример 8.7. Найти изображение заданного оригинала

$$f(t) = \int_0^t \frac{\cos t - \cos 3t}{t}\,dt\ .$$

Решение. Используя таблицу оригиналов и свойство линейности, находим $\cos t - \cos 3t = \dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{p}{p^2+9}$. Применив теорему интегрирования изображения, получим

$$\frac{\cos t - \cos 3t}{t} = \int_p^\infty \left(\frac{u}{u^2+1} - \frac{u}{u^2+9}\right) du = \frac{1}{2}\Big(\ln(u^2+1) - \ln(u^2+9)\Big)\ \Big|_p^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{u^2+1}{u^2+9}\bigg|_p^\infty = \frac{1}{2}\left(0 - \ln\frac{p^2+1}{p^2+9}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+9}{p^2+1}.$$

На основании теоремы интегрирования оригинала

$$\int_0^t \frac{\cos t - \cos 3t}{t}\,dt = \frac{1}{2p}\ln\frac{p^2+9}{p^2+1}.$$

Пример 8.8. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$4x'' + 12x' + 9x = 144e^{-3t/2}, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0{,}5.$$

Решение. Пусть искомое решение $x(t)$ есть оригинал, и $X(p)$ – его изображение. Тогда если $x(t) = X(p)$, то

$$x'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$x''(t) = p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p - 0{,}5.$$

По таблице изображений находим изображение функции в правой части уравнения:

$$144e^{-3t/2} = \frac{144}{p + 3/2}.$$

Тогда операторное уравнение имеет вид

$$(4p^2 + 12p + 9)X(p) - 4p - 14 = \frac{144}{p + 3/2}.$$

Из последнего уравнения находим $X(p)$:

$$X(p) = \frac{1}{4p^2 + 12p + 9}\left(\frac{144}{p + \frac{3}{2}} + 4p + 14\right) = \frac{144}{4\left(p + \frac{3}{2}\right)^3} + \frac{4p + 14}{4\left(p + \frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{36}{\left(p + \frac{3}{2}\right)^3} + \frac{1}{p + \frac{3}{2}} + \frac{2}{\left(p + \frac{3}{2}\right)^2}.$$

Так как $\frac{1}{p} = 1, \quad \frac{1}{p^2} = t, \quad \frac{1}{p^3} = \frac{t^2}{2}$, то по теореме смещения

$$\frac{1}{p + \frac{3}{2}} = e^{-3t/2}; \quad \frac{1}{\left(p + \frac{3}{2}\right)^2} = te^{-3t/2}; \quad \frac{1}{\left(p + \frac{3}{2}\right)^3} = \frac{t^2}{2}e^{-3t/2}.$$

Следовательно, искомое решение будет иметь вид

$$x(t) = 36\frac{t^2}{2}e^{-3t/2} + e^{-3t/2} + 2te^{-3t/2} = e^{-3t/2}\left(18t^2 + 2t + 1\right).$$