Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 10-ти частях

Часть 9

А. А. Карпук, В. В. Цегельник, В. А. Ранцевич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений
по техническим специальностям

Минск БГУИР 2008

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1. я73
К 26

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра высшей математики Белорусского государственного аграрного технического университета; профессор кафедры дифференциальных уравнений БГУ, доктор физико-математических наук, профессор В. В. Амелькин

Карпук, А. А.

К 26 Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 9: Дифференциальные уравнения: учеб. пособие / А. А. Карпук, В. В. Цегельник, В. А. Ранцевич. – Минск : БГУИР, 2008. – 166 с.: ил.
ISBN 978-985-488-149-2 (ч. 9)

В части 9 сборника приводятся задачи по важнейшему разделу курса высшей математики «Дифференциальные уравнения».

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1. я73

Ч. 1: Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие. В 10 ч. Ч. 1: Аналитическая геометрия / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк. – Минск : БГУИР, 2002. – 112 с.: ил.; 2-е изд. – 2003, 3-е изд. – 2004.

Ч. 2: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями) / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк, В. В. Цегельник. – Минск : БГУИР, 2004. – 154 с.

Ч. 3: Сборник задач по высшей математике. Ч. 3: Введение в анализ / Н. Н.Третьякова, Т. М. Пушкарева, О. Н. Малышева. – Минск : БГУИР, 2005. – 116 с.

Ч. 4: Сборник задач по высшей математике для студ. радиотехнич. спец. БГУИР. В 10ч. Ч. 4: Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук, В. В. Цегельник, Р. М. Жевняк, И. В. Назарова. – Минск : БГУИР, 2006. – 107 с.

Ч. 5: Сборник задач по высшей математике для студ. радиотехнич. спец. В 10 ч. Ч. 5: Функции многих переменных / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2004. – 64 с.

Ч. 6: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 6: Интегральное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2006. – 148 с.

Ч. 7: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 7: Интегральное исчисление функций многих переменных / А. А. Карпук, В. В. Цегельник, Е. А. Баркова. – Минск: БГУИР, 2007. – 120 с.

Ч. 8: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 8: Ряды. Фурье-анализ / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2007. – 120 с.

ISBN 978-985-488-297-0 (ч. 9)
ISBN 985-444-727-8
ISBN 978-985-444-727-8

Введение

Данная книга продолжает серию сборников задач по высшей математике для студентов вузов, разработанную сотрудниками кафедры высшей математики БГУИР.

Дифференциальные уравнения как раздел математики являются одним из важнейших инструментов, находящих приложения в естествознании, экономике, технике и других сторонах прикладного характера человеческой деятельности. Существует немало сборников задач по этому разделу высшей математики. Тем не менее авторы посчитали необходимым разработать в концентрированной форме новый сборник задач по этому разделу, обеспечивающий студентов технических специальностей теоретическими знаниями и навыками решения задач.

Структура части 9 «Сборника» следующая. В начале каждого параграфа приводятся необходимые теоретические сведения. Затем решаются задачи, в том числе и сложные, помеченные *, поясняющие теорию. В книге приведено достаточное количество задач и упражнений для аудиторных занятий.

В книге, как и ранее в 1–8 частях, знаком Δ отмечено начало решения задачи, а знаком ▲ – конец ее решения. Принятые в книге обозначения поясняются в тексте. Например, формула (3.5) есть 5-я формула 3-го параграфа, а к примеру, ЛНСДУ-n – линейная неоднородная система дифференциальных уравнений n-го порядка и т. д. Знак ● означает «указание».

Авторы выражают сердечную благодарность доктору физико-математических наук, профессору Л. А. Черкасу за внимательное прочтение рукописи и сделанные им конструктивные замечания, способствовавшие улучшению содержания сборника.

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

1.1. Общие понятия и определения

Понятие дифференциального уравнения 1-го порядка (ДУ-1). Интегральные кривые ДУ. Задача Коши. Общее и частное решения, общий и частный интегралы ДУ-1. Понятие об особых решениях ДУ-1. Геометрический смысл ДУ-1, разрешенных относительно производной. Метод изоклин. Метод последовательных приближений (метод Пикара).

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется соотношение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

содержащее независимую переменную *x*, неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее производную y' в точке x. Здесь $F(x, y, y')$ – заданная функция трех переменных $x, y, y' = \dfrac{dy}{dx}$ (наличие производной обязательно), при этом предполагается, что соотношение (1.1) можно разрешить относительно y'. Уравнение

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

где $f(x, y)$ – известная функция переменных *x*, *y*, называется *ДУ-1, разрешенным относительно* y', *или ДУ в нормальной форме*. Здесь $(x, y) \in D$, где D – некоторая область плоскости *XY*.

Соотношение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{1.3}$$

где P и Q – заданные функции, определенные в *D*, называется *ДУ-1, записанным в дифференциальной, симметричной относительно x и y форме*.

Решением (1.1) или (1.2) на некотором интервале (*a*,*b*) изменения независимой переменной *x* называется функция $y = j(x)$, определенная и дифференцируемая в некотором интервале (*a*,*b*) и обращающая это уравнение в тождество.

Решение ДУ может быть задано и в *неявном виде* соотношением $\Phi(x, y) = 0$, которое называется *интегралом уравнения*. Так, уравнение $y' = \dfrac{-x}{y}$, $y \neq 0$ имеет интеграл $x^2 + y^2 - 1 = 0$, определяющий два решения $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

График решения ДУ называется *интегральной кривой* этого уравнения. Процесс нахождения решения ДУ называется *интегрированием ДУ*.

1.1. Проверить, что функция $y = Cx + C/\sqrt{1 + C^2}$ при любом конкретном значении произвольной постоянной C является решением уравнения

$$y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{1.4}$$

Δ Находим $y' = C$. Подстановка y и y' в уравнение (1.4) приводит к соотношению

$$Cx + \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} - Cx = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}},$$

т. е. к тождеству. Следовательно, функция $y = Cx + C/\sqrt{1+C^2}$, $\forall C \in \boldsymbol{R}$ является решением ДУ 1.4. ▲

1.2. Доказать, что при каждом $C \in \boldsymbol{R}$ функция $y = j(x)$, определенная соотношением $y = arctg(x+y) + C$, является решением ДУ $(x+y)^2 y' = 1$.

Δ Напомним, что если соотношение $F(x, y) = 0$ определяет неявно функцию $y = j(x)$, то ее производная

$$y' = j'(x) = \left.\frac{-F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}\right|_{y=j(x)}.$$

Применяя эту формулу к соотношению $y - arctg(x+y) - C = 0$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(x+y)^2} \Big/ \frac{(x+y)^2}{1+(x+y)^2} = \frac{1}{(x+y)^2}.$$

Подставив найденное значение $\dfrac{dy}{dx}$ в данное ДУ, получим тождество

$$(x+y)^2 \frac{1}{(x+y)^2} = 1. \text{ ▲}$$

1.3. Убедиться, что функция $y = j(x)$ при каждом конкретном значении C является решением заданного ДУ:

а) $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$; $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $(x+y)dx + xdy = 0$; $x^2 + 2xy = C$;

в) $xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0$; $\arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right) = C - x$;

г) $xy' - y = xe^x$; $y = x(1 + \int \dfrac{e^x}{x} dx)$;

д*) $xy' - y = x^2 \sin x^2$; $y = x\int\limits_0^x \sin t^2 dt$;

е) $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$; $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$.

1.4. Методом исключения параметров составить ДУ семейства кривых $y = ax + a^2$.

Δ Находим $y' = a$ и подставляем $a = y'$ в данное семейство: $y = xy' + y'^2$. Это и есть искомое ДУ. Легко проверить, что каждая функция семейства – решение уравнения. ▲

1.5. Методом исключения параметров составить ДУ семейства кривых:

а) $y = ax + b$; б) $y^2 = 2px$; в) $(x-a)^2 + y^2 - 1 = 0$;

г) $y = \sin ax$; д) $x^2 - y^2 = 2ax$.

Отв.: а) $y'' = 0$; б) $y = 2xy'$; в) $y^2(1 + y'^2) = 1$;

г) $xy' - \sqrt{1-y^2} \arcsin y = 0$; д) $2xyy' = x^2 + y^2$.

Как правило, ДУ $y' = f(x,y)$ имеет бесконечное множество решений. Чтобы из этого множества решений выделить одно частное решение, надо задать дополнительное условие.

Таким условием является *начальное условие* или *условие Коши*:

$$y(x_0) = y_0,\ (x_0, y_0) \in D. \tag{1.5}$$

Здесь x_0, y_0 – заданные числа.

Задача отыскания частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию (1.5), называется *задачей Коши* для этого уравнения.

Геометрически это означает следующее: из множества интегральных кривых ДУ требуется выделить ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ (рис. 1.1).

На вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши отвечает следующая

Теорема 1.1 (достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши). *Пусть функция f(x,y) определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную* $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ *в области D. Тогда существует интервал* $(x_0 - d, x_0 + d)$, *в котором существует единственное решение* $y = j(x)$ *ДУ* $y' = f(x,y)$, *удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$ *(см. рис. 1.1).*

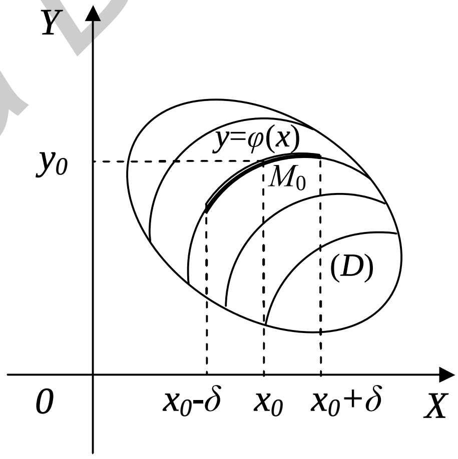


Рис. 1.1

Общим решением $y' = f(x,y)$ в области D существования и единственности решения задачи Коши называется семейство функций вида $y = j(x, C)$, зависящее от параметра C, удовлетворяющее условиям:

1º. Функции $y = j(x, C)$ являются решением уравнения $y' = f(x,y)$ при любом допустимом значении параметра C.

2º. При любом начальном условии $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D$ можно указать параметр $C = C_0$, такой, что $j(x_0, C_0) = y_0$.

Частным решением ДУ $y' = f(x,y)$ называется решение, получаемое из общего решения при конкретном значении параметра C, определяемым условием Коши для этого ДУ.

Решение ДУ $y' = f(x, y)$ вида

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{1.6}$$

называется *общим интегралом* ДУ. При конкретном фиксированном значении $C = C_0$ общий интеграл (1.6) превращается в *частный интеграл* $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

Решение ДУ $y' = f(x, y)$, в каждой точке которого нарушается свойство единственности, называется *особым*.

1.6. Найти область единственности решения ДУ $y' = x\sqrt{1-y^2}$.

Δ Функция $f(x, y) = x\sqrt{1-y^2}$ непрерывна при $|y| \le 1$, а ее частная производная $f'_y = -\dfrac{xy}{\sqrt{1-y^2}}$ ограничена при $|y| \le a < 1$. Значит, данное уравнение имеет единственное решение в любой полосе $|y| \le a$ при $0 < a < 1$, т.е. в полосе $|y| < 1$ плоскости XY. ▲

1.7. Выделить области на плоскости XY единственности решения ДУ:

а) $y' = 2xy + y^2$; б) $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$;

в) $(x-2)y' = \sqrt{y} - x$; г) $y' = 1 + tgy$;

д) $(y - x)y' = y\ln x$;

е) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

Отв.: а) вся плоскость;

б) $y \ne 2x$; в) $x \ne 2, y > 0$;

г) $y \ne \dfrac{p}{2} + kp$, $k \in Z$;

д) $x > 0, y \ne x$; е) $x \ne 0, |y| > |x|$.

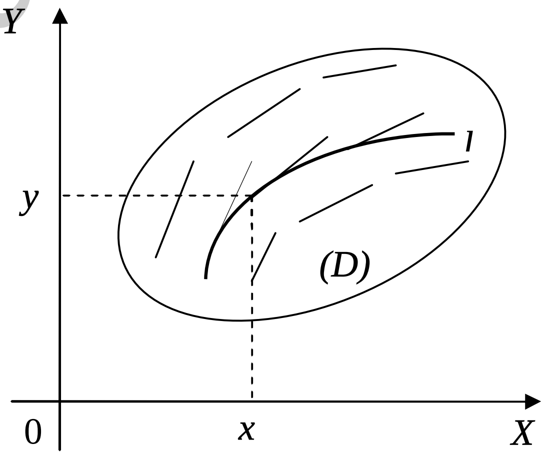


Рис. 1.2

1.8. Показать, что данная функция является общим решением (интегралом) указанного ДУ. Найти частное решение (или частный интеграл) при заданном начальном условии:

а) $y = 2 + C\sqrt{1-x^2}$, $|x| < 1$; $(1-x^2)y' + xy = 2x$, $y(0) = 6$;

б) $y = Ce^{-2x} + \dfrac{e^x}{3}$; $y' + 2y = e^x$, $y(-1) = e$;

в) $(1+x^2)^5(4-y^2)^{-3} = C$; $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy + 5xy^2dx$, $y(0) = \sqrt{3}$.

Δ а) Подставим в решение y ДУ значение $x = 0$, получим $6 = 2 + C \Rightarrow C = 4$, т. е. $y = 2 + 4\sqrt{1-x^2}$ есть искомое частное решение. ▲

Если через каждую точку $(x_0, y_0) \in D$ провести отрезок с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$, содержащий эту точку, то получим *поле направлений* для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, определенного в области D (рис. 1.2).

Поле направлений можно построить, не зная решений дифференциального уравнения.

Из ДУ $y' = f(x, y)$ вытекает, что гладкая кривая l, лежащая в области D, будет интегральной кривой в том и только том случае, если касательная в каждой ее точке совпадает с направлением поля в этой точке. В этом и состоит *геометрический смысл ДУ*. Здесь есть аналогия с силовыми линиями магнитного поля на плоскости и железными опилками, разбросанными на ней.

Изоклиной ДУ $y' = f(x, y)$ называется кривая, в каждой точке которой поле направлений имеет одно и то же (постоянное) направление, т.е. семейство изоклин ДУ $y' = f(x, y)$ определяется равенством $f(x, y) = k = tg\alpha$, где α – заданный угол наклона к оси OX поля направлений в каждой точке (x, y) соответствующей изоклины. Придавая параметру k близкие числовые значения, можно получить сеть изоклин, с помощью которых приближенно строятся интегральные кривые ДУ $y' = f(x, y)$. Поле направлений легче построить с помощью изоклин.

1.9. Методом изоклин построить интегральные кривые ДУ:

а) $y' = (y-1)^2$; б) $y' = x + 1$; в) $y' = \dfrac{y+1}{x-1}$.

Δ а) Полагая $y' = k = const$, получаем, что изоклинами являются прямые $(y-1)^2 = k \geq 0$.

При $k = 0$ $(\alpha = 0°)$ имеем изоклину $y = 1$, которая является интегральной кривой (точнее прямой уравнения); при $k = 1$ – изоклины $y = 2$ $(\alpha = 45°)$ и $y = 0$ $(\alpha = 45°)$. С помощью этих изоклин приближенно строим интегральные кривые данного ДУ (рис. 1.3 – 1.5). ▲

Отв.:

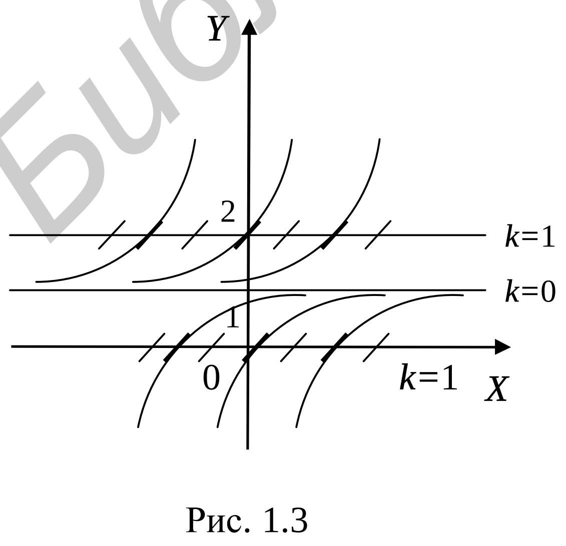


Рис. 1.3

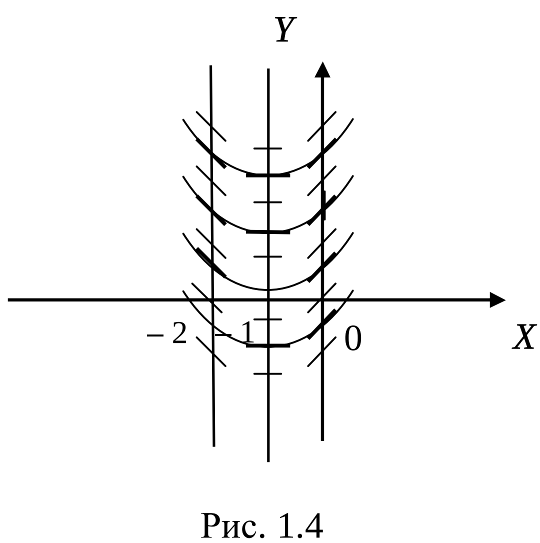


Рис. 1.4

Другим приближенным методом решения ДУ является *метод последовательных приближений (метод Пикара)* задачи Коши:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x, y) \in D, \qquad (1.7)$$

где $f(x,y)$ удовлетворяет в D условиям теоремы 1.1. Пусть $y = y(x)$ – решение ДУ $y' = f(x, y)$ в некоторой окрестности $U_\delta(x)$ точки x_0 при условии $y(x_0) = y_0$. Тогда в этой окрестности $y' = f(x, y(x))$. Интегрируя это тождество по x, получаем

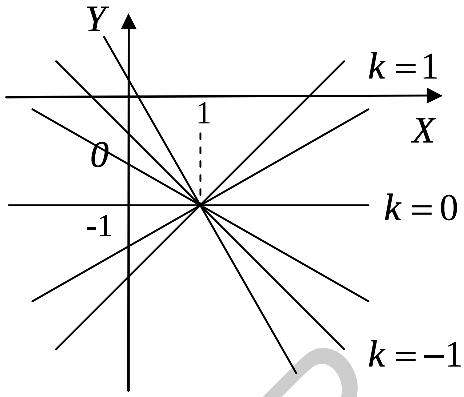


Рис. 1.5

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt + C, \forall x \in U_d(x_0).$$

Так как $y(x_0) = y_0$, то отсюда $C = y_0$, т.е.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \ \forall x \in U_d(x_0) \qquad (1.8)$$

– искомое решение задачи Коши (1.7).

Соотношение (1.8) называется *интегральным уравнением*. Его решение строится методом последовательных приближений по формуле $j(x) = \lim\limits_{n \to 0} j_n(x)$:

$$j_{n+1}(x) = j_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, j_n(t))\,dt, \quad n = 0, 1, \dots, \qquad (1.9)$$

причем за нулевое приближение $y_0 = j_0(t)$ можно взять любую непрерывную в окрестности $U_\delta(x_0)$ функцию, в частности, $y = j_0(t) = const$. Каждое интегрирование в формуле (1.9) улучшает решение ДУ в некоторой окрестности точки x_0.

1.10. Методом последовательных приближений решить задачу Коши:

$$y' = y + 1, \quad y(0) = 1; \quad y = y(x). \qquad (1.10)$$

Δ Эта задача сводится к интегральному уравнению (1.8):

$$y(x) = 1 + \int_0^x (y(t) + 1)\, dt.$$

За нулевое приближение возьмем функцию $j_0(x) = 1$. Согласно (1.9) последовательно находим

$$j_1(x) = 1 + \int_0^x (j_0(t) + 1)dt = 1 + \int_0^x 2dt = 1 + 2x;$$

$$j_2(x) = 1 + \int_0^x ((1 + 2t) + 1)dt = 1 + 2x + x^2;$$

$$j_3(x) = 1 + \int_0^x ((1 + 2t + t^2) + 1)dt = 1 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3};$$

$$j_4(x) = 1 + \int_0^x ((1 + 2t + t^2 + \frac{t^3}{3}) + 1)dt = 1 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} = 2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}) - 1;$$

…………………………………………………………………………………..

$$j_n(x) = 2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}) - 1. \tag{1.11}$$

Замечаем, что выражение в скобках в (1.11) есть многочлен Тейлора порядка n функции e^x. Проверкой убеждаемся, что функция $y = 2e^x - 1$ является решением задачи Коши (1.10). ▲

1.11. В следующих задачах найти три первых последовательных приближения:

а) $y' = x^2 - y^2, \quad y(-1) = 0$; б) $y' = x + y^2, \quad y(0) = 0$;

в) $y' = x + y^2, \quad y(0) = 1$.

Отв.:

а) $y_0(x) = 0,\ y_1(x) = \dfrac{1 + x^3}{3},\ y_2(x) = \dfrac{1}{126}(33 - 14x + 42x^3 - 7x^4 - 2x^7)$;

б) $y_0(x) = 0,\ y_1(x) = \dfrac{x^2}{2},\ y_2(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^5}{20}$;

в) $y_0(x) = 1,\ y_1(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2},\ y_2(x) = 1 + x + x^2 + \dfrac{x^3}{6}$.

1.2. Типы ДУ-1, интегрируемых в квадратурах

ДУ с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. Однородные ДУ-1 и приводящиеся к ним. Линейные ДУ-1 (ЛДУ-1). ДУ Бернулли. ДУ в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Особые решения ДУ. ДУ-1, не разрешенные относительно производной.

ДУ называется *интегрируемым в квадратурах*, если его общее решение или общий интеграл могут быть получены в результате конечной последовательности элементарных действий над известными функциями и интегрирований этих функций. Таких уравнений сравнительно немного. Рассмотрим некоторые из них.

ДУ вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0, \tag{1.12}$$

в котором коэффициенты при дифференциалах представляют собой произведения множителей, каждый из которых зависит только от x или только от y (или является константой), называется *уравнением с разделяющимися переменным.*

Если (a,b) и (c,d) – интервалы, на которых определены функции $M_1(x)$, $M_2(x)$ и $N_1(y)$, $N_2(y)$ соответственно, и $M_1(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, и $N_1(y) \neq 0, \forall y \in (c,d)$, то путем деления обеих частей уравнения (1.12) на произведение $N_1(y) \cdot M_2(x)$ оно приводится к виду

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \qquad (1.13)$$

Равенство (1.13) называется ДУ *с разделенными переменными*. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy = C.$$

В тех точках, где $M_2(x) = 0$ или $N_1(y) = 0$, могут появиться другие решения уравнения (1.12).

1.12. Проинтегрировать уравнение

$$(xy^2 + y^2)\,dx + (x^2 - x^2 y)\,dy = 0. \qquad (1.14)$$

Δ Уравнение преобразуется к виду $y^2(x+1)dx + x^2(1-y)dy = 0$. Разделив обе части этого уравнения на $x^2 y^2$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, придем к уравнению с разделенными переменными $\frac{x+1}{x}dx + \frac{1-y}{y^2}dy = 0$. Интегрируя его, получаем

$$\int \frac{x+1}{x}dx + \int \frac{1-y}{y^2}dy = c \Rightarrow \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \ln|y| = C \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{y}\right| - \frac{x+y}{xy} = C \qquad (1.15)$$

– общий интеграл ДУ (1.14).

Другими решениями, не получающимися из общего интеграла (1.15) ни при каком значении константы *С*, является решение $x = 0$ и решение $y = 0$. ▲

1.13. Решить задачу Коши:

$$x + xy + yy'(1+x) = 0, \ \ y(0) = 0. \qquad (1.16)$$

Δ Разделив переменные в уравнении (1.16), получим

$$\frac{x}{1+x}dx + \frac{y}{1+y}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{xdx}{1+x} + \int \frac{ydy}{1+y} = C \Rightarrow x + y - \ln|(x+1)(y+1)| = C$$

– общий интеграл ДУ (1.16). Из этого общего интеграла и начального условия $y(0) = 0$ находим, что $C = 0$.

Таким образом, соотношение $x + y - \ln|(x+1)(y+x)| = 0$ является частным интегралом ДУ (1.16). ▲

1.14. Катер движется в стоячей воде со скоростью $v_0 = 10$ *км/ч*. На полном ходу двигатель катера был выключен, и через 2 мин скорость катера упала до $v_1 = 0{,}05$ *км/ч*. Определить скорость, с которой двигался катер через 40 с после выключения двигателя, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости $v = v(t)$ движения катера.

Δ По второму закону Ньютона равнодействующая всех сил, действующих на катер, равна $ma = m\dfrac{dv}{dt}$, где m – масса катера, a – ускорение, а v – скорость его движения. При выключенном двигателе на катер действует сила сопротивления воды $F_c = -kv$, где k – коэффициент пропорциональности, направленная против движения катера. Отсюда получаем ДУ движения катера с выключенным двигателем:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv. \tag{1.17}$$

Соотношение (1.17) – ДУ с разделяющимися переменными. Разделив в нем переменные, получим

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{k}{m}dt + \ln C(C>0) \Rightarrow \ln v = \ln C - \frac{k}{m}t \Rightarrow v = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Отсюда и из начального условия $v(0) = 10$ находим, что $C = 10$, т.е. скорость движения катера с выключенным двигателем описывается законом

$$v = 10e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{1.18}$$

Так как при t = 2 мин = (1/30) *ч* скорость $v = v_1 = 0{,}05$ км/ч, то из (1.18) находим: $\dfrac{1}{20} = e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{30}} \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}} = 20^{-30}$, т.е. искомая скорость движения после выключения двигателя описывается уравнением $v = 10\cdot 20^{-30t}$. Отсюда через 40 с $= (1/90)$ ч скорость катера будет равна $v = 10\cdot e^{-30(1/90)} \approx 3{,}7$ км/ч. ▲

1.15. Кривая $y = j\,(x)$ проходит через точку $M_0(1,2)$. Каждая касательная к этой кривой пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. Найти эту кривую.

Δ Пусть (x, y) – произвольная точка на кривой, а X, Y – текущие координаты точек касательной (рис. 1.6).

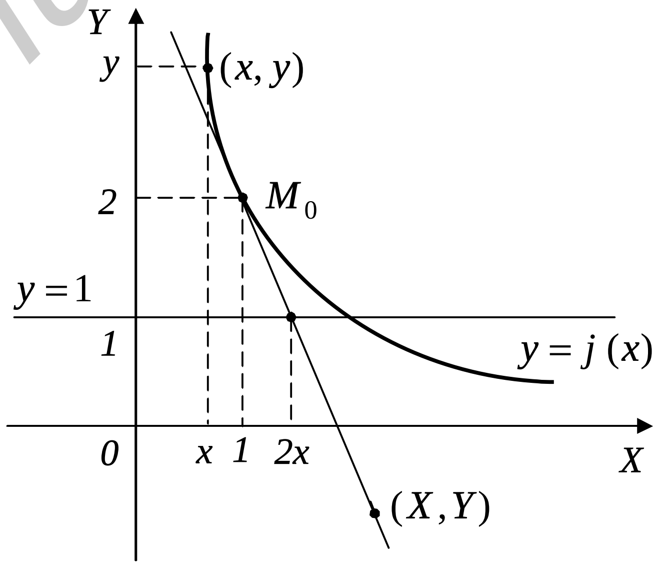


Рис. 1.6

Тогда уравнение касательной, проведенной к этой кривой в точке (x,y), имеет вид

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x). \qquad (1.19)$$

Так как при $Y = 1$ имеем $X = 2x$, то из соотношения (1.19) получаем ДУ, которому удовлетворяет искомая кривая:

$$1 - y = \frac{dy}{dx}(2x - x) \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = 1 - y$$

– ДУ с разделяющимися переменными, разделив которые, получим $y - 1 = C/x$. Из начального условия $y(1) = 2$ получаем $C = 1$, следовательно, искомая кривая $y = 1 + 1/x$. ▲

1.16. Проинтегрировать ДУ:

а) $(1+y^2)dx + xydy = 0$; в) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$;

б) $(1+y^2)dx = xdy$; г) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$.

Отв.: а) $x^2(1+y^2) = C$; б) $y = tg\ln Cx$; в) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$; г) $1 + e^y = C(1+x^2)$.

1.17. Решить задачу Коши:

а) $(1-x)dy - ydx = 0;\ y(0) = 1$; б) $dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0;\ y(1) = p/2$;

в*) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0;\ y(0) = 1$; г) $y'ctgx + y = 2,\ y(0) = -1$.

Отв.: а) $y = 1/(1-x)$; б) $y = \arcsin x$; в) $y = 1, \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$; г) $y = 2 - 3\cos x$.

1.18. Определить, за какое время тело, нагретое до температуры x_0=300º и помещенное в жидкость, температура которой 60º, охладится до 150º, если считать количество жидкости настолько большим, что ее температура остается без изменений. При этом известно, что через 10 мин после начала процесса температура тела равна 200º.

• Скорость охлаждения нагретого тела, согласно закону Ньютона, пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. **Отв.:** 18,5 мин.

1.19. Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 5 м от начала отсчета пути и имела скорость $v_0 = 20$ м/с. Определить пройденный путь и скорость точки через 10 с после начала движения.

Отв. $s = 40$ м, $v = (20/9)$ м/с.

1.20.* Кривая проходит через начало координат и лежит в полуплоскости $y \geq 0$. Каждый прямоугольник, ограниченный осями X и Y и перпендикулярами к этим осям, проведенными из точки кривой, кривая делит на две части, причем площадь части прямоугольника, находящегося под кривой, в два раза меньше площади части прямоугольника, находящегося над кривой.

Найти уравнение кривой.

Отв. $y = Cx^2 (C > 0)$.

1.21. Найти кривую, для которой площадь *S*, ограниченная кривой, осью *X* и двумя ординатами $X = 0$ и $X = x$, является данной функцией от *y*, если $S = a^2 \ln(y/a)$.

Отв. $y = a^2/(a - x)$ (гипербола).

ДУ вида

$$y' = f(ax + by + c), b \neq 0, \tag{1.20}$$

заменой $ax + by + c = u$ сводятся к ДУ с разделяющимися переменными. Здесь $u = u(x)$. Действительно

$$y = (u - ax - c)/b \Rightarrow y' = u'b - a/b$$

и уравнение (1.20) сводится к ДУ

$$\frac{1}{b}u' - \frac{a}{b} = f(u) \Rightarrow \frac{du}{dx} = bf(u) + a,$$

являющемуся уже ДУ с разделяющимися переменными.

1.22. Решить ДУ:

$$y' = (2x + 3y - 5)^2. \tag{1.21}$$

Δ Данное уравнение является ДУ типа (1.20). Вводим замену $2x + 3y - 5 = u \Rightarrow y' = (u' - 2)/3$. В итоге уравнение (1.21) сводится к виду

$$\frac{1}{3}\frac{du}{dx} = \frac{2}{3} + u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3u^2 + 2 \Rightarrow \int \frac{du}{3u^2 + 2} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} arctg \sqrt{\frac{3}{2}} u = x + C.$$

Подставив сюда значение $u = 2x + 3y - 5$, окончательно находим общий интеграл ДУ (1.21) в виде $\frac{1}{\sqrt{6}} arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2x + 3y - 5)\right) = x + C$. ▲

1.23. Решить ДУ:

а) $y' = \sin(x - y)$. **Отв.:** $x + C = ctg\left(\frac{y - x}{2} + \frac{p}{4}\right)$.

б) $y' = (x + y)^2$. **Отв.:** $y = tg(x + C) - x$.

в) $y' - y = 2x - 3$. **Отв.:** $2x + y - 1 = Ce^x$.

г) $(x + 2y)y' = 1; y(0) = -1$. **Отв.:** $x + 2y + 2 = 0$.

д) $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$. **Отв.:** $\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\left(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2\right) = x + C$.

Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией порядка α* относительно *x* и *y*, если при любом допустимом $t \in \boldsymbol{R}$, $t > 0$:

$$f(tx, ty) = t^a f(x, y).$$

При $a = 0$ функция $f(x, y)$ называется *однородной нулевого порядка*. Например, функция $f(x, y) = \frac{\sqrt{3x^2 + 2y^2} - y}{x + y}$ является однородной нулевого порядка, так как

$$f(tx,ty)=\frac{\sqrt{3t^2x^2+2t^2y^2}-ty}{tx+ty}=f(x,y).$$

ДУ

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \qquad (1.22)$$

в котором функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными одного и того же порядка α, называется *однородным ДУ*. В частности, уравнение $y'=f(x,y)$ является однородным, если функция $f(x,y)$ – однородная нулевого порядка.

Умножением обеих частей ДУ (1.22) на $t^a=1/x^a$, $x\neq 0$, это уравнение сводится к виду

$$P_1\left(\frac{y}{x}\right)dx+Q_1\left(\frac{y}{x}\right)dy=0. \qquad (1.23)$$

Подстановка $u=y/x\Rightarrow y=ux,\ u=u(x)$, приводит ДУ (1.23) к уравнению с разделяющимися переменными.

1.24. Проинтегрировать ДУ

$$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0. \qquad (1.24)$$

Δ В этом уравнении функции $P(x,y)=y+\sqrt{x^2+y^2}$ и $Q(x,y)=-x$ – однородные первого порядка. Разделив обе части уравнения (1.24) на $x\neq 0$, получим

$$\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)dx-dy=0. \qquad (1.25)$$

Вводим замену $y=ux,\ dy=udx+xdu$. В итоге уравнение (1.25) приобретает вид $\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)dx-(udx+xdu)=0\Rightarrow\sqrt{1+u^2}dx=xdu$ – ДУ с разделяющимися переменными, разделив которые, получим

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|u+\sqrt{1+u^2}|=\ln|x|+\ln C\Rightarrow u+\sqrt{1+u^2}=Cx.$$

Подставив сюда $u=y/x$, находим общий интеграл ДУ (1.24) в виде

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2. \qquad (1.26)$$

При делении обеих частей уравнения (1.24) на x возможна потеря решения $x=0$. Непосредственная проверка показывает, что уравнение (1.24) имеет решение $x=0$, которое является особым. ▲

Иногда однородное ДУ удобно интегрировать, считая x функцией от y, т.е. $x=x(y)$. Для таких ДУ вводится замена $x=uy,\ u=u(y)\Rightarrow dx=udy+ydu$.

1.25. Решить ДУ

$$\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)y'=y. \qquad (1.27)$$

Δ Данное уравнение – однородное. Считая, что $x=x(y)$, сведем его к виду

$$x+\sqrt{x^2+y^2}=yx',\ \ x'=dx/dy.$$

Разделив обе части полученного уравнения на $y\neq 0$, получим ДУ

$$\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=x'.$$

Заменой $x/y=u=u(y),\ x'=u'y+u,$ оно сводится к виду

$$u+\sqrt{1+u^2}=u'y+u\Rightarrow\sqrt{1+u^2}=\frac{du}{dy}y\Rightarrow\int\frac{du}{\sqrt{1+y^2}}=\int\frac{dy}{y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\ln|y|+\ln|C|,$$

т.е. $u+\sqrt{1+u^2}=Cy.$ Возвращаясь к первоначальным переменным x и y, находим общий интеграл ДУ (1.27) в виде $x+\sqrt{x^2+y^2}=Cy^2$. ▲

1.26. Найти кривые, у которых подкасательная равна сумме абсциссы и ординаты точки касания.

Δ На рис. 1.7 подкасательная к кривой $y=f(x)$ есть длина отрезка AB. Пусть (x,y) – произвольная точка кривой, в которой проведена касательная. Если X,Y – текущие координаты касательной, то ее уравнение есть

$$Y-y=y'(X-x).$$

Отсюда при $Y=0$ получаем абсциссу точки B, равную $X=x-y/y'$. Следовательно, длина подкасательной $|AB|=|X-x|=\left|\frac{y}{y'}\right|$, и по условию задачи составляем ДУ

$$\frac{y}{y'}=x+y,$$

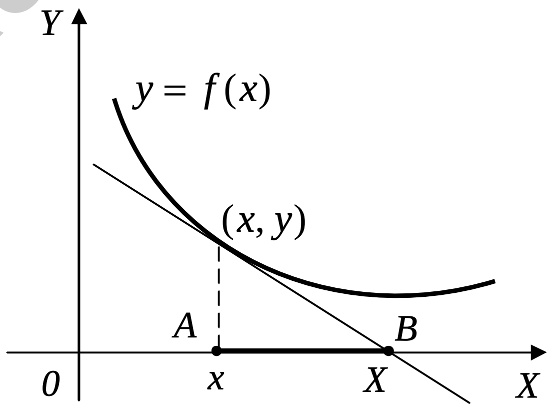


Рис. 1.7

или в дифференциалах

$$ydx=(x+y)\ dy. \tag{1.28}$$

В этом уравнении удобнее сделать замену $x=uy$. Тогда $dx=ydu+udy$, и уравнение (1.28) принимает вид

$$ydu=dy\Rightarrow du=dy/y\Rightarrow u=\ln y+\ln C,$$

т.е. с учетом замены $u=x/y,\ y=Ce^{x/y}$ – уравнение искомой кривой. ▲

1.27. Проинтегрировать ДУ:

а) $y'=\dfrac{xy+y^2e^{-x/y}}{x^2}$; б) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$;

в) $\left(xye^{x/y}+y^2\right)dx-x^2e^{x/y}dy=0$; г) $y'=\dfrac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$;

д) $3y\sin(3x/y)\,dx+(y-3x)\sin(3x/y)\,dy=0$.

Отв.: а) $e^{x/y}+\ln|x|=C$; б) $\ln|x|+\sin\dfrac{y}{x}=C$; в) $e^{x/y}+\ln|x|=C$;

г) $y=xe^{Cx}$; д) $\ln|y|-\cos\dfrac{3x}{y}=C$.

1.28. Решить задачу Коши:

а) $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$; $y(1)=0$. б*) $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$; $y(1)=1$.

в) $y'=e^{-x/y}+y/x$; $y(1)=0$. г) $(x+2y)dx-xdy=0$; $y(1)=0$.

Отв.: а) $y=x^2/2-1/2$; б) $y=xe^{1-x}$; в) $y=x\ln(1+\ln x)\ (x>1/e)$; г) $y=x^2-x$.

1.29. Найти кривую, для которой треугольник, образованный осью Y, радиусом-вектором точки касания и касательной в этой точке – равнобедренный.

Отв.: $y'=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$, $x^2+y^2-Cx=0$; $y'=-y/x, y=C/x(C\neq 0)$;

$xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$, $y=-x^2/2C+C/2(C<0)$; $xy'=y-\sqrt{x^2+y^2}$,

$y=-x^2/2C+C/2(C>0)$.

1.30. Найти кривую, подкасательная которой есть среднее арифметическое координат точки касания.

Отв.: $y/y'=(x+y)/2$, $(x-y)^2-Cy=0$.

1.31. Найти кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси Y, к отрезку, отсекаемому нормалью на оси X, есть величина, равная K.

Отв.: $\dfrac{y-xy'}{yy'+x}=K$, $\sqrt{x^2+y^2}=C\exp\left(-\dfrac{1}{K}arctg\dfrac{y}{x}\right)$.

1.32. Найти кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого нормалью на оси X, к длине радиуса-вектора точки касания, есть величина постоянная, равная K.

Отв. $\dfrac{yy'+x}{\sqrt{x^2+y^2}}=K, \sqrt{x^2+y^2}=Kx+C$.

К однородным ДУ сводятся уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{1.29}$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – постоянные, а $f(u)$ – непрерывная функция своего аргумента u.

Для сведения ДУ (1.29) к однородному вводятся новые переменные t и s вместо x и y по формулам

$$x = t + a\,, y = s + b\,, \tag{1.30}$$

где a и b – пока неизвестные числа.

Так как $y' = dy/dx = ds/dt,$ то заменой (1.30) ДУ (1.29) сводится к виду

$$\frac{ds}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 s + a_1 a + b_1 b + c_1}{a_2 t + b_2 s + a_2 a + b_2 b + c_2}\right). \tag{1.31}$$

ДУ (1.31) становится однородным, если a и b являются решениями системы

$$\left.\begin{aligned} a_1 a + b_1 b + c_1 = 0; \\ a_2 a + b_2 b + c_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

Если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$ то система (1.32) имеет единственное решение a и b, при котором уравнение (1.31) становится однородным вида

$$\frac{ds}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 s}{a_2 t + b_2 s}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \dfrac{s}{t}}{a_2 + b_2 \dfrac{s}{t}}\right) = f_1\left(\frac{s}{t}\right).$$

Заменой $s/t = u,\ u = u(t),$ оно сводится к ДУ с разделяющимися переменными.

В случае $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ заменой $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = k$ ДУ (1.29) приводится к виду

$$y' = f\left(\frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_1}{(a_2 x + b_2 y) + c_2}\right) = f(a_2 x + b_2 y).$$

Подстановка $a_2 x + b_2 y = u,\ u = u(x)$ это уравнение сводит к ДУ с разделяющимися переменными.

И, наконец, если $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2 = k,$ то правая часть исходного уравнения (1.29) равна $f(k)$, т.е. в этом случае $y' = f(k) \Rightarrow y = f(k) \cdot x + C.$

1.33. Решить ДУ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{-x + y + 1}. \tag{1.33}$$

Δ Вводим замену $x = t + a\,,\ y = s + b\,.$ Тогда

$$\frac{ds}{dt} = \frac{t + s + (a + b - 3)}{-t + s + (b - a + 1)}.$$

Составляем систему (1.32):

$$\left.\begin{aligned} a+b-3=0,\\ -a+b+1=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=2,\\ b=1. \end{cases}$$

Таким образом, $x=t+2$, $y=s+1$ и исходное уравнение (1.33) принимает вид

$$\frac{ds}{dt}=\frac{t+s}{-t+s}=\frac{1+s/t}{-1+s/t}. \qquad (1.34)$$

Вводим замену $s/t=u=u(t)\Rightarrow \dfrac{ds}{dt}=t\dfrac{du}{dt}+u.$

Тогда из ДУ (1.34) получим

$$t\frac{du}{dt}+u=\frac{1+u}{-1+u}\Rightarrow \frac{du}{dt}=\frac{1+2u-u^2}{u-1}\Rightarrow \int\frac{(u-1)du}{1+2-u^2}=\frac{dt}{t}\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1+2u-u^2\right|=$$

$$=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|C|\Rightarrow t^2\left(1+2u-u^2\right)=C.$$

Подставив сюда $u=s/t$, получим $t^2+2st-s^2=C$. Возвращаясь к переменным x и y $(t=x-2, s=y-1)$, находим общий интеграл ДУ (1.33) в виде $(x-2)^2+2(x-2)(y-1)-(y-1)^2=C$. ▲

1.34. Решить следующие ДУ:

а) $(3y-7x+7)\,dx-(3x-7y-3)\,dy=0$; б) $(x+y-2)dx+(x-y+4)dy=0$;

в) $2x+3y-5+(3x+2y-5)y'=0$; г) $(x-2y-1)\,dx+(3x-6y+2)\,dy=0$.

Отв.: а) $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$; б) $y^2-2xy-x^2-8y+4x=C$;
в) $y^2+3xy+x^2-5x-5y=C$; г) $x+3y-\ln|x-2y|=C$.

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка (ЛДУ-1) называется уравнение

$$y'+p(x)y=f(x), \qquad (1.35)$$

линейное относительно неизвестной функции y и y'. Здесь $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные на (a,b) функции. Если $f(x)\equiv 0$, $\forall x\in(a,b)$, то уравнение

$$y'+p(x)y=0 \qquad (1.36)$$

называется *однородным* ЛДУ-1; при $f(x)\neq 0$ ДУ (1.35) называется *неоднородным*.

Существует несколько методов интегрирования ЛДУ-1 в квадратурах: метод подстановки (Бернулли), метод вариации произвольной постоянной (Лагранжа), метод интегрирующего множителя.

Метод подстановки (метод Бернулли). В соответствии с этим методом решение ЛДУ (1.35) ищется в виде

$$y=u(x)v(x), \qquad (1.37)$$

где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – некоторые неизвестные, непрерывно дифференцируемые на (a,b) функции. Так как $y'=u'v+v'u,$ то после подстановки y из (1.37) и y' в уравнение (1.35) получим

$$uv' + v[u' + p(x)\,u] = f(x). \tag{1.38}$$

Определяя $u(x)$ из условия $u' + p(x)\,u = 0$, найдем затем из (1.38) функцию $v(x)$, а следовательно, и решение $y = uv$ ДУ (1.35). В качестве $u(x)$ можно взять любое частное решение уравнения $u' + p(x)\,u = 0$, $u \neq 0$.

1.35. Решить задачу Коши:

$$x(x-1)y' + y = x^2(2x-1),\ y(2) = 4. \tag{1.39}$$

Δ Общее решение ДУ (1.39) ищем в виде $y = uv$, $y' = u'v + v'u$. Подставляя y и y' в (1.39), получаем

$$x(x-1)(u'v + v'u) + uv = x^2(2x-1) \Rightarrow x(x-1)vu' + [x(x-1)v' + v]\,u = x^2(2x-1). \tag{1.40}$$

Функцию $v = v(x)$ находим из условия $x(x-1)v' + v = 0$ – ДУ с разделяющимися переменными. Беря любое его частное решение, например, $v = x/(x-1)$, и подставляя его в (1.40), получаем

$$u' = 2x - 1 \Rightarrow u(x) = x^2 - x + C.$$

Следовательно, общее решение ДУ (1.39) есть

$$y = uv = (x^2 - x + C)\frac{x}{x-1} \Rightarrow y = \frac{Cx}{x-1} + x^2.$$

Используя начальное условие $y(2) = 4$ для нахождения C, получаем

$$4 = C\frac{2}{2-1} + 2^2 \Rightarrow C = 0.$$

Таким образом, решением задачи Коши (1.39) является $y = x^2$. ▲

1.36. Площадь треугольника, образованного радиусом-вектором $\vec{r}$ любой точки $M = (x, y)$ кривой, касательной в этой точке, и осью абсцисс, равна 2 (рис. 1.8). Найти уравнение кривой, если она проходит через точку $(2, -2)$.

Δ Основанием ΔOMA является отрезок OA, отсекаемый касательной на оси *X*. Аналогично задаче 1.25 для этого отрезка его величина $X = x - y\dfrac{dy}{dx}$. Так как высота ΔOMA равна y, то его площадь равна

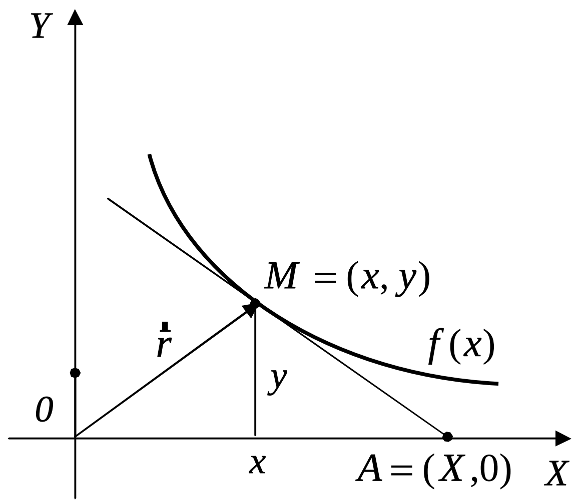


Рис. 1.8

$$s = \frac{1}{2}|OA| \cdot y = \frac{1}{2}\left(x - y\frac{dy}{dx}\right)y = 2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{4}{y^2} \tag{1.41}$$

– ЛДУ-1, если в этом уравнении считать x функцией от y, т.е. $x = x(y)$ (уравнения такого типа иногда называют *«перевернутыми»* ЛДУ-1). Ищем его решение в виде $x = uv$, $u = u(y)$, $v = v(y) \Rightarrow x' = \dfrac{dx}{dy} = u'v + v'u$. Подставив x и x' в ДУ (1.41), получим

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = -\frac{4}{y^2}. \tag{1.42}$$

В качестве функции v берем частное решение ДУ $\dfrac{dv}{dy} - \dfrac{v}{y} = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dy}{y}$, т.е. $v = y$. Подставив $v = y$ в уравнение (1.42), будем иметь

$$\frac{du}{dy} \cdot y = -\frac{4}{y^2} \Rightarrow \int du = -4\int \frac{dy}{y^3} \Rightarrow u = \frac{2}{y^2} + C,$$

и, значит, общим решением ДУ (1.41) является функция $x = u \cdot v = Cy + \dfrac{2}{y}$. Из начального условия $y(2) = -2$, отсюда находим $C = -3/2$. Следовательно, уравнение искомой кривой есть $3y^2 + 2xy - 4 = 0$. ▲

По *методу вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)* сначала находится общее решение y^o однородного ЛДУ (1.36), соответствующего уравнению (1.35). Разделив в (1.36) переменные, получим

$$y^o = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{1.43}$$

Общее же решение неоднородного ЛДУ (1.35) ищется в виде

$$y = C(x)\, e^{-\int p(x)dx}, \tag{1.44}$$

где $C(x)$ – новая неизвестная функция от x, которая находится подстановкой (1.44) в исходное уравнение (1.35).

1.37. Решить задачу Коши:

$$y' - y/x = -2/x^2,\ y(1) = 1. \tag{1.45}$$

Δ Применим метод Лагранжа. Сначала находим общее решение y^o уравнения $y' - y/x = 0$. По формуле (1.43) получаем

$$y^o = Ce^{\int dx/x} = Ce^{\ln x} = Cx.$$

Общее решение неоднородного ЛДУ (1.45) ищем в виде $y = C(x) \cdot x$. Подставляя его и $y' = C'(x)x + C(x)$ в уравнение (1.45), получаем

$$xC'(x) + C(x) - C(x) = -2/x^2 \Rightarrow C'(x) = -2/x^3,$$

т.е.

$$C(x) = -\int \frac{2dx}{x^3} = \frac{1}{x^2} + C.$$

Таким образом, общее решение ЛДУ (1.45) имеет вид $y = C(x) \cdot x = Cx + 1/x$, где C – произвольная постоянная. Из начального условия $y(1)=1$ имеем $C+1=1 \Rightarrow C=0$, т.е. искомым решением задачи Коши (1.45) является функция $y=1/x$. ▲

Если ЛДУ-1 является «перевернутым» т.е. уравнением вида

$$x'+p(y)\,x=f(y),\; x=x(y), \tag{1.46}$$

то в этом случае сначала ищется решение x^o соответствующего однородного ДУ $x'+p(y)\,x=0$. Оно имеет вид

$$x^o=Ce^{\int -p(y)dy}.$$

Общее же решение ДУ (1.46) ищется в виде

$$x=C(y)\,e^{\int -p(y)xdy}.$$

1.38. Решить ДУ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}.$$

Δ Данное уравнение легко сводится к уравнению (1.46):

$$\frac{dx}{dy}-\cos y\cdot x=\sin 2y. \tag{1.47}$$

Находим $x=Ce^{\int \cos y dy}=Ce^{\sin y}$. Общее решение уравнения (1.47) ищем в виде

$$x=C(y)\,e^{\sin y}, \tag{1.48}$$

где $C(y)$ – неизвестная функция от y. Подставляя (1.48) в (1.47), получаем

$$C'(y)\,e^{\sin y}+C(y)\,e^{\sin y}\cos y-C(y)\,e^{\sin y}\cos y=\sin 2y \Rightarrow C'=e^{-\sin y}\cdot\sin 2y.$$

Отсюда, интегрируя по частям, будем иметь

$$C(y)=\int e^{-\sin y}\cdot\sin 2y dy=2\int e^{-\sin y}d\left(-e^{-\sin y}\right)=2\left(-\sin y e^{-\sin y}+\int e^{-\sin y}\cos y dy\right)=$$
$$=2\left(-\sin y\cdot e^{-\sin y}-e^{-\sin y}\right)+C.$$

Итак, $C(y)=-2e^{-\sin y}(1+\sin y)+C$.

Подставляя $C(y)$ в (1.48), получаем общее решение ДУ (1.47), а значит, и данного уравнения:

$$x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y).\ ▲$$

Суть *метода интегрирующего множителя* состоит в следующем. Обе части ЛДУ (1.35) умножаются на *интегрирующий множитель*

$$m(x)=e^{\int p(x)dx}, \tag{1.49}$$

после чего левая часть ДУ становится производной функции $m(x)\cdot y$, и исходное уравнение превращается в ДУ

$$(m(x)\cdot y)'=m(x)\cdot f(x), \tag{1.50}$$

которое легко решается интегрированием.

Если же ЛДУ – «перевернутое» вида (1.46), то его интегрирующий множитель

$$m(y) = e^{\int p(y)dy}, \tag{1.51}$$

после умножения на который обеих частей уравнения (1.46) уравнение превращается в ДУ

$$(m(y)x)'_y = m(y)f(y). \tag{1.52}$$

1.39. Методом интегрирующего множителя решить задачу Коши

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2,\ y(1) = 3. \tag{1.53}$$

Δ Имеем: $p(x) = -2x(1+x^2)$, $f(x) = 1 + x^2$. По формуле (1.49) интегрирующий множитель

$$m(x) = e^{-\int\frac{2xdx}{1+x^2}} = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Тогда по формуле (1.50) получим

$$\left(\frac{1}{1+x^2}y\right)' = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}y = x + C,$$

т.е. $y = (x + C)(1 + x^2)$ – общее решение ДУ (1.53). Из начального условия $(y) = 1$ находим $C = 1/2$, т.е. решением задачи Коши (1.53) является функция $y = (x + 1/2)(1 + x^2)$. ▲

1.40. Проинтегрировать уравнение

$$(2\ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy. \tag{1.54}$$

Δ Уравнение легко сводится к виду

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = \frac{2\ln y - \ln^2 y}{y}. \tag{1.55}$$

Согласно формуле (1.51), интегрирующий множитель ДУ (1.55)

$$m(y) = e^{-\int p(y)\,dy} = e^{-\int dy/y} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}.$$

Отсюда по формуле (1.52) имеем

$$\left(x \cdot \frac{1}{y}\right)'_y = \frac{2\ln y - \ln^2 y}{y^2} = \left(\frac{\ln^2 y}{y}\right)'_y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\ln^2 y}{y} + C.$$

Отсюда следует, что общим интегралом уравнения (1.54) является $x = \ln^2 y + Cy$. ▲

1.41. Капля с начальной массой *M г*, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и ежесекундно теряет массу *m г*. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости $v = v(t)$ движения капли. Найти зависимость скорости движения капли от времени, прошедшего с начала падения капли, если в начальный момент времени скорость капли равна нулю (принять, что коэффициент пропорциональности $k \neq m$).

Δ Так как капля испаряется равномерно, то ее масса в момент t равна $M-mt$, а сила ее тяжести – $(M-mt)g$, где g – ускорение свободного падения. По условию сила сопротивления равна $(-kv)$, поскольку эта сила направлена против движения капли. Равнодействующая F всех сил, приложенных к капле, равна

$$F=(M-mt)g-kv.$$

Применив второй закон Ньютона, получим

$$(M-mt)\frac{dv}{dt}=(M-mt)g-kv\Rightarrow\frac{dv}{dt}+\frac{k}{M-mt}v-g=0. \quad (1.56)$$

Соотношение (1.56) и есть искомое ДУ задачи. Оно является ЛДУ-1 относительно неизвестной функции $v=v(t)$. Решая его методом Бернулли подстановкой $v=u\cdot w$, $u=u(t)$, $w=w(t)$, находим

$$w=(M-mt)^{k/m}$$

и, значит,

$$u=\int g(M-mt)^{-k/m}\,dt=\frac{\frac{g}{m}(M-mt)^{-k/m+1}}{\frac{k}{m}-1}+C.$$

Отсюда

$$v=u\cdot w=\frac{g(M-mt)}{k-m}+C(M-mt)^{k/m}. \quad (1.57)$$

Из начального условия $v(0)=0$ и из (1.57) находим

$$0=\frac{gM}{k-m}+C\cdot M^{k/m}\Rightarrow C=\frac{gM\cdot M^{-k/m}}{m-k}=\frac{gM^{1-k/m}}{m-k}.$$

Таким образом, из (1.57) получаем искомую зависимость скорости v падающей капли от времени t:

$$v=\frac{g}{m-k}\left[mt-M+M\left(1-\frac{m}{M}t\right)^{k/m}\right].\ \blacktriangle$$

1.42. Решить следующие ЛДУ-1:

а) $y'-y=e^x$;

б) $y'-\frac{a}{x}y=\frac{x+1}{x}$;

в) $y'+\frac{4xy}{x^2+1}=\frac{1}{x^2+1}$;

г) $y'=x+y$;

д) $y'=a+bx+cy$;

е) $y'+x^2y=x^2$;

ж) $dy-e^{-x}dx+ydx-xdy=xydx$;

з) $y'+\frac{y}{1+x}+x^2=0$;

и) $dy+bydx=axdy$;

к) $dx+\left(x+y^2\right)dy=0$;

л) $y'=a\sin x+by$;

м) $xy'+y=3$; н) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

Отв.: а) $y=(x+C)\,e^{x}$; б) $y=\dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}+Cx^{a}$;

в) $y=\dfrac{x^3/3+x+C}{\left(x^2+1\right)^2}$; г) $y=Ce^{x}-x-1$;

д) $y=Ce^{cx}-\dfrac{b}{c}x-\dfrac{ac+b}{c^2}$; е) $y=1+Ce^{-x^3/3}$;

ж) $y=Ce^{-x}-e^{-x}\ln(x-1)$; з) $y=\dfrac{C-x^3/3-x^4/4}{1+x}$;

и) $y=C(ax-1)^{b/a}$; к) $x=2y-y^2-2+Ce^{-y}$;

л) $y=Ce^{bx}-\dfrac{ab\sin x+a\cos x}{1+b^2}$; м) $y=3+c/x$;

н) $y=e^{-x^2}\left(x^2+C\right)$.

1.43. Решить задачу Коши.

а) $ydx+(2x-2\sin^2 y-y\sin 2y)\,dy=0$; $y(3/2)=p/4$;

б) $2\left(y^3-y+xy\right)dy=dx$; $y(-2)=0$;

в) $\left(2y+xtgy-y^2tgy\right)dy=dx$; $y(0)=p$;

г) $4y^2dx+\left(e^{1/2y}+x\right)dy=0$; $y(e)=1/2$;

д) $dx+\left(2x+\sin 2y-2\cos^2 y\right)dy=0$; $y(-1)=0$.

Отв.: а) $x=p^2/(16y^2)+\sin^2 y$; б) $x=-2e^{y^2}-y^2$;
в) $x=p^2/\cos y+y^2$; г) $x=e^{1/2y}$; д) $x=\cos^2 y-2e^{-2y}$.

1.44. Найти кривую, проходящую через точку (1,1), у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси Y, равен абсциссе точки касания.

Отв. $y=x-\ln x$.

1.45. Найти кривую, каждая касательная которой пересекает прямую $y=1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

Отв. $y=C/x+1$.

1.46*. Найти кривую, касательная к которой в точке (x, y) проходит через точку (x^2, y^2).

Отв. $y=\dfrac{x^2}{2x-1+C(x-1)^2}$.

1.47. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $A=(a, a)$ и обладающей свойствами: если в любой ее точке $M=(x,y)$ с ординатой *PM* провести касательную до пересечения с осью *Y* в точке *B*, то площадь трапеции *OBMP* есть величина постоянная, равная a^2 (рис. 1.9).

Отв. $2a^2/3x+x^2/3a=y$.

1.48*. Найти такую кривую *AM* (рис. 1.10), для которой абсцисса x_c центра тяжести *C* площади *OAMP* была бы равна $3/4$ абсциссы точки *M*. ● Если $M=(x,y)$, а уравнение кривой *AM* есть $y=y(x)$, то

$$x_c=\left(\int_0^x xy\,dx\right)\Big/\left(\int_0^x y\,dx\right).$$

Отв. $y=Cx^2$.

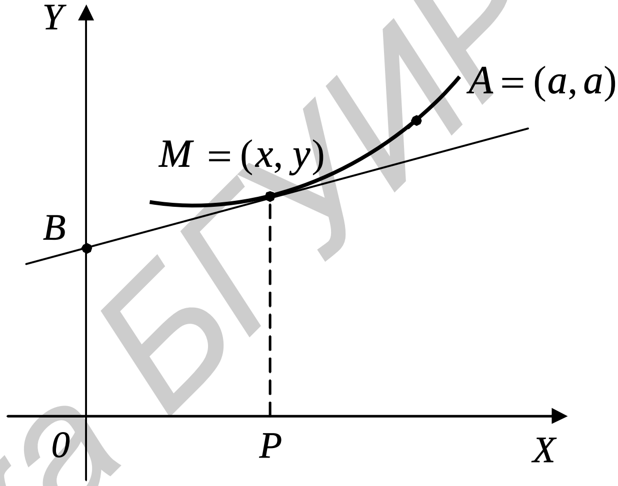


Рис. 1.9

1.49. Конденсатор емкостью Q включается в цепь с напряжением *E* и сопротивлением *R*. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Отв.: $R\dfrac{dq}{dt}=E-\dfrac{q}{Q}$; $q=QE\left(1-e^{-t/QR}\right)$.

1.50. На точку массой m, движущейся прямолинейно, действует сила, пропорциональная времени (коэффициент пропорциональности k_1). Кроме того, точка испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности k_2). Найти зависимость скорости от времени, считая, что в начальный момент времени скорость равна нулю.

Отв.: $m\dfrac{dv}{dt}=k_1t-k_2v$, $v(0)=0$;

$$v=\frac{k_1}{k_2}\left(t-\frac{m}{k_2}+\frac{m}{k_2}e^{-k_2t/m}\right).$$

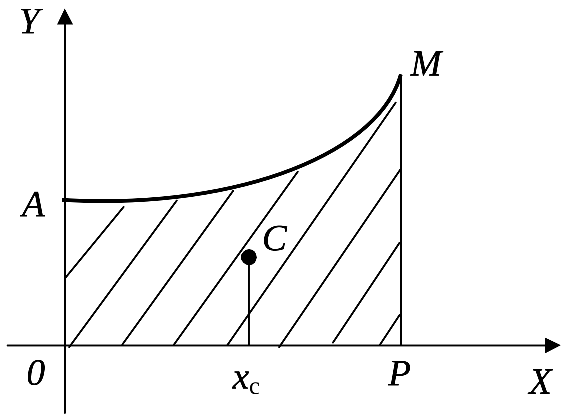


Рис. 1.10

1.51. Найти закон изменения температуры *T* охлаждающегося тела массой m и теплоемкостью *c*. Температура окружающей среды t, причем $T>t$. Когда температура окружающей среды $t=0$, температура тела равна T_1. ● Количество теплоты Q, отдаваемое телом массой m, есть $Q=mc(T-t)$.

Отв.: $T=t+(T_1-t)\,e^{-kt/mc}$.

1.52. В цепи поддерживается напряжение E = 300 В. Сопротивление цепи R=150 Ом. Коэффициент самоиндукции L=30 Гн. За какое время с момента замыкания цепи возникающий в ней ток i достигнет 99 % своей предельной величины? ● Предельное значение i есть $I = E/R$.

Отв. $t = \dfrac{R}{L}\ln\dfrac{E}{E - iR}$; $t = (2/5)\ln 10 \approx 0{,}92$ с.

К ЛДУ-1 сводятся *уравнения Бернулли*:

$$y' + p(x)y = f(x)y^a,\ a \in \boldsymbol{R};\ a \neq 0,\ a \neq 1. \qquad (1.58)$$

Разделив в этом уравнении обе части на y^a, $y \neq 0$ (при $a > 0$ решением уравнения Бернулли является, очевидно, функция $y = 0$), получим

$$y^{-a}\,y' + p(x)y^{1-a} = f(x).$$

Заменой $y^{1-a} = z$, $z = z(x)$, это уравнение сводится к ЛДУ

$$\frac{1}{1-a}z' + p(x)\,z = f(x), \qquad (1.59)$$

решение которого может быть найдено одним из трех выше рассмотренных методов решения ЛДУ.

1.53. Решить ДУ

$$y' - 2ye^x = 2e^x \cdot \sqrt{y}. \qquad (1.60)$$

Δ Это уравнение Бернулли при $a = 1/2$. Разделив обе его части на $y^{1/2}$, получим $y^{-1/2}y' - 2e^x y^{1/2} = 2e^x$. Вводим замену $y^{1/2} = z \Rightarrow \dfrac{1}{2}y^{-1/2}\cdot y' = z'$, т.е. $y^{-1/2}y' = 2z' \Rightarrow z' - e^x z = e^x$ – ЛДУ-1.

Интегрирующий множитель этого уравнения $m(x) = e^{-\int e^x dx} = e^{-e^x}$. Отсюда, согласно формуле (1.50), получим

$$\left(z\cdot e^{-e^x}\right)' = e^x\cdot e^{-e^x} = -\left(e^{-e^x}\right)' \Rightarrow ze^{-e^x} = C - e^{-e^x} \Rightarrow z = Ce^{e^x} - 1.$$

Возвращаясь к первоначальной функции y, получаем общий интеграл уравнения Бернулли (1.60) в виде $\sqrt{y} + 1 - Ce^{e^x} = 0$. ▲

1.54. Найти уравнения кривых, у которых касательная, проведенная в любой точке M, отсекает на оси Y отрезок, равный квадрату ординаты точки касания.

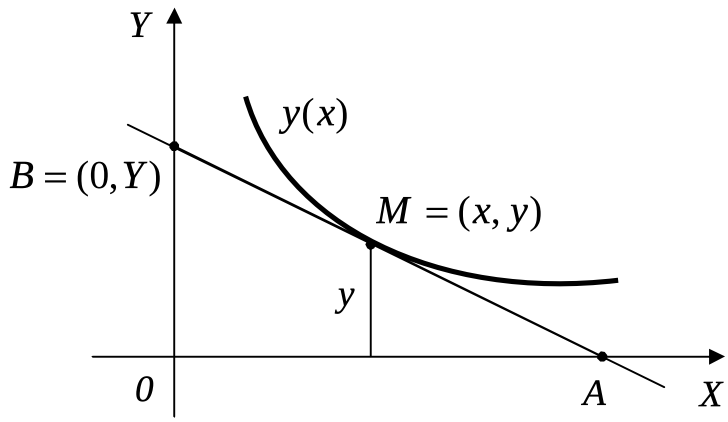


Рис. 1.11

Δ Пусть $y = y(x)$ – искомая кривая (рис. 1.11). Уравнение касательной в произвольной ее точке $M = (x, y)$ имеет вид $Y - y = y'(X - x)$, где X, Y – текущие координаты касательной. Отсюда при

$X = 0$ получаем $Y = y - xy'$ – ордината точки B пересечения касательной с осью *Y*. Согласно условию задачи имеем

$$y^2 = y - xy' \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x}y^2$$

– ДУ Бернулли. Разделим обе его части на y^2:

$$y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x} = \left|y^{-1} = z, -y^{-2}y' = z'\right| \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}. \qquad (1.61)$$

Интегрирующий множитель ЛДУ (1.61) $m = e^{\int dx/x} = x$. По формуле (1.50) из (1.61) получим

$$\left(xz(x)\right)' = 1 \Rightarrow z(x) = 1 + \frac{C}{x} = y^{-1} \Rightarrow y = x/(x + C)$$

– искомые кривые, удовлетворяющие условиям задачи. ▲

1.55. Проинтегрировать уравнение:

а) $y' + 2xy = 4x^3 2y^3$; б) $xy' + y = y^2 \ln x$; $y(1) = 1$;

в) $3y^2 y' + y^3 + x = 0$; г) $y' - 9x^2 y = \left(x^5 + x^2\right)y^{2/3}$; $y(0) = 0$;

д) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2 \cos x + a \sin 2y}$.

Отв.: а) $y^{-2} = Ce^{2x^2} + x^2 + 1/2$; б) $1/y = Cx + \ln x + 1$; $1/y = \ln x + 1$;

в) $y^3 = Ce^{-x} - x + 1$; г) $y = \left(Ce^{x^3} - x^3 9 - 2/9\right)^3$; $y = 0$;

$y = \left(2e^{x^3}/9 - x^3/9 - 2/9\right)^3$. д) $x^2 = Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1)$.

1.56*. Составить уравнение кривой, проходящей через начало координат, зная, что середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси *X* находится на параболе $y = ax^2$. **Отв.:** $y^2 = 4ax + 4a^2\left(1 - e^{-x/a}\right)$.

1.57. Найти кривую, в каждой точке которой поднормаль есть среднее арифметическое квадратов координат этой точки.

Отв.: $yy' = \left(x^2 + y^2\right)/2$; $y^2 = Ce^x - x^2 - 2x - 2 (C > 0)$.

1.58. Определить кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси *X*, равен y^2/x. **Отв.:** $yy' + x = y^2/x$; $y^2 = 2x^2(C - \ln|x|)$.

1.59. Среднее геометрическое координат точки касания равно отношению отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к удвоенной ординате точки касания. Найти уравнение кривой, если она проходит через точку (1, 1).

Отв.: $xy = 1$ и $x - y(x - 2)^2 = 0$.

ДУ вида

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (1.62)$$

называется *дифференциальным уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет полный дифференциал некоторой функции $u = u(x, y)$, т.е.

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy .$$

В этом случае уравнение (1.62) можно записать в виде $du(x, y) = 0$, откуда следует, что соотношение $u(x, y) = C$ является общим интегралом ДУ (1.62).

В части 5 настоящего «Сборника» показано, что если в односвязной области D существуют непрерывные частные производные $\partial P/\partial y$ и $\partial Q/\partial x$, то для того чтобы выражение $Pdx + Qdy$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось условие

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{1.63}$$

1.60. Решить ДУ:

$$\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0.$$

Δ В этом уравнении $P(x, y) = xy^2 + x / y^2$, $Q(x, y) = x^2 y - x^2 / y^3$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - \dfrac{2x}{y^3}$. Следовательно, это уравнение является ДУ в полных дифференциалах. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= P(x, y) = x^2 y + \frac{x}{y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= Q(x, y) = x^2 y - \frac{x^2}{y^3}. \end{aligned}\right\} \tag{1.64}$$

Из первого равенства этой системы получаем

$$u = \int \left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx = \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^2}{2y^2} + j\,(y),$$

где $j\,(y)$ – произвольная дифференцируемая функция от y. Отсюда и из второго равенства (1.64) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y - \frac{x^2}{y^3} + j\,'(y) = x^2 y - \frac{x^2}{y^3},$$

т. е. $j\,'(y) = 0$ или $j\,(y) = C*$, где $C*$ – произвольная постоянная.

Итак, функция $u(x, y) = x^2 y^2 / 2 + x^2 / 2y^2 + C*$.

Тогда общим интегралом ДУ (1.64) является $x^2 y^2 / 2 + x^2 / 2y^2 = C$. ▲

1.61. Решить задачу Коши:

$$\frac{y}{x}dx+\left(y^3+\ln x\right)dy=0;\ \ y(1)=2. \qquad (1.65)$$

Δ Нетрудно проверить, что условие (1.63) для функций $P(x,y)=y/x$ и $Q(x,y)=y^3+\ln x$ здесь выполнено, т.е. ДУ (1.65) есть уравнение в полных дифференциалах. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=\frac{y}{x}\Rightarrow u(x,y)=\int\frac{y}{x}dx+j\,(y)=y\ln x+j\,(y). \qquad (1.66)$$

Подставив (1.66) в равенство

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=y^3\ln x,$$

получим $\ln x+j\,'(y)=y^3+\ln x\Rightarrow j\,(y)=y^4/4+C^*$.

Значит, $u=y\ln x+y^4/4+C^*$. Тогда общим интегралом ДУ (1.65) является

$$u(x,y)=y\ln x+y^4/4=C. \qquad (1.67)$$

Из начального условия $y(1)=2$ и (1.67) получаем $C=4$.

Итак, частным интегралом задачи Коши (1.65) является $y\ln x+y^4/4=4$. ▲

1.62. Проверить, являются ли данные уравнения ДУ в полных дифференциалах и решить их:

а) $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$; б) $\left(1+y^2/x^2\right)dx-2\dfrac{y}{x}dy=0$;

в) $\left(y\cos x+2xy^2\right)dx+\left(\sin x-a\sin y+2x^2y\right)dy=0$;

г) $\sqrt{a^2+y^2}\,dx+\dfrac{xy+a^2+2y^2}{\sqrt{a^2+y^2}}dy=0$;

д) $\sin(x+y)\,dx+x\cos\,(x+y)\,(dx+dy)=0$.

Отв.: а) $x+ye^{x/y}=C$; б) $x-y^2/x=C$; в) $y\sin x+x^2y^2+a\cos y=C$. г) $\sqrt{a^2+y^2}\,(x+y)=C$; д) $x\sin(x+y)=C$.

1.63. Решить задачу Коши:

а) $\dfrac{(x+2y)\,dx+ydy}{(x+y)^2}=0$; $y(1)=0$; б) $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$; $y(0)=0$;

в) $\left(1+\dfrac{1}{y}e^{x/y}\right)dx+\left(1-\dfrac{x}{y^2}e^{x/y}\right)dy=0$; $y(0)=-1$;

г) $xdx+ydy+(xdy-ydx)/\left(x^2+y^2\right)=0$; $y(1)=0$.

Отв.: а) $\ln|x+y|-y/(x+y)=0$; б) $x^2-y^2+2xy=0$; в) $x+y+e^{x/y}=0$;

г) $x^2 + y^2 + 2arctg(y/x) = 1$.

Напомним, что решение $y = j\left(x\right)$ ДУ $y' = f(x, y)$ называется *особым*, если в каждой его точке (x_0, y_0) проходит и другое решение (другая интегральная кривая) ДУ $y' = f(x, y)$, не совпадающее с $y = j\left(x\right)$ в сколь угодно малой окрестности точки (x_0, y_0).

График особого решения ДУ называется *особой интегральной кривой* этого уравнения.

Геометрически особое решение есть *огибающая* семейства интегральных кривых ДУ, определяемых его общим интегралом $\Phi(x,y,C) = 0$.

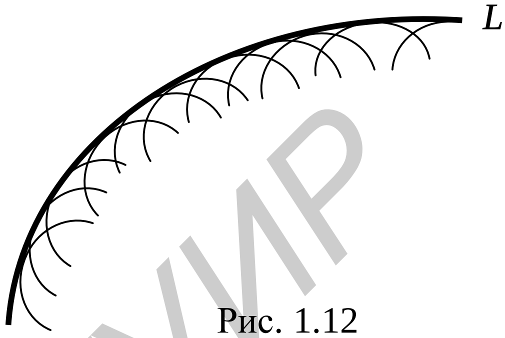


Рис. 1.12

По определению огибающей L семейства кривых $\Phi(x,y,C) = 0$, зависящих от параметра C, называется линия, которая в каждой точке касается какой-нибудь из кривых семейства, причем в различных своих точках она касается разных кривых этого семейства (рис. 1.12).

Если семейство кривых $\Phi(x,y,C) = 0$ имеет огибающую L, то должны выполняться два условия:

$$\Phi(x,y,C) = 0,\ \partial\Phi/\partial C = 0. \tag{1.68}$$

Кривая, удовлетворяющая системе (1.68), называется *C-дискриминантной кривой* (СДК).

1.64. Найти особые решения ДУ

$$xy'^2 - 2yy' + 4x = 0,\ x > 0, \tag{1.69}$$

зная его общий интеграл $x^2 = C(y - C)$.

∆ Находим C-дискриминантную кривую (СДК). Имеем

$$\Phi(x, y, C) = C(y - C) - x^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial C} = y - 2C = 0 \Rightarrow$$

отсюда $C = y/2$. Подставляя это C в общий интеграл ДУ (1.69), получаем

$$x^2 = \frac{y}{2}\left(y - \frac{y}{2}\right) = \frac{y^2}{4} \Rightarrow y = \pm 2x$$

– искомая C-дискриминантная кривая, состоящая из двух прямых $y = 2x$ и $y = -2x$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что каждая из этих прямых удовлетворяет ДУ (1.69). Можно также показать, что решения $y = \pm 2x$ действительно являются особыми. ▲

1.65. Найти особые решения, если они существуют, для следующих ДУ:

а) $\left(1 + y'^2\right)y^2 - 4yy' - 4x = 0$. **Отв.** $y^2 = 4x + 4$.

б) $y'^2 - 4y = 0$. **Отв.** $y = 0$.

в) $y'^2 - y^2 = 0$. **Отв.** Особых решений нет.

г) $(xy' + y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0$. **Отв.** $4y + x^5 = 0$.

д) $y(y-2xy')^2 = 2y'$. **Отв.** $4xy^2+1=0$.

е) $(y'-1)^2 = y^2$. **Отв.** Особых решений нет.

1.66. С помощью СДК найти особые решения ДУ-1, зная их общие интегралы:

а) $y = y'^2 - xy' + x^2/2$; $\quad y = Cx + C^2 + x^2/2$;

б) $(xy' + y)^2 = y^2 y'$; $\quad y(C-x) = C^2$;

в) $(yy')^2 + y^2 = 1$; $\quad (x-C)^2 + y^2 = 1$;

г) $y'^2 - yy' + e^x = 0$; $\quad y = Ce^x + 1/C$.

Отв.: а) $y = x^2/4$; б) $y=0$; $y=4x$; в) $y=\pm 1$; г) $y = \pm 2e^{x/2}$.

Уравнением Лагранжа называется ДУ вида

$$y = xj(y') + y(y'), \tag{1.70}$$

линейное относительно *x* и *y*. Здесь j и y – заданные функции, причем $j(y') \neq y'$, $y = y(x)$. Интегральные кривые этого уравнения ищутся в параметрическом виде $x = x(p)$, $y = y(p)$, где p – параметр, в качестве которого выбирается $y' = p = p(x)$. Тогда из (1.70) имеем

$$y = xj(p) + y(p). \tag{1.71}$$

Для получения зависимости $x = x(p)$ равенство (1.71) дифференцируется по *x*:

$$p = j(p) + xj'(p)\frac{dp}{dx} + y'(p)\frac{dp}{dx},$$

откуда $p - j(p) = (xj'(p) + y'(p))\dfrac{dp}{dx}$, или

$$(p - j(p))\frac{dp}{dx} - xj'(p) = y'(p)$$

– ЛДУ-1 относительно x и dx/dp, которое интегрируется одним из указанных выше способов.

Таким образом, интегральные кривые ДУ Лагранжа (1.70) определяются параметрически системой

$$x = x(p,C);\; y = x(p,C)\,j(p) + y(p).$$

1.67. Проинтегрировать ДУ $y = xy'^2 + y'^2$.

Δ Это уравнение Лагранжа. Положим $y' = p$, тогда, согласно ДУ, $y = xp^2 + p^2$. Это равенство дифференцируем по *x*: $dy = p^2dx + 2pxdp + 2pdp$. Но $dy = pdx$. Тогда

$$pdx = p^2dx + 2pxdp + 2pdp.$$

Отсюда, сократив на *p*, получим ДУ с разделяющимися переменными:

$$(1-p)\,dx=2(x+1)\,dp \Rightarrow \frac{dx}{x+1}=-\frac{2dp}{p-1} \Rightarrow \ln(x+1)=-2\ln|1-p|+\ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1=C/(p-1)^2 .$$

Используя теперь данное уравнение $y=p^2(x+1)$, получаем $y=Cp^2/(1-p)^2$.

Итак,

$$\left.\begin{aligned} x+1&=C/(p-1)^2, \\ y&=Cp^2/(p-1)^2 \end{aligned}\right\}$$

– общее решение ДУ.

Исключив в общем решении параметр p, получим общий интеграл исходного ДУ: $\sqrt{y}-\sqrt{x+1}=C_1$, $C_1^2=C$.

При делении на p возможна была потеря решения $p=0$. Положив $p=0$, из данного уравнения получим $y=0$ – особое решение ДУ. ▲

1.68. Найти кривую $y=f(x)$, зная, что полуразность подкасательной и поднормали в одной ее точке равна абсциссе точки касания.

Δ На рис. 1.13 подкасательная есть *AB*, а поднормаль – отрезок *BC*. Составляем уравнение касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M=(x,y)$:

$$Y-y=y'(X-x), \tag{1.72}$$

где X,Y – текущие координаты точек касательной. Из (1.72) при $Y=0$ получим абсциссу X_A точки *A*: $X_A=x-y/y'$. Тогда подкасательная равна

$$x_B-x_A=x-x+y/y'=y/y'.$$

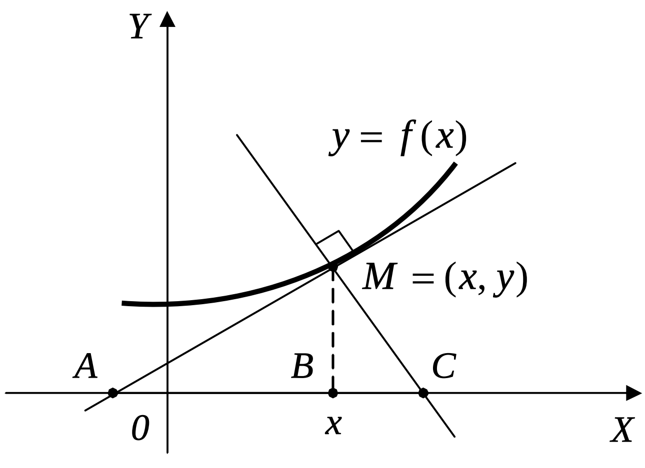


Рис. 1.13

Поскольку уравнение нормали к графику функции $y=f(x)$ есть $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$, то отсюда при $Y=0$ получаем абсциссу X_C точки *C*: $X_C=yy'+x$, и, значит, поднормаль равна

$$x_C-x_A=yy'+x-x=yy'.$$

По условию задачи получаем

$$\frac{y}{y'}-yy'=2x$$

или

$$y = \frac{2y'}{1 - y'^2} x. \tag{1.73}$$

Данное соотношение есть уравнение Лагранжа, в котором $y(y') \equiv 0$. Для интегрирования уравнения (1.73) приведем его к виду

$$x = \frac{1 - y'^2}{2y'} y \Rightarrow x = \frac{yx'}{2} - \frac{y}{2x'},$$

где $x = x(y)$, $x' = dx/dy$. Положим $x' = p$. Тогда $x = \frac{yp}{2} - \frac{y}{2p}$, или $x = \frac{y}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)$. Дифференцируя по y, получаем

$$x' = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) + \frac{y}{2}\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}.$$

После замены $x' = p$ и последующих преобразований получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p} \Rightarrow y = Cp.$$

Следовательно, общий интеграл в параметрической форме имеет вид

$$x = \frac{Cp}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right), \; y = Cp.$$

Исключив из этих равенств параметр p, получим

$$x = \frac{y^2}{2C} - \frac{C}{2} \Rightarrow 2Cx = y^2 - C^2$$ – семейство парабол. ▲

1.69. Проинтегрировать ДУ:

а) $y' + y = xy'^2$. **Отв.** $y = xp^2 - p$, $x = (p - \ln p + C)/(p-1)^2$.

б) $y = 2xy' - y'^2$. **Отв.** $y = 2xp - p^2$, $x = C/p^2 + 2p/3$.

в) $y = x + y'^2 - y'$. **Отв.** $x = 2p + \ln|p-1| + C$, $y = p^2 + p + \ln|p-1| + C$.

Уравнение Клеро имеет вид

$$y = xy' + y(y') \tag{1.74}$$

– частный случай уравнения Лагранжа.

Метод его решения тот же, что и для уравнения Лагранжа. Общее решение уравнения Клеро (1.74) имеет вид

$$y = Cx + y(C).$$

Уравнение Клеро может иметь также особое решение, получаемое исключением C из системы $y = Cx + y(C)$, $x + y'(C) = 0$.

1.70. Проинтегрировать ДУ

$$y = xy' + y'^2. \tag{1.75}$$

Δ Это уравнение Клеро. Заменяя y' на C, получаем его общее решение:

$$y = xC + C^2. \tag{1.76}$$

Ищем огибающую семейства (1.76). Имеем

$$y = xC + C^2,\ \frac{dy}{dC} = x + 2C = 0,$$

или $x = -2C$, $y = -C^2$. Исключив отсюда параметр C, получим искомую огибающую (особое решение) уравнения (1.75) в виде $y = -x^2/4$. ▲

1.71. Проинтегрировать ДУ:

а) $y = xy' + a\sqrt{1 + y'^2}$;

б) $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$;

в) $x = y/y' + 1/y'^2$.

Отв.: а) $y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = a^2$ $(ay < 0)$;

б) $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$; $x^2 - y^2 = 1$ $(y > 0)$;

в) $x = Cy + C^2$; $x = -y^2/4$. ● Это уравнение Клеро относительно x.

1.72. Найти линию, обладающую тем свойством, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между координатными осями, имеет постоянную длину, равную l. **Отв.** $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$ (астроида).

1.73*. Найти кривые, для которых произведение расстояний до любой касательной от двух данных точек есть величина постоянная, равная b^2. Расстояние между данными точками равно 2С (рис. 1.14).

Отв.: Эллипсы $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, или гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, $a^2 = c^2 \pm b^2$.

● Задача сводится к интегрированию уравнения Клеро $y = xy' \pm \sqrt{a^2 y'^2 \pm b^2}$.

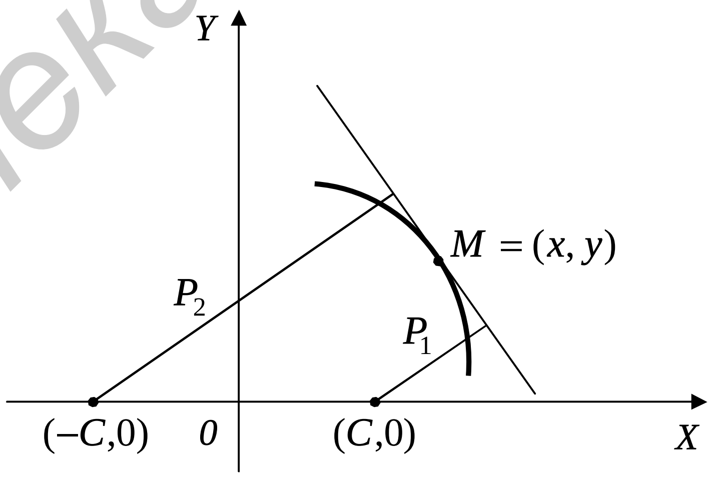


Рис. 1.14

Рассмотренные выше ДУ Лагранжа и Клеро относятся к классу ДУ-1, *не разрешенных относительно производных*.

Рассмотрим некоторые из них.

1. *Уравнение, разрешенное относительно y и не содержащее x*:

$$y = j\,(y'). \tag{1.77}$$

Для его интегрирования применим метод введения параметра. Положим $y' = p$. Тогда уравнение (1.77) перепишется в виде

$$y = j\,(p). \tag{1.78}$$

Нужно получить еще одно уравнение, выражающее x через p и C. Оно получается следующим образом. Так как $y' = p$, то $dx = dy/p \Rightarrow x = \int \frac{dy}{p} + C$. Применив к этому интегралу метод интегрирования по частям, получим (в силу (1.78)):

$$\int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{p^2} = \frac{y}{p} + \int \frac{j\,(p)dp}{p^2}.$$

Значит,

$$x = \frac{y}{p} + \int \frac{j\,(p)\,dp}{p^2}. \qquad (1.79)$$

Система уравнений (1.78) и (1.79) является общим решением ДУ (1.77) в параметрической форме. Исключив, если это возможно, из этой системы параметр *p*, получим общий интеграл ДУ (1.77) в виде $\Phi(x, y, C) = 0$.

1.74. Найти общее решение ДУ в параметрической форме:

$$y = ay'^2 + by'^3;\ a, b - const. \qquad (1.80)$$

Δ Положим $y' = p$. Тогда из уравнения (1.80) будем иметь $y = ap^2 + bp^3$, откуда $dy = 2apdp + 3bp^2dp$, или $pdx = 2apdp + 3bp^2dp \Rightarrow dx = 2adp + 3bpdp$, и, значит, $x = 2ap + 3bp^2/2 + C$.

Следовательно, общим решением ДУ (1.80) в параметрической форме будет

$$x = 2ap + 3bp^2/2 + C,\ y = ap^2 + bp^3.\ \blacktriangle$$

2. *Уравнение, разрешенное относительно x и не содержащее y*:

$$x = j\,(y'). \qquad (1.81)$$

В этом уравнении положим $y' = p$. Тогда

$$x = j\,(p). \qquad (1.82)$$

Из равенства $y' = p$ следует

$$dy = pdx \Rightarrow y = \int pdx = px - \int xdp \Rightarrow y = p\,j\,(p) - \int j\,(p)\,dp + C. \qquad (1.83)$$

Система уравнений (1.82) и (1.83) является общим решением ДУ (1.81) в параметрической форме. Исключив из этих уравнений *p*, получим общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$ ДУ (1.81).

1.75. Найти общее решение ДУ

$$x = y' \sin y' \qquad (1.84)$$

в параметрической форме.

Δ Положим $y' = p$. Тогда $x = p\sin p$. Из равенства $dy/dx = p$ следует

$$y = \int pdx = px - \int xdp = px - \int p\sin pdp = px + p\cos p - \sin p + C.$$

Таким образом, общее решение ДУ (1.84) в параметрической форме есть $x = p\sin p$, $y = p^2 \sin p + p\cos p - \sin p + C$. $\blacktriangle$

3. *ДУ, разрешенное относительно y*:

$$y = j\,(x, y'). \qquad (1.85)$$

Общее решение ДУ (1.85) или общее решение в параметрической форме в некоторых случаях удается найти, используя параметрическое представление этого уравнения и соотношение $dy = y'dx$.

ДУ (1.85) допускает *параметрическое представление*

$$y = j\,(x, p),\ y' = p. \tag{1.86}$$

С учетом равенства $dy = y'dx$, из (1.86) получаем ДУ, связывающее *p* и *x*:

$$j'_x dx + j'_p dp = pdx.$$

Если это уравнение удается проинтегрировать в квадратурах, считая *p* функцией *x* или *x* – функцией *p*, то, подставив найденное общее решение $p = w(x, C)$ или $x = \Theta(p, C)$ в равенство $y = j\,(x, p)$, получим *общее решение* ДУ (1.85):

$$y = j\,(x, w(x, C))$$

или *общее решение* этого ДУ *в параметрической форме*

$$x = \Theta(p, C),\ y = j\,(\Theta(p, C), p).$$

1.76. Решить ДУ

$$y = y'^2 - xy' + x^2/2. \tag{1.87}$$

Δ Это уравнение вида (1.85). Оно допускает параметрическое представление

$$y = p^2 - xp + x^2/2,\ y' = p. \tag{1.88}$$

Так как $dy = y'dx$, то из (1.88) получаем $(-p + x)\,dx + (2p - x)\,dp = pdx$, откуда $(-2p + x)\,dx + (2p - x)\,dp = 0$ или $(2p - x)(-dx + dp) = 0$.

Полученное уравнение распадается на два

$$dp - dx = 0 \ \text{ и } \ 2p - x = 0. \tag{1.89}$$

Первое из них дает $p = x + C$. Подставив это p в уравнение (1.88), получим $y = x^2/2 + Cx + C^2$ – общее решение уравнения (1.87).

Второе соотношение из (1.89) дает $p = x/2$. Тогда из (1.88) получим $y = x^2/4$ – решение ДУ (1.87), и притом особое. ▲

4. *Уравнение, разрешимое относительно x*:

$$x = j\,(y, y'). \tag{1.90}$$

Оно допускает параметрическое представление

$$x = j\,(y, p),\ y' = p. \tag{1.91}$$

С учетом равенства $dy = y'dx$ из (1.91) получаем

$$dy = p\left(j'_y\,dy + j'_p\,dp\right).$$

Если это ДУ интегрируется в квадратурах, то уравнение (1.90) тоже может быть проинтегрировано в квадратурах.

1.77. Проинтегрировать ДУ

$$y'^2 - 4xy + 8y^2 = 0. \tag{1.92}$$

Δ Заметим, что данное ДУ имеет, очевидно, решение $y = 0$.

Разрешим (1.92) относительно x $(y \neq 0)$:

$$x = \frac{y'^2}{4y} + \frac{2y}{y'}. \tag{1.93}$$

Это уравнение допускает параметрическое представление

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}, \; y' = p. \tag{1.94}$$

Отсюда и из $dy = y'dx$ получаем

$$dy = p\left(\left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\right)dp + \left(-\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p}\right)dy\right) \Rightarrow \left(\frac{p^2}{2y} - \frac{2y}{p}\right)dp + \left(-\frac{p^3}{4y^2} + 1\right)dy = 0,$$

т.е.

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2y}\left(\frac{dp}{p} - \frac{dy}{2y}\right) = 0.$$

Из этого равенства имеем

$$\frac{dp}{p} - \frac{dy}{2y} = 0 \text{ и } \frac{p^3 - 4y^2}{2y} = 0. \tag{1.95}$$

Первое из ДУ (1.95) дает $p = C_1\sqrt{y}$, $y > 0$. Подставив это p в (1.94), получим

$$x = \frac{C_1^2}{4} + \frac{2}{C_1}\sqrt{y}$$

или

$$y = C(x - C)^2 \; \left(C = C_1^2/4\right). \tag{1.96}$$

Второе из ДУ (1.95) дает $p = \left(4y^2\right)^{1/3}$.

Согласно (1.94), имеем $y = 4x^3/27$. Это решение ДУ (1.92), и притом особое.

Решение $y = 0$ тоже является особым решением ДУ (1.92).

Заметим, что оба найденных особых решения являются огибающими семейства интегральных кривых (1.96). ▲

1.78. Проинтегрировать ДУ:

а) $4y'^2 - 9x = 0$; б) $y'^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$; в) $y'^2 - (2x + y)y' + x^2 + xy = 0$.

Отв.: а) $(y - C)^2 = x^3$; б) $y = 2x^2 + C$, $y = C - x^2$;
в) $y = x^2/2 + C$, $y = Ce^x - x - 1$.

1.79. Решить ДУ:

а) $x = \ln y' + \sin y'$; б) $x = y'^2 - 2y' + 2$; в) $y = y' \ln y$;
г) $y = y'(1 + y'\cos y')$.

Отв.: а) $x = \ln p + \sin p$, $y = C + p(1 + \sin p) + \cos p$;
б) $x = p^2 - 2p + 2$, $y = 2p^3/3 - p^2 - C$;

в) $x+C=\frac{1}{2}(\ln p+1)^2; y=p\lg p.$

г) $x+C=\ln|p|+\sin p+\cos p,\ \ y=p+p^2\cos p$.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

2.1. Дифференциальные уравнения n-го порядка (ДУ-*n*)

Основные понятия ДУ-*n*. Задача Коши. ДУ-*n*, допускающие понижение порядка.

Уравнение

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)=0, \tag{2.1}$$

где F – заданная функция и $n>1$, называется *ДУ n-го порядка*. Здесь $y=y(x)$, $x\in(a,b)$.

Уравнение

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{2.2}$$

называется *ДУ-n, разрешенным относительно старшей производной* $y^{(n)}$.

Функция $y=j(x)$ называется *решением* ДУ (2.1) в интервале (a,b), если она обращает ДУ в тождество, справедливое для всех x из (a,b). При этом предполагается, что функция $y=j(x)$ имеет в (a,b) непрерывные производные до порядка n включительно, и точка $\left(x, j(x), j'(x), ..., j^{(n)}(x)\right)$ принадлежит области задания функции F для всех x из (a,b). График решения $y=j(x)$ ДУ (2.1) (или (2.2)) называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Общее решение ДУ-*n* зависит от *n* произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ и имеет вид $y=j(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, где $j(x)\in C^{(n)}_{(a,b)}$. Если решение ДУ-*n* удается получить в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n)=0$, то оно называется *общим интегралом* этого уравнения.

Геометрически общее решение (или общий интеграл) ДУ-*n* представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости *XY*, зависящих от n параметров $C_1, C_2, ..., C_n$ (*n*-параметрическое семейство). Для выделения конкретного (частного) решения из общего решения ДУ-*n*, помимо самого уравнения, необходимо иметь некоторые дополнительные условия, позволяющие определить значения произвольных констант $C_1, C_2, ..., C_n$. Одним из таких условий является задание искомой функции и ее первых $n-1$ производных в некоторой точке x_0 интервала (a,b), где определено решение ДУ, т.е. условий вида

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{2.3}$$

Здесь $y_0, y'_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа. Условия (2.3) называются *начальными условиями или условиями Коши* для ДУ (2.1) (или (2.2)).

Задача отыскания частного решения уравнения (2.1) (или (2.2)), удовлетворяющего начальным условиям (2.3), называется *задачей Коши* для этого уравнения.

2.1. Показать, что функция $y = x(\sin x - \cos x)$ является решением ДУ $y'' + y = 2(\cos x + \sin x)$.

Δ Последовательно находим:

$$y' = \sin x - \cos x + x(\cos x + \sin x).$$

$$y'' = \cos x + \sin x + \cos x + \sin x + x(-\sin x + \cos x) = 2(\cos x + \sin x) + x(-\sin x + \cos x).$$

Подставив y, y'' в левую часть ДУ, получим

$$2(\cos x + \sin x) - x\sin x + x\cos x + x\sin x - x\cos x \equiv 2(\cos x + \sin x).$$

Получили тождество, т.е. данная функция является решением данного ДУ. ▲

2.2. Показать, что данные функции являются решениями указанных ДУ:

а) $y = x^2 \ln x$, $xy''' = 2$; б) $x + C = e^{-y}$, $y'' = y'^2$;

в) $\begin{cases} x = 1 + e^t, \\ y = te^t, \end{cases}$ $(x-1)y'' = 1$; г) $\begin{cases} x = C_1 + t^4/4, \\ y = C_2 + t^5/5, \end{cases}$ $y''y'^3 = 1$.

2.3. Показать, что данные функции являются частными решениями (или частными интегралами) соответствующих ДУ:

а) $y^2 = 1 + (1-x)^2$, $y'^2 + yy'' = 1$; б) $y = (x^2 + 1)/2$, $1 + y'^2 = 2yy''$;

в) $y = e^x$, $y^2 + y'^2 = 2yy''$.

Рассмотрим некоторые типы ДУ, допускающие понижение порядка.

1. *ДУ, разрешенные относительно производной порядка n:*

$$y^{(n)} = f(x). \tag{2.4}$$

Порядок этого ДУ понижается всякий раз на единицу путем последовательного интегрирования:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1; \qquad y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1 x + C_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = \int\left[\int\ldots\int f(x)dx\ldots dx\right]dx + \frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n.$$

2.4. Решить ДУ $y''' = \cos x - x^2$.

Δ Последовательно интегрируя, находим:

$y'' = \int\left(\cos x - x^2\right)dx = \sin x - x^3/3 + C_1$;

$y' = \int\left(\sin x - x^3/3 + C_1\right)dx = -\cos x - x^4/12 + C_1 x + C_2$;

$$y=-\sin x-x^5/60+C_1x^2/2+C_2x+C_3.\blacktriangle$$

2.5. Определить скорость, с которой метеорит ударяется о Землю, считая, что он падает прямолинейно с неограниченно большого расстояния из состояния покоя и при его движении к Земле ускорение обратно пропорционально квадрату его расстояния от центра Земли. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Δ Пусть $r=r(t)$ – расстояние метеорита от центра Земли. Тогда ДУ его падения есть

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{k}{r^2} \tag{2.5}$$

– ДУ типа (2.4).

Здесь k – коэффициент пропорциональности, t – время. Так как ускорение $w=\dfrac{d^2r}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}$, где v – скорость движения метеорита, то уравнение (2.5) преобразуется к виду

$$\frac{dv}{dt}=\frac{k}{r^2}. \tag{2.6}$$

Но $\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{dv}{dr}\cdot v$. Поэтому из (2.6) получаем

$$v\frac{dv}{dr}=\frac{k}{r^2}\Leftrightarrow vdv=k\frac{dr}{r^2}.$$

Общий интеграл последнего уравнения есть

$$\frac{v^2}{2}=-\frac{k}{r}+C. \tag{2.7}$$

Так как $v=0$ при $r=\infty$, то из (2.7) будем иметь $C=0$. Следовательно, $v^2=-2k/r$.

Скорость при падении на Землю получается, если $r=R\approx 6{,}377\cdot 10^6$ м – радиус Земли. Коэффициент k выражается через ускорение силы тяжести на поверхности Земли $g=9{,}8$ м/с^2 и через R. Имеем $-g=k/R^2 \Rightarrow k=-gR^2$ (знак минус потому, что расстояние отсчитывается от начала $r=0$, а ускорение направлено к началу).

Итак, искомая скорость

$$v=\sqrt{2gR^2/R}=\sqrt{2gR}\approx\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 6{,}377\cdot 10^6}\approx 11{,}2\,(\text{км/с.})\ \blacktriangle$$

2.6. Найти общее решение ДУ:

а) $e^x\left(y''+e^x\right)=1$; б) $y'''+27e^{-3x}=1$; в) $y^{IV}=x-1$.

г) $y''=\dfrac{1}{x}+\sec^2 x$; д) $y'''+2x/\left(1+x^2\right)^2=0$.

Отв.: а) $y = e^{-x} - e^{x} + C_1 x + C_2$; б) $y = x^3/6 + e^{-3x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$;
в) $y = (x-1)^5/120 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$;
г) $y = x((\ln|x| - 1) - \ln|\cos x|) + C_1 x + C_2$;
д) $y = x arctg x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

2.7. Решить задачу Коши:
а) $y'' = -6x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; б) $y''' = e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$;
в)* $y''' = e^{x}/x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Отв.: а) $y = -x^3$; б) $y = -e^{-x} + x^2 2 - x + 1$; в) $y = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^x \dfrac{e^t}{t}(x-t)^2\,dt$.

2. *ДУ, не содержащее явно искомой функции и ее первых* $k-1$ *производных*:

$$F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (2.8)$$

Заменой $y^{(k)} = z$, $z = z(x)$ ДУ (2.8) сводится к виду $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$. Порядок этого ДУ равен $n-k$. После его решения найдем функцию $z(x) = y^{(k)}$. Это ДУ типа (2.4).

2.8. Решить ДУ $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$.

Δ Данное уравнение относится к ДУ (2.8). В нем отсутствует искомая функция y и y'. Вводим замену $y'' = z$. В результате ДУ принимает вид

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}.$$

Разделив здесь переменные, получим

$$z = \frac{e^{x+C_1} - e^{-(x+C_1)}}{2} = sh(x + C_1).$$

Значит, $y'' = sh(x + C_1)$. Отсюда

$$y' = ch(x + C_1) + C_2 \Rightarrow y = sh(x + C_1) + C_2 x + C_3. \ \blacktriangle$$

2.9. Найти общее решение ДУ:
а) $xy'' + y' + 2/x = 0$; б) $xy''' = y'' - xy''$; в) $xy'' + y' + x + 5 = 0$.

Отв.: а) $y = -2\ln|\ln|x|| + C_1\ln|x| + C_2$; б) $y = C_1(x+2)e^{-x} + C_2 x + C_3$;
в) $y = -5x - x^2/4 + C_1\ln|x| + C_2$.

3. *Дифференциальные уравнения, не содержащие явно независимой переменной:*

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (2.9)$$

Заменой $y' = p$, $p = p(y)$ порядок этого уравнения понижается на единицу. При этом

$$y'' = p\frac{dp}{dy},\; y''' = p\left(\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dy^2}\right). \tag{2.10}$$

2.10. Решить задачу Коши:

$$y'' = 2y^3,\; y(0) = y'(0) = 1. \tag{2.11}$$

Δ Данное уравнение не содержит независимой переменной, т.е. относится к типу ДУ (2.10). Положив $y' = p$, получим

$$p\frac{dp}{dy} = 2y^2 \Rightarrow p^2 = y^4 + C_1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^4 + C_1}. \tag{2.12}$$

Разделяя в этом ДУ переменные, находим

$$x + C_2 = \int \left(y^4 + C_1\right)^{-1/2} dy. \tag{2.13}$$

В правой части (2.13) имеем интеграл от дифференциального бинома, в котором $m = 0$, $n = 4$, $p = -1/2$, т.е. неинтегрируемый случай. Поэтому интеграл не выражаетсяв виде конечной комбинации элементарных функций. Однако с учетом начальных условий из (2.12) находим $C_1 = 0$, и тогда (2.13) приводится к виду

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{y^2} \Rightarrow x + C_2 = -\frac{1}{y}.$$

Начальное условие $y(0) = 1$ дает $C_2 = -1$. Следовательно, $y = 1/(1-x)$ и есть искомое решение задачи Коши (2.11). ▲

2.11. Найти закон движения материальной точки массой m по прямой OA (рис. 2.1) под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной кубу расстояния $x = |OM|$ точки от неподвижного центра O.

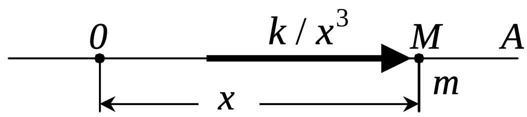


Рис. 2.1

Δ ДУ движения точки, согласно 2-му закону Ньютона, есть

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{x^3},\; x = x(t), \tag{2.14}$$

где k – коэффициент пропорциональности, t – время. ДУ (2.14) сводится к виду

$$x'' = a^2/x^3,\; a^2 = k/m, \tag{2.15}$$

т.е. к уравнению, не содержащему явно независимой переменной t.

Вводим замену $x' = p = p(x)$, $x'' = p\dfrac{dp}{dx}$. В результате уравнение (2.15) сводится к ДУ-1:

$$p\frac{dp}{dx} = \frac{a^2}{x^3} \Rightarrow \frac{p^2}{2} = a^2\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{a^2}{2x^2} + \frac{C_1}{2},$$

т.е.

$$p^2 = C_1 - \frac{a^2}{x^2} \Rightarrow p = \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{C_1x^2 - a^2}}{x}$$

(радикал взят со знаком «+», поскольку скорость dx/dt движения точки в условиях задачи положительна). Отсюда, разделяя переменные, получаем

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{C_1x^2 - a^2}} = t + C_2 \Rightarrow \sqrt{C_1x^2 - a^2} = C_1(t + C_2)^2,$$

т.е. искомый закон движения точки выражается соотношением

$$x^2 - a^2 / C_1 = (t + C_2)^2 . ▲$$

2.12. Найти общее решение ДУ:

а) $yy''^2 = 1$; б) $y'' = ae^y$; в) $3y'' = y^{-5/3}$;

г) $1 + y'^2 = 2yy''$; д) $y^4 - y^3y'' = 1$; е) $yy'' = y'^2$.

Отв.: а) $3x = 2\left(\sqrt{y} - 2C_1\right)\sqrt{\sqrt{y} + C_1} + C_2$;

б) $x + C_2 = \dfrac{1}{C_1}\ln\dfrac{\sqrt{C_1^2 + ae^y} - C_1}{\sqrt{C_1^2 + ae^y} + C_1}$;

в) $C_2^2(x - C_1) = \left(C_2y^{2/3} + 2\right)\sqrt{C_2y^{2/3} - 1}$; г) $(x - C_1)^2 = 4C_2(y - C_2)$;

д) $2C_2y^2 = 2C_1C_2 + C_2^2e^{2x} + \left(C_1^2 - 1\right)e^{-2x}$; е) $y = C_1e^{C_2x}$.

2.13. Решить задачу Коши для данного ДУ:

а) $y^3y'' + 1 = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$; б) $3y'y'' = e^y$; $y(-3) = 0$, $y'(-3) = 1$;

в) $2yy'' = 3y'^2 + 4y^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; г) $yy'' - 2xy'^2 = 0$; $y(2) = 2$, $y'(2) = 1/2$;

д) $y''' = 3yy'$; $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = 3/2$.

Отв.: а) $x^2 + y^2 = 2x$; б) $y = 3\ln\dfrac{3}{|x|}$, $x < 0$; в) $y = \sec^2 x$;

г) $(3 - x)y^5 = 8(x + 2)$; д) $y = \dfrac{4}{(x - 2)^2}$.

2.14. Выделить интегральную кривую ДУ $y'^2 + 2yy'' = 0$, касающуюся прямой $y = x$ в точке (1, 1). **Отв.** $2y\sqrt{y} = 3x - 1$.

2.15. Найти интегральную кривую уравнения $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$, касающуюся прямой $y = 1$ в точке (0, 1). **Отв.** $y\cos^2 x = 1$.

2.16. В интеграле ДУ $yy'y'' = y'^3 + y''^2$ выделить интегральную кривую, проходящую через точку (0, 0), касающуюся в ней прямой $x + y = 0$.

Отв.: $y = 1 - e^x$, $y = -1 + e^{-x}$.

2.17. Найти плоские кривые, у которых радиус R кривизны пропорционален длине нормали. (● Для кривой $y = y(x)$ ее радиус кривизны R в точке M равен

$$R = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{|y''|},$$

а длина нормали MN (рис. 2.2) есть $MN = |y|\sqrt{1 + y'^2}$). Рассмотреть случаи, когда коэффициент пропорциональности k равен числам ± 1 и ± 2.

Отв.: $k = 1$; $y = C_1 ch\dfrac{x + C_2}{C_1}$ – цепные линии. $k = -1$; $(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$. $k = 2$; $(x + C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$. $k = -2$; $x = -C_2 + \dfrac{C_1}{2}(t - \sin t)$, $y = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos t)$ – циклоиды.

2.18. Тело массой m падает с некоторой высоты со скоростью v. При падении тело испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Найти закон движения падающего тела.

Отв.: $mx'' = mg - kx'^2$, $x = x(t)$; $x = \dfrac{m}{k} \cdot \ln chat$, $a = \sqrt{kg/m}$.

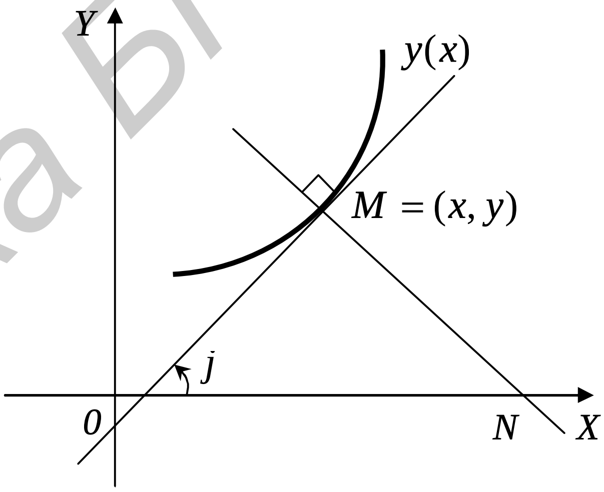


Рис. 2.2

Если в уравнении

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

левая часть есть точная производная от некоторой функции $\Phi\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$, т.е $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = \dfrac{d}{dx}\Phi\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$, то

$$\Phi\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) = C_1 \tag{2.16}$$

будет *первым интегралом* исходного ДУ. Может оказаться, что в свою очередь уравнение (2.16) является ДУ в точных производных. Тогда можно найти и *второй интеграл* исходного уравнения.

2.19. Решить ДУ:

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1 + y^2} = 0. \tag{2.17}$$

Δ В левой части у каждой из дробей в числителе есть производная знаменателя, т.е.

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1 + y^2} = \left(\ln|y'| - \ln\left(1 + y^2\right)\right)'.$$

Значит, ДУ (2.17) есть уравнение в точных производных. Оно имеет первый интеграл

$$\ln|y'| - \ln(1 + y^2) = \ln|C_1| \Rightarrow y' = \pm C_1(1 + y^2).$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$arctg y = \pm C_1 x + C_2$$

– общий интеграл ДУ (2.17). ▲

Если уравнение $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ не является уравнением в точных производных, то можно попытаться подобрать такую функцию $m = m(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, называемую *интегрирующим множителем* ДУ, чтобы после умножения на нее это ДУ стало уравнением в точных производных.

2.20. Решить ДУ: $yy'' = y'^2$.

Δ Это уравнение не является ДУ в точных производных, но, умножив его обе части на функцию $m = 1/(yy')$, получим уравнение в точных производных:

$$y'' / y' = y' / y.$$

Его первым интегралом будет $y' = C_1 y$, откуда $y = C_2 e^{C_1 x}$. ▲

Пусть дано уравнение $y'' = f(y)$. Умножив его обе части на $m = 2y'$, получим

$$2y' y'' = 2 f(y) y' \Leftrightarrow \left(y'^2\right)'_x = \left(2\int f(y)\, dy\right)'_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'^2 = 2\int f(y)\, dy + C_1 \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\, dy + C_1}} = \pm x + C_2$$

– общий интеграл ДУ $y'' = f(y)$.

2.21. Проинтегрировать ДУ:

а) $yy'' - y'^2 - y^2 = 0$; б) $y'' = 2yy'$; в) $y'' = y'^2 y$.

Отв.: а) $y = C_2 e^{(x+C_1)^2/2}$; б) $y = C_1 tg(C_1 x + C_2)$; в) $\int e^{-y^2/2} dy = C_1 x + C_2$.

2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков (ЛОДУ-*n*)

Общие понятия ЛДУ-*n*. Однородные ЛДУ-*n* и свойства их решений. Линейная зависимость и независимость функций. Определитель Вронского. Условие линейной независимости решений ЛОДУ. Фундаментальная система решений (ФСР). Составление ЛОДУ по его ФСР. Структура общего решения ЛОДУ-*n*. ЛОДУ-*n* с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.

Уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x), \quad (2.18)$$

в котором $f(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ – заданные на $[a, b]$ непрерывные функции, называется *неоднородным ЛДУ n-го порядка* (НЛДУ-n).

Если $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a,b]$, то ДУ

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (2.19)$$

называется *линейным однородным ДУ n-го порядка* (ЛОДУ-n).

Задача Коши для ДУ (2.18) формулируется следующим образом: *найти решение* $y = y(x)$ *уравнения* (2.18), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (2.20)$$

где $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа; $x_0 \in [a,b]$.

Теорема 2.1. *Если на отрезке* $[a,b]$ *коэффициенты* $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, *и правая часть* $f(x)$ *ДУ* ***(2.18)*** *непрерывны, то:*

1) *решение задачи Коши* ***(2.18), (2.20)*** *существует на всем отрезке* $[a,b]$*;*

2) *если два решения* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *уравнения* ***(2.18)*** *удовлетворяют одним и тем же начальным условиям* ***(2.20)****, то* $y_1(x) \equiv y_2(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

В частности, если $y(x)$ – решение ЛОДУ (2.19), удовлетворяющее нулевым (*тривиальным*) условиям

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

то $y(x) \equiv 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Решения ЛОДУ-n обладают следующими свойствами:

1) если $y_1(x)$, $y_2(x)$ − решения ЛОДУ-n, то сумма $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение этого ДУ;

2) для любого решения $y(x)$ ЛОДУ-n и $\forall C \in \boldsymbol{R}$ произведение $Cy(x)$ – тоже решение этого уравнения. Из 1) и 2) следует, что линейная комбинация $y = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x)$ решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, C_j – произвольные постоянные, является решением уравнения;

3) если $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ – решения НЛДУ-n, то их разность $y_1(x) - y_2(x)$ есть решение соответствующего ЛОДУ-n;

4) если комплекснозначная функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ (i – мнимая единица) – решение ЛОДУ-n с действительными коэффициентами $a_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, то действительная часть этого решения $u(x)$ и его мнимая часть $v(x)$ по отдельности являются решениями этого ЛОДУ-n.

Множество решений ЛОДУ-n образует линейное пространство, называемое *пространством решений* этого *уравнения*. Для нахождения любого решения в этом пространстве нужно определить его базис, т.е. найти линейно независимые решения пространства решений, через которые линейным образом выражается любое решение ДУ.

Совокупность n линейно независимых решений ЛОДУ-n называется его *фундаментальной системой решений* (ФСР).

Говорят, что функции $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$ *линейно зависимы* (ЛЗ) на (a,b), если существуют постоянные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равные нулю, такие, что

$$a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \ldots + a_n y_n(x) \equiv 0,\ \forall x \in (a,b). \tag{2.21}$$

Если же равенство (2.21) имеет место только при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то функции $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$ называются *линейно независимыми* (ЛнЗ) на (a,b).

Определяющую роль в исследовании ЛЗ и ЛнЗ системы функций $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$ на (a,b) играет определитель Вронского, или вронскиан:

$$W[y_1 y_2,\ldots,y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x), \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \ldots & y'_n(x), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x), \end{vmatrix} \tag{2.22}$$

где функции $y_1(x),\ldots,\ y_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на (a,b) $n-1$ раз, т.е. принадлежат классу $C_{(a,b)}^{(n-1)}$. Значение вронскиана (2.22) в точке $x_0 \in (a,b)$ обозначается $W(x_0) = W[y_1(x_0),\ldots,y_n(x_0)]$.

Теорема 2.2. *Если функции $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$ класса $C_{(a,b)}^{(n-1)}$ ЛЗ, то* $W(x) \equiv 0,\ \forall x \in (a,b)$.

Отсюда следует, что *если хотя бы в одной точке $x_0 \in (a,b)$ вронскиан функций $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$ отличен от нуля, т.е. $W(x_0) \neq 0$, то эти функции ЛнЗ на (a,b).*

2.22. Доказать, что следующие системы функций

а) $\left\{e^{lx}, xe^{lx},\ldots,x^{n-1}e^{lx}\right\},\ l \in \boldsymbol{R}$; б) $\left\{1, x, x^2,\ldots,x^{n-1}\right\}$;

в) $\left\{e^{l_1 x}, e^{l_2 x},\ldots,e^{l_n x}\right\},\ l_i \neq l_j,\ i \neq j$

являются ЛнЗ на $\boldsymbol{R}$.

Δ а**)** Для данных функций составим равенство (2.21):

$$a_1 e^{lx} + a_2 xe^{lx} + \ldots + a_n x^{n-1} e^{lx} = 0 \tag{2.23}$$

и убедимся, что оно имеет место $\forall x \in \boldsymbol{R}$ лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Действительно, сократив в (2.23) на e^{lx}, получим

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \ldots + a_n x^{n-1} = 0. \tag{2.24}$$

Отсюда при $x = 0$ имеем $a_1 = 0$, и, значит, равенство (2.24) принимает вид

$$x\left(a_2 + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_n x^{n-2}\right) = 0,\ \forall x \in R.$$

Это равенство $\forall x \in \boldsymbol{R}$ возможно, если

$$a_2 + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_n x^{n-2} = 0.$$

Применив к этому равенству предыдущие рассуждения, получим, что $a_2 = 0$. Продолжая этот процесс, окончательно получаем, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, что и доказывает ЛнЗ функций $e^{lx}, xe^{lx}, \ldots, x^{n-1}e^{lx}$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

б**)** При $a = 0$ из «а» следует, что функции $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, …, $y_n = x^{n-1}$ являются ЛнЗ $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

в**)** Составим вронскиан этих функций:

$$W\left[e^{l_1 x}, e^{l_2 x}, \ldots, e^{l_n x}\right] = \begin{vmatrix} e^{l_1 x} & e^{l_2 x} & \ldots & e^{l_n x} \\ l_1 e^{l_1 x} & l_2 e^{l_2 x} & \ldots & l_n e^{l_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1^{n-1} e^{l_1 x} & l_2^{n-1} e^{l_2 x} & \ldots & l_n^{n-1} e^{l_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(l_1 + l_2 + \ldots + l_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1^{n-1} & l_2^{n-1} & \ldots & l_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ l_1^2 & l_2^2 & \ldots & l_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1^{n-1} & l_2^{n-1} & \ldots & l_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

для различных, не равных между собой $l_1, l_2, \ldots, l_n$. ▲

2.23. Показать, что система функций $\left\{e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx\right\}$, $b \neq 0$ ЛнЗ на $\boldsymbol{R}$.

Δ Составим вронскиан этих функций:

$$W = \begin{vmatrix} e^{ax}\sin bx & e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}a\sin bx + e^{ax}b\cos bx & e^{ax}a\sin bx - e^{ax}b\cos bx \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2ax}\begin{vmatrix} \sin bx & \cos bx \\ a\sin bx & a\cos bx \end{vmatrix} + e^{2ax}\begin{vmatrix} \sin bx & \cos bx \\ b\cos bx & b\sin bx \end{vmatrix} = be^{2ax} \neq 0,$$

так как $b \neq 0$.

Таким образом, данная система функций ЛнЗ на $\boldsymbol{R}$. ▲

Замечание. Критерий ЛнЗ двух функций $j_1(x)$ *и* $j_2(x)$ *на* (a,b): если на этом интервале отношение $j_1(x)/j_2(x) \equiv c = const$, причем *с* одно и тоже $\forall x \in (a,b)$, то $j_1(x)$ и $j_2(x)$ – ЛЗ на (a,b); если же $j_1(x)/j_2(x) \neq const$, то эти функции ЛнЗ на (a,b).

2.24. Исследовать на линейную зависимость системы функций на указанном промежутке I:

а) $10, \arcsin x, \arccos x$; $I=(-1,1)$; б) $5, \cos^2 x, \sin^2 x$; $I=\boldsymbol{R}$;

в) $x^2, x|x|$; $I=\boldsymbol{R}$; г) $x^3, x^2|x|, x$; $I=(0,1)$; д) $\cos x, \cos(x+1), \cos(x-2)$; $I=\boldsymbol{R}$; е) $x, x\int\limits_{x_0}^{1}\frac{e^t}{t^2}dt, x_0>0$. **Отв.:** а) – г) – ЛЗ; д) – е) – ЛнЗ.

Теорема 2.3. *Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ – решения ЛОДУ-n (2.19) с действительными коэффициентами на интервале (a,b). Тогда:*

1º. *Если существует $x_0\in(a,b)$, в которой $W(x_0)=0$, то решения y_1, y_2,…, y_n ЛЗ на (a,b) и $W(x)\equiv 0$, $\forall x\in(a,b)$.*

2º. *Если вронскиан $W[y_1(x),...,y_n(x)]\neq 0$ хотя бы в одной точке $x_0\in(a,b)$, то решения $y_1(x)$, …, $y_n(x)$ ЛнЗ на (a,b) и $W(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$.*

Теорема 2.4 (о структуре общего решения ЛОДУ-*n*). *Всякое ЛОДУ-n с действительными коэффициентами имеет ровно n ЛнЗ действительных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ на (a,b). Общее решение этого ЛОДУ-n имеет вид*

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x), \tag{2.25}$$

где $C_1,C_2,...,C_n$ – произвольные постоянные, т.е. линейное пространство решений уравнения имеет конечную размерность, равную n.

Равенство (2.25) определяет *общее решение ЛОДУ-n* по его известной ФСР $\{y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)\}$.

По известной ФСР можно построить ЛОДУ-*n*, общее решение которого имеет вид (2.25). Из этого следует, что функции $y(x), y_1(x)$, $y_2(x)$,…, $y_n(x)$ *на* (a,b) являются ЛЗ. Тогда вронскиан этих функций тождественно равен нулю на (a,b).

2.25. Составить ЛОДУ по его ФСР: $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=e^{-2x}$.

Δ Составляем вронскиан функций $y(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ и приравниваем его к нулю:

$$W=\begin{vmatrix} y & 1 & x & e^{-2x} \\ y' & 0 & 1 & -2e^{-2x} \\ y'' & 0 & 0 & 4e^{-2x} \\ y''' & 0 & 0 & -8e^{-2x}\end{vmatrix}=0\Rightarrow-\begin{vmatrix} y' & 1 & -2e^{-2x} \\ y'' & 0 & 4e^{-2x} \\ y''' & 0 & -8e^{-2x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y'' & 4e^{-2x} \\ y''' & -8e^{-2x}\end{vmatrix}=$$

$$=4e^{-2x}\begin{vmatrix} y'' & 1 \\ y''' & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow y'''+2y''=0$$ – искомое ЛОДУ. ▲

2.26. Составить ЛОДУ по известной его ФСР:

а) e^x, xe^x, x^2e^x; б) $e^{2x}, \cos x, \sin x$; в) $1, e^{-x}\sin x, e^{-x}\cos x$;

г) $e^{-x}\sin 2x, e^{-x}\cos 2x, 1$; д) $\sin x, \cos x, e^{x}, e^{-x}$; е) $\sin 3x, \cos 3x$.

Отв.: а) $y'''-3y''+3y'-y=0$; б) $y'''-2y''+y'-2y=0$;

в) $y'''+2y''+2y'=0$; г) $y'''+2y''+5y'=0$;

д) $y^{\mathrm{IV}}-y=0$; е) $y''+9y=0$.

Однородным ЛДУ-n с постоянными коэффициентами (ЛОДУ-n с ПК) $a_1, a_2, ..., a_n \in \boldsymbol{R}$ называется ДУ вида

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_n y=0. \tag{2.26}$$

По *методу Эйлера* его решение ищется в виде $y=e^{lx}$, где l – некоторое, пока неизвестное число, действительное или комплексное, подлежащее определению. Подстановка этого решения в ДУ (2.26) приводит к *характеристическому уравнению*

$$l^{n}+a_1 l^{n-1}+...+a_{n-1}l+a_n=0. \tag{2.27}$$

Таким образом, чтобы найти решение ДУ (2.26) в виде $y=e^{lx}$, нужно составить характеристическое уравнение (2.27) и найти его корни $l_1, l_2, ..., l_n$. Каждому такому корню l_i, $i=\overline{1,n}$, соответствует решение $y_i=e^{l_i x}$. Структура ФСР ДУ (2.26) и соответствующий вид общего решения этого ДУ зависит от вида корней характеристического уравнения. При этом возможны следующие случаи:

***1º.** Корни* $l_1, l_2, ..., l_n$ *характеристического уравнения **(2.27)** действительные и различные.*

Общее решение ДУ (2.26) в этом случае имеет вид

$$y=C_1 e^{l_1 x}+C_2 e^{l_2 x}+...+C_n e^{l_n x}. \tag{2.28}$$

***2º.** Среди простых различных корней* $l_1, l_2, ..., l_n$ *имеются комплексно-сопряженные корни* $l_j=l_j \pm ib_j$.

В общем решении ДУ (2.26) этим двум корням отвечает слагаемое

$$e^{l_j x}\left(C_1\cos b_j x+C_2\sin b_j x\right). \tag{2.29}$$

***3º.** Среди корней характеристического уравнения имеются кратные, действительные или комплексно-сопряженные.*

Если действительный корень характеристического уравнения кратности k, то в общем решении ДУ (2.26) ему соответствует следующая комбинация решений:

$$e^{lx}\left(C_1+C_2x+C_3x^2+...+C_k x^{k-1}\right). \tag{2.30}$$

Если $l=a\pm ib$ – k – кратные комплексные корни характеристического уравнения, то этой паре в общем решении ДУ (2.26) отвечает комбинация решений:

$$\begin{aligned} e^{lx}\Big[&\left(C_1+C_2x+C_3x^2+...+C_k x^{k-1}\right)\cos bx+\\ &+\left(C_{k+1}+C_{k+2}x+C_{k+3}x^2+...+C_{2k}x^{k-1}\right)\sin bx\Big]. \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.27. Найти общее решение ЛОДУ:

$$y^{(6)} - 2y^{(4)} - y''+2y = 0.$$

Δ Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$l^6 - 2l^4 - l^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow l^4\left(l^2 - 2\right) - \left(l^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(l^2 - 2\right)(l - 1)(l + 1)\left(l^2 + 1\right) = 0.$$

Отсюда следует, что корнями характеристического уравнения являются простые действительные корни $l_1 = \sqrt{2}$, $l_2 = -\sqrt{2}$, $l_3 = 1$, $l_4 = -1$ и простая комплексно-сопряженная пара корней $l_{5,6} = \pm i$. Согласно формулам (2.28) и (2.29), записываем общее решение этого ДУ:

$$y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 e^x + C_4 e^{-x} + C_5 \cos x + C_6 \sin x. \blacktriangle$$

2.28. Найти общее решение ЛОДУ:

а) $y'''-6y''+12y'-8y = 0$; б) $y^{(5)} - 5y^{(4)} + 12y'''-16y''+12y'-4y = 0$.

Δ а) Характеристическое уравнение

$$l^3 - 6l^2 + 12l - 8 = 0 \Leftrightarrow (l - 2)^2 = 0$$

имеет трехкратный действительный корень $l = 2$. Согласно (2.30), общее решение данного ДУ имеет вид $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)$;

б) Составляем характеристическое уравнение

$$l^5 - 5l^4 + 12l^3 - 16l^2 + 12l - 4 = 0.$$

Замечаем, что оно имеет простой корень $l_1 = 1$. По теореме Безу левая часть этого уравнения делится нацело на $l - 1$, т.е. получаем разложение

$$(l - 1)\left(l^4 - 4l^2 + 8l^3 - 8l + 4\right) = 0 \Rightarrow l^4 - 4l^2 + 8l^3 - 8l + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(l^2 - 2l\right)^2 + 4\left(l^2 - 2l\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\left(l^2 - 2l\right) + 2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(l^2 - 2l + 2\right)^2 = 0$$

Корнями последнего уравнения являются числа

$$l_{2,3} = 1 \pm i, \; l_{4,5} = 1 \pm i,$$

т.е. его корни – комплексные и двукратные. Согласно (2.28) и (2.31), общее решение данного ДУ есть

$$y = C_1 e^x + e^x[(C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x] =$$
$$= e^x[C_1 + (C_2 + C_3)\, x \cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x]. \blacktriangle$$

2.29. Решить задачу Коши:

$$y'''+y''= 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 1.$$

Δ Характеристическое уравнение $l^3 + l^2 = 0$ данного ДУ имеет двукратный корень $l_{1,2} = 0$ и простой корень $l_3 = -1$. Следовательно, общее решение ДУ есть $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$. Отсюда $y' = C_2 - C_3 e^{-x}$, $y''= C_3 e^{-x}$. Начальные условия приводят к системе

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_3 = 1, \\ C_2 - C_3 = 0, \\ C_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = 1. \end{cases}$$

Значит, решением данной задачи Коши является функция $y = x + e^{-x}$. ▲

2.30. По данным корням характеристического уравнения $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = -3$, $l_{5,6} = 4$, $l_{7,8,9,10} = -2 \pm 5i$ записать формулу общего решения соответствующего ДУ.

∆ Замечаем, что комплексно-сопряженная пара $-2 \pm 5i$ – двукратный корень, $l = -3$ – четырехкратный, а $l = 4$ – двукратный. Значит, общее решение соответствующего решения имеет вид

$$y = e^{-3x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3\right) + e^{4x}(C_5 + C_6 x) +$$
$$+ e^{-2x}\left[(C_7 + C_8 x)\cos 5x + (C_9 + C_{10} x)\sin 5x\right]. ▲$$

2.31. Материальная точка массой m, отталкиваемая от неподвижного центра силой, пропорциональной расстоянию, движется по прямой. Начальные условия: $x(t_0) = x_0$, $v(t_0) = v_0$. Найти закон движения точки.

∆ По 2-му закону Ньютона получаем ДУ: $mx'' = k^2 mx$, где $x = x(t)$, (коэффициент пропорционально выбран в виде $k^2 m$ для удобства). Его общее решение есть

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}.$$

Из начальных условий определяем C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{kx_0 + v_0}{2k} e^{-kt_0}, \quad C_2 = \frac{kx_0 - v_0}{2k} e^{kt_0}.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \frac{v_0}{k}\right) e^{k(t-t_0)} + \left(x_0 + \frac{v_0}{k}\right) e^{-k(t-t_0)}\right]$$

– искомый закон движения точки. ▲

2.32. Проинтегрировать следующие ДУ и, где указано, решить задачу Коши:

а) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$;

б) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$;

в) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$;

г) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$;

д) $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$;

е) $y''' - y' = 0$; $y(2) = 1$, $y'(2) = y''(2) = 0$;

ж) $y^{IV} - y = 0$;

з) $y^{(5)} + 6y^{(4)} - 3y = 0$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{IV}(0) = 0$;

и) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$;

к) $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Отв.: а) $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$;

б) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$;

в) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} + C_4 e^{-2x}$;

г) $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x$;

д) $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x$;

е) $y = 1$; ж) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$;

з) $y = 0$; и) $y = e^{x}(1 + x)$; к) $e^{x} \sin x$.

2.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков

Пусть дано ЛНДУ-*n*:

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x), \quad (2.31а)$$

где $a_1(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$ – непрерывные на (a, b) функции. Для этого уравнения справедлива

Теорема 2.5 (*о структуре общего решения ЛНДУ-n*). *Общее решение y НЛДУ (2.31а) представляет собой сумму любого (какого-либо) его частного решения* $y^*(x)$ *и общего решения* $y^{\mathbf{0}}(x)$ *соответствующего однородного уравнения (ЛОДУ)*

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) = 0. \quad (2.31б)$$

Если $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ *– ФСР этого ДУ, то общее решение ЛНДУ есть*

$$y(x) = y^*(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x). \quad (2.32)$$

Для ЛНДУ справедлив *принцип суперпозиции (наложения) решений*: если $y_i^*(x)$ – решение ЛНДУ

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f_i(x),\ i = \overline{1, k},$$

то $y_1^*(x) + y_2^*(x) + \ldots + y_k^*(x)$ – решение уравнения (2.31а), в котором $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$.

Пусть теперь

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (2.33)$$

– НЛДУ с постоянными коэффициентами. Его общее решение $y(x) = y^* + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$, где $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – ФСР соответствующего ЛОДУ, задача отыскания которой рассмотрена в п. 2.2. Поэтому основной задачей является отыскание частного решения y^* ДУ (2.33). Для *специального вида* правых частей $f(x)$ эта задача решается *методом подбора частного решения (методом неопределенных коэффициентов)*.

Виды правых частей $f(x)$, для которых применим метод подбора отыскания частного решения $y^*(x)$ уравнения (2.33), следующие.

1°. $f(x) = P_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$ (2.34)

где A_i, $i = \overline{0, m}$ – действительные числа. При этом:

а) если $l = 0$ не является корнем характеристического уравнения

$$l^n + a_1 l^{n-1} + a_2 l^{n-2} + \ldots + a_{n-1} l + a_n = 0 \qquad (2.35)$$

(нерезонансный случай), то частное решение в этом случае ищется в виде

$$y^* = B_0 y^m + B_1 y^{m-1} + \ldots + B_{m-1} y + B_m, \qquad (2.36)$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_m$ – неопределенные коэффициенты. Для их отыскания функция (2.36) подставляется в уравнение (2.33), после чего, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем систему линейных уравнений относительно B_i, $i = \overline{0, m}$.

б) Если $l = 0$ – корень кратности k характеристического уравнения (2.35) (*резонансный случай*), то в этом случае

$$y^* = x^k \left(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1} x + B_m \right). \qquad (2.37)$$

Коэффициенты $B_0, \ldots, B_m$ находятся по схеме, изложенной в «а».

2.33. Найти общее решение ДУ:

а) $y'' - 8y' + 7y = 3x^2 + 7x + 8$; (2.38)

б) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$. (2.39)

Δ а) Составляем характеристическое уравнение $l^2 - 8l + 7 = 0$, его корни $l_1 = 1$, $l_2 = 7$. Следовательно, $y^* = C_1 e^x + C_2 e^{7x}$ – общее решение соответствующего ЛОДУ.

Так как $l = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение y^* ДУ (2.38), согласно (2.36), ищем в виде $y^* = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow y^{*\prime} = 2Ax + B$, $y^{*''} = 2A$. Подставив $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ в ДУ (2.38), получим

$$7Ax^2 + (7B - 16)x + (2A - 8B + 7C) = 3x^2 + 7x + 8.$$

Отсюда имеем систему

$$\left.\begin{array}{r|c} x^2 & 7A = 3, \\ x & 7B - 16 = 7, \\ 1 & 2A - 8B + 7C = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 3/7, \\ B = 97/49, \\ C = 1126/343. \end{cases}$$

Следовательно, общее решение ДУ (2.38):

$$y = y^0 + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{7x} + \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1126}{343}. \blacktriangle$$

б) Δ Характеристическое уравнение $l^3 - l^2 = 0$ имеет простой корень $l = 1$ и двукратный корень $l_2 = l_3 = 0$ (резонанс). Общее решение соответствующего ЛОДУ есть $y^{\mathbf{0}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$. Частное решение ДУ (2.39) в соответствии с (2.37) ищем в виде

$$y^* = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Подставив $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}, y^{*\prime\prime\prime}$ в ДУ (2.39), придем к системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} -12A = 12, \\ 24A - 6B = 6, \\ 6B - 2C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = -5, \\ C = -15. \end{cases}$$

Значит, общее решение ДУ (2.39) есть

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^2 \left(x^2 + 5x + 15\right). \blacktriangle$$

2°. Правая часть ДУ (2.33) имеет вид

$$f(x) = e^{ax} P_m(x) = e^{ax}\left(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m\right). \qquad (2.40)$$

При этом:

а) если $l = a$ не является корнем характеристического уравнения (2.35), то частное решение ДУ (2.33) в этом случае ищется в виде

$$y^* = e^{ax}\left(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1}x + B_m\right); \qquad (2.41)$$

б) если $l = a$ – корень кратности k характеристического уравнения (резонанс), то частное решение ДУ (2.33) ищется в виде

$$y^* = x^k e^{ax}\left(B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1}x + B_m\right). \qquad (2.42)$$

В (2.41) и (2.42) $B_0, B_1, \ldots, B_m$ – неопределенные коэффициенты, которые находятся по схеме, изложенной выше.

2.34. Найти общее решение ДУ:

$$y'' - 2y' + 4y = (x+2)\,e^{3x}. \qquad (2.43)$$

Δ Характеристическое уравнение $l^2 - 2l + 4 = 0$ имеет корни $l_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$.

Следовательно, общее решение соответствующего ЛОДУ имеет вид $y^{\mathbf{0}} = e^x\left(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x\right)$. Поскольку $l = 3$ (e^{3x} находится в правой части ДУ (2.43)) не является корнем характеристического уравнения, то, согласно (2.41), частное решение уравнения (2.43) ищем в виде

$$y^* = (Ax + B)e^{3x} \Rightarrow y^{*\prime} = e^{3x}(3Ax + A + 3B),$$

$$y^{*\prime\prime} = e^{3x}(9Ax + 6A + 9B).$$

Отсюда и из (2.43) получаем (после сокращения на e^{3x})

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 7A, \\ 2 = 4A + 7B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/7, \\ B = 10/49. \end{cases}$$

Поэтому

$$y = y^{\mathbf{0}} + y^* = e^x\left(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x\right) + e^{3x}\left(\frac{1}{7}x + \frac{10}{49}\right)$$

– общее решение ДУ (2.43). ▲

2.35. Решить задачу Коши:

$$y'' = 2y' + y = xe^x;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \qquad (2.44)$$

Δ Характеристическое уравнение $l^2 - 2l + 1 = 0$ имеет двукратный корень $l = 1$ (резонанс).

Общим решением соответствующего ЛОДУ является $y^{\mathbf{0}} = e^x(C_1 + C_2 x)$. Так как правая часть ДУ (2.44) имеет вид $f(x) = xe^x$, то частное решение $y^*(x)$ этого ДУ ищем в виде

$$y^* = x^2(Ax + B)e^x = \left(Ax^3 + Bx^2\right)e^x \Rightarrow y^{*\prime} = e^x\left(Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx\right),$$

$$y^{*\prime\prime} = e^x\left(Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B\right).$$

Отсюда и из ДУ (2.44) после сокращения на e^x получаем $A = 1/6$, $B = 0$.

Следовательно, $y^* = \dfrac{1}{6}x^3 e^x$, и, значит, $y = (C_1 + C_2 x)\,e^x + \dfrac{1}{6}x^3 e^x$ – общее решение ДУ (2.44).

Отсюда и из начальных условий $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ находим $C_1 = 1$, $C_2 = -1/2$, т.е. $y = (1 + x/2)e^x + \left(x^3/6\right)e^x = e^x\left(x^3/6 + x/2 + 1\right)$ – искомое решение задачи Коши (2.44). ▲

2.36. Найти общее решение ДУ

$$y''' - y'' - y' + y = x^2 + e^x. \qquad (2.45)$$

Δ Характеристическое уравнение $l^3 - l^2 - l + 1 = (l - 1)^2(l + 1) = 0$ имеет простой корень $l_1 = -1$ и двукратный корень $l_2 = l_3 = 1$. Значит, общее решение соответствующего ЛОДУ есть

$$y^{\mathbf{0}} = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)e^x.$$

В соответствии с принципом суперпозиции решений частное решение ДУ (2.45) ищем в виде $y^* = y_1^* + y_2^*$, где y_1^* – решение ДУ $y''' - y'' - y' + y = x^2$, а y_2^* – решение ДУ $y''' - y'' - y' + y = e^x$. Решение y_1^* ищем в виде $y_1^* = Ax^2 + Bx + C$, а решение y_2^* – в виде $y_2^* = x^2 \cdot De^x$ (резонанс).

Найдя коэффициенты *A, B, C; D* по схеме, изложенной выше, получим $A = 1$, $B = 2$, $C = 0$; $D = 1/6$.

Следовательно, $y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)\,e^x + x^2 + 2x + \dfrac{1}{6}x^2 e^x$. ▲

2.37. Найти частное решение ДУ

$$y'' - 4y' + 4y = \left(9x^2 + 5x - 12\right)e^{-x}, \qquad (2.46)$$

удовлетворяющее условию $y \to 0$ при $x \to +\infty$.

Δ Число $l = 2$ – двукратный корень характеристического уравнения $l^2 - 4l + 4 = 0$, и $y^{\mathbf{0}} = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$ – общее решение соответствующего ЛОДУ. Частное решение y^* ДУ (2.46) ищем в виде $y^* = \left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{-x}$. После подстановки $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ в ДУ (2.46) и сокращения на e^{-x} обеих частей придем к линейной системе относительно *A, B, C,* откуда $A=1$, $B=17/9$, $C=-1/4$. Следовательно, общее решение уравнения (2.46) есть

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\left(x^2+\frac{17}{9}x-\frac{1}{4}\right)e^{-x}. \qquad (2.47)$$

При $x\to+\infty$ и при любых C_1 и C_2, не равных одновременно нулю, первое слагаемое в правой части (2.47) будет функцией, неограниченной при $x\to+\infty$, а второе слагаемое – функцией, стремящейся к нулю $\forall x$, поскольку $e^{-x}\to 0$ при $x\to+\infty$. Следовательно, только при $C_1=C_2=0$ имеем решение $y\to 0$ при $x\to+\infty$. ▲

3°. Правая часть ДУ (2.33) имеет вид

$$f(x)=e^{ax}\left(P_l(x)\cos\ bx+Q_m(x)\sin\ bx\right), \qquad (2.48)$$

где $P_l(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени l и m соответственно; $a, b\in\boldsymbol{R}$.

В этом случае если числа $l=a\pm bi$ не являются корнями характеристического уравнения соответствующего ЛОДУ, то частное решение y^* ДУ (2.48) ищется в виде

$$y^*=e^{ax}(U_s(x)\cos\ bx+V_s(x)\sin\ bx), \qquad (2.49)$$

где $U_s(x)$, $V_s(x)$ – многочлены степени s с неопределенными коэффициентами, $s=\max\{l,m\}$, т.е. s равно наивысшей из степеней многочленов $P_l(x)$, $Q_m(x)$.

В случае резонанса ($a\pm bi$ – корень кратности k характеристического уравнения) частное решение y^* надо искать в виде

$$y^*=x^ke^{ax}(U_s(x)\cos bx+V_s(x)\sin bx). \qquad (2.50)$$

В формулах (2.37), (2.42) и (2.50) для частного решения множитель x^k часто называют *резонансным*.

2.38. Найти общее решение ЛНДУ

$$y''+y=(3x+2)\sin 2x+\left(x^2+x+2\right)\cos 2x. \qquad (2.51)$$

Δ Характеристическое уравнение $l^2+1=0$ имеет простые корни $l_{1,2}=\pm i$. Общее решение соответствующего ЛОДУ есть

$$y^{\mathbf{0}}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

По виду правой части $f(x)$ ДУ (2.51) замечаем, что $a\pm bi=0=2i=\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения. Далее, многочлены при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в правой части имеют степени $l=2$, $m=1$, т.е. $s=2$. Поэтому частное решение y^* уравнения (2.51) ищем в виде

$$y^*=\left(Ax^2+Bx+C\right)\cos 2x+\left(Dx^2+Ex+F\right)\sin 2x.$$

Отсюда

$$y^{*\prime\prime}=\left(-4Ax^2-4Bx+8Dx+2A-4C+4E\right)\cos 2x+$$

$$+\left(-4Dx^2-4Ex-8Ax-4B+2D-4F\right)\sin 2x.$$

Подставив y^* и $y^{*''}$ в уравнение (2.51), получим

$$\left(-3Ax^2-3Bx+8Dx+2A-3C+4E\right)\cos 2x+$$

$$+\left(-3Dx^2-3Ex-8Ax-4B+2D-3F\right)\sin 2x=\left(x^2+x+2\right)\cos 2x+(3x+2)\sin 2x.$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в левой и правой частях этого равенства, получаем систему:

$$\begin{cases}-3Ax^2+(-3B+8D)x+(2A-3C+4E)=x^2+x+2,\\ -3Dx^2+(-3E-8A)x+(-4B+2D-3F)=3x+2.\end{cases}$$

Сравнивая теперь в каждом из этих уравнений коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$x^2\left|\begin{aligned}-3D=0,\\ -3A=1,\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/3,\\ D=0;\end{cases}$$

$$x\left|\begin{aligned}-3E+8A=3,\\ -3B+8D=1,\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}B=-1/3,\\ E=-1/9;\end{cases}$$

$$x^0\left|\begin{aligned}-4B+2D-3F=2,\\ 2A-3C+4E=2,\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}C=-28/27,\\ F=-2/9.\end{cases}$$

Окончательно общее решение ДУ (2.51) есть

$$y=y^{\mathbf{0}}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{28}{27}\right)\cos 2x+\left(-\frac{1}{9}x-\frac{2}{9}\right)\sin 2x.\ \blacktriangle$$

2.39. Определить вид частного решения ЛНДУ, если известны корни его характеристического уравнения $l_1=3-4i(k=3)$, $l_2=2+i(k=2)$ и правая часть

$$f(x)=(3x-5)\cos 3x+4\sin 3x+e^{2x}(2x-1)\sin x. \qquad (2.52)$$

Δ По корням l_1 и l_2 записываем общее решение соответствующего ЛОДУ:

$$y^{\mathbf{0}}=e^{3x}\left[\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)\cos 4x+\left(C_4+C_5x+C_6x^2\right)\sin 4x\right]+$$

$$+e^{2x}\left[(C_7+C_8x)\cos 2x+(C_9+C_{10}x)\sin 2x\right].$$

В соответствии с принципом суперпозиции частное решение НЛДУ $y^*=y_1^*+y_2^*$, где, согласно (2.52), (2.49) и (2.50),

$$y_1^*=(Ax+B)\cos 3x+(Cx+D)\sin 3x,$$

$$y_2^*=x^2e^{2x}\left[(Ex+F)\cos x+(Gx+H)\sin x\right].\blacktriangle$$

2.40. Проинтегрировать следующие ДУ и, где указано, решить задачу Коши.

1°. а) $y''-2y'=x^3+2x-1$.

Отв. $y = C_1 + C_2 e^{2x} - x^4/8 - x^3/4 - 7x^2/8 - 3x/8$.

б) $y'' + y' = x^2 + 2x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$. **Отв.** $y = 2 + 2e^{-x} + x^3/3$.

в) $y''' - y'' = 6x + 3$. **Отв.** $y = -x^3 - 9x^2/2 + C_1 + C_2 x + C_3 e^x$.

г) $y''' + y' = x^2 - 1$. **Отв.** $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + x^3/3 - 3x$.

д*) $y''' + y' = 2\cos^2 x - 1$.

Отв. $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

е) $y''' + y = 2x$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

Отв. $y = 2x - \dfrac{4}{\sqrt{3}} e^{-x/2} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$

2°. а) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.

Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (x^2/2 - x + 1)e^{3x}$.

б) $y''' + y'' = 49 - 24x^2$. **Отв.** $y = -2x^4 + 8x^3 + x^2/2 + C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$.

в) $y'' - y = 2\sin^2(x/2)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Отв. $y = -1 + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{e^x + e^{-x}}{4}$.

г) $y''' + y' = e^{2x}$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Отв. $y = -1/2 + \dfrac{2}{5}\cos x - \dfrac{1}{5}\sin x + \dfrac{1}{10}e^{2x}$.

д) $y''' - 2y'' + y' = xe^{2x}$. **Отв.** $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + (x/2 - 5/4)e^{2x}$.

е) $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

Отв. $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$.

ж*) $y''' + y = 2xe^x(x^3 + 6x^2 + 18x + 12)$.

Отв. $y = C_1 e^{-x} + e^{x/2}\left(C_2 \cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right) + x^4 e^x$.

3°. а) $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}\cos x$.

Отв. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + e^{-x}(4x\sin x - x^2\cos x + 6\cos x)$.

б) $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x$.

Отв. $y = (C_1 + C_2 x)\sin x + (C_3 + C_4 x)\cos x - (1/8)\, x^2 \sin x$.

в) $y^{IV} + y''' = \cos x$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y'''(0) = 5$.

Отв. $y = \dfrac{5}{2}x^2 - 4x + 4 - \dfrac{9}{2}e^{-x} + \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x$.

г) $y''-y'=-5e^{-x}(\cos x+\sin x)$; $y(0)=-4$, $y'(0)=5$.

Отв. $y=2e^{x}+(\sin x-2\cos x)\,e^{-x}-4$.

д) $y^{IV}-y=5e^{x}\sin x$.

Отв. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-e^{x}\sin x$.

е)* $y''+4y=\sin 2x$; $y(0)=y'(0)=0$. **Отв.** $y=-\dfrac{x}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\sin 2x$.

2.41. Решить ДУ:

а) $y''+y'-2y=2xe^{-2x}+5\sin x$.

Отв. $y=-(x^2/3+2x/9)e^{-2x}-\dfrac{1}{2}(3\sin x+\cos x)+C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$.

б)* $y^{IV}+2y''+y=9\sin 2x+x^2$.

Отв. $y=\sin 2x+x^2-4+C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x\cos x+C_4x\sin x$.

2.42. Указать вид частного решения ЛНДУ, не отыскивая числовых значений неопределенных коэффициентов:

а) $y'''-4y'=3+e^{2x}+e^{2x}\sin 2x$;

б) $y'''+5y''+4y'=x^2+xe^{-4x}+x^2e^{-x}+\sin 2x$;

в) $y^{IV}-5y'''+6y''=2\sin 2x+x^2e^{3x}+e^{-2x}\cos 3x$;

г)* $y^{IV}-4y'''+5y''=x^2\cos 2x+xe^{x}\sin 2x+3e^{x}\sin x$.

Отв.: а) $y=Ax+Bxe^{2x}+e^{2x}(C\cos 2x+D\sin 2x)$;

б) $y=x(Ax^2+Bx+C)+x(Dx+E)e^{-4x}+x(Fx^2+Gx+I)e^{-x}+K\cos 2x+L\sin 2x$;

в) $y=A\cos 2x+B\sin 2x+xe^{3x}(Cx^2+Dx+E)+e^{-2x}(F\cos 3x+G\sin 3x)$;

г) $y=(Ax^2+Bx+C)\cos 2x+(Cx^2+Dx+E)\sin 2x+$
$+e^{x}[(Fx+G)\cos 2x+(Ix+K)\sin 2x]+xe^{2x}(L\cos x+M\sin x)$.

2.43. Найти частные решения ДУ, удовлетворяющие заданным условиям на бесконечности:

а) $y''+2y'+5y=4\cos 2x+\sin 2x$; y ограничено при $x\to-\infty$;

б) $y''-y=-2\cos x$; y ограничено при $x\to-\infty$;

в) $y''-2y'+y=4e^{-x}$; $y\to 0$ при $x\to-\infty$;

г) $y''+4y'+4y=2e^{x}(\sin x+7\cos x)$; $y\to 0$ при $x\to-\infty$;

Отв.: а) $y=\sin 2x$; б) $y=\cos x$. в) $y=e^{-x}$; г) $y=(\cos x+\sin x)e^{x}$.

ЛДУ вида

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=f(x) \quad (2.53)$$

называется *уравнением Эйлера*. Здесь a_i, a и b – постоянные действительные числа.

В частности, при $a=1,\ b=0$ ДУ (2.53) принимает вид

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x). \qquad (2.54)$$

Заменой $ax+b=e^t\,(t=\ln|ax+b|)$ в случае уравнения (2.53) или $x=e^t$ $(t=\ln|x|)$ в уравнении (2.54) ДУ Эйлера всегда сводится к ЛДУ с постоянными коэффициентами.

2.44. Найти общее решение ДУ Эйлера:

а) $(3x+1)^2y''-2(3x+1)y'-12y=0$; (2.55)

б) $x^2y''+4xy'+12y=\ln x$. (2.56)

Δ а) Введем замену $3x+1=e^t$. Тогда

$y'=3e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$, $y''=9e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)$ и, значит, ДУ сводится к виду

$$9e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-2\cdot 3e^t\cdot e^{-t}\frac{dy}{dt}-12y=0$$

или

$$3y''_{tt}-5y'_t-4y=0.$$

Общим решением этого уравнения является

$$y=e^{\frac{5}{6}t}\left(C_1e^{\frac{\sqrt{73}}{6}t}+C_2e^{-\frac{\sqrt{73}}{6}t}\right).$$

При $t=\ln|3x+1|$ получим

$$y=(3x+1)^{5/6}\left[C_1(3x+1)^{\sqrt{73}/6}+C_2(3x+1)^{-\sqrt{73}/6}\right]$$

– общее решение ЛДУ (2.55).

б) Подстановкой $x=e^t$; $t=\ln x$ уравнение (2.56) сводится к НЛДУ

$$y''_{tt}+3y'_t+12y=t,$$

общим решением которого является

$$y=e^{-3t/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t\right)+\frac{t}{12}-\frac{1}{48}.$$

Так как при $t=\ln x$ имеем $e^{-\frac{3}{2}t}=x^{-\frac{3}{2}}$, то отсюда

$$y=x^{-3/2}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right)\right]+\frac{\ln x}{12}-\frac{1}{48}. \ ▲$$

2.45. Решить уравнения Эйлера:

а) $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$; б) $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0$;

в)* $(x+1)^3y''+3(x+1)^2y'+(x+1)y=6\ln(x+1)$;

г) $(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x$; д) $x^2y''+xy'+y=2\sin(\ln x)$;

е) $x^3y'''+xy'-y=0$.

Отв.: а) $y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3$. б) $y=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)\ln|2x+1|$;

в) $y=\dfrac{1}{x+1}\left(C_1+C_2\ln|x+1|+\ln^3|x+1|\right)$;

г) $y=(x-2)^2\left[C_1+C_2\ln|x-2|\right]+x-3/2$;

д) $y=C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|-\ln|x|\cdot\cos\ln|x|$;

е) $y=(C_1+C_2|\ln x|+C_3\ln^2|x|)\,x$.

Пусть $\{y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)\}$ – ФСР ЛОДУ

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\dots+C_ny_n(x),\ x\in(a,b),$$

где C_i – произвольные постоянные, $i=\overline{1,n}$.

Зная общее решение однородного уравнения, всегда можно решить неоднородное по *методу вариации произвольных постоянных* (*метод Лагранжа*), в соответствии с которым общее решение неоднородного ЛДУ

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

ищется в виде

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\dots+C_n(x)y_n(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i(x), \qquad (2.57)$$

где $C_i(x)\in C^{(1)}(a,b)$, $i=\overline{1,n}$.

Неизвестные функции $C_i(x)$ из (2.57) находятся как решения системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+\dots+C_n'(x)y_n(x)=0,\\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+\dots+C_n'(x)y_n'(x)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\dots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=0,\\ C_1'(x)y_1^{(n)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n)}(x)+\dots+C_n'(x)y_n^{(n)}(x)=f(x). \end{cases} \qquad (2.58)$$

Определителем этой системы является вронскиан $W[y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)]\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$. Поэтому система (2.58) имеет единственное решение $C_i'(x)=j_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, откуда

$$C_i(x)=\int j_i(x)\,dx+C_i,$$

где C_i – произвольные постоянные, $i=\overline{1,n}$.

В частности, для НЛДУ-2

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x) \qquad (2.59)$$

система (2.58) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ &C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x), \end{aligned}\right\} \tag{2.60}$$

где $\{y_1(x), y_2(x)\}$ – ФСР ДУ $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$, соответствующего ЛНДУ (2.59).

2.46. Функции $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=e^{-x}$ − ФСР ДУ $y'''+y''=0$. Методом вариации решить ДУ

$$y'''+y''=\frac{x-1}{x^2}. \tag{2.61}$$

Δ Согласно (2.57), общее решение ДУ (2.61) ищем в виде

$$y=C_1(x)\cdot 1+C_2(x)\cdot x+C_3(x)\,e^{-x}, \tag{2.62}$$

где функции $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ − решения системы

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x)+C_2'(x)\cdot x+C_3'(x)\cdot e^{-x}, \\ &C_2'(x)-C_3'(x)\cdot e^{-x}, \\ &C_3'(x)\,e^{-x}=\frac{x-1}{x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

Из 3-го уравнения этой системы находим

$$C_3'(x)=\frac{x-1}{x^2}e^{x} \Rightarrow C_3(x)=\int\frac{x-1}{x^2}e^{x}dx+C_3=\int d\left(\frac{e^{x}}{x}\right)+C_3=\frac{e^{x}}{x}+C_3.$$

Из 2-го уравнения системы (2.63) получаем

$$C_2'(x)=C_3'(x)\,e^{-x}=\frac{x-1}{x^2} \Rightarrow C_2(x)=\int\frac{x-1}{x^2}dx+C_2=\ln|x|+\frac{1}{x}+C_2.$$

Наконец, из 1-го уравнения системы (2.63) получим

$$C_1'(x)=-C_2'(x)\cdot x-C_3'(x)\cdot e^{-x}=-\frac{x-1}{x}-\frac{x-1}{x^2}=\frac{1-x^2}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x)=\int\frac{1-x^2}{x^2}dx+C_1=-\frac{1}{x}-x+C_1.$$

Подставив найденные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ в равенство (2.62), получим общее решение ЛНДУ (2.61):

$$y=\left(-\frac{1}{x}-x+C_1\right)\cdot 1+\left(\ln|x|+\frac{1}{x}+C_2\right)+\left(\frac{e^{x}}{x}+C_3\right)e^{-x}=$$

$$=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+x\ln x-x+1. \ \blacktriangle$$

Замечание. В общем случае систему (2.58) можно решить по формулам Крамера.

2.47. Найти общее решение ДУ:

а) $y''-y=\dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$. **Отв.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-4\sqrt{x}$.

б) $y'''+y'=(\sin x)/\cos^2 x$.

Отв. $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+1/\cos x+\cos\ln|\cos x|+\sin x\cdot(x-tgx)$.

в) $y''+2y'+2y=e^{-x}/\sin x$.

Отв. $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\cdot\ln|\sin x|)$.

2.48. Решить задачу Коши:

а) $y''+y=ctgx$; $y(p/2)=1$, $y'(p/2)=2$.

Отв. $y=\left(1+2\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|\right)\sin x$.

б) $y''-3y'+2y=e^x/(1+e^{-x})$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Отв. $y=e^x\cdot\ln\dfrac{2}{1+e^x}+e^{2x}\ln\dfrac{2}{1+e^{-x}}$.

в) $y''+y=1/\cos x; y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Отв. $y=(1+\ln|\cos x|)\cos x+x\sin x$.

2.49. Найти решение ДУ при заданных условиях на бесконечности:

а) $4xy''+2y'=y=1$; $y_1=\sin\sqrt{x}$, $y_2=\cos\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=1$;

б) $(1-x)y''+xy'-y=(x-1)^2e^x$; $y(0)=1$, $y_1=x$, $y_2=e^x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y(x)=0$;

в)* $2x^2(2-\ln x)y''+x(4-\ln x)y'-y=\dfrac{(2-\ln x)^2}{\sqrt{x}}$; $y(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$; $y_1=\ln x$, $y_2=\sqrt{x}$.

Отв.: а) $y=1$; б) $y=(1+x-x^2/2)e^x$; в) $y=(1-\ln x)/\sqrt{x}$.

Для ЛОДУ-*n* можно указать подстановки, понижающие его порядок, если известно хотя бы одно его ненулевое решение.

Например, предположим, что для ЛОДУ-2

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0 \qquad (2.64)$$

известно его некоторое ненулевое решение $y_1(x)$, т.е.

$$y_1''+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)\equiv 0. \qquad (2.65)$$

Введем замену

$$y=y_1\int z(x)\,dx, \qquad (2.66)$$

где $z(x)$ – неизвестная пока функция. Отсюда

$$y'=y_1'\int z(x)dx,\ y''=y_1''\int z(x)\,dx+2y_1'\,z(x)+y_1z'(x).$$

Подстановка y, y', y'' в (2.64) с учетом (2.65) приводит к ЛДУ-1 относительно $z(x)$:

$$y_1 z'(x) + (2y_1 + a_1(x) y_1)\, z(x) = 0,$$
порядок которого на единицу меньше порядка исходного ДУ (2.64).

По этой же схеме можно понизить порядок ЛНДУ-2 $y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x)$, если известно ненулевое решение соответствующего ЛОДУ (2.64).

2.50. Зная, что $y_1 = x$ – решение ЛОДУ $y'' + y'/x - y/x^2 = 0$, решить уравнение
$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = e^{-3x}. \tag{2.67}$$

Δ Согласно (2.66) вводим замену $y = x\int z(x)\,dx \Rightarrow y' = \int z(x) dx + x z(x)$, $y'' = 2z(x) + z'(x)$. В результате ДУ (2.67) приводится к ЛДУ-1:
$$z'(x) + 3z(x) = e^{-3x}, \tag{2.68}$$
интегрирующий множитель которого $m(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$. Умножив на него обе части ДУ (2.68), получим $\left(ze^{3x}\right)' = 1 \Rightarrow z = (x + C_1)\, e^{-3x}$. В таком случае общее решение исходного ДУ (2.67) есть
$$y = x\int (x + C_1)\, e^{-3x} dx = -\left(\frac{x + C_1}{3}\right) x e^{-3x} - \frac{x e^{-3x}}{9} + C_2. \ ▲$$

2.51. Проинтегрировать ДУ, допускающее понижение порядка, пользуясь указанным частным решением.

а) $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$; $y_1 = (\sin x)/x$;

б) $(\sin x - \cos x) y'' - 2\sin x \cdot y' + (\cos x + \sin x) y = 0$; $y_1 = e^x$;

в) $(\sin x + \cos x) y'' - 2\cos x \cdot y' - (\cos x - \sin x) y = 0$; $y_1 = \cos x$;

г) $(1 - x^2) y'' - x y' + y/4 = 0$; $y_1 = \sqrt{1 + x}$.

Отв.: а) $y = C_1 (\sin x)/x + C_2 (\cos x)/x$; б) $y = C_1 e^x + C_2 \sin x$;
в) $y = C_1 \cos x + C_2 e^x$; г) $y = C_1 \sqrt{1 - x} + C_2 \sqrt{1 + x}$.

2.4. Приложения степенных рядов к интегрированию ДУ. ДУ Бесселя

Применение степенных рядов к интегрированию ДУ. Разложение решения ДУ в обобщенный степенной ряд. ДУ Бесселя. Функции Бесселя и некоторые их свойства. Нахождение периодических решений ЛДУ-2. Понятие о краевых задачах для ДУ.

Степенные ряды часто применяются при решении ДУ. Одним из методов применения является *метод последовательных дифференцирований,* суть которого рассмотрим на примере решения задачи Коши:

$$y''=F(x,y,y');\ y(x_0)=A_0,\ y'(x_0)=A_1. \qquad (2.69)$$

Если в окрестности начальных условий уравнение (2.69) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши, то частное решение этой задачи ищется в виде ряда Тейлора:

$$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)+\ldots, \qquad (2.70)$$

в котором первые два коэффициента известны: $y(x_0)=A_0$, $y'(x_0)=A_1$. Из уравнения (2.69) находим $y''=F(x_0,y_0,y'_0)=F(x_0,A,A_1)$. Продифференцировав ДУ (2.69), последовательно находим

$$y'''(x_0)=\frac{dF(x_0,A_0,A_1)}{dx},\ldots,y^{(n)}(x_0)=\frac{d^{n-2}F(x_0,A_0,A_1)}{dx^{n-2}}.$$

Подставляя найденные производные функции $y(x)$ в (2.70), получаем искомое решение в виде ряда.

Этот метод без существенных изменений переносится на решение задачи Коши для ДУ любого порядка.

2.52. Найти четыре первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ задачи Коши:

$$y'=\sin x+0{,}5y^2;\ y(0)=1. \qquad (2.71)$$

Δ Искомое решение $y=y(x)$ ищем в виде ряда (2.70), в котором $x_0=0$, $y(x_0)=1$, т.е.

$$y(x)=1+y'(0)\,x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots\ . \qquad (2.72)$$

Из уравнения (2.71) имеем $y'(0)=\sin 0+0{,}5\cdot 1^2=0{,}5$. Далее, последовательно дифференцируя обе части уравнения (2.71) по x, получаем

$$y''=\cos x+yy'\Rightarrow y''(0)=1+y(0)\cdot y'(0)=1{,}5;$$

$$y'''=-\sin x+y'^2+y\cdot y''\Rightarrow y'''(0)=0{,}5^2+1\cdot 1{,}5=1{,}75.$$

Подставляя $y(0)$ и найденные $y'(0)$, $y''(0)$ и $y'''(0)$ в равенство (2.72), получаем решение исходного ДУ (2.71)

$$y=1+0{,}5x+0{,}75x^2+\frac{1{,}75}{6}x^3+\ldots\ \blacktriangle$$

2.53. Методом последовательных дифференцирований решить задачу Коши:

а) $y''=-yx^2;\ y(0)=1,\ y'(0)=0;$ б) $y''+xy=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=0;$

в) $y'=x^2-y^2;\ y(0)=1;$ г) $y''=x^2y;\ y(0)=y'(0)=1;$

д) $y'=x+x^2+y^2;\ y(0)=1;$ е) $y'=y^3-x;\ y(0)=1;$

ж) $y'' = yy' - x^2$; $y(0) = y'(0) = 1$.

Отв.: а) $1 - \dfrac{x^4}{4!} 1\cdot 2 + \dfrac{x^8}{8!}(1\cdot 2)(5\cdot 6) - \dfrac{x^{12}}{12!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)(9\cdot 10) + \ldots.$

$+(-1)^n \dfrac{x^{4n}}{(4n)!}(1\cdot 2)(5\cdot 6)\cdots((4k-3)(4k-2)) + \ldots.;$

б) $1 - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^6}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \ldots;$ в) $1 - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{7\cdot 9}x^7 - \dfrac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11} + \ldots;$

г) $1 + x + \dfrac{x^4}{3\cdot 4} + \dfrac{x^5}{4\cdot 5} + \ldots;$ д) $1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{10}{3!}x^3 + \ldots;$

е) $1 + x + x^2 + 2x^3 + \dfrac{13}{4}x^4 + \ldots;$ ж) $x + x^2/2! + 2x^3/3! + \ldots;$

Пусть дано ЛДУ-2

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \tag{2.73}$$

Если в окрестности точки x_0 это уравнение удовлетворяет условиям существования и единственности решения, то частное или общее решение ищется в виде формального степенного ряда $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$, в котором коэффициенты C_n подлежат определению. Если точка x_0 – *особая* для ДУ (2.73), т.е. в ней хотя бы одна из функций $p_1(x)$, $p_2(x)$ или $f(x)$ не определена, то его частное или общее решение ищется в виде *обобщенного степенного ряда*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r}, \; C_0 \neq 0, \tag{2.74}$$

где r подлежит определению вместе с коэффициентами C_n ряда.

Для определения C_n ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$ или обобщенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r}$ необходимо:

1) дважды продифференцировать ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$ с неизвестными C_n и найти y' и y'';

2) подставить разложения y, y' и y'' в виде степенных рядов в ДУ (2.73);

3) функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $f(x)$ представить в виде рядов по степеням $x - x_0$, после чего ДУ (2.73) превращается в равенство двух степенных рядов;

4) приравнять коэффициенты в полученных рядах при одинаковых степенях $x - x_0$ слева и справа, при этом получим уравнения для определения C_n; если же решение ищется в виде обобщенного степенного ряда (2.74), то после

приравнивания коэффициентов при наименьшей степени $x - x_0$ получаем так называемое *определяющее уравнение*, из которого находятся всевозможные (допустимые) значения параметра r;

5) найденные C_n подставить в искомый ряд $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$; в случае обобщенного степенного ряда (2.74) коэффициенты C_n найти для каждого r и тем самым получить столько частных решений, сколько значений имеет параметр r;

6) полученное решение ДУ в виде ряда исследовать на сходимость известными признаками; тогда сумма ряда и есть искомое решение ДУ в области сходимости этого ряда.

2.54. Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти общее решение уравнения $y'' = y$.

Δ Данное уравнение не имеет особых точек. Поэтому его общее решение ищем в виде степенного ряда $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n \Rightarrow y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1}$, $y'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}$. Подставив ряды для y и y'' в исходное уравнение, получим равенство

$$(y'' = y) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right).$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получаем бесконечную систему равенств:

$$\begin{array}{c|c}
x^0 & 2 \cdot 1 \cdot C_2 = C_0, \\
x^1 & 3 \cdot 2 \cdot C_3 = C_1, \\
x^2 & 4 \cdot 3 \cdot C_4 = C_2, \\
x^3 & 5 \cdot 4 \cdot C_5 = C_3, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^n & (n+1)(n+1) C_{n+2} = C_n, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Из этой системы для коэффициентов с четными и нечетными индексами последовательно имеем

$$\begin{array}{ll}
C_0 = C_0, & C_1 = C_1, \\
C_2 = \dfrac{C_0}{2 \cdot 1} = \dfrac{C_0}{2!}, & C_3 = \dfrac{C_1}{2 \cdot 3} = \dfrac{C_1}{3!}, \\
C_4 = \dfrac{C_2}{4 \cdot 3} = \dfrac{C_0}{4!}, & C_5 = \dfrac{C_3}{4 \cdot 5} = \dfrac{C_1}{5!}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

$$C_{2n}=\frac{C_0}{(2n)!},\qquad\qquad C_{2n+1}=\frac{C_1}{(2n+1)!}.$$

....

Тогда искомое общее решение ДУ $y''=y$ запишется в виде

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k+1}x^{2k+1}=C_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}= \qquad (2.75)$$
$$=C_0chx+C_1shx,$$

поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^4}{6!}+...=chx, \qquad (2.76)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...=shx. \qquad (2.77)$$

В (2.75) C_0 и C_1 – произвольные постоянные. Поскольку ряды (2.76), (2.77) сходятся $\forall x\in \boldsymbol{R}$, то функция (2.75) и является общим решением ДУ $\forall x\in \boldsymbol{R}$. ▲

Описанный способ решения ДУ распространяется на уравнения любого порядка. Его применение основано на следующих теоремах, сформулированных для ДУ-2.

Теорема 2.6. *Пусть в уравнении* $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x)$ *функции* $p_1(x)$, $p_2(x)$ *и* $f(x)$ *разлагаются в степенные ряды в окрестности точки* x_0. *Тогда решение этого уравнения существует и представимо в виде степенного ряда* $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n$.

Теорема 2.7. *Пусть в уравнении* $p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ *функции* $p_0(x), p_1(x)$, $p_2(x)$ *разлагаются в степенные ряды в окрестности точки* x_0, *причем точка* x_0 *является нулем кратности* s *функции* $p_0(x)$, *нулем порядка не ниже* $s-1$ *функции* $p_1(x)$ *и нулем порядка не ниже* $s-2$ *функции* $p_2(x)$. *Тогда решение ДУ существует и представимо в виде обобщенного степенного ряда*

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^{k+r}=(x-x_0)^r\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,$$

где $a_0\neq 0$ *и* r *– некоторое действительное число.*

2.55. Найти решение в виде обобщенного степенного ряда уравнения

$$xy''+y'+xy=0, \qquad (2.78)$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Δ Коэффициенты ДУ удовлетворяют условиям теоремы (2.7), поэтому ищем решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x)=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+r},\ a_0\neq 0.$$

Имеем

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)\,a_k x^{k+r-1},\ y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)\,a_k x^{k+r-2}.$$

Подставляя эти ряды в уравнение (2.78), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)\,a_k x^{k+r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)\,a_k x^{k+r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+r+1}=0,$$

т.е.

$$r^2a_0x^{r-1}+(r+1)^2a_1x^r+\sum_{k=2}^{\infty}\left((k+r)^2a_k+a_{k-2}\right)x^{k+r-1}=0.$$

Отсюда вытекают равенства

$$r^2a_0=0,\ (r+1)^2a_1=0,\ (k+r)^2a_k+a_{k-2}=0.$$

По условию $a_0\neq 0$, тогда $r=0$ и, значит,

$$a_1=0 \text{ и } k^2a_k=-a_{k-2},\ k=3,4,\ldots.$$

Отсюда заключаем, что $a_{2m+1}=0,\ \forall m=0,1,\ldots$. Из начального условия $y(0)=1$ следует, что $a_0=1$, и имеем *рекуррентную формулу*

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{(2m)^2},$$

из которой получаем

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{((2m)!!)^2}=(-1)^m\frac{1}{2^{2m}(m!)^2}.$$

Следовательно, искомое решение исходной задачи Коши есть

$$y(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2},\ x\in\boldsymbol{R}.\ \blacktriangle$$

2.56. Найти ФСР ДУ в виде рядов степеням x и построить общее решение:

а) $y''+x^2y=0$; б) $y''+xy-\left(2x^2+1\right)y=0$.

Отв.: а) $y_1=1-\dfrac{x^4}{3\cdot 4}+\dfrac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}-\dfrac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}+\ldots$;

$y_2=x-\dfrac{x^5}{4\cdot 5}+\dfrac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}-\dfrac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}+\ldots,\ y=C_1y_1+C_2y_2$;

б) $y_1=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{3x^4}{4!}+\ldots,\ y_2=x+\dfrac{12}{5!}x^5+\ldots,\ y=C_1y_1+C_2y_2$.

2.57. Решить задачу Коши:

а) $y''=x^2y$; $y(0)=y'(0)=1$; б) $y''=-x^2y'-2xy+1$; $y(0)=y'(0)=0$;

в) $y''+xy'+y=1$; $y(0)=y'(0)=0$.

Отв.: а) $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 6\cdots(4n+1)(4n+2)}{(4n)!}x^{4n}+\right.$

$\left.+\frac{2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\cdots(4n+2)(4n+3)}{(4n+1)!}x^{4n+1}\right),\quad x\in\boldsymbol{R};$

б) $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1))^2}{(3n+2)!}(3n+4)x^{3n+2}$, $x\in\boldsymbol{R}$;

в) $y(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2^m\cdot m!}x^{2m}=1-e^{-x^2/2}$, $x\in\boldsymbol{R}$.

2.58. Найти общее решение ДУ в виде обобщенного степенного ряда:
а)* $xy''+2y'+xy=0$; б) $4xy''+2y'+y=0$.

Отв.: а) $y(x)=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$. ● Общее решение должно содержать две произвольные постоянные, поэтому из двух равенств $r(r+1)a_0=0$, $(r+1)(r+2)a_1=0$ выбираем $r=-1$, тогда $a_0\neq 0$ и $a_1\neq 0$;
б) $y(x)=C_1\cos\sqrt{x}+C_2\sin\sqrt{x}$.

Важным примером приложения степенных рядов к ДУ является решение *уравнения Бесселя*

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0, \tag{2.79}$$

к которому приводят многие задачи математической физики. Уравнение (2.79) удовлетворяет условиям теоремы 2.7, в соответствии с которыми его решение ищется в виде обобщенного степенного ряда по степеням x:

$$y=y(x)=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r},\ a_0\neq 0, \tag{2.80}$$

где r – некоторое действительное число. Почленно дифференцируя ряд (2.80), получаем

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)x^{k+r-1},\ y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)(k+r-1)\,x^{k+r-2}.$$

Подставив $y(x)$, $y'(x)$ и $y''(x)$ в уравнение (2.80), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)\,x^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r+2}-\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}=0,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[(r+k)^2+x^2-\nu^2\right]x^{k+r}=0.$$

Приравнивая здесь коэффициенты при всех степенях x к нулю, получаем бесконечную систему уравнений относительно $a_0,a_1,\dots,a_n,\dots$:

$$
\begin{array}{c|c}
x^{r} & a_0\left(r^2 - v^2\right) = 0, \\
x^{r+1} & a_1\left((r+1)^2 - v^2\right) = 0, \\
x^{r+2} & a_2\left((r+2)^2 - v^2\right) + a_0 = 0, \\
x^{r+3} & a_3\left((r+3)^2 - v^2\right) + a_1 = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\
x^{r+n} & a_n\left((r+n)^2 - v^2\right) + a_{n-2} = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ..
\end{array}
$$

Так как $a_0 \neq 0$, то из равенства $a_0\left(r^2 - v^2\right) = 0$ имеем $r = \pm v$. Пусть $r = v \geq 0$. Тогда коэффициенты с нечетными индексами в ряде (2.80) равны нулю, а для коэффициентов с четными индексами будем иметь

$$
a_2 = -\frac{a_0}{(2+v)^2 - v^2} = -\frac{a_0}{4+4v} = -\frac{a_0}{2\cdot 2(1+v)} = -\frac{a_0}{1\cdot 2^2(1+v)};
$$

$$
a_4 = -\frac{a_0}{(4+v)^2 - v^2} = \frac{a_0}{2!\cdot 2^4(v+1)(v+2)};
$$

$$
a_6 = -\frac{a_4}{(6+v)^2 - v^2} = \frac{(-1)^3 a_0}{3!\cdot 2^6(v+1)(v+2)(v+3)};
$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{k!\cdot 2^{2k}(v+1)(v+2)\cdots(v+k)};
$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставив эти коэффициенты в ряд (2.80), получим решение уравнения Бесселя в виде

$$
y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k+r} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0 x^{2k+v}}{k!\,2^{2k}(v+1)(v+2)\cdots(v+k)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0 x^{v}}{k!(v+1)(v+2)\cdots(v+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.
$$

Число $a_0 \neq 0$ для удобства выбирается в виде

$$
a_0 = 1/(2)\,1/(2^v\cdot v!) = 1/\,2^v\,\Gamma(1+v),\ v > -1,
$$

где $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ – гамма–функция.

Тогда решение уравнения Бесселя (2.80), обозначаемое $J_v(x)$, представится следующим образом:

$$
\begin{aligned}
y(x) = J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0}{k!\,v!(1+v)(2+v)\cdots(k+v)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} = \\
= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+v)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k+v}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)},
\end{aligned}
\qquad (2.81)
$$

поскольку $\Gamma(k+1)=k!$.

При $r=-\nu$ число a_k выбирается в виде $a_0=1/\left(2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)\right)$ и аналогично предыдущему получается

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k-\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}. \qquad (2.82)$$

При нецелом $\nu>0$ ряды (2.81) и (2.82) сходятся по признаку Даламбера для всех x. Так как $J_\nu(x)\to 0$, $J_{-\nu}(x)\to\infty$ при $x\to+0$, то функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы при нецелых ν. Следовательно, при ν – нецелом общее решение уравнения Бесселя есть

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x), \qquad (2.83)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ называются *функциями Бесселя первого рода порядка* ν *и* $-\nu$ соответственно, или *цилиндрическими функциями первого рода*.

При $\nu=n$ – целом функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ связаны соотношением

$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x), \qquad (2.84)$$

и, значит, являются линейно зависимыми, т.е. не образуют ФСР для уравнения Бесселя. Второе решение при n – целом, линейно независимое с $J_n(x)$, определяется равенством

$$N_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{J_\nu(x)\cos p\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin p\nu}, \qquad (2.85)$$

где ν – нецелое. Эта функция называется *цилиндрической функцией Бесселя второго рода*, или *функцией Неймана*.

Таким образом, при целом $\nu=n$ общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$y(x)=C_1J_n(x)+C_2N_n(x). \qquad (2.86)$$

Часто в приложениях приходится рассматривать уравнение

$$x^2y''+xy'+\left(m^2x^2-n^2\right)y=0. \qquad (2.87)$$

Заменой $x_1=mx$ это уравнение переходит в уравнение Бесселя

$$x_1^2\frac{d^2y}{dx_1^2}+x_1\frac{dy}{dx_1}+\left(x_1^2-n^2\right)y=0.$$

Следовательно, общее решение этого уравнения при нецелом n имеет вид

$$y(x)=C_1J_n(mx)+C_2J_{-n}(mx), \qquad (2.88)$$

а при n целом –

$$y(x)=C_1J_n(mx)+C_2N_n(mx). \qquad (2.89)$$

2.59. Общее решение уравнения Бесселя $x^2y''+xy'+\left(4x^2-9/25\right)y=0$, согласно (2.88), есть

$$y(x) = C_1 J_{3/5}(2x) + C_2 J_{-3/5}(2x),$$

а общее решение ДУ $x^2 y'' + xy' + \left(3x^2 - 4\right)y = 0$ – $y(x) = C_1 J_2\left(x\sqrt{3}\right) + C_2 N_2\left(x\sqrt{3}\right)$.

2.60. Найти выражения функций $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$.

Δ Положив в формуле (2.81) $\nu = 1/2$, получим

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} = \sqrt{\frac{2}{px}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1} \cdot k!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}.$$

(по *формуле приведения* для гамма–функции

$\Gamma(k+3/2) = \Gamma(1/2) \cdot \Gamma(k+1/2) = \dfrac{\sqrt{p}}{2} \cdot \dfrac{(2k-1)!!}{2^n} \sqrt{p}$, так как $\Gamma(1/2) = \dfrac{\sqrt{p}}{2}$;

$\Gamma(k+1/2) = \dfrac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{p}$. Тогда

$$2^{2k+1} \cdot k!\,\Gamma(k+3/2) = 2^k \cdot k!\,(2k+1)!!\sqrt{p} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)\sqrt{p} = (2k+1)!\sqrt{p},$$

т.е.

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{px}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{px}} \sin x.$$

Таким образом,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{px}} \sin x. \qquad (2.90)$$

Аналогично рассуждая, можно получить, что

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{px}} \cos x. \qquad (2.91)$$

2.61.* Доказать, что $J_0(0) = 1$, $J_n(0) = 0$, $J_0'(0) = J_n'(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

2.62. Найти общие решения уравнения Бесселя:

а) $x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - 1/9\right)y = 0$; б) $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1/4\right)y = 0$;

в) $y'' + \dfrac{1}{x} y' + 4y = 0$; г) $x^2 y'' - 2xy' + 4\left(x^4 - 1\right)y = 0$;

д) $xy'' + \dfrac{1}{2} y' + \dfrac{1}{4} y = 0$; е) $y'' + \dfrac{3}{x} y' + 4y = 0$.

Отв.: а) $y = C_1 J_{1/3}(2x) + C_2 J_{-1/3}(2x)$; б) $y = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x)$;

в) $y = C_1 J_0(2x) + C_2 N_0(2x)$; г) $y = x^{3/2}\left[C_1 J_{5/4}\left(x^2\right) + C_2 J_{-5/4}\left(x^2\right)\right]$;

д) $y = \sqrt[4]{x}\left[C_1 J_{1/2}\left(\sqrt{x}\right) + C_2 J_{-1/2}\left(\sqrt{x}\right)\right]$; е) $y = \dfrac{1}{x}\left[C_1 J_1(2x) + C_2 N_1(2x)\right]$.

Для функций Бесселя справедливы следующие *рекуррентные* *соотношения:*

1°. $J_\nu'(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x).$ (2.92)

2°. $J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x).$ (2.93)

3°. $J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = 2\frac{\nu}{x} J_\nu(x).$ (2.94)

4°. $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu'(x).$ (2.95)

5°. $\left(x^\nu J_\nu(x)\right)' = x^\nu J_{\nu-1}(x).$ (2.96)

6°. $\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right)' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$ (2.97)

2.63. Показать, что:

а) $J_0'(x) = -J_1(x)$; б) $J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x)$;

в) $J_2(x) = J_0''(x) - \frac{1}{x} J_0'(x)$; г) $J_2(x) - J_0(x) = 2J_0''(x)$.

2.64. Зная: а) $J_1(x)$ и $J_2(x)$, получить $J_3(x)$; б) $J_0(x)$ и $J_1(x)$, получить $J_4(x)$.

2.65. Выразить $J_{3/2}(x)$ и $N_{1/2}(x)$ через элементарные функции.

Отв.: $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{px}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$; $N_{1/2} = -J_{-1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{px}}\cos x$.

2.66.* Выразить $J_{-3/2}(x)$, $J_{5/2}(x)$, $J_{-5/2}(x)$ и $N_{-1/2}(x)$, $N_{3/2}(x)$, $N_{-3/2}(x)$, $N_{5/2}(x)$ через элементарные функции.

Отв.:

$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{px}} \cdot \frac{x\sin x + \cos x}{x};\quad J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{px}}\left(\frac{3\sin x}{x^2} - \frac{3\cos x}{x} - \sin x\right);$$

$$J_{-5/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{px}} \cdot \frac{x^2\cos x - 3x\sin x - 3\cos x}{x^2};$$

$$N_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{px}}\sin x;\qquad N_{3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{px}}\left(\frac{x\sin x + \cos x}{x}\right);$$

$$N_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{px}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right);\quad N_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{px}} \cdot \frac{x^2\cos x - 3x\sin x - 3\cos x}{x^2}.$$

В приложениях часто требуется найти *периодические решения* некоторого ДУ.

Пусть дано ЛНДУ-2 с постоянными коэффициентами

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x), \tag{2.98}$$

где $f(x)$ – непрерывная $2p$ – периодическая функция с рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \qquad (2.99)$$

Периодические решения ДУ (2.98) ищутся в виде ряда

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx. \qquad (2.100)$$

Ряд (2.100) подставляем в уравнение (2.98), после чего, приравнивая свободные члены и коэффициенты при $\cos nx$ и $\sin nx$ в левых и правых частях полученного равенства, найдем

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{p_2}; \qquad A_n = \frac{\left(p_2 - n^2\right)a_n - p_1 n b_n}{\left(p_2 - n^2\right)^2 + p_1^2 n^2}; \\ B_n &= \frac{\left(p_2 - n^2\right)b_n - p_1 n a_n}{\left(p_2 - n^2\right)^2 + p_1^2 n^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \qquad (2.101)$$

где p_1 и p_2 – некоторые постоянные.

Условие $A_0 = a_0 / p_2$ дает необходимое условие существования решения вида (2.100): если $a_0 \neq 0$, то необходимо, чтобы $p_2 \neq 0$. Подставив (2.101) в (2.100), получим

$$y(x) = \frac{a_0}{2p_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\left(p_2 - n^2\right)a_n - p_1 n b_n\right)\cos nx + \left(\left(p_2 - n^2\right)b_n - p_1 n a_n\right)\sin nx}{\left(p_2 - n^2\right)^2 + p_1^2 n^2}. \qquad (2.102)$$

Если $p_1 = 0$, $p_2 = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, то периодическое решение будет существовать только при условии

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos nx dx = 0, \quad b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin nx dx = 0. \qquad (2.103)$$

Коэффициенты A_k, B_k при $k \neq n$ находятся по формулам (2.101), а коэффициенты A_n и B_n остаются произвольными, так как выражение $A_n \cos nx + B_n \sin nx$ является общим решением соответствующего ЛОДУ-2.

Если же условия (2.103) *не выполнены, то уравнение* (2.98) *периодических решений не имеет* (в этом случае возникает резонанс). При $p_2 = 0$ и $a_0 = 0$ коэффициент A_0 остается неопределенным и уравнение (2.98) имеет бесконечное множество периодических решений, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым.

Замечание. Если $f(x)$ – непрерывная $2l$-периодическая функция, $l \neq p$, то $f(x)$ надо разложить в ряд Фурье по периоду $2l$, а решение уравнения (2.98) искать в виде

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{npx}{l} + B_n \sin\frac{npx}{l}.$$

Соответствующим образом изменятся и формулы (2.101).

2.67. Найти периодические решения уравнения:

а) $y''+2y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$; б) $y''+4y=\sin^2 x$; в) $y''-y=|\sin x|$.

Δ а) Решение ищем в виде ряда

$$y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx.$$

Определив коэффициенты A_n и B_n по формулам (2.101), получим

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4\left(2-n^2\right)}.$$

б) Условия (2.103) существования периодического решения ДУ не выполняются, ибо

$$\int_0^{2p}\sin^2 x\sin nx dx=0,\ \text{но}\ \int_0^{2p}\sin^2 x\cos nx dx\neq 0$$

(проверьте это!). Следовательно, периодического решения данное уравнение не имеет.

в) Функция $f(x)=|\sin nx|-p$ – периодическая. Нетрудно получить ее разложение в ряд Фурье в интервале $(-p,p)$:

$$|\sin x|=\frac{2}{p}-\frac{4}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1},\ x\in(-p,p).$$

Решение исходного ДУ ищем в виде

$$y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx.$$

Имеем $p_1=0$, $p_2=-1$, $a_0=4/p$, $a_{2n-1}=0$, $a_{2n}=-\frac{4}{p}\cdot\frac{1}{4n^2-1}$, $b_n=0$, $n=1,2,\ldots$.

Формулы (2.101) дают

$$A_0=-\frac{4}{p},\ A_{2n-1}=0,\ A_{2n}=-\frac{4}{p}\cdot\frac{1}{16n^2-1},\ B_n=0.$$

Значит, ДУ имеет периодическое решение вида

$$y(x)=-\frac{2}{p}-\frac{4}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{16n^2-1}.\ \blacktriangle$$

2.68. Найти периодические решения ДУ, если они существуют:

а) $y''+3y=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin nx}{n^3}$; б) $y''+y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$;

в) $y''+y=\cos x\cdot\cos 2x$; г) $y''+4y=\cos^2 x$;

д) $y''-4y'+4y=p^2-x^2,\ x\in(-p,p)$; е) $y''-4y=|\cos px|$;

ж) $y''+9y=\sin^3 x$; з)* $y''+2y'+2y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$.

Отв.: а) $y(x)=\frac{1}{3}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\sin nx}{n^3\left(n^2-3\right)}$; б) –г) периодических решений нет.

д) $y(x)=p^{2}/6+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2-4\right)\cos nx+4n\sin nx}{n^2\left(n^2+4\right)^2}$;

е) $y(x)=-\frac{1}{2p}+\frac{1}{p}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2npx}{\left(n^2p^{2}+1\right)\left(4n^2-1\right)}$;

ж) периодических решений нет.

з) $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2-n^2\right)\sin nx-2n\cos nx}{\left(\left(2-n^2\right)^2+4n^2\right)n^4}$.

Наряду с задачей Коши часто приходится решать *краевые* или *граничные задачи*. В них условия, налагаемые на решение ДУ, задаются не в одной точке $x_0\in[a,b]$, как в случае задачи Коши, а на концах отрезка, внутри которого ищется искомое решение. Геометрически в краевых задачах идет речь об отыскании интегральных кривых $y=y(x)$ ДУ, концы которой находятся в точках с абсциссами a и b (рис. 2.3).

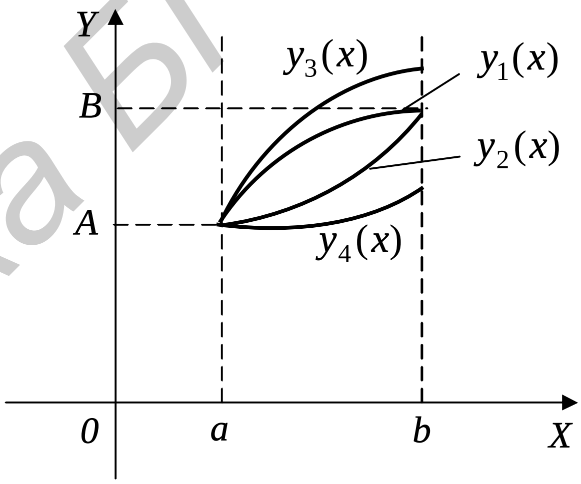


Рис. 2.3

Если $y=y(x)$ – интегральная кривая ДУ-2, то для него простейшие краевые условия имеют вид $y(a)=A$, $y(b)=B$ (рис. 2.3), где A и B – заданные числа. Более общими краевыми условиями являются соотношения

$$\begin{cases} a\ y(a)+a_1y'(a)=A, \\ b\ y(b)+b_1y'(b)=B, \end{cases}$$

связывающие значения искомой функции $y(x)$ и ее производной $y'(x)$ в точках a и b. Здесь $a, a_1, b, b_1\in\boldsymbol{R}$, $a^2+a_1^2\neq 0$, $b^2+b_1^2\neq 0$.

Краевая задача может иметь единственное решение, или бесчисленное множество решений, или вообще не иметь их.

2.69. Решить краевую задачу:

а) $y''+y=0$; $y(0)=0$, $y(p)=1$; б) $y''+y=0$; $y(0)=y(p)=0$;

в) $y''=6x$; $y(0)=0$, $y'(1)=0$.

Δ а) Решением данного ДУ является функция $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Из краевых условий для определения постоянных C_1 и C_2 получаем систему

$$\left.\begin{aligned} C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0, \\ C_1(-1)+C_2\cdot 0=1, \end{aligned}\right\}$$

которая несовместна. Следовательно, данная краевая задача не имеет решения.

б) Решение $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ этого уравнения и краевые условия $y(0) = y(p) = 0$ приводят к системе

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1(-1) + C_2 \cdot 0 = 0, \end{aligned}\right\}$$

из которой следует, что данная краевая задача имеет бесчисленное множество решений $y = C_2 \sin x$, $\forall C_2 \in \boldsymbol{R}$.

в) Общее решение этого ДУ есть $y = x^3 + C_1 x + C_2$. Из краевых условий находим, что искомым и единственным решением краевой задачи является функция $y = x^3 - 3x$. ▲

2.70. Решить следующие краевые задачи:

а) $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y(p/2) = a$; б) $y'' - y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(1) = 1$;

в) $y'' + ay' = 0$; $y(0) = e^a$, $y'(1) = 0$; г) $y'' + a^2 y = 1$; $y'(0) = a$, $y'(p) = 0$; $0 < a < 1$;

д) $y^{IV} - l^4 y = 0$; $y(0) = y''(0) = 0$, $y(p) = y''(p) = 0$;

е)* $xy'' + y' = 0$; $y(1) = ay'(1)$, $y(x)$ ограничено при $x \to 0$;

ж)* $x^2 y^{IV} + 4xy''' + 2y'' = 0$; $y(1) = y'(1) = 0$; y ограничено при $x \to 0$.

Отв.: а) $y = a \sin x$; б) $y = (shx)/ch1$; в) $y = e^a$;

г) $y = 1/a^2 + \dfrac{\cos a(p - x)}{\sin ap}$, $0 < a < 1$; д) $y = C \sin nx$, $n = 0,1,2,\ldots$;

е) $y \equiv 0$; ж) $y = C(x \ln x - x + 1)$, C – произвольная постоянная.

3. Системы дифференциальных уравнений

3.1. Нормальные системы дифференциальных уравнений первого порядка (СДУ-1). Задача Коши для СДУ-1. Интегральная кривая СДУ

Фазовые плоскости, пространства и траектории. Автономные СДУ. Переход от ДУ к СДУ. Методы решения СДУ: метод исключения, метод интегрируемых комбинаций. Общие понятия однородных СДУ. Структура общего решения линейной однородной СДУ (ЛОСДУ). Фундаментальная система решений (ФСР). Линейные неоднородные СДУ. Интегрирование ЛОСДУ с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Характеристическое уравнение. Линейные неоднородные СДУ с постоянными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Нормальной системой n дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется система

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где функции f_i, $i = \overline{1, n}$, определены в некоторой $(n+1)$-мерной области $D \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ переменных $x, y_1, y_2, ..., y_n$. *Решением* системы (3.1) на интервале (a, b) называется совокупность n функций $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, …, $y_n = y_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a, b) и удовлетворяющих этой системе.

3.1. Проверить, являются ли данные системы функций решениями данных СДУ:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -2xy_1^2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{y_2 + x}{x}; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} y_1 = 1/x^2, \\ y_2 = x \ln x. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = e^{x - y_1}, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2e^{y_1}; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} y_1 = x, \\ y_2 = 2e^x. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{y_2}{y_1}; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} y_1 = e^{2x}, \\ y_2 = e^x. \end{cases}$

Отв.: а) да; б) да; в) нет.

Задача Коши для системы (3.1) формулируется следующим образом: найти решение $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, … , $y_n = y_n(x)$ этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}, \tag{3.2}$$

где $y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$ – заданные числа, $x_0 \in (a, b)$.

Для нормальной системы (3.1) имеет место

Теорема 3.1 ***(о существовании и единственности решения задачи Коши).*** *Пусть функции* $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = \overline{1, n}$, *непрерывны в окрестности точки* $(x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}) \in D$ *и имеют в этой окрестности непрерывные частные производные* $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $j = \overline{1, n}$. *Тогда найдется интервал* $(x_0 - d, x_0 + d) \subset (a, b)$, *в котором существует единственное решение нормальной системы* (3.1), *удовлетворяющее начальным условиям* (3.2).

Система n дифференцируемых функций

$$y_i = y_i(x, C_1, C_2, ..., C_n), \; i = \overline{1,n}, \qquad (3.3)$$

независимой переменной x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ называется *общим решением* нормальной системы (3.1), если:

1°. При любых допустимых значениях x, $C_1, C_2, ..., C_n$ система функций (3.3) обращает уравнения (3.1) в тождества.

2°. В области D функции (3.3) решают любую задачу Коши.

Решения, получающиеся из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называются *частными решениями*.

3.2. Показать, что система функций

$$y_1(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \; y_2(x) = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x} \qquad (3.4)$$

является общим решением СДУ

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2, \; \frac{dy_2}{dx} = y_2 - 4y_1. \qquad (3.5)$$

Найти частное решение системы (3.4), удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -4$.

Δ Здесь область D есть

$$-\infty < x < +\infty, \; -\infty < y_1, y_2 < +\infty.$$

Подставив функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из (3.4) в СДУ (3.5), получим тождества по x, справедливые $\forall C_1, C_2$. Проверим теперь справедливость условия 2° (теорема 3.1. для системы (3.5) в области D здесь имеет место). В качестве начальных условий возьмем любую тройку чисел x_0, y_{10}, y_{20}. Тогда из (3.4) для определения C_1 и C_2 получим систему

$$\left.\begin{aligned} y_{10} &= C_1 e^{-x_o} + C_2 e^{3x_o}, \\ y_{20} &= 2C_1 e^{-x_o} - 2C_2 e^{3x_o} \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

с определителем $\Delta = -4e^{2x_0} \neq 0$. Следовательно, система (3.6) имеет единственное решение C_1 и C_2. Это доказывает, что система функций (3.4) и есть общее решение системы (3.5). Так как при $x_0 = 0$ имеем $y_{10} = 0$, $y_{20} = -4$, то система (3.6) принимает вид $C_1 + C_2 = 0$, $2C_1 - 2C_2 = -4 \Rightarrow C_1 = -1$, $C_2 = 1$. Искомое частное решение

$$y_1(x) = -e^{-x} + e^{3x}, \qquad y_2(x) = -2e^{-x} - 2e^{3x}. \; \blacktriangle$$

3.3. Проверить, что система функций является общим решением данной СДУ и найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

а) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y + z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} - y + z = 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = e^{-2x}(C_1 - C_2 + C_2 x), \\ z = -e^{-2x}(C_1 + C_2 x); \end{cases}$ $\quad y(0) = z(0) = 1.$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 7x - y = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} + 2x + 5y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = e^{-6t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right), \\ y = e^{-6t}\left[\left(C_1 + C_2\right)\cos t - \left(C_1 + C_2\right)\sin t\right]; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z + y - x, \\ \dfrac{dx}{dt} = z + x - y, \\ \dfrac{dx}{dt} = x + y + z; \end{cases}$ $\begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}, \\ y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t}, \\ z = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0$.

Отв.: а) $y = e^{-2x}(3 - 2x),\ z = e^{-2x}(1 + 2x)$;

б) $x = e^{-6t}\cos t,\ x = e^{-6t}(\cos t - \sin t)$;

в) $x = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t},\ y = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t},\ z = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$.

Введем векторы-столбцы

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T,\ \boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T.$$

Тогда СДУ (3.1) в векторном виде записывается так

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}).$$

Здесь T означает транспонирование.

Пусть $\boldsymbol{y} = \left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right)^T$ – решение системы (3.1) на интервале (a, b).

Множество точек $G_y = \left\{\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right) \middle| x \in (a, b)\right\}$ из $D \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ определяет параметрически заданную кривую параметра $x \in (a, b)$ в $(n+1)$-мерной области $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, которая является графиком данного решения. Эта кривая называется *интегральной кривой* СДУ (3.1). Начальные условия (3.2) определяют в D точку $M_0 = (x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$. Задача Коши состоит в том, чтобы среди всех интегральных кривых СДУ (3.1) выделить ту, которая проходит через точку M_0. Решение $\boldsymbol{y} = \left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right)^T$ системы (3.1) соответствует движению точки в n-мерном пространстве переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Это пространство называется *фазовым* (при $n = 2$ оно называется *фазовой плоскостью*), а кривая, описываемая в нем движущейся точкой, − *фазовой траекторией*.

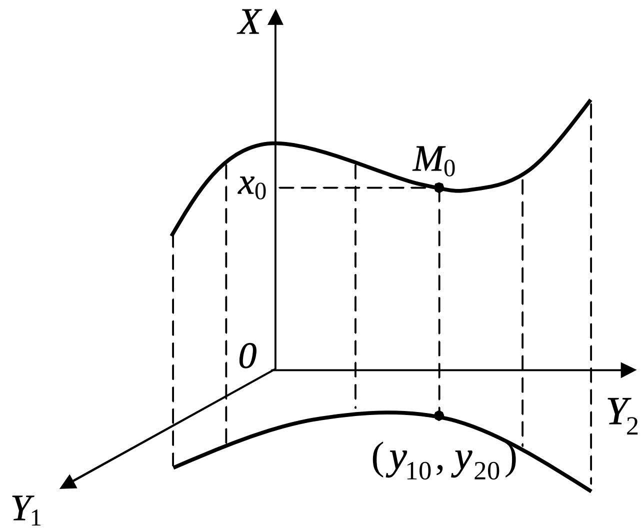


Рис. 3.1

Фазовая траектория является проекцией интегральной кривой из $(n+1)$-мерного пространства переменных $x, y_1, y_2, ..., y_n$ на n-мерное пространство переменных $y_1, y_2, ..., y_n$ (рис. 3.1).

Фазовая траектория $\boldsymbol{y} = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^T$ обладает тем свойством, что составляющие скорости $y'_1(x), y'_2(x), ..., y'_n(x)$ движения точки при конкретном значении x равны значениям правых частей $f_1(x, y(x))$, $f_2(x, y(x))$, …, $f_n(x, y(x))$ системы (3.1) в точке $(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$.

Если переменная x (рассматриваемая ниже как время) не входит явно в правые части системы (3.1), то система

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{3.7}$$

называется *автономной* или *стационарной*. Решение $\boldsymbol{y}$ автономной системы (3.7) описывает траекторию движения точки в фазовом n-мерном пространстве переменных $y_1, y_2, ..., y_n$.

ДУ n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ... y^{(n-1)}) \tag{3.8}$$

можно свести к СДУ, если положить

$$\left.\begin{aligned} & y = y_1, \\ & y' = y'_1 = y_2, \\ & y'' = y'_2 = y_3, \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & y^{(n-1)} = y'_{n-1} = y_n, \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y', \\ y_3 = y'', \\ \dots\dots\dots \\ y_n = y^{(n-1)}, \end{cases} \tag{3.9}$$

и тогда ДУ (3.8) примет вид

$$y^{(n)} = y'_n = f(x, y_1, y_2, ..., y_n),$$

т.е. ДУ (3.8) равносильно нормальной СДУ

$$\left.\begin{aligned} & y'_1 = y_2, \\ & y'_2 = y_3, \\ & y'_3 = y_4, \\ & \dots\dots\dots \\ & y'_{n-1} = y_n, \\ & y'_n = f(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{aligned}\right\}$$

Решением ее, согласно (3.9), служит вектор

$$\boldsymbol{y} = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^T = \left(y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right)^T,$$

первая координатная функция $y_1 = y_1(x) = y(x)$ которого есть решение исходного ДУ (3.8).

Таким образом, заменой (3.9) любое ДУ n-го порядка (3.8) всегда можно свести к нормальной СДУ первого порядка. Эту систему можно (но не всегда) свести к одному ДУ n-го порядка. На этом и основан *метод исключения* для интегрирования СДУ.

Делается это так. Пусть дана система (3.1). Из первого уравнения этой системы дифференцированием по x находим

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y'_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y'_n = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_n = F_2(x, y_1, \ldots, y_n),$$

поскольку $y'_i = f_i$, $i = \overline{1, n}$. Дифференцируя теперь это равенство по x, находим $y_1''' = F_3(x, y_1, \ldots, y_n)$. Продолжив этот процесс, получим систему

$$\left.\begin{aligned} & y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ & y_1'' = F_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & y_1^{(n)} = F(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

При определенных условиях из этой системы можно выразить $y_1^{(n)}$ в виде функции от $x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$, т.е получить ДУ n-го порядка

$$y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right)$$

относительно функции $y_1(x)$.

3.4. Методом исключения решить задачу Коши ($y = y(x)$, $z = z(x)$):

$$y' + 3y + 4z = 0,\ z' + 2y + 5z = 0;\ y(0) = 1,\ z(0) = 4. \tag{3.11}$$

Δ Продифференцируем по x первое из уравнений этой системы $y'' + 3y' + 4z' = 0$. Подставив сюда из второго уравнения $z' = -2y - 5z$, получим $y'' + 3y' - 8y - 20z = 0$. Но из первого уравнения $z = -y'/4 - 3y/4$. Таким образом, получаем ЛОДУ-2 с постоянными коэффициентами $y'' + 8y' + 7y = 0$, общим решением которого является функция $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-7x}$. Отсюда и из равенства $z = -y'/4 - 3y/4$ имеем $z = -\frac{1}{2} C_1 e^{-x} + C_2 e^{-7x}$. Используя теперь начальные условия, окончательно находим решение задачи Коши (3.11): $y = -2e^{-x} + 3e^{-7x}$, $z = e^{-x} + 3e^{-7x}$. ▲

3.5. Найти общее решение СДУ ($y = y(x)$, $z = z(x)$):

$$\left.\begin{aligned} & xy' = -y + zx, \\ & x^2 y'' = -2y + zx. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Δ Из первого уравнения системы имеем $z = \frac{y}{x} + y'$. Дифференцируем это равенство: $z' = -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot y' + y''$. Подставив z и z' во второе уравнение системы, получим

$$x^2 y'' + xy' - y = -2y + y + xy' \Rightarrow x^2 y'' = 0.$$

Считая $x \neq 0$, отсюда имеем $y'' = 0 \Rightarrow y = C_1 + C_2 x$. Тогда $z = y/x + y' = = (C_1 + C_2 x)/x + C_2 = 2C_2 + C_1/x$.

Итак, общее решение системы (3.12) есть $y = C_1 + C_2 x$, $z = C_1/x + 2C_2$, $x \neq 0$. ▲

3.6. Свести данное ДУ к нормальной СДУ:

а) $xy'' + y' = xy = 0$; б) $y''' - y = 0$;

в)* $y^{IV} + x^2 y = 0$; г) $y'' + k^2 y = 0$.

Отв.: а) $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_2/x - y_1$; б) $y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$, $y_3' = y_1$;

в) $y_1' = y_2$, $y_2' = y_3$, $y_3' = y_4$, $y_4 = -x^2 y_1$; г) $y_1' = y_2$, $y_2' = -k^2 y_1$.

3.7. Методом исключения найти общее решение СДУ или, где это указано, решить задачу Коши.

а) $y' + 3y + z = 0$, $z' - y + z = 0$; $y(0) = z(0) = 1$;

б) $\frac{dx}{dt} = y + z$, $\frac{dy}{dt} = z + x$, $\frac{dz}{dt} = x + y$; $x(0) = -1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$;

в) $y' + z' = 2z$, $3y' - z' = y + 9z$;

г)* $\frac{dx}{dt} = y - z$, $\frac{dy}{dt} = z - 2x$, $\frac{dz}{dt} = 2x - y$;

д) $\frac{d^2x}{dt^2} = 3(y - x - z)$, $\frac{d^2y}{dt} = x - y$, $\frac{d^2z}{dt^2} = -z$;

е) $y' = 3z - y$, $z' = z + y + e^{ax}$;

ж)* $x^2 y'' + xz' + y + z = x + 1$, $x^2 z'' + xy' - x - z = -x - 1$.

Отв.: а) $y = e^{-2x}(3 - 2x)$, $z = e^{-2x}(1 + 2x)$; б) $x = -e^{-t}$, $y = e^{-t}$, $z = 0$;

в) $y = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$,

$z = e^{-x/2}\left(\frac{C_2\sqrt{3} - 2C_1}{7}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{C_1\sqrt{3} + 2C_2}{7}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$;

г) $x = C_1 + C_2 u + C_3 v$, $y = \frac{4C_1 - (C_2 - C_3)\sqrt{5}}{2}v$, $z = \frac{4C_1 - (C_2 - C_3\sqrt{5})}{2}v$; $u = \cos\sqrt{5}t$, $v = \sin\sqrt{5}t$;

д) $z = A\cos t + B\sin t$, $x + 3y - 3z = Ct + D$, $x - y + z = E\cos 2t + F\sin 2t$;

е) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \dfrac{3e^{ax}}{a^2-4}$, $z = C_1 e^{2x} + \dfrac{1}{3} C_2 e^{-2x} + \dfrac{a+1}{a^2-4} e^{ax}$, $a \ne \pm 2$;

ж) $y = C_3 + Dx^2 - x + (6C_2 + C_1 - 1)\ln\sqrt{x} + C_2 \ln^2 x$, $y + z = C_1 + C_3 \ln x$.

Метод интегрируемых комбинаций решения нормальной СДУ

$$y_i' = f_i(x, y_1, ..., y_n),\ i = \overline{1, n}, \tag{3.13}$$

состоит в следующем: с помощью подходящих арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) из уравнений СДУ (3.13) выделяются так называемые *интегрируемые комбинации* – достаточно просто решаемые ДУ вида $\Phi(x, u, du/dx) = 0$, где $u = u(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ – некоторая функция. Каждая интегрируемая комбинация дает *первый интеграл*. Если найдено n независимых первых интегралов системы (3.13), то ее интегрирование на этом заканчивается; если же найдено m, $m < n$, независимых интегралов, то система (3.13) сводится к системе с меньшим числом неизвестных функций.

3.8. Решить СДУ: $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t}$, $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t}$, $t > 0$.

Δ Сложив почленно данные уравнения, получим

$$\frac{d}{dt}(x+y) = -\frac{1}{t}(x+y) \Rightarrow \frac{d(x+y)}{x+y} = -\frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|x+y| = -\ln t + \ln C_1 \Rightarrow x + y = \frac{C_1}{t}.$$

Вычитая почленно исходные ДУ, имеем

$$\frac{d}{dt}(x-y) = \frac{1}{t}(x-y) \Rightarrow x - y = C_2 t.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{C_1}{t}, \\ x - y &= C_2 t. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{t} + C_2 t\right), \\ y &= \frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{t} - C_2 t\right). \end{aligned}\right.$$

Это и есть общее решение исходной системы. ▲

3.9. Решить СДУ ($x = x(t), y = y(t)$, $z = z(t)$):

$$\left.\begin{aligned} x' &= y - z, \\ y' &= z - x, \\ z' &= x - y. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Δ Сложив все три этих уравнения, получим $x' + y' + z' = 0 \Rightarrow x + y + z = C_1$.

Умножив первое из уравнений (3.14) на x, второе – на y, третье – на z и сложив полученные результаты, найдем $xx' + yy' + zz' = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$, т.е. $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Таким образом, получены два первых интеграла системы (3.14):

$$x + y + z = C_1 \text{ и } x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{3.15}$$

Если бы удалось получить еще один первый интеграл, т.е. получить столько независимых интегралов, каково число неизвестных функций, то задача интегрирования системы (3.14) была бы решена. Из первых интегралов можно было бы выразить искомые функции через t и произвольные постоянные. Однако в данном примере такой простой подбор еще одной интегрируемой комбинации не удается. Тем не менее, знание нескольких первых интегралов облегчает решение задачи: каждый первый интеграл позволяет понизить порядок уравнения на единицу.

Поступим следующим образом. Продифференцируем по t третье уравнение (3.14): $z'' = x' - y'$. Воспользовавшись первыми двумя уравнениями системы, найдем $z'' = x + y - 2z$. Но из первого интеграла (3.15) $x + y = C_1 - z$, что дает

$$z'' + 3z = C_1 \tag{3.16}$$

– ЛДУ-2 с постоянными коэффициентам, общее решение которого

$$z = \frac{1}{3}C_1 + C_2 \cos t\sqrt{3} - C_3 \sin t\sqrt{3}. \tag{3.17}$$

Но так как $x + y = z'' + 2z$, $x - y = z'$, то отсюда

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \frac{2}{3}C_1 - C_2 \cos t\sqrt{3} - C_3 \sin t\sqrt{3}, \\ x - y &= \sqrt{3}C_3 \cos t\sqrt{3} - \sqrt{3}C_3 \sin t\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}C_1 - \frac{C_2 - \sqrt{3}C_3}{2}\cos t\sqrt{3} - \frac{C_3 + \sqrt{3}C_2}{2}\sin t\sqrt{3}.$$

$$y = \frac{1}{3}C_1 - \frac{C_2 + \sqrt{3}C_3}{2}\cos t\sqrt{3} - \frac{C_3 - \sqrt{3}C_2}{2}\sin t\sqrt{3}.$$

Эти выражения совместно с (3.17) и образуют общее решение системы (3.14). ▲

3.10. Решить систему уравнений методом интегрируемых комбинаций.

а) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 y$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{t} - xy^2$; б) $y' = z$, $z' = z^2 / y$;

в) $y' = y + z$, $z' = -5(y + z)$;

г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \cos^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{2}\sin 2x \cdot \sin 2y; \qquad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

Отв.: а) $x = C_2 e^{C_1 t^2/2}$, $y = \dfrac{C_1}{C_2} t e^{-C_1 t^2/2}$. Если $x = 0$, то $y = Ct$; если $y = 0$, то $x = C$;

б) $y = C_2 e^{C_1 x}$, $z = C_1 C_2 e^{C_1 x}$; в) $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$, $z = -C_1 - 5C_2 e^{-4x}$;

г) $tg(x + y) = t$, $tg(x - y) = t \cdot$

Система

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n \end{array}\right\} \tag{3.18}$$

называется *линейной однородной системой дифференциальных уравнений* (ЛОСДУ), записанной *в нормальном виде*. В ней $a_{ij}(x)$, $\overline{i, j = n}$, – непрерывные на $[a,b]$ функции.

Задача Коши для системы (3.18) формулируется следующим образом: найти решение системы (3.18) $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots, y_n = y_n(x),\ x \in [a,b]$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}, \text{ где } x_0 \in [a,b].$$

Если функции $a_{ij}(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то решение задачи Коши существует и единственно на $[a,b]$.

Введем обозначения

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

Тогда система (3.18) в *векторно-матричном виде* запишется следующим образом:

$$\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y}.$$

Векторы-решения $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x)$ системы $\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y}$ обладают следующими свойствами:

1°. Если решение $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x)$ системы обращается в нулевой вектор хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$, то $\boldsymbol{y}\ (x) \equiv 0$, $\forall x \in [a,b]$.

2°. Если $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^k$ – решения системы, то их линейная комбинация

$$\boldsymbol{y} = C_1\boldsymbol{y}^1 + C_2\boldsymbol{y}^2 + \ldots + C_k\boldsymbol{y}^k$$

тоже является решением этой системы, где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – произвольные постоянные.

Пусть

$$\boldsymbol{y}^1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}^2(x) = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots\ , \boldsymbol{y}^n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

– векторы-решения системы $\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y}$.

Образуем матрицу

$$Y(x)=\begin{bmatrix} \underset{\downarrow}{y^1}, & \underset{\downarrow}{y^2}, & \dots, & \underset{\downarrow}{y^n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Пусть* $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \dots, \boldsymbol{y}^n$ *– решения ЛОСДУ* $\boldsymbol{y}'=A(x)\boldsymbol{y}$ *на* $[a,b]$. *Тогда*:

1°. *Если определитель* $|Y(x)|$ *матрицы* $Y(x)$ *отличен от нуля хотя бы в одной точке* $x_0 \in [a,b]$, *то решения* $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \dots, \boldsymbol{y}^n$ *системы линейно независимы на* $[a,b]$ *и* $|Y(x)| \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

2°. *Если существует точка* $x'_0 \in [a,b]$, *в которой* $|Y(x'_0)|=0$, *то решения* $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \dots, \boldsymbol{y}^n$ *системы* $\boldsymbol{y}'=A(x)\boldsymbol{y}$ *линейно зависимы на* $[a,b]$ *и* $|Y(x)| \equiv 0$, $\forall x \in [a,b]$.

На вопрос *о структуре общего решения ЛОСДУ* отвечает

Теорема 3.3. *ЛОСДУ* $\boldsymbol{y}'=A(x)\boldsymbol{y}$ *имеет ровно* n *линейно независимых решений. Общее решение* $\boldsymbol{y}^0=\boldsymbol{y}^0(x)$ *этой системы имеет вид*

$$\boldsymbol{y}^0 = C_1\boldsymbol{y}^1 + C_2\boldsymbol{y}^2 + \dots + C_n\boldsymbol{y}^n, \tag{3.21}$$

где $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \dots, \boldsymbol{y}^n$ *– линейно независимые ее решения, а* $C_1, C_2, \dots, C_n$ *– произвольные постоянные.*

Совокупность n линейно независимых на $[a,b]$ решений $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \dots, \boldsymbol{y}^n$ ЛОСДУ называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) этой системы. Формула (3.21) определяет *общее решение ЛОСДУ* $\boldsymbol{y}'=A(x)\boldsymbol{y}(x)$.

Если $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \dots \boldsymbol{y}^n$ – ФСР, то матрица $Y(x)$ называется *фундаментальной матрицей* ЛОСДУ. С ее помощью общее решение (3.21) можно записать в виде

$$\boldsymbol{y}=Y(x)\boldsymbol{C},$$

где $\boldsymbol{C}=(C_1, C_2, \dots, C_n)^T$ – вектор-столбец произвольных постоянных.

3.11. Образуют ли векторы-функции

$$\boldsymbol{z}^1=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1=\begin{pmatrix} e^{-\cos t} \\ -e^{-\cos t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z}^2=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2=\begin{pmatrix} -e^{\sin t} \\ 2e^{\sin t} \end{pmatrix}$$

ФСР ЛОСДУ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (2\sin t-\cos t)x+(\sin t-\cos t)y, \\ \dot{y}(t) &= 2(\cos t-\sin t)x+(2\cos t-\sin t)y\,? \end{aligned} \tag{3.22}$$

Найти решение ЛОСДУ, удовлетворяющее начальным условиям $x(p)=-1$, $y(p)=2$; (•) означает производную по переменной t.

Δ Легко проверить, что функции $x_1=e^{-\cos t}$, $y_1=-e^{-\cos t}$ и $x_2=-e^{\sin t}$, $y_2=2e^{\sin t}$ являются решениями системы, т.е. $z^1=\left(e^{-\cos t}, -e^{-\cos t}\right)^T$ и

$\boldsymbol{z^2} = \left(e^{\sin t}, 2e^{\sin t}\right)^T$ – векторы-решения этой системы.

Так как определитель

$$|Z(t)| = \begin{vmatrix} e^{-\cos t} & -e^{\sin t} \\ -e^{-\cos t} & 2e^{\sin t} \end{vmatrix} = e^{\sin t - \cos t} \neq 0,$$

то $\boldsymbol{z^1}, \boldsymbol{z^2}$ – ФСР системы (3.22). Тогда ее общее решение

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\,\boldsymbol{z^1} + C_2\,\boldsymbol{z^2} = C_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

или

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{-\cos t} - C_2 e^{\sin t},$$
$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = -C_1 e^{-\cos t} + 2C_2 e^{\sin t}.$$

Используя начальные условия $x(p) = -1$, $y(p) = 2$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} x(p) &= -1 = C_1 e - C_2, \\ y(p) &= 2 = C_1 e + 2C_2, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Итак, решением задачи Коши является $x = -e^{\sin t}$, $y = 2e^{\sin t}$. ▲

3.12. Проверить, что векторы

$$\boldsymbol{z}^1 = \left(e^t \cos t, e^t \sin t\right)^T, \ \boldsymbol{z}^2 = (-\sin t, \cos t)^T$$

образуют ФСР системы

$$\dot{x}(t) = x\cos^2 t - (1 - \sin t \cos t)y,$$
$$\dot{y}(t) = (1 + \sin t \cos t)x + y\sin^2 t,$$

и найти ее общее решение.

Отв.: $x = C_1 e^t \cos t - C_2 \sin t$, $y = C_1 e^t \sin t - C_2 \cos t$.

Неоднородная линейная система дифференциальных уравнений (НЛСДУ) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n = f_1(x), \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n = f_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n = f_2(x) \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

или в векторно-матричной форме

$$\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x), \tag{3.24}$$

где $\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$ – вектор-столбец свободных членов системы, $a_{ij}(x)$, $f_j(x)$, $i = \overline{1, n}$ – функции, непрерывные на $[a, b]$.

Структура общего решения неоднородной системы ЛДУ определяется следующей теоремой.

Теорема 3.4. *Любое решение* $\boldsymbol{y}(x)$ *НЛСДУ* $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{f}(x)$ *представляет собой сумму какого-либо частного решения* $\boldsymbol{y}^*(x)$ *этой системы и обще-*

го решения $\boldsymbol{y}^0(x)$ *соответствующей однородной системы* $\boldsymbol{y}'(x)=A(x)\boldsymbol{y}(x)$, *т.е.*

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{*}+\boldsymbol{y}^{0}=\boldsymbol{y}^{0}+C_1\boldsymbol{y}^{1}+C_2\boldsymbol{y}^{2}+\ldots+C_n\boldsymbol{y}^{n}, \tag{3.25}$$

где $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \ldots, \boldsymbol{y}^n$ – ФСР однородной системы.

Для НЛСДУ $\boldsymbol{y}'(x)=A(x)\boldsymbol{y}(x)+\boldsymbol{f}^1(x)+\boldsymbol{f}^2(x)+\ldots+\boldsymbol{f}^k(x)$ справедлив *принцип суперпозиции:* частное решение $\boldsymbol{y}^*(x)$ этой системы имеет вид

$$\boldsymbol{y}^*(x)=\boldsymbol{y}^{*1}(x)+\boldsymbol{y}^{*2}(x)+\ldots+\boldsymbol{y}^{*k}(x),$$

где $\boldsymbol{y}^{*i}(x)$ – решение системы $\boldsymbol{y}'(x)=A(x)\boldsymbol{y}(x)+\boldsymbol{f}^i(x),\ i=1,2,\ldots,k$.

Система ЛДУ

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n,\\ y_2' &= a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n' &= a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n, \end{aligned}\right\}, \tag{3.26}$$

в которой коэффициенты a_{ij} – постоянные действительные числа, называется нормальной ЛОСДУ с постоянными коэффициентами. Если обозначить

$$A(x)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\\ \ldots\\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

то система (3.26) записывается в векторно-матричном виде $\boldsymbol{y}'=A\boldsymbol{y}$. Этой системе всегда удовлетворяет тривиальное решение $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$.

Одним из методов решения системы (3.26) является *метод Эйлера*, в соответствии с которым ее нетривиальное решение ищется в виде

$$y_1=g_1e^{lx},\ y_2=g_2e^{lx},\ \ldots,\ y_n=g_ne^{lx}, \tag{3.27}$$

где числа $g_1, g_2, \ldots, g_n, l$ подлежат определению. В векторной записи решения имеют вид

$$\boldsymbol{y}=\gamma e^{lx} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \ldots\\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_1\\ g_2\\ \ldots\\ g_n \end{pmatrix}\cdot e^{lx}. \tag{3.28}$$

Подстановка $\boldsymbol{y}$ и $l\gamma e^{lx}$ в систему $\boldsymbol{y}'=A\boldsymbol{y}$ приводит к однородной СЛУ относительно $g_1, g_2, \ldots, g_n$:

$$\Lambda\gamma=A\gamma \Leftrightarrow (A-lE)\gamma=\boldsymbol{0}, \tag{3.29}$$

где E – единичная $n\times n$ - матрица.

Таким образом, если $\boldsymbol{y}=\gamma e^{lx}$ – решение системы $\boldsymbol{y}'=A\boldsymbol{y}$, то l и γ – соответственно собственное значение и собственный вектор матрицы A системы.

Для отыскания собственных значений матрицы решается уравнение

$$\left|A - lE\right| = \begin{vmatrix} a_{11} - l & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - l & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - l \end{vmatrix} = 0, \tag{3.30}$$

называемое *характеристическим уравнением*.

Собственный вектор $\gamma = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$ матрицы A, отвечающий собственному значению l, находится из системы

$$\begin{aligned} &(a_{11} - l)g_1 + a_{12}g_2 + \dots + a_{1n}g_n = 0, \\ &a_{21}g_1 + (a_{22} - l)g_2 + \dots + a_{2n}g_n = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n1}g_1 + a_{n2}g_2 + \dots + (a_{nn} - l)g_n = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Характеристическое уравнение (3.30) с учетом кратности имеет n корней. При этом возможны следующие случаи:

1) корни $l_1, l_2, \dots, l_n$ – действительные и различные;

2) корни $l_1, l_2, \dots, l_n$ – различные, но среди них имеются комплексные;

3) среди корней имеются кратные.

В случае 1° матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ \dots \\ g_{n1} \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ \dots \\ g_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \gamma^n = \begin{pmatrix} g_{1n} \\ g_{2n} \\ \dots \\ g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Общим решением системы $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$ в этом случае является вектор

$$\boldsymbol{y} = C_1\gamma^1 e^{l_1 x} + C_2\gamma^2 e^{l_2 x} + \dots + C_n\gamma^n e^{l_n x}. \tag{3.32}$$

В координатной форме равенство (3.32) равносильно системе скалярных равенств

$$\begin{cases} y_1 = C_1 g_{11} e^{l_1 x} + C_2 g_{12} e^{l_2 x} + \dots + C_n g_{1n} e^{l_n x}, \\ y_2 = C_1 g_{21} e^{l_1 x} + C_2 g_{22} e^{l_2 x} + \dots + C_n g_{2n} e^{l_n x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_3 = C_1 g_{n1} e^{l_1 x} + C_2 g_{n2} e^{l_2 x} + \dots + C_n g_{nn} e^{l_n x}. \end{cases}$$

3.13. Решить ЛОСДУ:

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y'_2 &= -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ y'_3 &= y_1 - y_2 + 3y_3. \end{aligned}\right\}$$

Δ Характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} 3-l & -1 & 1 \\ -1 & 5-l & -1 \\ 1 & -1 & 3-l \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $l_1 = 2$, $l_2 = 3$, $l_3 = 6$. Находим соответствующие им векторы. Для $l_1 = 2$ система (3.31) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} g_1 - g_2 + g_3 &= 0, \\ -g_1 + 3g_2 - g_3 &= 0, \\ g_1 - g_2 + g_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $g_2 = 0, g_3 = -g_1$. Следовательно, собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}^1 = (g_1, 0, -g_1)^T = g_1(1,0,-1)^T$, или, положив $g_1 = 1$, будем иметь $\boldsymbol{\gamma}^1 = (1,0,-1)^T$.

Точно так же для $l_2 = 3$ найдем собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}^2 = (1,1,1)^T$, а для $l_3 = 6$ – собственный вектор $\boldsymbol{\gamma}^3 = (1,-2,1)^T$.

Таким образом, ФСР исходной ЛОСДУ образуют вектор-функции

$$\boldsymbol{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x}, \ \boldsymbol{y}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}, \ \boldsymbol{y}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x},$$

а общим решением системы в векторной форме, согласно равенству (3.32), будет вектор

$$\boldsymbol{y} = C_1\boldsymbol{y}^1 + C_2\boldsymbol{y}^2 + C_3\boldsymbol{y}^3 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x},$$

или в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}, \\ y_2 &= C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x}, \\ y_3 &= -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}. \end{aligned}\right\} \quad \blacktriangle$$

В случае 2°, если $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ – собственный вектор, отвечающий комплексным собственным значениям $l_{1,2} = a \pm ib$, вектор-функция

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\gamma}\, e^{lx} = (\boldsymbol{u} + i\,\boldsymbol{v})e^{(a+ib)x}, \tag{3.33}$$

или

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v})e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = e^{ax}(\boldsymbol{u}\cos bx - \boldsymbol{v}\sin bx) + ie^{ax}(\boldsymbol{v}\cos bx + \boldsymbol{u}\sin bx)$$

является комплексным решением системы $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$. Тогда паре комплексно-сопряженных значений $l_{1,2} = a \pm ib$ отвечает пара действительных решений

$$\boldsymbol{y}^1 = e^{ax}(\boldsymbol{u}\cos bx - \boldsymbol{v}\sin bx) \text{ и } \boldsymbol{y}^2 = e^{ax}(\boldsymbol{v}\cos bx + \boldsymbol{u}\sin bx).$$

3.14. Решить систему $y'_1 = 2y_1 - y_2$, $y'_2 = y_1 + 2y_2$; $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$.

Δ Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 2-l & -1 \\ 1 & 2-l \end{vmatrix} = l^2 - 4l + 5 = 0$ этой системы имеет корни $l_{1,2} = 2 \pm i$. Найдем собственный вектор, отвечающий собственному значению $l = 2 + i$. Из системы

$$\left.\begin{aligned} (2-(2+i))y_1 - y_2 = 0, \\ y_1 + (2-(2+i))y_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -iy_1 - y_2 = 0, \\ y_1 - iy_2 = 0 \end{cases}$$

имеем $g_2 = -ig_1$, т.е. при $g_1 = 1$ собственный вектор

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 \cdot i \\ 0 - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{u} = (1,0)^T, \ \boldsymbol{v} = (0,-1)^T.$$

Согласно равенству (3.33), получаем решение

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+i)x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2x}(\cos x + i\sin x) = \begin{pmatrix} e^{2x}(\cos x + i\sin x) \\ e^{2x}(\sin x - i\cos x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2x}\cos x \\ e^{2x}\sin x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{2x}\sin x \\ -e^{2x}\cos x \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}^1 + i\,\boldsymbol{y}^2,$$

где

$$\boldsymbol{y}^1 = e^{2x}\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}^2 = e^{2x}\begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}.$$

В таком случае общее решение исходной СДУ в векторной форме имеет вид

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\boldsymbol{y}^1 + C_2\boldsymbol{y}^2 = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix},$$

или в координатной записи

$$y_1 = (C_1\cos x + C_2\sin x)\,e^{2x}, \ y_2 = (C_1\sin x - C_2\cos x)\,e^{2x}. \ \blacktriangle$$

В случае 3° укажем правило нахождения решения СДУ $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$. Если l есть k-кратный корень характеристического уравнения (3.30), то ему отвечает решение

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}_{k-1}(x)\,e^{lx} = \begin{pmatrix} P_{1k-1}(x) \\ P_{2k-1}(x) \\ \mathbf{KKK} \\ P_{nk-1}(x) \end{pmatrix} e^{lx}, \tag{3.34}$$

где каждая координата $P_{ik-1}(x)$, $i = \overline{i,n}$, вектор-функции $\boldsymbol{P}_{k-1}(x)$ есть многочлен степени не выше $k-1$ с постоянными неопределенными коэффициентами, которые находятся подстановкой вектор-функции (3.34) в исходную систему $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$.

3.15. Решить ЛОСДУ:

$$\dot{x} = 2x + y,\ \dot{y} = 4y - x;\ x = x(t),\ y = y(t). \qquad (3.35)$$

Δ Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 2-l & 1 \\ -1 & 4-l \end{vmatrix} = l^2 - 6l + 9 = 0$ имеет двукратный корень $l_1 = l_2 = 3$. Решение системы ищем в виде

$$x = (a_1 + b_1 t)e^{3t}, \quad y = (a_2 + b_2 t)\, e^{3t}. \qquad (3.36)$$

Подставив (3.36) в первое уравнение системы (3.35), получим

$$3(a_1 + b_1 t) + b_1 = 2(a_1 + b_1 t) + a_1 + b_2 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 3a_1 + b_1 = 2a_1 + a_2, \\ 3b_1 = 2b_1 + b_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = a_1 + b_1, \\ b_2 = b_1. \end{cases}$$

Величины a_1 и b_1 остаются произвольными. Обозначая их соответственно через C_1 и C_2, получаем общее решение системы (3.35) в виде $x = (C_1 + C_2 t)\, e^{3t}$, $y = (C_1 + C_2 + C_2 t)\, e^{3t}$. ▲

3.16. Найти общее решение ЛОСДУ:

а) $\dot{x}_1 = 6x_1 - 12x_2 - x_3$, $\dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 - x_3$, $\dot{x}_3 = -4x_1 + 12x_2 + 3x_3$.

Отв.: $x_1 = 2C_1e^t + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}$, $x_2 = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$, $x_3 = -2C_1e^t - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}$.

б) $\dot{x}_1 = 4x_1 - 3x_2$, $\dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2$.

Отв.: $x_1 = e^{4t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$, $x_2 = e^{4t}(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t)$.

в) $\dot{x}_1 = x_1 - x_3$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = x_1 - x_2$.

Отв.: $x_1 = C_1e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$, $x_2 = C_1e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t$, $x_3 = C_2(\cos t + \sin t) + C_3(\sin t - \cos t)$.

г) $\dot{x}_1 = 5x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + 3x_2$.

Отв.: $x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2)$, $x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1)$.

д) $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_3$, $\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3$, $\dot{x}_3 = x_1 + x_2 + x_3$.

Отв.: $x_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-2t}$, $x_2 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - C_3e^{-2t}$, $x_3 = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}$.

е) $\dot{x}_1 = 12x_1 - 5x_2$, $\dot{x}_2 = 5x_1 + 12x_2$.

Отв.: $x_1 = e^{12t}(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t)$, $x_2 = e^{12t}(-C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t)$.

ж) $\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 - x_2$.

Отв.: $x_1 = 2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t$, $x_2 = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t$.

з) $$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -15x_1 - 6x_2 + 16x_3, \\ \dot{x}_2 &= -15x_1 - 7x_2 + 18x_3, \\ \dot{x}_3 &= -19x_1 - 8x_2 + 21x_3. \end{aligned}\right\}$$

Отв.: $x_1 = 2C_1e^{-t} + 2(4C_3 + C_2)\cos t + 2(4C_2 - C_3)\sin t$,

$x_2 = -2C_1e^{-t} + 2(5C_2 + C_3)\cos t + 3(5C_3 - 3C_2)\sin t$,

$x_3 = C_1e^{-t} + (7C_2 + 11C_3)\cos t + (7C_3 - 11C_2)\sin t$.

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = (a+1)x - y, \\ \dot{y} = x + (a-1)y. \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ л) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -4x - y. \end{cases}$

Отв.: и) $x = e^{at}(C_1t + C_2)$, $y = e^{at}(C_1t + C_2 - C_1)$;

к) $x = -2e^t(C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t)$, $y = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$;

л) $x = e^t(C_1t + C_2)$, $y = e^t(C_1 - 2C_2 - 2C_1t)$.

Зная ФСР ЛОСДУ $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, *методом вариации произвольных постоянных* можно найти общее решение неоднородной системы $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$, где $A = (a_{ij})_{n\times n}$ – матрица с постоянными коэффициентами a_{ij}, а $\boldsymbol{f}(x)$ – вектор правых частей системы.

3.17. Решить задачу Коши ($y = y(x)$, $z = z(x)$):

$$y' = 4y - 5z + 4x + 1,\ z' = y - 2z + x;\ y(0) = z(0) = 0. \tag{3.37}$$

Δ Находим сначала общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} y' &= 4y - 5z, \\ z' &= y - 2z. \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 4-l & -5 \\ 1 & -2-l \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $l_1 = -1$, $l_2 = 3$. Им отвечают собственные векторы $\gamma^1 = (1,1)^T$, $\gamma^2 = (5,1)^T$. Общее решение ЛОСДУ (3.38) имеет вид $y = \overline{C_1}e^{-x} + 5\overline{C_2}e^{3x}$, $z = \overline{C_1}e^{-x} + \overline{C_2}e^{3x}$.

Считая, что $\overline{C_1} = C_1(x)$, $\overline{C_2} = C_2(x)$, общее решение неоднородной системы (3.37) ищем в виде

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1(x)\,e^{-x} + 5C_2(x)\,e^{3x}, \\ z &= C_1(x)\,e^{-x} + C_2(x)\,e^{3x}. \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

Отсюда, подставив y, y', z, z' в систему (3.37), получим

$$\left.\begin{aligned} C'_1(x)e^{-x}+5C'_2(x)e^{3x}&=4x+1,\\ C'_1(x)e^{-x}+C'_2(x)e^{3x}&=x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C'_1(x)=\dfrac{x-4}{4}e^{-x},\\ C'_2(x)=\dfrac{3x+1}{4}e^{-3x}. \end{cases}$$

Интегрируя, будем иметь

$$C_1(x)=\int\frac{x-4}{4}e^{-x}dx+C_1=\frac{x-2}{4}e^{-x}+C_1,$$

$$C_2(x)=\int\frac{3x+1}{4}e^{-3x}dx+C_2=C_2-\frac{3x+2}{12}e^{-3x}.$$

Подставив найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (3.39), получим общее решение неоднородной системы (3.37):

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{x-2}{4}+C_1e^{-x}-\frac{5}{12}(3x+2)+5C_2e^{3x},\\ z&=\frac{x-2}{4}+C_1e^{-x}-\frac{3x+2}{12}+C_2e^{3x}. \end{aligned}\right\}$$

Из начальных условий $y(0)=z(0)=0$ находим $C_1=1/2$, $C_2=1/6$, так что искомое решение задачи Коши (3.37) есть

$$y=-x-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{5}{6}e^{3x},\ z=-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{6}e^{3x}.\ ▲$$

3.18. Найти общее решение неоднородной СЛУ:

а) $\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx}&=y-2z+3,\\ \frac{dz}{dx}&=y-z+1. \end{aligned}\right\}$ **Отв.** $\begin{cases} y=2C_1\cos x+2C_2\sin x+1,\\ z=(C_1-C_2)\cos x+(C_1+C_2)\sin x+2. \end{cases}$

б) $\dfrac{dy}{dx}=-y-2z+2e^{-x}$, $\dfrac{dz}{dx}=3y+4z+e^{-x}$.

Отв. $y=-2e^{-x}+C_1e^{x}+2C_2e^{2x}$, $z=e^{-x}-C_1e^{x}-3C_2e^{2x}$.

в) $\dfrac{dy}{dx}=4y-z-5x+1$, $\dfrac{dz}{dx}=y+2z+x-1$.

Отв. $y=e^{3x}(C_1+C_2x)+x$, $z=e^{3x}(C_1+C_2x)-C_2e^{3x}-x$.

г) $y'=-5y+2z+40e^{x}$, $z'=y-6z+9e^{-x}$.

Отв. $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-7x}+7e^{x}+e^{-x}$, $z=\dfrac{C_1}{2}e^{-4x}-C_2e^{-7x}+e^{x}+2e^{-x}$.

д) $dx/dt=y-\cos t$, $dy/dt=-x+\sin t$.

Отв. $x=-C_1\cos t+C_2\sin t-t\cos t$, $y=C_1\sin t+C_2\cos t+t\sin t$.

3.2. Элементы теории устойчивости

Устойчивость решений ДУ по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Простейшие типы точек покоя на плоскости. Таблица видов простейших точек покоя. Критерий устойчивости ЛДУ-*n* с постоянными коэффициентами. Устойчивость по первому приближению. Метод функций Ляпунова.

Пусть дана автономная система ДУ

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{y}), \tag{3.40}$$

где $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^T$, x – временная переменная. Пусть в начальный момент времени $x = x_0$ заданы начальные условия

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})^T. \tag{3.41}$$

Предположим, что решение $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ существует $\forall x \geq x_0$.

Решение $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$, $a_i \in \boldsymbol{R}$, системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ называется *точкой равновесия* или *точкой покоя*, если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Замечание. Если $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ – точка покоя системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$, то заменой $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{a}$ эта система сводится к системе $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z})$, точкой покоя которой является $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$.

Пусть $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x, x_0, \boldsymbol{y}_0)$ – решение системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$, отвечающее начальному условию $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$.

Точка покоя $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ называется *устойчивой по Ляпунову,* если для любого $e > 0$ существует $d = d(e, x_0) > 0$ такое, что из неравенства $\|\boldsymbol{y}_0\| < d$ вытекает неравенство $\|\boldsymbol{y}(x)\| = \|\boldsymbol{y}(x, x_0, \boldsymbol{y}_0)\| < e \quad \forall x \geq x_0$, где $\|\boldsymbol{y}(x)\|$ – норма функции $\boldsymbol{y}(x)$. В противном случае точка покоя $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ называется *неустойчивой,* т.е. если $\exists e^* > 0$, $\forall d = d(e, x_0)$, $\exists \boldsymbol{y}^*(x)$, $x \geq x_0$, то из неравенства $\|\boldsymbol{y}^*(x_0)\| < d$, следует $\|\boldsymbol{y}^*(x)\| \geq e^*$.

Точка покоя $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ называется *асимптотически устойчивой,* если она устойчива и $\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{y}(x, x_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$.

Геометрически понятие устойчивости точки покоя $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ означает следующее: для любого $e > 0$ найдется $d > 0$ такое, что фазовая траектория, начинающаяся в d-окрестности точки покоя $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, все время остается в e-окрестности этой точки (рис. 3.2). Асимптотическая же устойчивость точки покоя геометрически означает следующее: в дополнение к условиям устойчивости все траектории, начинающиеся в d-окрестности точки покоя $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$, стремятся к нулю при $x\to+\infty$ (рис. 3.3).

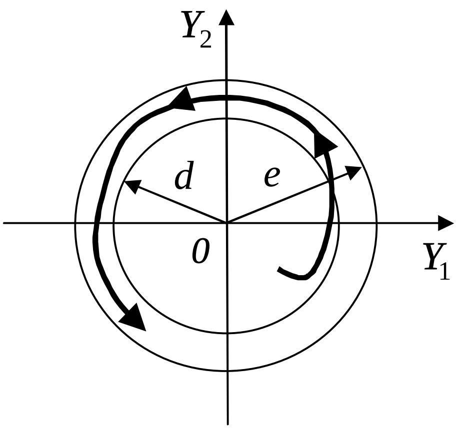


Рис. 3.2

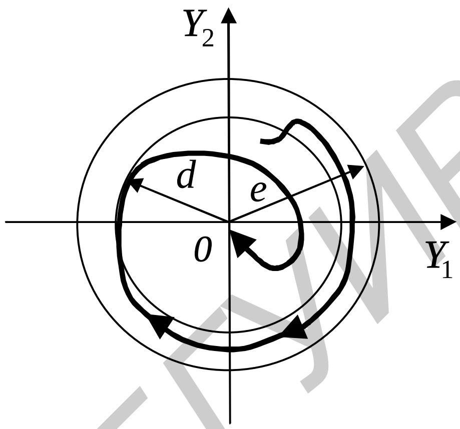


Рис. 3.3

В общем случае решение $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(x)$ системы $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$, определенное для $x\ge x_0$, называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $e>0$ можно указать $d>0$ такое, что каждое решение $\tilde{\boldsymbol{y}}(x)$ этой системы, удовлетворяющее неравенству $\|\tilde{\boldsymbol{y}}(x_0)-\boldsymbol{y}(x_0)\|<d$, удовлетворяет также неравенству $\|\tilde{\boldsymbol{y}}(x)-\boldsymbol{y}(x)\|<e$. Решение $\boldsymbol{y}(x)$ называется *асимптотически устойчивым*, если в дополнение к устойчивости $\lim\limits_{x\to+\infty}\|\tilde{\boldsymbol{y}}(x)-\boldsymbol{y}(x)\|=0$.

3.19. Исследовать на устойчивость решение $y=y(x)$ уравнения $y'=-2y+2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=3$.

Δ Нетрудно получить, что решением данной задачи Коши является функция $y(x)=2e^{-2x}+1$. При любом другом начальном условии $y(0)=\tilde{y}_0$ решение задачи Коши имеет вид $\tilde{y}=\tilde{y}(x)=\left(\tilde{y}_0-1\right)e^{-2x}+1$.

Из очевидного неравенства

$$|y-\tilde{y}|=e^{-2x}\left|\tilde{y}_0-3\right|\le\left|\tilde{y}_0-3\right|,\ \forall x\ge 0$$

вытекает, что при $d=e$ из неравенства $\left|\tilde{y}_0-3\right|<d$ следует $|\tilde{y}-3|<e$, т.е. решение $y=2e^{-2x}+1$ устойчиво по Ляпунову. Так как

$\lim\limits_{x\to+\infty}|\tilde{y}-y| = \lim\limits_{x\to+\infty}|\tilde{y}_0-3| = 0$, то это решение асимптотически устойчиво. ▲

3.20. Исследовать на устойчивость решения следующих уравнений ($x = x(t)$):

а) $\dot{x} = t(x-1)$; $x(0)=1$; б) $\dot{x} = t-1$; $x(0)=-1$;

в) $\dot{x} = -x+1$; $x(0)=1$; г) $\dot{x} = 2x+t$; $x(1/2) = -1/2$;

д) $\dot{x} = 2xt$; $x(0)=0$; е) $\dot{x} = \cos t$; $x(0)=1$.

Отв.: а) неустойчиво; б) устойчиво; в) асимптотически устойчиво; г) неустойчиво; е) устойчиво.

Рассмотрим систему двух ЛДУ первого порядка с постоянными действительными коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} dy_1/dx = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ dy_2/dx = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \tag{3.42}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Точкой покоя системы (3.42) согласно определению является точка $(y_1, y_2) = (0,0)$, удовлетворяющая системе

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

Если определитель $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то система (3.43) имеет единственное решение $\boldsymbol{y} = (0,0)^T$.

Так как матрица A имеет действительные элементы, то возможны следующие три случая.

1º. Собственные значения (с.з.) матрицы A – действительные и различные.

2º. С.з. l_1 и l_2 матрицы A – комплексно-сопряженные.

3º. Матрица A имеет единственное действительное с.з. $l \neq 0$ кратностью два.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1º. Пусть $l_1 \neq l_2$ – действительные с.з. матрицы A. Им отвечают линейно независимые собственные векторы $\overrightarrow{г}^1 = (g_{11}, g_{21})^T$ и $\overrightarrow{г}^2 = (g_{12}, g_{22})^T$. Замена

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T\,\mathrm{z}\,, \tag{3.44}$$

где $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)^T$, а

$$T = \begin{bmatrix} \overrightarrow{g^1} & \overrightarrow{g^2} \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix},$$

осуществляет переход к новому базису из с.в. $\overrightarrow{\text{г}^1}$, $\overrightarrow{\text{г}^2}$ матрицы A. Подставив $\boldsymbol{y} = T\,\boldsymbol{z}$ в систему $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, получим

$$T\,\boldsymbol{z}' = AT\,\boldsymbol{z} \Rightarrow \boldsymbol{z}'\left(T^{-1}AT\right)\boldsymbol{z} = \Lambda\,\boldsymbol{z}\,,$$

где $\Lambda = diag(l_1, l_2) = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix}$. Это означает, что в базисе из с.в. $\overrightarrow{\text{г}^1}$, $\overrightarrow{\text{г}^2}$ матрицы A система (3.42) принимает вид

$$\boldsymbol{z}' = \Lambda \boldsymbol{z} \Leftrightarrow dz_1 / dz = l_1 z_1,\ dz_2 / dz = l_2 z_2 . \tag{3.45}$$

Решением системы (3.45) являются функции

$$z_1 = C_1 e^{l_1 x},\ z_2 = C_2 e^{l_2 x}, \tag{3.46}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Здесь возможны следующие случаи.

1. $l_1 > l_2 > 0$. Из системы (3.45) получим

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow z_2 = C z_1^{l_2/l_1} = C z_1^a, \tag{3.47}$$

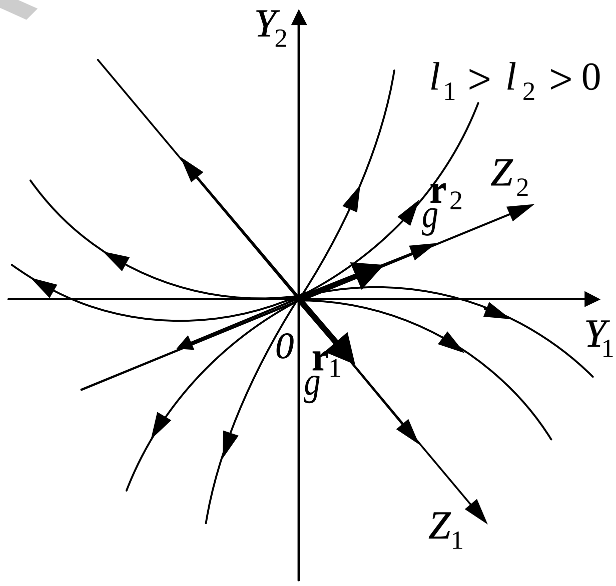


Рис. 3.4

где $a = l_2 / l_1 < 1$, $C = C_1 / C_2$. Кривая (3.47) на фазовой плоскости переменных z_1 и z_2, представляет собой фазовые траектории, касающиеся оси z_2 (рис. 3.4). Если $x \to +\infty$, то из (3.46) следует, что $z_1 \to \infty$, $z_2 \to \infty$. Это означает, что изображающая точка удаляется по фазовой траектории от точки покоя $(0{,}0)$ при $x \to +\infty$. Точка покоя $(0{,}0)$ в этом случае называется *неустойчивым узлом*.

2. При $l_2 > l_1 > 0$ отношение $a = l_2 / l_1 > 1$ и в этом случае фазовые траектории $z_2 = C z_1^a$ касаются в точке $(0{,}0)$ оси Z_1 (рис. 3.5). По-прежнему $\lim\limits_{x \to +\infty} z_1 \to \infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} z_1 \to \infty$.

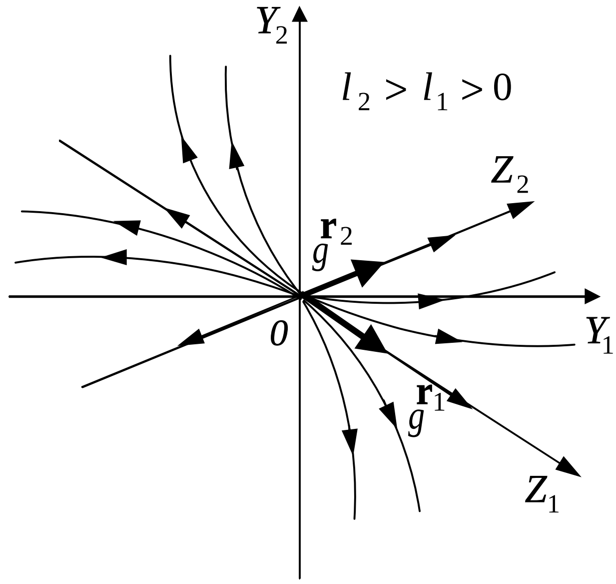


Рис. 3.5

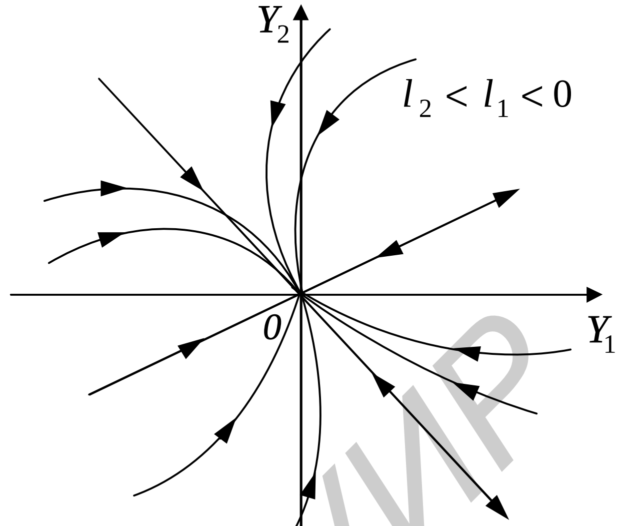


Рис. 3.6

3. Если $l_1 < 0$ и $l_2 < 0$, то характер кривых $z_2 = Cz_1^a$ не меняется $(a > 0)$, но движения по фазовым траекториям, согласно (3.46), осуществляются по направлению к точке покоя $(0{,}0)$, т.е. $\lim\limits_{x \to +\infty} z_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} z_2 = 0$. Точка покоя в этом случае называется *устойчивым узлом* (рис. 3.6).

4. Пусть $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$ – действительные с.з. разных знаков. Если для определенности $l_1 > 0$, а $l_2 < 0$, то, согласно (3.46), $\lim\limits_{x \to +\infty} z_1 = \infty$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} z_2 = 0$. Фазовые траектории имеют вид, изображенный на рис. 3.7. Точка покоя $(0{,}0)$ в этом случае неустойчива и называется *седловой точкой*, или просто *седлом*.

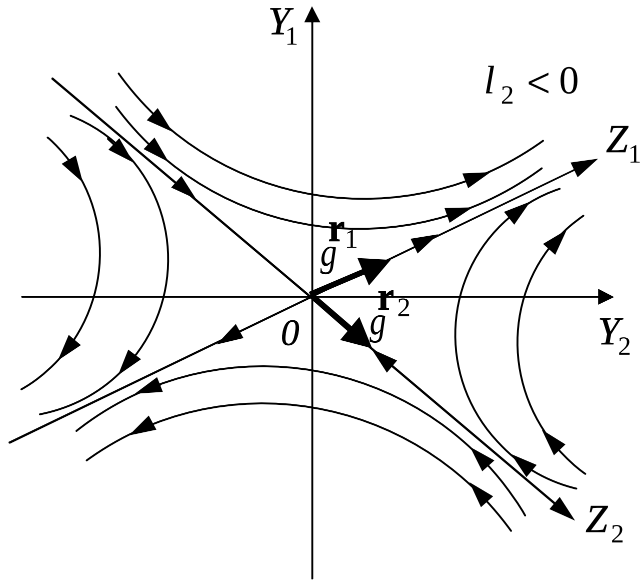


Рис. 3.7

Если $l_1 < 0$, а $l_2 > 0$, то вид фазовых траекторий не меняется, но движение по ним происходит в направлении, противоположном изображенному на рис. 3.7.

3.21. Построить фазовые траектории и выяснить характер точки покоя системы

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= y_2 - 3y_1, \\ y'_2 &= y_1 - 3y_2. \end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

Δ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} (-3 - l) & 1 \\ 1 & (-3 - l) \end{vmatrix} = l^2 + 6l + 8 = 0$$

системы (3.48) имеет корни $l_1 = -4$ и $l_2 = -2$. Согласно п. 3 точка покоя $(0{,}0)$ системы является устойчивым узлом. Для построения фазовых траекторий находим с.в. $\overset{\mathbf{r}}{g}{}^1=(1,-1)^T$ и $\overset{\mathbf{r}}{g}{}^2=(1,1)^T$, отвечающие с.з. $l_1=-4$ и $l_2=-2$. Осуществив замену

$$\boldsymbol{y}=T\,\mathrm{z}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1+z_2\\-z_1+z_2\end{pmatrix},$$

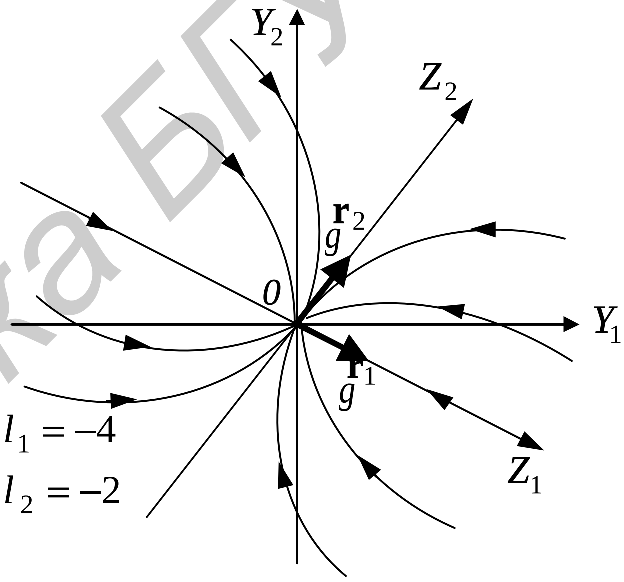
придем к системе

$$\boldsymbol{z}'=\Lambda\boldsymbol{z}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}z_1'\\z_2'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0\\0&-2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix},$$

т.е.

$$\left.\begin{aligned}z'_1&=-4z_1,\\z'_2&=-2z_2.\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}z_1=C_1e^{-4x},\\z_2=C_2e^{-2x}.\end{cases}$$

Отсюда, исключив параметр x, получим $z_1=(C_1/C_2)z_2^2$, т.е. фазовыми траекториями системы (3.48) на плоскости z_1z_2 являются параболы (рис. 3.8). Заметим, что плоскость z_1z_2 получается поворотом фазовой плоскости Y_1Y_2 на угол $p/4$, вокруг начала координат по часовой стрелке. ▲



3.22. Определить характер точки покоя $(0{,}0)$ и построить фазовые траектории системы

$$y'_1=4y_1-3y_2,\ y'_2=2y_1-3y_2. \qquad (3.49)$$

Рис. 3.8

Δ С.з. матрицы $A=\begin{bmatrix}4&-3\\2&-3\end{bmatrix}$ системы равны $l_1=3$, $l_2=-2$. Следовательно, точка покоя $(0{,}0)$ – седло. Находим с.в. матрицы A: $\overrightarrow{\text{г}^1}=(3{,}1)^T$, $\overrightarrow{\text{г}^2}=(1{,}2)^T$. В плоскости Z_1Z_2 переменных z_1 и z_2 система (3.49) заменой $\boldsymbol{y}=T\,\mathrm{z}$ приводится к системе

$$\left.\begin{aligned}z'_1&=3z_1,\\z'_2&=-2z_2.\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}z_1=C_1e^{3x},\\z_2=C_2e^{-2x}.\end{cases}\Rightarrow z_1^2z_2^3=C_1^2C_2^3\Rightarrow z_2=Cz_1^{-2/3},$$

где C – произвольная постоянная. Графики фазовых траекторий изображены на рис. 3.9. ▲

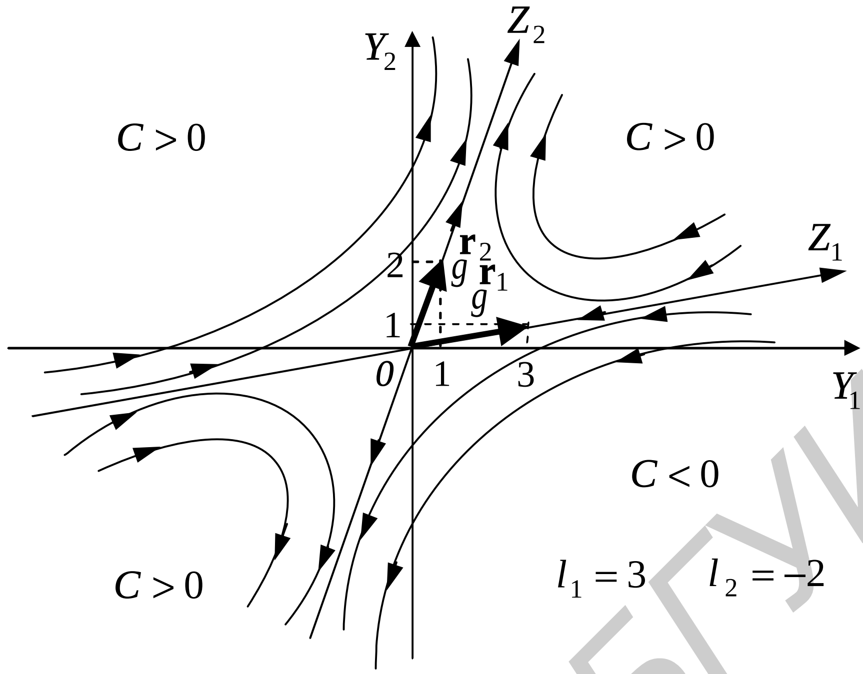


Рис. 3.9

2º. Пусть $l_{1,2} = a \pm ib$, $b \neq 0$, – комплексно-сопряженные с.з. матрицы A системы (3.42), а $\boldsymbol{y}^{1,2} = \boldsymbol{u} \pm i\boldsymbol{v}$ – отвечающие им с.в., $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^T$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^T$. В этом случае комплексное решение имеет вид

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v})\, e^{(a+ib)x} = (\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v})\, e^{a\,x}(\cos b\,x + i\sin b\,x) =$$
$$= e^{a\,x}(\boldsymbol{u}\cos b\,x - \boldsymbol{v}\sin b\;x) + ie^{a\,x}(\boldsymbol{v}\cos b\,x + \boldsymbol{u}\sin b\,x).$$

Отсюда получаем действительные решения

$$\boldsymbol{y}^1 = e^{a\,x}(\boldsymbol{u}\cos b\,x - \boldsymbol{v}\sin b\,x), \quad \boldsymbol{y}^2 = e^{a\,x}(\boldsymbol{v}\cos b\,x + \boldsymbol{u}\sin b\,x)$$

и, значит, общее решение системы (3.42) $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\boldsymbol{y}^1 + C_2\boldsymbol{y}^2$ можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{ax}(C_1'\cos bx + C_2'\sin bx), \\ y_2 &= e^{ax}(C_1''\cos bx + C_2''\sin bx), \end{aligned}\right\} \qquad (3.50)$$

где C'_1, C'_2, C''_1, C''_2 – некоторые линейные комбинации произвольных постоянных C_1 и C_2. Обозначим

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2 = e^{2ax}\left[(C'_1\cos bx + C'_2\sin bx)^2 + (C''_1\cos bx + C''_2\sin bx)^2\right]. \qquad (3.51)$$

Здесь возможны следующие случаи.

1. $\operatorname{Re} l_{1,2} = a = 0$. Из (3.50) следует, что функции y_1 и y_2 – периодичные с периодом $2p\,/\,b$, т.е. на фазовой плоскости Y_1Y_2 фазовые траектории системы

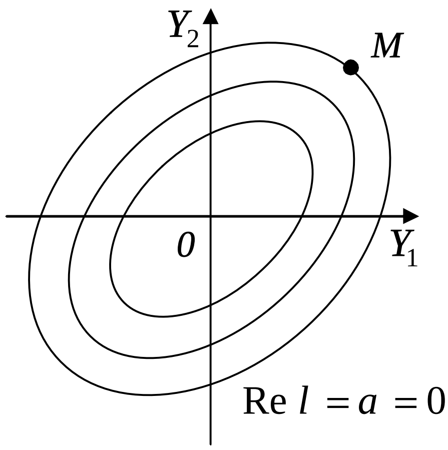


Рис. 3.10

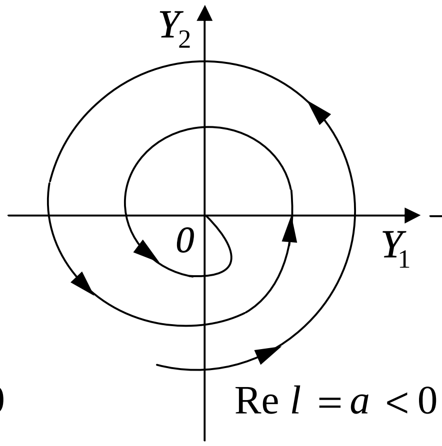


Рис. 3.11

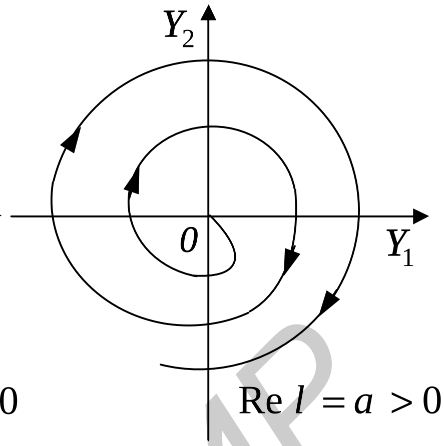


Рис. 3.12

(3.42) – непересекающиеся замкнутые кривые, причем при изменении x на величину периода $T = 2p / b$ точка M, двигаясь по фазовой траектории, возвращается в исходное положение (рис. 3.10).

В этом случае $r^2 = y_1^2 + y_2^2 \neq 0$, т.е. точка покоя $(0{,}0)$ устойчива, но не асимптотически устойчива, так как решение (3.50) не стремится к нулю при $x \to +\infty$. Такая точка покоя называется *центром*.

2. При $\operatorname{Re} l_{1,2} = a < 0$ или $\operatorname{Re} l_{1,2} = a > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} r = 0$, если $a < 0$, и $\lim\limits_{x \to +\infty} r = \infty$, если $a > 0$.

В этом случае на фазовой плоскости получаются спиралевидные кривые, закручивающиеся в точку $(0{,}0)$ при $a < 0$ (рис. 3.11). Точка $(0{,}0)$ асимптотически устойчива. Если же $a > 0$, то фазовые траектории раскручиваются с возрастанием x, становясь все шире (рис. 3.12), точка $(0{,}0)$ неустойчива.

Точка покоя $(0{,}0)$, отвечающая комплексно-сопряженным значениям $l_{1,2} = a \pm ib$, $a \neq 0$, называется *фокусом*. При $a < 0$ фокус асимптотически устойчив, при $a > 0$ – неустойчив.

3.23. Определить характер точки покоя и фазовые траектории системы

$$y'_1 = -y_1 + 5y_2, \; y'_2 = -y_1 + y_2. \qquad (3.52)$$

Δ Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -1-l & 5 \\ -1 & 1-l \end{vmatrix} = l^2 + 4 = 0$ имеет корни $l_{1,2} = \pm 2i$. Значит, точка покоя $(0{,}0)$ – центр. Находим с.в. $\vec{\text{г}} = u + iv$, отвечающий с.з. $l = 2i$, он равен

$$\vec{\text{г}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{u} = (5{,}1)^T, \qquad \mathrm{v} = (0{,}2)^T .$$

Тогда комплексным решением системы (3.52) будет

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v})e^{2ix} = (\boldsymbol{u}\cos 2x - \boldsymbol{v}\sin 2x) + i(\boldsymbol{v}\cos 2x + \boldsymbol{u}\sin 2x),$$

а действительными решениями –

$$\boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{u}\cos 2x - \boldsymbol{v}\sin 2x,\ \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{v}\cos 2x + \boldsymbol{u}\sin 2x.$$

Общее же решение системы есть

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\boldsymbol{y}^1 + C_2\boldsymbol{y}^2 = C_1\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 2x - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\sin 2x\right] + C_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\cos 2x + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\sin 2x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = 5C_1\cos 2x + 5C_2\sin 2x, \qquad y_2 = (C_1 + 2C_2)\cos 2x + (C_1 - 2C_2)\sin 2x.$$

Отсюда находим

$$\left.\begin{aligned} y_1/5 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x, \\ (y_2 - y_1)/2 = C_2\cos 2x - C_1\sin 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{25} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{4} = C_1^2 + C_2^2. \qquad (3.53)$$

Введем замену $y_1 = z_1$, $y_2 - y_1 = z_2$, т.е.

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T\boldsymbol{z},\ \text{где}\ \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Из матрицы $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ следует, что в системе координат Z_1Z_2, имеющей базисные векторы $(1,1)^T$ и $(0,1)^T$ в системе координат Y_1Y_2, уравнение (3.53) имеет запись $z_1^2/25 + z_2^2/4 = C_1^2 + C_2^2$, т.е. фазовыми траекториями системы (3.52) являются эллипсы в системе координат Z_1Z_2. ▲

3º. Пусть $l_1 = l_2 \equiv l_0$ – действительное с.з. матрицы A системы (3.42) кратностью два. Здесь возможны два случая.

1. С.з. l_0 отвечают два различных с.в. $\mathbf{\overset{r}{g}}^1, \mathbf{\overset{r}{g}}^2$, матрицы A. Заменой

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T\boldsymbol{z},\ T = \begin{bmatrix} \vec{g}^1 & \vec{g}^2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix},\ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

система (3.42) сводится к виду $z' = \Lambda z$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} l_0 & 0 \\ 0 & l_0 \end{bmatrix},$$

т.е.

$$\left.\begin{aligned} z'_1 = l_0 z_1, \\ z'_2 = l_0 z_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = C_1 e^{l_0 x}, \\ z_2 = C_2 e^{l_0 x}. \end{cases} \qquad (3.54)$$

Отсюда $z_2 = Cz_1$, где $C = C_2/C_1$, $C_1 \neq 0$. На фазовой плоскости переменных z_1 и z_2 уравнению $z_2 = Cz_1$ отвечают прямые, проходящие через начало координат.

Если $l_0 < 0$, то из (3.54) следует, что $\lim\limits_{x \to +\infty} z_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} z_2 = 0$, т.е. движение по прямым $z_2 = Cz_1$ осуществляется к точке $(0,0)$, которая в этом случае называется *дикритическим узлом* (рис. 3.13). Точка $(0,0)$ в этом случае асимптотически устойчива. Если же $l_0 > 0$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} z_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} z_2 = \infty$. В этом случае изображающая точка при своем движении по прямым $z_2 = Cz_1$ уходит в бесконечность, т.е. $(0,0)$ – неустойчивый дикритический узел.

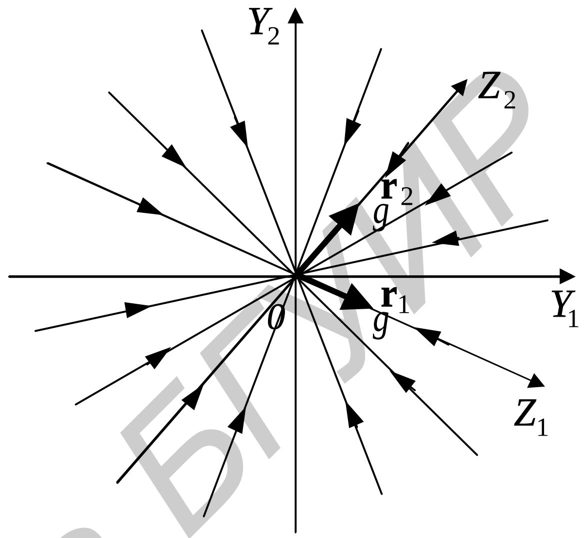


Рис. 3.13

2. Кратному с.з. l_0 отвечает единственный с.в. Общее решение системы (3.42) записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= (C_1 + C_2 x)\, e^{l_0 x}, \\ y_2(x) &= (C_1' + C_2' x)\, e^{l_0 x}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.55)$$

где C'_1 и C'_2 – некоторые линейные комбинации произвольных постоянных C_1 и C_2:

а) При $l_0 < 0$ из (3.55) следует, что $\lim\limits_{x \to +\infty} y_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} y_2 = 0$. В этом случае движение по фазовой траектории осуществляется к точке покоя $(0,0)$, называемой *устойчивым узлом* (рис. 3.14).

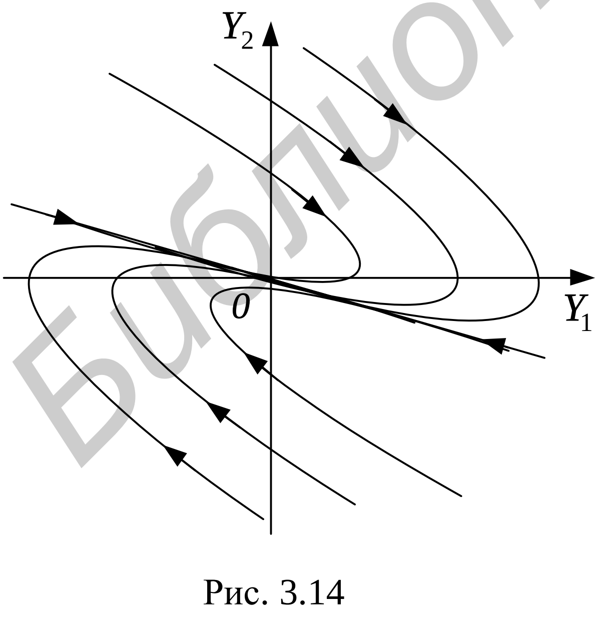


Рис. 3.14

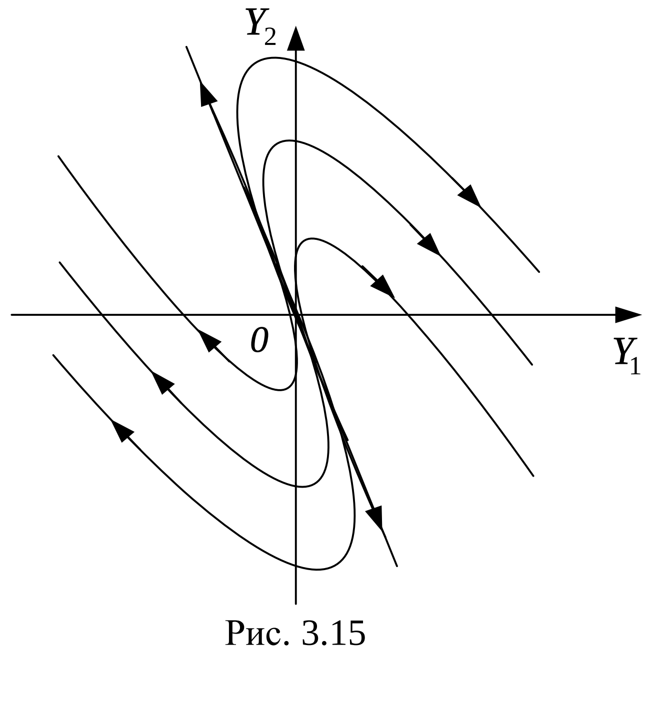


Рис. 3.15

б) При $l_0 > 0$ точка, двигаясь по фазовой траектории, уходит в бесконечность (рис. 3.15). В этом случае точка покоя $(0,0)$ называется *неустойчивым узлом*.

3.24. Определить характер точки покоя системы $y'_1 = y_1$, $y'_2 = y_2$.

Δ Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-l & 0 \\ 0 & 1-l \end{vmatrix} = (1-l)^2 = 0$ имеет двукратный корень $l_0 = 1 > 0$. Следовательно, точка покоя $(0,0)$ есть неустойчивый узел. Решением данной системы на плоскости Y_1Y_2 являются функции $y_2 = Cy_1$, $C = C_2 / C_1$ – семейство прямых, проходящих через начало координат, по которым движение происходит от точки покоя $(0,0)$. Это – устойчивый дикритический узел. ▲

Итак, полностью исследован случай, когда определитель $|A|$ системы (3.43) отличен от нуля. В этом случае СДУ (3.42) имеет единственную точку покоя $(0,0)$.

В случае $|A| = 0$ система (3.42) имеет бесконечное множество точек покоя, поскольку в этом случае одно из с.з. матрицы A равно нулю. Пусть $l_1 = 0$, $l_2 > 0$ ($l_2 < 0$). Точки покоя СДУ (3.42) определяются равенством $a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = 0$. Это уравнение имеет бесчисленное множество решений, и на плоскости Y_1Y_2 определяет прямую, проходящую через начало координат параллельно с.в. $\vec{r}^{\,1}$, отвечающему с.з. $l_1 = 0$. Все точки этой прямой являются точками покоя СДУ (3.42).

Если $l_1 = 0$ и $l_2 > 0$, то решения (3.46) в этом случае имеют вид $z_1 = C_1$, $z_2 = C_2 e^{l_2 x}$. На фазовой плоскости переменных z_1 и z_2 прямые $z_1 = C_1$ параллельны оси Z_2. Характер движения по ним определяется равенством

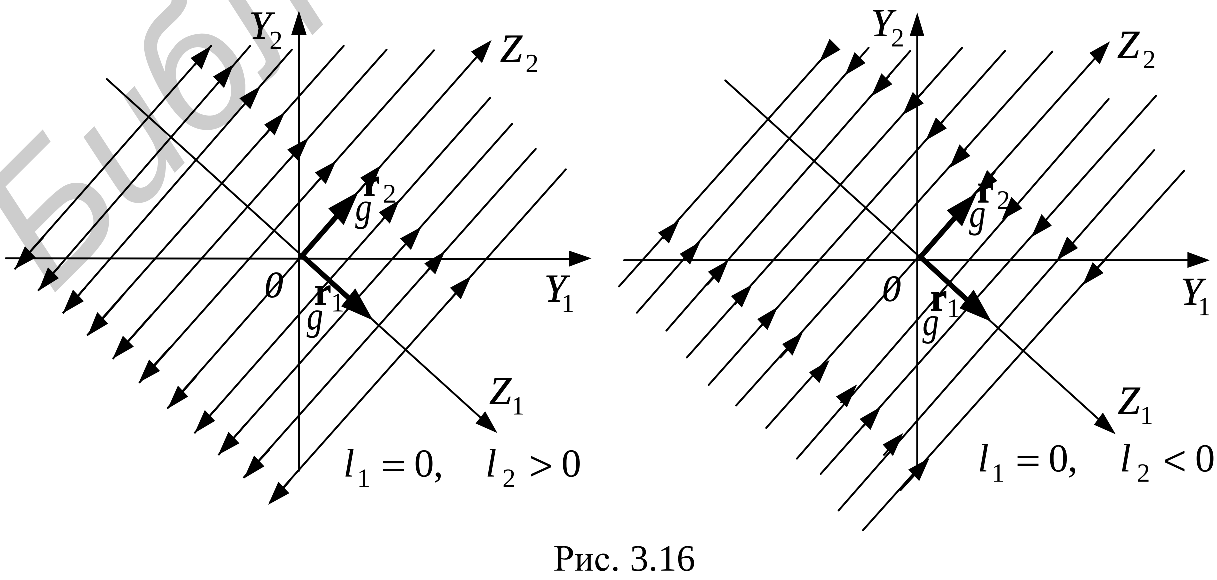


Рис. 3.16

$z_2 = C_2 e^{l_2 x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} z_2 = \infty$, если $l_2 > 0$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} z_2 = 0$ при $l_2 < 0$.

Таким образом, в случае $l_1 = 0$, $l_2 > 0$ движение по фазовым прямым $z_1 = C_1$ происходит по прямой $z_2 = 0$, а в случае $l_1 = 0$ и $l_2 < 0$ движение происходит к прямой $z_2 = 0$, на которой располагаются точки покоя СДУ (3.42) (рис. 3.16).

3.25. Исследовать на устойчивость точки покоя системы ($x = x(t)$, $y = y(t)$):

$$\dot{x} = -2x + 4y,\ \dot{y} = x - 2y \tag{3.56}$$

и изобразить на фазовой плоскости траектории решений и направление движения по ним.

Δ Из системы (3.56) вытекает, что точки покоя располагаются на прямой $y = x/2$. С.з. матрицы $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ системы равны $l_1 = 0$, $l_2 = -4$. Следовательно, решения системы устойчивы. Траектории системы определяются из ДУ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{-2x + 4y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dy = -\frac{1}{2}dx \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + C.$$

Итак, траекториями решений являются лучи $y = -x/2 + C$, не пересекающие прямую $x - 2y = 0$, состоящую из точек покоя СДУ (3.56) (рис. 3.17).

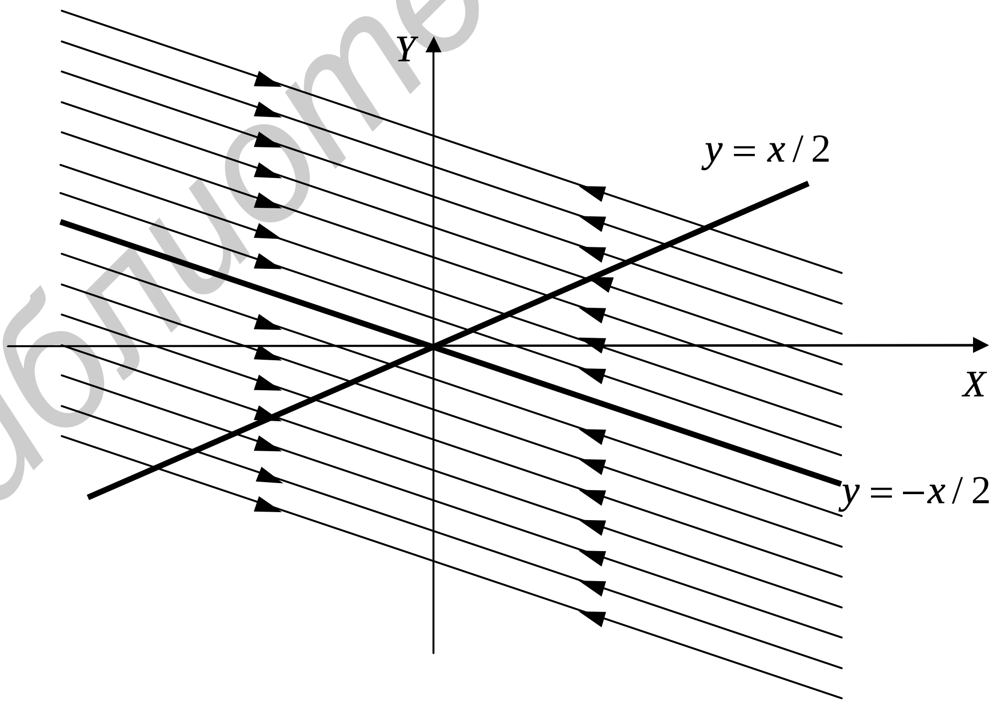
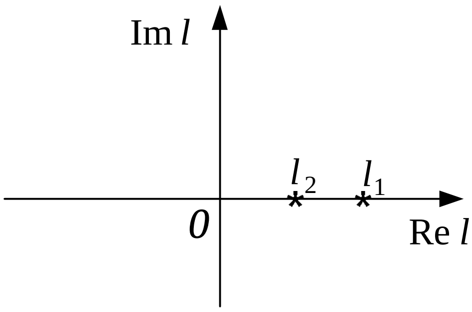
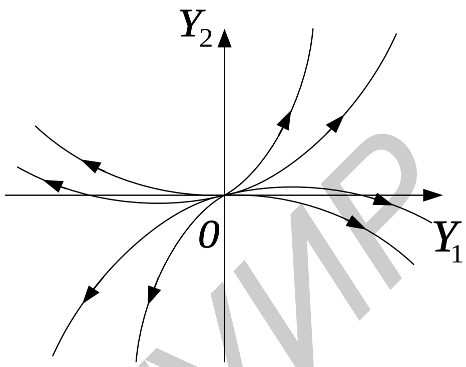
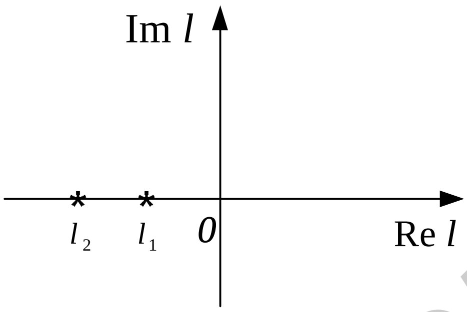
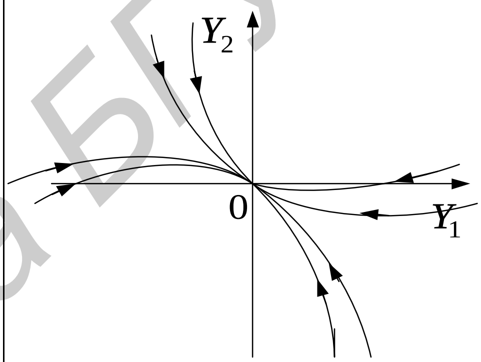
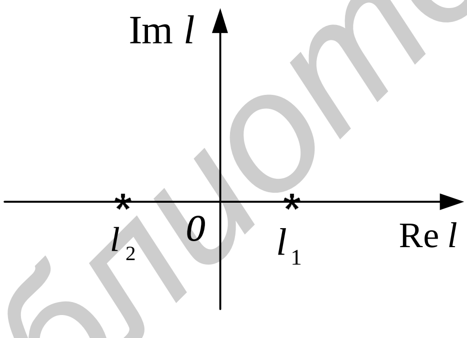
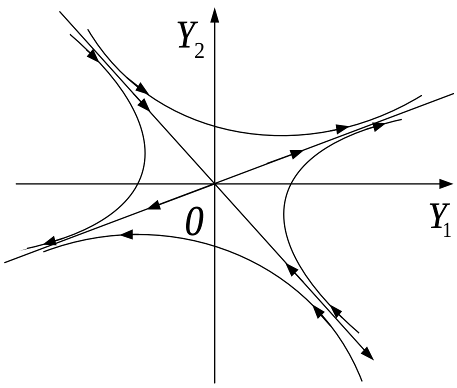
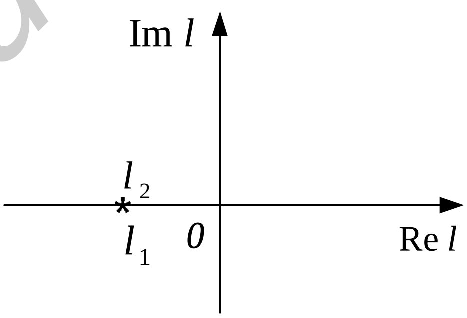
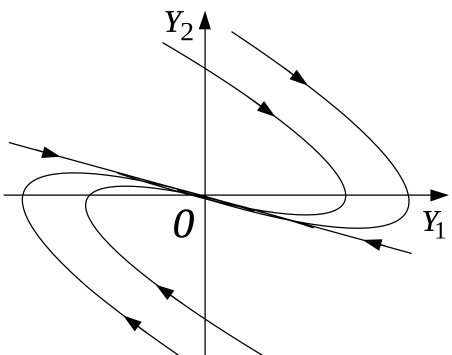
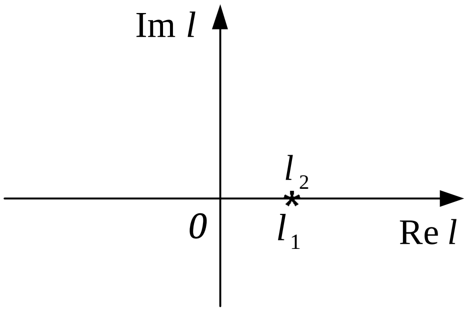
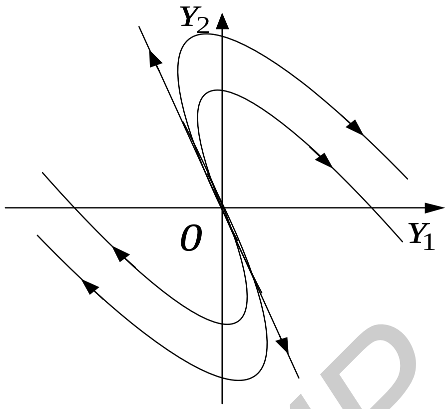
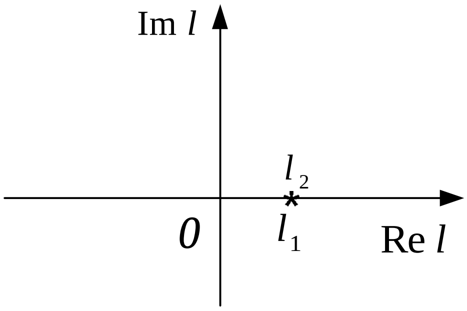
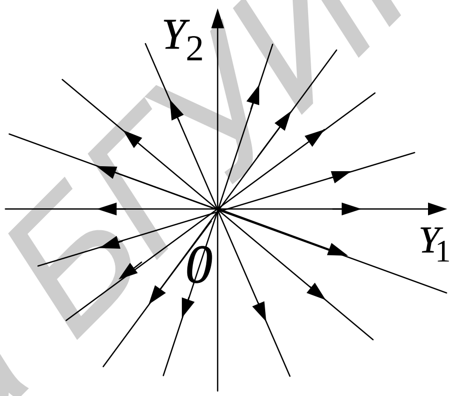
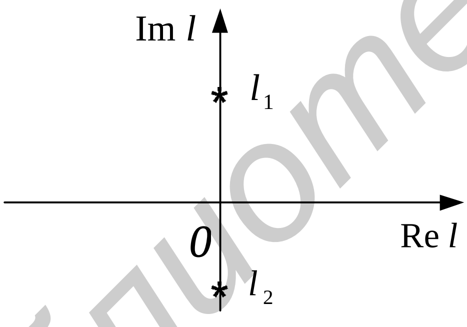
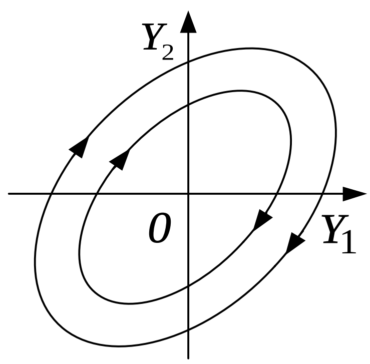
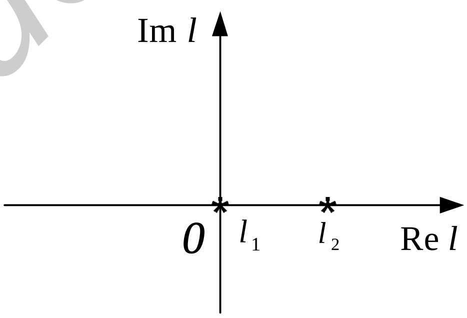
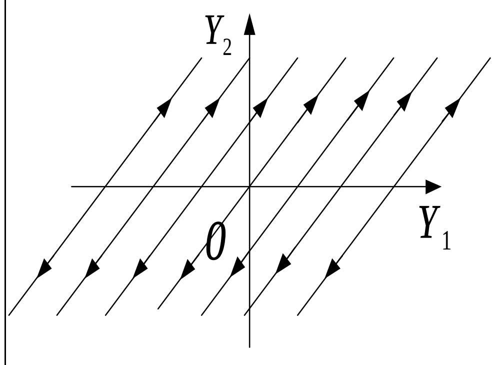


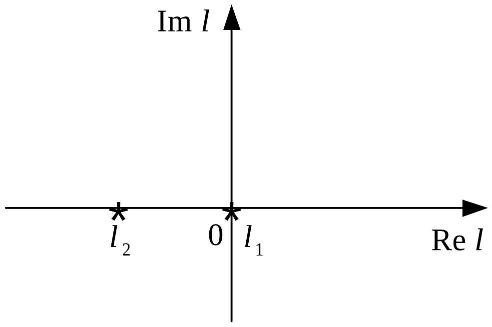
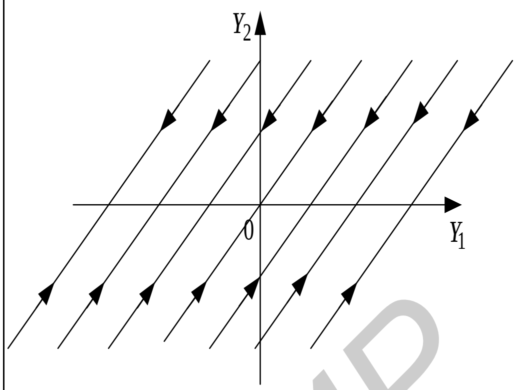
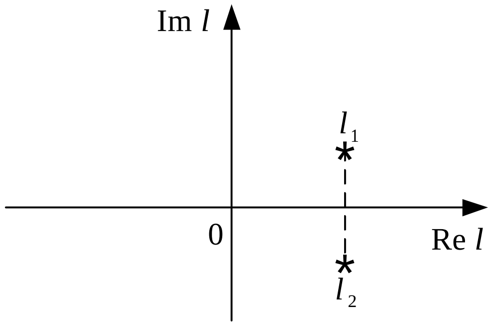
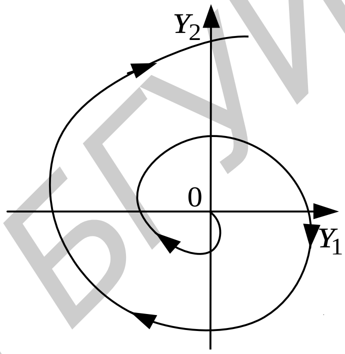
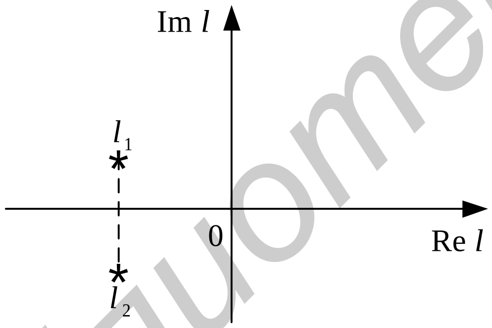
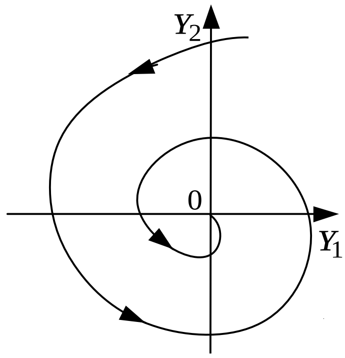
Рис. 3.17

Результаты классификации точек покоя СДУ-2 с постоянными коэффициентами приведены в таблице.

Таблица видов простейших точек покоя

Точка покоя	**Собственные значения**	**Фазовые траектории**
1	2	3
Неус-тойчи-вый узел		
Устой-чивый узел		
Седло		
Устой-чивый узел	 (Один собственный вектор)	

1	2	3
Неус- тойчи- вый узел	 (Один собственный вектор)	
Дикри- тичес- кий узел	 (Два собственных различных вектора)	
Центр		
Неус- тойчи- вая		

1	2	3
Устой-чивая		
Неус-тойчи-вый фо-кус		
Устой-чивый фокус		

3.26. Исследовать на устойчивость решения системы, изобразить траектории решений и направление движения по ним $(x = x(t),\ y = y(t))$:

а) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= 2x + 3y. \end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 4y - x, \\ \dot{y} &= -9x + 9. \end{aligned}\right\}$ в) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - 3y, \\ \dot{y} &= x + y. \end{aligned}\right\}$

г) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y, \\ \dot{y} &= 2y - 3x. \end{aligned}\right\}$ д) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + \frac{7}{2}y, \\ \dot{y} &= -x + y. \end{aligned}\right\}$ е) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + 2y, \\ \dot{y} &= x + y. \end{aligned}\right\}$

ж) $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 3y,\\ \dot{y} &= x - y.\end{aligned}\right\}$ з) $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x - 5y,\\ \dot{y} &= 2x - 3y.\end{aligned}\right\}$ и) $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x + 4y,\\ \dot{y} &= -x + y.\end{aligned}\right\}$

к) $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - 5y,\\ \dot{y} &= 2x - 3y.\end{aligned}\right\}$ л) $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2y,\\ \dot{y} &= -2x + 3y.\end{aligned}\right\}$ м) $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + y,\\ \dot{y} &= -x - 4y.\end{aligned}\right\}$

н) $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x - \frac{1}{2}y,\\ \dot{y} &= \frac{53}{2}x - y.\end{aligned}\right\}$ о) $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x + y,\\ \dot{y} &= -x + y.\end{aligned}\right\}$

Отв.: а) неустойчивый фокус; б) центр; в) устойчивый фокус;
г) седло; д) устойчивый узел; е) неустойчивый узел;
ж) седло; з) устойчивый фокус; и) неустойчивый фокус;
к) центр; л) неустойчивый узел; м) устойчивый узел.
н) центр; о) неустойчивый фокус.

3.27. При каких a система $\dot{x} = y + ax$, $\dot{y} = -x$ имеет устойчивую точку покоя $(0,0)$? **Отв.** при $a \le 0$.

Приведем *критерии устойчивости систем ЛДУ с постоянными коэффициентами* $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$.

Пусть $l_1, l_2, ..., l_n$ – с.з. матрицы A. Справедлива следующая

Теорема 3.5. ***1º.*** *Если все с.з.* l_i *матрицы* A *имеют отрицательные действительные части, т.е.* $\operatorname{Re} l_i < 0$, $i = \overline{1,n}$, *то точка покоя* $\boldsymbol{y} = 0$ *системы* $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ *асимптотически устойчива.*

2º. *Если хотя бы одно с.з.* l_k *имеет положительную действительную часть, т.е.* $\operatorname{Re} l_k > 0$, *то точка покоя* $\boldsymbol{y} = 0$ *системы* $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ *неустойчива.*

3º. *Если с.з. матрицы* A *с нулевой действительной частью являются простыми, а остальные с.з., если они есть, имеют отрицательную действительную часть, то точка покоя* $y = 0$ *системы* $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ *устойчива по Ляпунову, но не асимптотически устойчива.*

3.28. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

а) $\left.\begin{aligned}y'_1 &= -y_2,\\ y_2 &= y_1 + ay_2.\end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned}y'_1 &= y_2,\\ y'_2 &= -4y_1.\end{aligned}\right\}$

Δ а) Матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ системы имеет с.з. $l_{1,2} = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - 1}$.

Если $a < 0$, то по крайней мере одно из с.з. имеет положительную действительную часть. В этом случае точка покоя $(0,0)$ неустойчива. При $a > 0$ оба с.з. имеют отрицательную действительную часть, и поэтому точка покоя $(0,0)$ асимптотически устойчива. Если же $a = 0$, то действительные части с.з.

$l_{1,2} = \pm i$ равны нулю. В этом случае точка покоя $(0,0)$ устойчива по Ляпунову, но не асимптотически устойчива.

б) С.з. матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ этой системы $l_{1,2} = \pm 2i$, согласно 3º теоремы 3.5, точка покоя $(0,0)$ устойчива, но не асимптотически устойчива. Легко проверить, что решение этой системы имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \\ y_2 &= 2C_1 \sin 2x - 2C_2 \cos 2x. \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4y_1^2 + y_2^2 = 4\left(C_1^2 + C_2^2\right),$$

т.е. точка покоя $(0,0)$ есть центр. ▲

3.29. Установить характер точки покоя $(0,0,0)$ системы:

а) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2y - 2z, \\ \dot{y} &= 3x - 2z, \\ \dot{z} &= 5x - 4y. \end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x - y - z, \\ \dot{y} &= x + y - 3z, \\ \dot{z} &= x - 5y - 3z. \end{aligned}\right\}$ в) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y + 2z, \\ \dot{y} &= 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} &= -x - 2z. \end{aligned}\right\}$

г) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x - 3y + 4z, \\ \dot{y} &= 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} &= 6x - 7y + 7z. \end{aligned}\right\}$ д) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y + 5z, \\ \dot{y} &= -2y + z, \\ \dot{z} &= -3z. \end{aligned}\right\}$ е) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - y, \\ \dot{y} &= x - 2y, \\ \dot{z} &= x + 3y - z. \end{aligned}\right\}$

Отв.: а) неустойчива; б) неустойчива; в) устойчива; г) неустойчива; д) асимптотически устойчива; е) асимптотически устойчива.

3.30. При каких a точка покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y, \\ \dot{y} = ay - z, \\ \dot{z} = az - x \end{cases}$$

устойчива? **Отв.** при $a \le -\dfrac{1}{2}$.

Приведем *критерии устойчивости решений ЛОДУ-n*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{3.57}$$

с постоянными коэффициентами a_i, $i = \overline{1,n}$. Его характеристическое уравнение

$$l^n + a_1 l^{n-1} + a_2 l^{n-2} + \ldots + a_{n-1} l + a_n = 0. \tag{3.58}$$

Теорема 3.6. ***1º.*** *Если все корни l_i характеристического уравнения **(3.58)***

имеют отрицательные действительные части, то решения уравнения (3.57) асимптотически устойчивы.

***2º.** Если* $\operatorname{Re} l_i > 0$ *хотя бы для одного* l_i*, то решения ДУ (3.57) неустойчивы.*

***3º.** Если корни* l_i *характеристического уравнения (3.58) имеют неположительные действительные части, т.е.* $\operatorname{Re} l_i \le 0$*, причем корни с нулевыми действительными частями простые, то решения уравнения (3.57) устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически устойчивы.*

3.31. Найти области устойчивости решений ДУ $y''+ky'+(1-k)y=0$.

Δ Характеристическое уравнение $l^2+kl+(1-k)=0$ имеет корни

$$l_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2+4(k-1)}}{2}.$$

Отсюда следует, что при всех $k<0$ действительные части обоих корней l_1 и l_2 положительны, т.е. в этом случае решения ДУ неустойчивы.

При $k>1$ корень $l_1=\left(-k\pm\sqrt{k^2+4(k-1)}\right)/2>0$, т.е. в этом случае решения неустойчивы.

При $k=0$ решения устойчивы, но не асимптотически, поскольку $l_{1,2}=\pm i$ – простые комплексные корни.

При $k=1$ с.з. $l_1=0$, $l_2=-1$ и, значит, решения устойчивы.

Если же $0<k<1$, то решения асимптотически устойчивы, так как в этом случае $l_1<0$, $l_2<0$. ▲

3.32. Исследовать на устойчивость решения ДУ:

а) $y'''-5y''+6y'=0$; б) $y'''+3y''+9y'-13y=0$;

в) $y^{IV}+4y'''+8y''+8y'+4y=0$; г) $y'''+5y''+6y'+y=0$;

д) $y'''+4y''+5y'=x$; е) $y''+9y=\sin x$.

Отв.: а) неустойчивы; б) неустойчивы; в) асимптотически устойчивы; г) устойчивы; д) – е) устойчивы, но не асимптотически.

3.33.* Исследовать на устойчивость тривиальное решение уравнения $y''+(a-1)y'+(4-a^2)y=0$.

Отв.: при $1<a<2$ – асимптотически устойчиво; при $a=1$ и при $a=2$ – устойчиво; при $a>2$ и $a<1$ – неустойчиво.

3.34. Найти область устойчивости решений уравнения $y'''+2y''+a^2y'+5ay=0$.

Отв. при $a\ge 5$ – устойчиво; при $a>5$ – асимптотически устойчиво.

Пусть $(0,0,...,0)^T$ – точка покоя автономной системы

$$y'_i=f_i(y_1,y_2,...,y_n),\ i=\overline{1,n}, \qquad (3.59)$$

где f_i – непрерывно дифференцируемые функции по переменным $y_1,y_2,...,y_n$.

Линейная система ДУ

$$y'_i = \frac{\partial f_i(\mathbf{0})}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial f_i(\mathbf{0})}{\partial y_2} y_2 + ... + \frac{\partial f_i(\mathbf{0})}{\partial y_n} y_n, \ i = \overline{1,n}, \tag{3.60}$$

или в матричном виде $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, *называется системой первого приближения для СДУ* (3.59). Здесь матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{0})}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{0})}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{0})}{\partial y_n} \\ .... & .... & \dots & .... \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{0})}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{0})}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{0})}{\partial y_n} \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

Поведение решений СДУ (3.59) в окрестности точки покоя $(0,0,...,0)^T$ во многом определяется системой первого приближения (3.60). Точнее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.7 (Ляпунова). 1º. *Точка покоя* **0** *нелинейной автономной СДУ* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ *асимптотически устойчива, если асимптотически устойчива точка покоя линейной системы первого приближения* $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$.

2º. *Если существует с.з. матрицы* A *системы первого приближения с положительной действительной частью, то точка покоя* **0** *нелинейной системы* $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ *неустойчива.*

Говорят, что в случаях 1º и 2º возможно *исследование по первому приближению*.

Построение системы первого приближения для СДУ (3.59) называется ее *линеаризацией.*

3.35. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\left.\begin{aligned} y'_1 &= 10y_1 + 4e^{y_2} - 4\cos y_2^2, \\ y'_2 &= 2e^{y_1} - 2 - y_2 + y_1^4. \end{aligned}\right\} \tag{3.62}$$

Δ Построим систему первого приближения для СДУ (3.62). Имеем $f_1 = 10y_1 + 4e^{y_2} - 4\cos y_2^2$, $f_2 = 2e^{y_1} - 2 - y_2 + y_1^4$. По формуле (3.61) матрица

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{0})}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{0})}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{0})}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{0})}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

и, значит, система первого приближения имеет вид

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y'_1 = -10y_1 + 4y_2, \\ y'_2 = 2y_1 - y_2. \end{cases} \tag{3.63}$$

С.з. матрицы A ее $l_{1,2} = \left(-11 \pm \sqrt{113}\right)/2 < 0$. Следовательно, точка покоя системы (3.63) асимптотически устойчива. Согласно теореме (3.7) точка покоя исходной системы (3.62) тоже асимптотически устойчива. ▲

Замечание. Если точка покоя системы первого приближения $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ устойчива, но не асимптотически, то в общем случае установить устойчивость точки покоя нелинейной системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ невозможно.

3.36. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя системы:

а) $\dot{x} = -x - y - x^3 - y^2$, $\dot{y} = x - y + xy$; б) $\dot{x} = y + x^3$, $\dot{y} = -x + y^3$;

в) $\dot{x} = xy^4$, $\dot{y} = -x^4 y$; г) $\dot{x} = -y + x^6$, $\dot{y} = x + y^5$;

д) $\dot{x} = -2x - y - 2xy^2 - 3x^3$, $\dot{y} = \frac{1}{3}x - y - x^2 y - 7y^3$;

е) $\dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3$, $\dot{y} = 3x - 4y - 2x^2 y - \frac{1}{2}y^3$;

ж) $\dot{x} = \frac{1}{4}\left(e^x - 1\right) - 9y$, $\dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y$;

з) $\dot{x} = 7x + 2\sin y$, $\dot{y} = e^x - 3y - 1$;

и) $\dot{x} = -x + 2y - 3x^2$, $\dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4$;

к) $\dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4$, $\dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2$;

л) $\dot{x} = -4x - x^3$, $\dot{y} = 3x - y^3$;

м) $\dot{x} = y + x\left(x^2 + y^4\right)$, $\dot{y} = -x + y\left(x^2 + y^4\right)$.

Отв.: а) устойчива; б) неустойчива; в) устойчива; г) неустойчива; д) – е) асимптотически устойчива; ж) устойчива; з) неустойчива; и) неустойчива; к) устойчива; л) – м) исследование на устойчивость по первому приближению невозможно.

Метод линеаризации исследования на устойчивость решений нелинейных систем $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ в окрестности точки покоя не является единственным. Еще одним методом, позволяющим выяснить характер точки покоя нелинейной системы, является *метод функций Ляпунова*.

Напомним, что функция $V = V(y_1, y_2, ..., y_n) = V(\boldsymbol{y})$ называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*) в окрестности $U(\boldsymbol{0})$ начала координат $\boldsymbol{0}$ фазового пространства переменных $y_1, y_2, ..., y_n$, если она непрерывная, обладает непрерывными частными производными в этой окрестности и если

$$V(\boldsymbol{y}) > 0 \ \left(V(\boldsymbol{y}) < 0\right), \ \forall \boldsymbol{y} \in U(\boldsymbol{0}), \ \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}, \ V(\boldsymbol{0}) = 0.$$

Положительно и отрицательно определенные функции называются *знакоопределенными функциями*.

Функция $V(\boldsymbol{y})$ называется *положительно постоянной* (*отрицательно постоянной*) в окрестности $U(\boldsymbol{0})$, если она непрерывная, имеет непрерывные частные производные в $U(\mathbf{0})$ и если

$$V(\boldsymbol{y}) \geq 0 \ \ (V(\boldsymbol{y}) \leq 0),\ \forall \boldsymbol{y} \in U(\mathbf{0}),\ \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0},\ V(\mathbf{0}) = 0.$$

Положительно и отрицательно постоянные функции называются *знакопостоянными*. Функции, не являющиеся ни знакоопределенными, ни знакопостоянными, называются знакопеременными.

3.37. а) Функция $V(\boldsymbol{y}) = y_1^4 + 2y_2^4 + 5y_3^2$ – положительно определенная в $\boldsymbol{R}^3$, так как $V(\boldsymbol{y}) > 0$, $\forall \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ и $V(\mathbf{0}) = 0$.

б) Функция $V(\boldsymbol{y}) = (y_1 + y_2)^2 + y_3^2$ – положительно постоянная в $\boldsymbol{R}^3$, так как $V(\boldsymbol{y}) > 0$, $\forall \boldsymbol{y}$, кроме точек прямой $y_2 = -y_1$, $y_3 = 0$, где она обращается в нуль.

в) Функция $V(\boldsymbol{y}) = -y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1 y_2 - y_3^2$ – отрицательно определенная в $\boldsymbol{R}^3$, так как $V(\boldsymbol{y}) < 0$, $\forall \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ и $V(\mathbf{0}) = 0$.

г) Функция $V(\boldsymbol{y}) = -(y_1 - y_2)^2 - y_3^2$ – отрицательно постоянная в $\boldsymbol{R}^3$, так как $V(\boldsymbol{y}) < 0$, $\forall \boldsymbol{y}$, кроме точек прямой $y_1 - y_2 = 0$, $y_3 = 0$, где она обращается в нуль.

д) Функция $V(\boldsymbol{y}) = y_1^2 - 3y_2^2 + y_3^2$ – знакопеременная в $\boldsymbol{R}^3$ (почему?).

Пусть $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ – решение автономной системы $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y'_i = f_i(y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = \overline{1, n}$, а $V(\boldsymbol{y})$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Производной функции $V(\boldsymbol{y})$ *по* x *вдоль решения* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ *системы* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ *или в силу этой системы* называется производная

$$\begin{aligned} \left.\frac{dV(\boldsymbol{y})}{dx}\right|_{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)} &= \frac{\partial V}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} y'_2 + ... + \frac{\partial V}{\partial y_n} y'_n = \\ &= \frac{\partial V}{\partial y_1} f_1(\boldsymbol{y}) + \frac{\partial V}{\partial y_2} f_2(\boldsymbol{y}) + ... + \frac{\partial V}{\partial y_n} f_n(\boldsymbol{y}) \end{aligned} \qquad (3.64)$$

Метод функций Ляпунова состоит в непосредственном исследовании устойчивости положения равновесия системы (3.40) при помощи подходящим образом подобранной функции $V(\boldsymbol{y}) = V(y_1, y_2, ..., y_n)$ – функции Ляпунова.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.8 (Ляпунова об устойчивости)*. Пусть СДУ* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ *имеет точку покоя* **0**. *Если в некоторой окрестности* $U(0)$ *существует положительно определенная функция* $V(\boldsymbol{y})$ *для этой системы такая, что* dV/dx *– отрицательно постоянная или* $dV/dx \equiv 0$, *то точка покоя* **0** *устойчивая. Если* dV/dx *отрицательно определенная, то точка покоя* **0** *– асимптотически устойчива.*

Теорема 3.9 (Ляпунова о неустойчивости). *Пусть* $\mathbf{0}$ *– точка покоя системы* $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$. *Тогда если в некоторой окрестности* $U(\mathbf{0})$ *для этой системы существует положительно определенная функция* $V(\mathbf{y})$ *такая, что производная* dV/dx, *составленная в силу этой системы, положительно постоянная в* $U(\mathbf{0})$, *то точка покоя* $\mathbf{0}$ *системы неустойчива.*

3.38. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 + y_1\left(y_1^2 + y_2^4\right), \\ y'_2 &= -y_1 + y_2\left(y_1^2 + y_2^4\right). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Δ Определяем функцию Ляпунова в виде $V(y_1, y_2)=\frac{1}{2}\left(y_1^2+y_2^2\right)$. Вдоль решений системы имеем

$$dV/dx=\left(y_1^2+y_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^4\right)\geq 0,\ \forall y_1, y_2 \neq 0$$

и $dV/dx=0$ при $\mathbf{y}=\mathbf{0}=(0,0)$. По теореме Ляпунова 3.9 заключаем, что точка покоя СДУ (3.65) неустойчива. ▲

Общего метода построения функций Ляпунова нет. В простейших случаях функцию Ляпунова можно искать в виде

$$V(y_1, y_2)=ay_1^2+by_2^2,$$

$$V(y_1, y_2)=ay_1^4+by_2^4,\ V(y_1, y_2)=ay_1^4+by_2^2\ \ (a>0, b>0)$$

и т.д.

3.39. С помощью функций Ляпунова исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$y'_1=-y_1-2y_2+y_1^2y_2^2,\ y'_1=y_1-\frac{y_2}{2}+\frac{y_1^3y_2}{2}. \tag{3.66}$$

Δ Будем искать функцию Ляпунова в виде $V=ay_1^2+by_2^2$, где $a>0, b>0$ – произвольные параметры. Имеем

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\partial V}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial V}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dx}=2ay_1\left(-y_1-2y_2+y_1^2y_2^2\right)+2by_2\left(y_1-\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_1^3y_2\right)=$$

$$=-\left(2ay_1^2+by_2^2\right)+\left(2y_1y_2-y_1^3y_2^2\right)(b-2a).$$

Положив $b=2a$, получим, что $dV/dx=-2a\left(y_1^2+y_2^2\right)\leq 0$.

Таким образом, $\forall a>0$ и $b=2a$ функция $V=ay_1^2+2ay_2^2$ будет положительно определенной, а производная dV/dx, составленная в силу исходной системы (3.66), является отрицательно определенной. По теореме Ляпунова 3.8 заключаем, что тривиальное решение $y_1\equiv 0$, $y_2\equiv 0$ данной системы устойчиво асимптотически.

Замечание. Если бы в указанной выше формуле функцию Ляпунова $V(y_1, y_2)$ не удалось найти, то ее следовало бы поискать в виде $V = ay_1^4 + by_2^4$ или $V = ay_1^4 + by_2^2$ и т.д. ▲

3.40. Показать, что точка покоя $(0,0)$ неустойчива для системы

$$y'_1 = y_1^2,\ y'_2 = 2y_2^2 - y_1 y_2 \tag{3.67}$$

с помощью функции

$$V(y_1, y_2) = ay_1^3 + by_1^2 y_2 + gy_1 y_2^2 + dy_2^3 \tag{3.68}$$

при подходящем выборе постоянных a, b, g и d.

Δ Производная функции V вдоль траектории системы (3.67) равна

$$\frac{dV(y_1, y_2)}{dx} = 3ay_1^4 + by_1^3 y_2 + (2b - g)y_1^2 y_2^2 + (4g - 3d)y_1 y_2^3 + 6dy_2^4. \tag{3.69}$$

Заметим, что если выбрать $a = 1/3$, $b = 4$, $g = 2$, $d = 4/3$, то отдельные слагаемы dV/dx можно сгруппировать так:

$$\frac{dV(y_1, y_2)}{dx} = y_1^4 + 4y_1^3 y_2 + 6y_1^2 y_2^2 + 4y_1 y_2^3 + 8y_2^4 = (y_1 + y_2)^4 + 7y_2^4,$$

откуда видно, что dV/dx положительно определена. Функция V имеет вид

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{3}y_1^3 + 4y_1^2 y_2 + 2y_1 y_2^2 + \frac{4}{3}y_2^3.$$

Эта функция такова, что $V(y_1, y_2) = \frac{1}{3}y_1^3$ при $y_2 = 0$, так что сколь угодно близко к началу координат по оси Y_1 имеются точки, для которых $V > 0$. Из этого согласно теореме 3.9 следует, что точка покоя $(0,0)$ неустойчива. ▲

3.41. Методом функций Ляпунова исследовать на устойчивость точку покоя систем $(x = x(t),\ y = y(t))$:

а) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + y + xy^2, \\ \dot{y} &= -7x - 2y - 7x^2 y. \end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^2 y^3, \\ \dot{y} &= -x - x^3 y^2. \end{aligned}\right\}$

в) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + x^3, \\ \dot{y} &= x - y^3. \end{aligned}\right\}$ г) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - 3y, \\ \dot{y} &= x - y. \end{aligned}\right\}$

д) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x^5 + y^3, \\ \dot{y} &= x^3 - y^5. \end{aligned}\right\}$ е) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= xy - x^3 + y, \\ \dot{y} &= x^4 - x^2 y - x^3. \end{aligned}\right\}$

Отв.: а) асимптотически устойчива, $V = 7x^2 + y^2$; б) устойчива, $V = x^2 + y^2$; в) неустойчива, $V = x^2 - y^2$; г) асимптотически устойчива,

$V = x^2 + 3y^2$; д) неустойчива, $V = x^4 - y^4$; е) устойчива, $V = x^4 + 2y^2$.

4. Качественные и аналитические методы исследования дифференциальных уравнений

4.1. Математические модели и дифференциальные уравнения

Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов современной математики. Следуя [13], отметим две основные особенности этой теории (наиболее ярко характеризующие ее место в современной математике), состоящей из двух обширных областей: теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории уравнений с частными производными.

Первая особенность – это непосредственная связь теории дифференциальных уравнений с приложениями. Любое научное исследование предполагает выделение наиболее существенных черт в изучаемом явлении. Часто выделение таких черт позволяет перейти к более простому объекту, который правильно отражает основные закономерности явления и дает возможность получать о нем новую информацию. Такой объект и называется моделью. При решении различных задач естествознания исследователи часто используют язык математики, с помощью которого разрабатываются математические модели различных явлений механики сплошных сред, химических реакций, электрических, магнитных явлений и др. Очень часто законы, управляющие тем или иным явлением, можно выразить в виде дифференциальных уравнений. Дифференциальное уравнение, полученное в результате исследования какого-либо реального явления или процесса, называют дифференциальной моделью этого явления или процесса.

Исследуя полученные дифференциальные уравнения вместе с дополнительными условиями, которые, как правило, задаются в виде начальных и граничных условий, исследователь получает сведения о происходящем явлении, иногда может узнать его прошлое и будущее. Изучение математической модели математическими методами позволяет не только получить качественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса, но и дает возможность проникнуть в суть физических явлений, а иногда предсказать новые физические эффекты.

Для составления математической модели в виде дифференциальных уравнений нужно, как правило, знать только локальные связи и не нужна информация обо всем физическом явлении в целом. Математическая модель дает возможность изучать явление в целом, предсказать его развитие, делать количественные оценки изменений, происходящих в нем с течением времени. В частности, на основе анализа дифференциальных уравнений были открыты электромагнитные волны, и только после экспериментального подтверждения Герцем фактического существования электромагнитных колебаний стало возможным рассматривать уравнения Максвелла как математическую модель реального физического явления.

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVII в. одновременно с возникновением дифференциального и интегрального исчислений. Можно сказать, что необходимость решать дифференциальные уравнения для нужд механики, то есть находить траектории движений, в свою очередь, явилась толчком создания Ньютоном нового исчисления. Законы Ньютона представляют собой математическую модель механического движения. Через обыкновенные дифференциальные уравнения шли приложения нового исчисления к задачам геометрии и механики; при этом удалось решить задачи, которые в течение долгого времени не поддавались решению. В небесной механике оказалось возможным не только получить и объяснить уже известные факты, но и сделать новые открытия (например открытие Леверье в 1846 г. планеты Нептун на основе анализа дифференциальных уравнений).

Обыкновенные дифференциальные уравнения возникают тогда, когда неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной. Соотношение между независимой переменной, неизвестной функцией и ее производными до некоторого порядка составляет дифференциальное уравнение. В настоящее время теория обыкновенных дифференциальных уравнений включает в себя много самостоятельно развивающихся теоретических направлениий. Среди основных задач, решаемых теорией дифференциальных уравнений, назовем проблему существования таких решений, которые удовлетворяют дополнительным условиям (начальные данные Коши, когда требуется определить решение, принимающее заданные значения в некоторой точке и заданные значения производных до некоторого конечного порядка, краевые условия и другие), проблему единственности такого решения и его устойчивости. Под устойчивостью решения понимают малые изменения решения при малых изменениях начальных данных задачи и функций, определяющих само уравнение. Важными для приложений являются исследование характера решения, или, как говорят, качественного поведения решения, нахождение методов численного решения уравнений. Теория должна дать в руки инженера и физика методы экономного и быстрого вычисления.

Уравнения с частными производными начали развиваться значительно позже. Важно и нужно подчеркнуть, что теория уравнений с частными производными возникла на основе конкретных физических задач, приводящих к исследованию отдельных уравнений с частными производными, которые получили название основных уравнений математической физики. Изучение математических моделей конкретных физических задач привело к созданию в середине XVIII в. новой ветви анализа – уравнений математической физики, которую можно рассматривать как науку о математических моделях физических явлений.

Основы этой науки были заложены трудами Даламбера, Эйлера, Д. Бернулли, Лагранжа, Лапласа, Пуассона, Фурье и других ученых. Интересно, что многие из них были не только математиками, но и астрономами, механиками, физиками.

Важнейшими уравнениями математической физики являются: уравнение

Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Здесь предполагается, что функция u зависит от времени t и трех пространственных переменных x, y, z. Уравнение с частными производными – это соотношение между независимыми переменными, неизвестной функцией и ее частными производными до некоторого порядка. Аналогично определяется система уравнений, когда имеется несколько неизвестных функций.

К изучению уравнения Лапласа приводят самые разнообразные физические задачи совершенно разной природы. Это уравнение встречается в задачах электростатики, теории потенциала, гидродинамики, теории теплопередачи и многих других разделах физики, а также в теории функций комплексного переменного и в различных областях математического анализа. Уравнение Лапласа является простейшим представителем широкого класса так называемых эллиптических уравнений.

Так же как и уравнение Лапласа, важное место в теории уравнений с частными производными и ее приложениях занимает уравнение теплопроводности. Это уравнение встречается в теории диффузии и многих других разделах физики, а также играет важную роль в теории вероятностей. Оно является наиболее простым представителем класса так называемых параболических уравнений. Некоторые свойства решений уравнения теплопроводности напоминают свойства решений уравнения Лапласа, что находится в согласии с их физическим смыслом, так как уравнение Лапласа описывает, в частности, стационарное распределение температуры.

Волновое уравнение описывает различные волновые процессы, в том числе, распространение звуковых волн. Оно играет важную роль в акустике. Это представитель класса так называемых гиперболических уравнений.

Важно отметить, что для проверки правильности математической модели очень важны теоремы существования решений соответствующих дифференциальных уравнений, так как математическая модель не всегда адекватна конкретному явлению и из существования решения реальной задачи (физической, химической, биологической) не следует существование решения соответствующей математической задачи.

В настоящее время важную роль в развитии теории дифференциальных уравнений играет применение современных ЭВМ и в особенности ПЭВМ. Качественное исследование дифференциальных уравнений часто облегчает возможность провести вычислительный эксперимент для выявления тех или иных свойств их решений, которые потом могут быть теоретически обоснованы и послужат основой для дальнейших теоретических исследований.

Вычислительный эксперимент стал также мощным средством теоретических исследований в различных областях естественных и технических наук. Он проводится над математической моделью реального явления, но при этом по одним параметрам модели вычисляются другие параметры и делаются выводы о свойствах изучаемого явления. Цель вычислительного эксперимента – построение с необходимой точностью с помощью ЭВМ за возможно меньшее машинное время адекватного количественного описания изучаемого явления. В основе такого эксперимента очень часто лежит численное решение системы уравнений с частными производными, отсюда связь теории дифференциальных уравнений с вычислительной математикой. В последние годы широкое распространение и применение получили пакеты компьютерной математики Maple, Mathematica, Mathcad и др.

Таким образом, первая основная особенность теории дифференциальных уравнений – ее тесная связь с приложениями. Другими словами, можно сказать, что теория дифференциальных уравнений родилась из приложений.

Второй основной особенностью теории дифференциальных уравнений является ее связь с другими разделами математики, такими, как функциональный анализ, алгебра и теория вероятностей. Теория дифференциальных уравнений и особенно теория уравнений с частными производными широко используют основные понятия, идеи и методы этих областей математики и, более того, влияют на их проблематику и характер исследований. Некоторые большие и важные разделы математики были вызваны к жизни задачами теории дифференциальных уравнений. Классическим примером такого взаимодействия с другими областями математики являются исследования колебаний струны, проводившиеся в середине XVIII в.

Уравнение колебаний струны $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (волновое уравнение с одной пространственной переменной) было выведено Даламбером в 1747 г. Он получил также формулу, которая дает решение этого уравнения: $u(x,t) = \Phi_1(x+t) + \Phi_2(x-t)$, где Φ_1, Φ_2 – произвольные функции. Эйлер получил формулу

$$u(x,t) = \frac{j\,(x+t) - j\,(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} y\,(s)ds\,,$$

которая дает решение уравнения колебаний струны с заданными начальными условиями $u(x,o) = j\,(x)$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x)$ (задача Коши). Данная формула в настоящее время называется формулой Даламбера. Возник вопрос, какие функции считать решением. Эйлер полагал, что это может быть произвольно начерченная поверхность. Даламбер считал, что решение должно записываться аналитическим выражением. Д. Бернулли утверждал, что все решения представляются в виде тригонометрических рядов. С ним не соглашались Даламбер и Эйлер. В связи с этим спором возникла задача об уточнении понятия функции, важнейшего понятия математического анализа, а также вопрос об условиях представимости функции в виде тригонометрического ряда, который позднее рассматривали Фурье, Дирихле и другие крупные математики и изучение которого привело к созданию теории тригонометрических рядов. Потребности развития теории тригонометрических рядов привели к созданию современных теории меры, теории множеств, теории функций.

4.2. Некоторые сведения о качественных методах исследования дифференциальных уравнений

В первый период развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений одной из основных задач было нахождение общего решения в квадратурах, т.е. через интегралы от известных функций (этим занимались Эйлер, Риккати, Лагранж, Даламбер и др.) Задачи интегрирования дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами оказали большое влияние на развитие линейной алгебры. В 1841 г. Лиувилль показал, что уравнение Риккати

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{4.1}$$

не может быть в общем случае разрешено в квадратурах.

Уже в начале XIX в. ученые обнаружили, что неизвестную зависимость в дифференциальном уравнении, как правило, не удается выразить никакой комбинацией известных к тому времени функций.

Тогда же появилась идея попытаться расширить состав математических функций, с помощью которых можно выразить решения дифференциальных уравнений. Однако и здесь исследователи столкнулись с целым рядом трудностей. Это обстоятельство привело к идее исследовать решения скалярных дифференциальных уравнений первого порядка, используя сами уравнения, поскольку с геометрической точки зрения их решения представляют собой некоторую линию на плоскости – интегральную кривую. Такой подход характерен для качественной теории дифференциальных уравнений, начало которой было положено в работах знаменитого французского математика Пуанкаре.

Для математических моделей, которые в последние три десятилетия исследуют ученые, характерно свойство нелинейности. Оно означает возможность качественных изменений решений при непрерывном изменении параметров. Причем это касается не только дифференциальных уравнений. Простейший пример нелинейного уравнения – обычные квадратные уравнения, имеющие действительные корни. Мы можем непрерывно увеличивать один из коэффициентов и обнаружить, что при сколь угодно малом приращении вблизи некоторого значения могут исчезнуть оба действительных корня.

Большое разнообразие и сложность нелинейных задач приводят к мысли выделить простейшие элементы и понятия, которые встречаются достаточно часто. Одним из таких понятий в теории нелинейных уравнений является представление о бифуркации решений, которое поясним на простом примере [7].

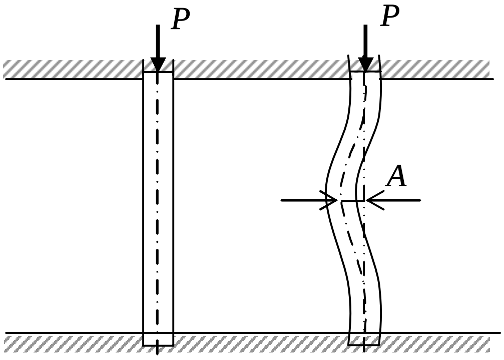


Рис. 4.1. Изгиб колонны под действием

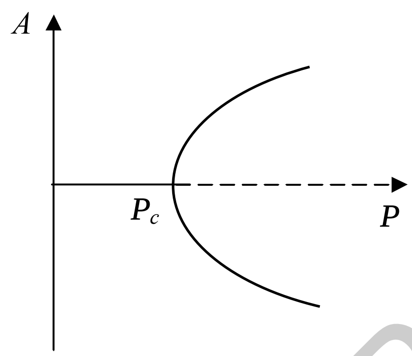


Рис. 4.2. Зависимость отклонения от величины нагрузки

Пример 1. Представим себе колонну прямоугольного сечения, на которую сверху действует нагрузка P (рис. 4.1). Будем увеличивать нагрузку и посмотрим, что произойдет. Вначале колонна будет укорачиваться и утолщаться, но ее центральная линия будет оставаться прямой. Однако при некотором критическом значении P_c картина качественно изменится – колонна потеряет прямолинейную форму и прогнется вправо или влево. При $P < P_c$ у колонны есть единственная равновесная форма. При $P > P_c$ их три: прямолинейная форма, которая стала неустойчивой, и две устойчивые – одна соответствует прогибу вправо, другая – влево. Если изобразить график отклонения A оси колонны от прямой в зависимости от величины нагрузки P, то картина будет такой, как показано на рис. 4.2.

При $P = P_c$ изменилось число состояний равновесия и их устойчивость. Изменение числа и характера устойчивости решений уравнения называется ветвлением или бифуркацией решений. Это типично нелинейное явление. Классическая линейная теория упругости дает единственное прямолинейное состояние равновесия.

Пример 2. Пусть у нас имеется химическая реакция, в которой изменение концентрации интересующего нас продукта $\dfrac{dx}{dt}$ зависит от самой концентрации x и внешних воздействий, характеризующихся параметром l. Тогда имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(x, l). \qquad (4.2)$$

Решения данного уравнения ведут себя довольно просто. На достаточно больших временах решение $x(t)$ стремится к постоянному значению $\tilde{x}$. Иногда говорят, что $\tilde{x}$ является асимптотикой решения $x(t)$. В некоторых случаях решения этого уравнения могут возрастать или убывать до бесконечности, однако данный случай мы не будем рассматривать. Для полноты изложения отметим, что задачи с неограниченно растущими решениями (так называемые режимы с обострением) представляют также большой интерес.

Таких значений $\tilde{x}$ может быть несколько $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ и т.д. Понятно при этом, что

$$F(x, l) = 0. \tag{4.3}$$

В зависимости от начальных данных $x(0)$ решение стремится к одному из x_n. Поэтому остается решить уравнение (4.3) и найти все его корни как функции параметра l. Для простейших функций $F(x, l)$, например, полиномов второй или третьей степени по x, все корни можно найти по явным формулам.

Пусть $\tilde{x}$ – состояние равновесия уравнения (4.2). Мы будем называть его устойчивым, если любое достаточно малое отклонение от $\tilde{x}$ остается малым и со временем стремится к нулю. Данное свойство называют также асимптотической устойчивостью. Если же можно найти сколь угодно малые отклонения от $\tilde{x}$, растущие со временем, то такое состояние неустойчиво.

Важную роль в процессе качественного исследования нелинейных дифференциальных уравнений и систем имеет понятие грубости системы. Его можно пояснить на следующем примере. Если мы моделируем какой-либо реальный процесс, то функция F нам, скорее всего, известна приближенно. При небольшом ее изменении изменяются и все ее состояния равновесия $\tilde{x}$. Но естественно ожидать, что основные качественные свойства, такие как число решений и их устойчивость, будут сохраняться. Системы, обладающие таким свойством, получили название грубых.

Рассмотрим для примера [7] две различные функции (рис. 4.3, а, б).

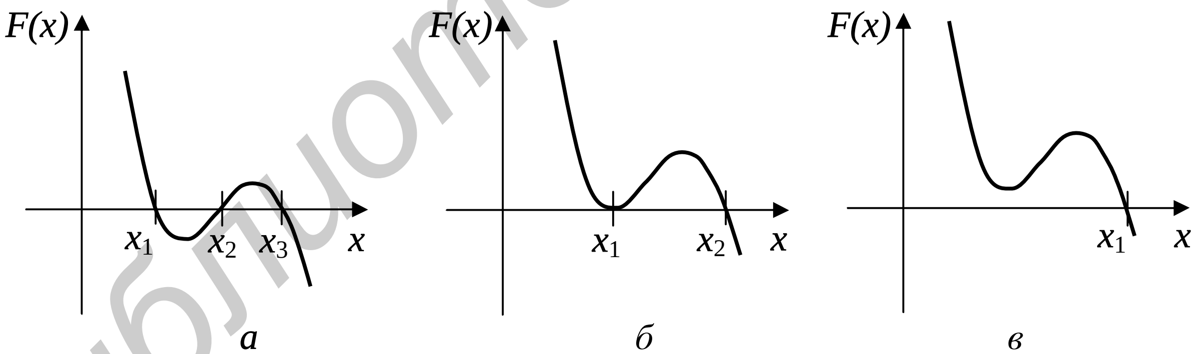


Рис. 4.3. Функция $F(x,e)$ при трех значениях параметра

Легко видеть, что число корней первой функции не изменится при малых деформациях кривой. Во втором случае все происходит иначе. Уравнение $F(x) = 0$ имеет два решения, $F(x) + e = 0$ – одно решение (рис. 4.3, в), а $F(x) - e = 0$ – три решения, сколь бы малым мы не выбирали положительное число e. Систему (4.2), в которую входит функция $F(x)$ с рис. 4.3, б, естественно отнести к негрубым. Две другие функции характеризуют грубые системы.

Соображения о грубости моделей различных процессов высказывались еще Пуанкаре. Однако широкое распространение и дальнейшее развитие такие модели получили в 30-е годы XX в., когда появились конкретные прикладные задачи, где они играют принципиальную роль. Эти задачи возникли в связи с развитием радиотехники. Их изучение привело к созданию теории колебаний. Основную роль в становлении этой теории сыграли советские ученые Л. И. Мандельштам, А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин и др.

Многие радиотехнические системы, например, генераторы, удается описать системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений

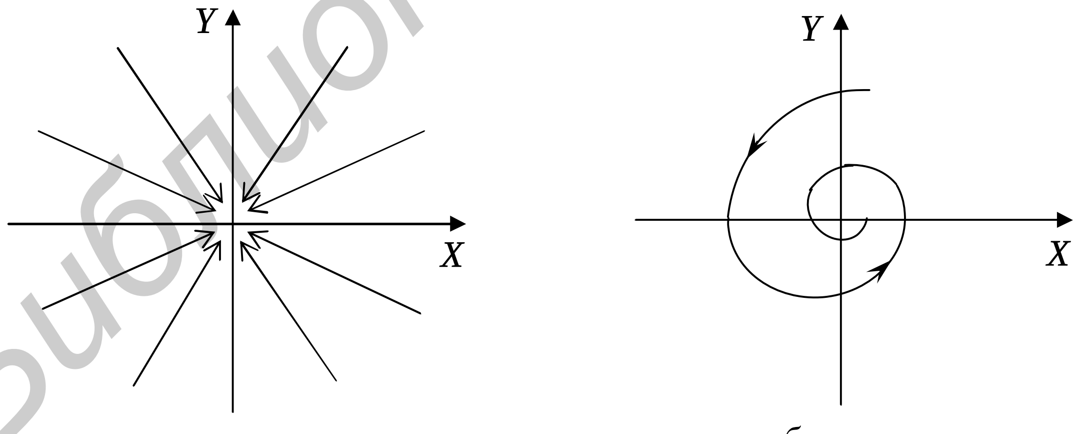
$$\frac{dX}{dt} = P(X,Y), \quad \frac{dY}{dt} = Q(X,Y), \tag{4.4}$$

которую часто называют динамической системой. Любое ее решение $\{X(t), Y(t)\}$ описывает некоторую кривую на плоскости $\{X,Y\}$. Эту кривую мы будем называть фазовой траекторией. Попробуем выяснить, что происходит с решениями на больших временах. Как и в случае уравнения (4.2), будем считать их ограниченными. Система (4) гораздо сложнее уравнения (4.2). Но может оказаться, что $X(t) \to \tilde{x}$, $Y(t) \to \tilde{y}$ при $t \to \infty$ так же, как в одном уравнении. Тогда очевидно что

$$P(\tilde{x},\tilde{y}) = Q(\tilde{x},\tilde{y}) = 0. \tag{4.5}$$

Все точки, для которых выполнено равенство (4.5), назовем особыми точками динамической системы. Они тоже описывают ее состояния равновесия, или стационарные решения.

Если все решения, близкие к особой точке в начальный момент времени, стремятся к ней, то точка называется устойчивой. Типичная картина решений в ее окрестности в этом случае будет такой, как показано на рис. 4.4.



а *б*

Рис. 4.4. Вид фазовых траекторий в окрестности
а – устойчивого узла; *б* – устойчивого фокуса

Первая точка называется устойчивым узлом, вторая – устойчивым фокусом. Особая точка может быть и неустойчивой – неустойчивым узлом, фокусом (рис. 4.5, а) или седлом (рис. 4.5, б).

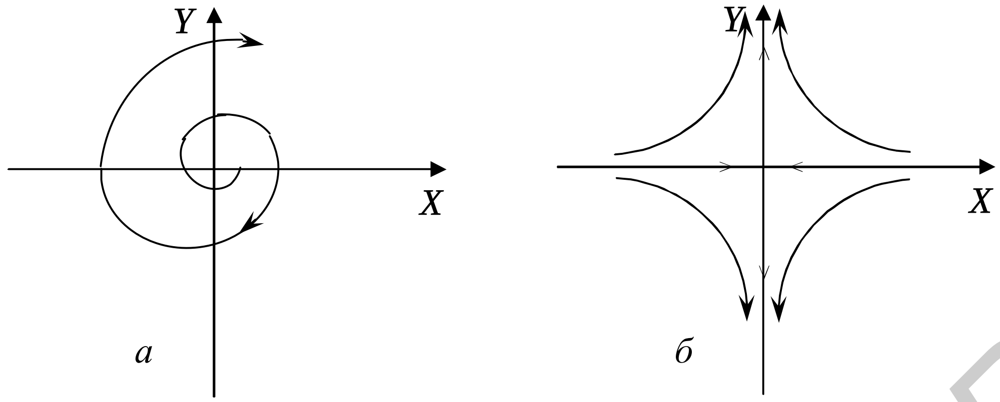


Рис. 4.5 Вид фазовых траекторий в окрестности
а – неустойчивого фокуса; *б* – седла

Других особых точек в грубых динамических системах не бывает.

Однако решение системы (4.4) при $t \to \infty$ необязательно определяется состоянием равновесия, как это было в уравнении (4.2). Оно может стремиться к периодическим функциям $X(t+T) = X(t),\ Y(t+T) = Y(t)$. В этом случае говорят, что в системе существует устойчивый предельный цикл. Типичная картина поведения решений в окрестности предельного цикла показана на рис. 4.6.

Фазовые траектории изнутри и снаружи «наматываются» на цикл. Независимо от начальных данных в системе будут происходить колебания с постоянной амплитудой и частотой, их часто называют автоколебаниями. Автоколебания были известны очень давно. На них, в частности, основана работа часового механизма. Они широко используются в разных радиотехнических устройствах. Тот факт, что математическим образом этого важного явления может служить предельный цикл, был понят сравнительно недавно. В 30-е годы XX в. он произвел большое впечатление на инженеров и на самих математиков. Начала быстро развиваться качественная теория динамических систем. Один из важных результатов состоит в том, что кроме устойчивых особых точек и предельных циклов, других притягивающих множеств в грубых динамических системах вида (4.4) не бывает.

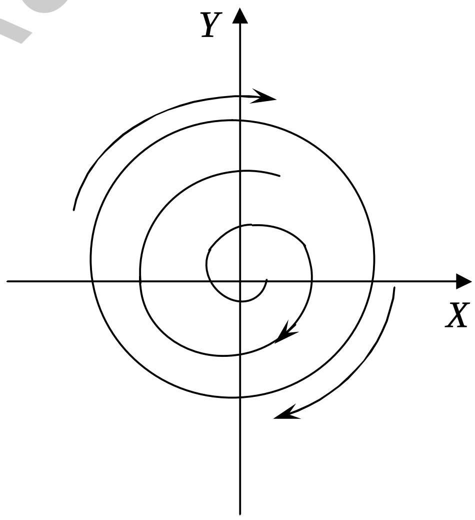


Рис. 4.6 Фазовые траектории вблизи
устойчивого предельного цикла

Притягивающим множеством называется такая совокупность точек на плоскости $\{X, Y\}$, к которой стремятся, «притягиваются» близкие решения при $t \to \infty$. Поэтому иногда такое множество называют аттрактором (от английского слова attract – притягивать).

Кроме бифуркаций состояний равновесия, рассмотренных выше, в динамических системах при изменении параметра может происходить еще одна интересная перестройка – из особой точки может возникнуть предельный цикл. Ее иногда называют бифуркацией Хопфа. В качестве иллюстрации рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\frac{dr}{dt} = lr - r^3, \ \frac{dj}{dt} = c, \ c = const.$$

Здесь r и j – полярные координаты; $x = r\cos j$, $y = r\sin j$. При $l < 0$ в системе есть один устойчивый фокус. Когда l становится положительным, то фокус теряет устойчивость, и возникает устойчивый предельный цикл, радиус которого равен $\sqrt{l}$. Он и определяет асимптотику всех решений.

Рассматривая уравнение (4.2) или динамическую систему (4.4), мы почти не говорили о начальных условиях (соответственно $x(0)$ или $X(0), Y(0)$). Действительно, в некоторых системах начальные условия существенны. Например, если в системе (4) $P = Y, \ Q = -w^2 X$ (это будет уравнение математического маятника $\frac{d^2 X}{d t^2} + w^2 X = 0$), то величина $E = \frac{1}{2}\left(Y^2 + w^2 X^2\right)$ будет сохраняться. Решения, у которых в начальный момент времени величина E различна, не могут стремиться друг к другу. К этому классу относятся также многие системы в небесной механике, в других областях классической физики, где поступлением энергии извне можно пренебречь и где полная энергия поэтому будет сохраняться.

Но во многих случаях задачи (4.2), (4.4) обладают замечательным свойством: из целого класса начальных данных при $t \to \infty$ в них происходит выход на одно и то же решение. Система «забывает» детали начальных данных. Представим себе генератор. Для того чтобы поддерживать его колебания, нужно подавать энергию извне. При этом между поступающей и рассеивающейся энергией устанавливается динамическое равновесие. Имея в виду постоянный приток энергии и его рассеяние, генератор относят к открытым диссипативным системам.

Примером системы, для которой характерно «забывание» начальных данных и обладающей странным аттрактором, служит хорошо известная система Лоренца:

$$\frac{dx}{dt} = s\,(y - x), \ \frac{dy}{dt} = -xz + r\,x - y, \ \frac{dz}{dt} = xy - bz. \qquad (4.6)$$

Здесь $r = R / R_c$, где R – число Рэлея, R_c – критическое число Рэлея; s – число Прандтля, а b – постоянная (в нашем случае $b = 8/3$).

Важной особенностью [8] системы Лоренца является то, что ее решения оказываются неустойчивыми: разность двух решений может быстро расти со временем, даже если их начальные данные были очень близки. Поскольку реальные начальные данные всегда известны с некоторой погрешностью, то наши возможности предсказывать поведение системы оказываются ограниченными.

То, что нельзя точно предсказать ход процесса, не проследив его весь, сближает систему Лоренца с вероятностными задачами. При любых начальных условиях в системе реализуется хаотический режим движения [10].

Система Лоренца была предложена как одна из упрощенных моделей физики атмосферы. В 70-е годы XX в. было показано, что многие процессы описываются либо уравнениями Лоренца, либо системами уравнений, у которых есть странные аттракторы. Такие уравнения описывают поведение некоторых типов волн в плазме, многие химические реакции в открытых системах, изменение определенных биологических сообществ, генерацию лазера в некотором диапазоне параметров.

Приемы составления дифференциальных уравнений, а также некоторые методы их качественного исследования изложены (и проиллюстрированы задачами, возникающими в различных областях знаний) в книге [3].

4.3. Применение аналитических методов к исследованию некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений

Известный французский математик Коши обратил внимание на то, что решения дифференциальных уравнений удобно рассматривать как функции комплексного переменного. Именно с этой точки зрения и ведется исследование решений в аналитической теории дифференциальных уравнений [2, 4, 10].

Чрезвычайно важным понятием теории функций комплексной переменной является понятие аналитической функции.

Определение 1. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в данной точке, если она дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности данной точки.

Определение 2. Функция, аналитическая во всех точках некоторой области, называется аналитической в этой области.

Определение 3. Точки плоскости, в которых однозначная функция $w = f(z)$ является аналитической, называются правильными точками этой функции.

Аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений изучает, как правило, уравнения, которые представляют собой многочлены относительно зависимой переменной и ее производных с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями. Задачей, которая при этом ставится, является изучение свойств решений по виду самого дифференциального уравнения. Поскольку решение дифференциального уравнения рассматривается на комплексной плоскости, то свойства решения и область его существования определяются точками, где нарушается аналитичность функции.

Определение 4. Точки плоскости, в которых однозначная функция $w = f(z)$ не является аналитической (в частности, точки, в которых $w = f(z)$ не определена), называются особыми.

Изучение поведения решений в окрестности особых точек является важной проблемой. И хотя она локальна, тем не менее, она тесно связана с изучением поведения решения в целом.

В теории функций комплексной переменной, как правило, рассматриваются особые точки однозначных функций, однако решения дифференциальных уравнений очень часто являются многозначными функциями и поэтому ниже дается классификация особых точек произвольных аналитических функций (не обязательно решений дифференциальных уравнений), которая впервые предложена французским математиком Пенлеве. Она основана на числе значений, которые принимает функция при обходе вокруг особой точки.

Определение 4 [10]. Особая точка $z = z_0$ функции $w = f(z)$ называется критической, если при обходе этой точки меняется значение функции $w = f(z)$. В противном случае особая точка $z = z_0$ функции $w = f(z)$ называется некритической.

Примером критической особой точки может служить точка $z = 0$ для функции $w = \sqrt{z}$.

Определение 5. Алгебраическими особыми точками функции $w = f(z)$ называются критические алгебраические точки, критические полюсы и обычные полюсы.

Подробнее о первых двух типах особых точек смотри в [10].

Таким образом, точка $z = 0$ для функции $w = \sqrt{z}$ является критической алгебраической особой точкой.

Известный немецкий математик Л. Фукс обнаружил, что решения дифференциальных уравнений могут иметь особые точки, положение которых зависит от начальных условий.

Определение 6. Особые точки решений дифференциальных уравнений на комплексной плоскости, положение которых не зависит от начальных данных, определяющих решение, называются неподвижными.

Определение 7. Особые точки решений дифференциальных уравнений, зависящие от начальных данных, называются подвижными.

***Пример 3* [10].** Пусть на плоскости с начальной скоростью u_0 движется тело при действии силы сопротивления, зависящей от квадрата скорости. В соответствии со вторым законом Ньютона дифференциальное уравнение для движущегося тела имеет вид

$$\frac{du}{dt} = -ku^2, \tag{4.7}$$

где k – постоянная. Решением уравнения (4.7) является семейство функций

$$u = \frac{1}{C + tk},$$

где С – произвольная постоянная. Принимая во внимание начальное условие $u(t_0) = u_0$, имеем значение постоянной $C = u_0^{-1} - kt_0$, после подстановки которой в (4.7) приходим к решению

$$u = \frac{u_0}{u_0k(t - t_0) + 1}. \tag{4.8}$$

Особой точкой решения (4.8) является полюс $t^* = t_0 - (ku_0)^{-1}$, положение которого зависит от начальных данных t_0 и u_0. Значит, в данной математической модели имеем дело с подвижной особой точкой.

Предполагая, что сила сопротивления линейно зависит от скорости, будем иметь уравнение

$$\frac{du}{dt} = -ku\,, \tag{4.9}$$

решение которого (с учетом начального условия) запишется в виде $u = u_0\, e^{-k(t-t_0)}$, где t_0, u_0 – постоянные числа. Очевидно, что в этом решении вообще нет особых точек.

Решения дифференциальных уравнений могут иметь как критические, так и некритические подвижные особые точки. Среди всех особенностей (если они есть) решений дифференциальных уравнений могут встретиться 4 различных варианта [9]: 1) решение не имеет ни критических, ни подвижных особых точек; 2) решение имеет неподвижные критические особые точки; 3) решение имеет подвижные некритические особые точки и 4) решение имеет подвижные критические особые точки.

В аналитической теории дифференциальных уравнений доказано, что решения линейных уравнений могут иметь только неподвижные критические особые точки, причем все критические особые точки решений определяются особыми точками коэффициентов самого дифференциального уравнения. Таким образом, особенности решений таких дифференциальных уравнений относятся к упомянутым выше первому и второму вариантам.

Однако в случае нелинейного дифференциального уравнения решения могут иметь как подвижные, так и неподвижные критические особые точки.

В 1884 г. Пуанкаре и Л. Фукс сформулировали проблему поиска нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих неподвижные критические особые точки. Фактически они поставили задачи о нахождении нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих аналитические решения. Причем на этом пути могут быть определены и новые функции как решения нелинейных дифференциальных уравнений.

В 1884 г. Л. Фукс доказал теорему о том, что среди всех уравнений первого порядка $w' = F(z, w)$ с функцией F, рациональной по w и локально аналитической по z, только уравнение (4.1) (в котором независимая переменная x считается комплексной) не имеет подвижных критических особых точек.

Пенлеве рассматривал сформулированную Л. Фуксом и Пуанкаре проблему применительно к дифференциальным уравнениям второго порядка

$$w'' = R(z, w, w')\,, \tag{4.10}$$

где функция R является рациональной по w и w' и локально аналитической по z.

Вместе со своими учениками Гамбье, Гарнье и другими Пенлеве показал, что среди всех возможных нелинейных уравнений второго порядка вида (4.10) только 50 канонических уравнений не имеют подвижных особых точек. Решения 44 уравнений из этих 50 можно выразить через элементарные или известные специальные функции, а для решений оставшихся шести уравнений Пенлеве и Гамбье ввели новые специальные функции, называемые теперь трансцендентами Пенлеве. Таким образом, Пенлеве и его ученикам удалось найти шесть новых неклассических функций, определяемых решениями нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

В работах Пенлеве и его учеников фактически было установлено, что если в решении дифференциального уравнения отсутствуют критические подвижные особые точки, то общее решение такого дифференциального уравнения может быть получено. Это свойство в настоящее время известно как свойство Пенлеве.

Определение 7. Говорят, что обыкновенное дифференциальное уравнение имеет свойство Пенлеве, если общее решение этого уравнения не имеет критических подвижных особых точек.

Исследование дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве называется Пенлеве-анализом дифференциальных уравнений. Существует несколько методов [10], позволяющих провести такой анализ.

Свойство Пенлеве для обыкновенного дифференциального уравнения по существу является критерием существования общего решения дифференциального уравнения. Если дифференциальное уравнение имеет свойство Пенлеве, то общее решение его может быть получено; если свойства Пенлеве нет, то общее решение, как правило, найти не удается. Однако есть случаи, когда исходное уравнение не удовлетворяет свойству Пенлеве, но после замены оно приводится к уравнению, имеющему это свойство. Начиная со второй половины 60-х годов XX в. произошло резкое усиление интереса к исследованию дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве, поскольку обнаружена его тесная связь с нелинейными уравнениями, решаемыми методом обратной задачи рассеяния [1].

После того как в 1974 г. Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сигур установили, что метод обратной задачи рассеяния применим для решения многих нелинейных уравнений в частных производных, возник вопрос о критерии, с помощью которого можно было бы установить, имеет ли нелинейное уравнение солитонные решения или нет.

Солитоном называется нелинейная уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость при собственном движении и при столкновении с себе подобными уединенными волнами, т.е. представляет собой устойчивое образование. Единственным результатом взаимодействия солитонов может быть некоторый сдвиг фаз. Уединенные волны, открытые английским кораблестроителем Расселом в 1834 г., ведут себя подобно частицам.

Примером нелинейного уравнения, допускающего солитоноподобные волны, является уравнение Кортевега–де Вриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{4.11}$$

Уравнение (4.11) имеет волновое решение (солитон), которое выражается через специальную функцию, изученную немецким математиком Карлом Якоби, которая носит теперь его имя. Действительно, уравнение (4.11) имеет решение в переменных бегущей волны

$$u(x,t)=w(z),\ \ z=x-c_0t\,. \tag{4.12}$$

Это означает, что оно зависит от координаты x и времени t через переменную $z=x-c_0t$, характеризующую положение точки координат, движущейся со скоростью волны c_0. Переменную z называют еще автомодельной переменной, а соответствующее ей решение – автомодельным решением типа «бегущая волна».

Преобразование (4.12) позволяет перейти от уравнения в частных производных (4.11) к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$w'''(z)+6w(z)w'(z)-c_0w'(z)=0\,,$$

которое имеет первый интеграл

$$w''+3w^2-c_0w+c=0\,, \tag{4.13}$$

где c – произвольная постоянная. Уравнение (4.13) входит в список уравнений без критических подвижных особых точек, полученный Пенлеве и его учениками. Общее решение уравнения (4.13) выражается через так называемую эллиптическую функцию Якоби. Подробный вывод и явный вид решения уравнения (4.13) можно найти в книге [10]. Отметим, что решение уравнения (4.13) является периодической волной. В предельном случае при малой амплитуде это решение переходит в синусоидальную волну, хорошо известную из теории волн.

Как отмечалось выше, переменная $z=x-c_0t$ характеризует положение точки координат, движущейся со скоростью волны c_0, т.е. она обозначает положение наблюдателя, который постоянно находится на гребне волны. Таким образом, нелинейное уравнение Кортевега–де Вриза в отличие от решения линейного волнового уравнения с одной пространственной переменной имеет волну, распространяющуюся лишь в одном направлении.

Если в уравнение (4.11) ввести преобразование

$$u(x,t)=(3t)^{-\frac{2}{3}}f(t),\quad t=x\cdot(3t)^{-\frac{1}{3}},$$

то для определения функции $f(t)$ получим уравнение

$$f_{ttt}+6ff_t-tf_t-2f=0\,,$$

которое имеет свойство Пенлеве. Его решение может быть получено, если воспользоваться так называемым преобразованием Миуры:

$$f=T_t-T^2,$$

где $T(t)$ – решение второго трансцендента Пенлеве

$$T_{tt}=2T^3+tT+a$$

с произвольным параметром a.

Если решение уравнения (4.11) искать в виде

$$u(x,t)=q(s)-l\,t,\quad s=x+3l\,t^2,$$

где l – параметр, то после интегрирования по s для $q(s)$ получим первое уравнение Пенлеве:

$$q_{ss} + 3q^2 - l\ s = \tilde{c}\ ,$$

где $\tilde{c}$ – постоянная интегрирования.

Наблюдение (состоящее в том, что если в уравнениях с частными производными, решаемыми методом обратной задачи рассеяния, переходить к обыкновенным дифференциальным уравнениям, то последние обладают свойством Пенлеве) позволило М. Абловицу, А. Рамани и Х. Сигуру выдвинуть гипотезу о свойстве Пенлеве, которую можно рассматривать как критерий интегрируемости нелинейного уравнения с частными производными [10]: нелинейное уравнение с частными производными является точно решаемым уравнением только в том случае, если любое нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, полученное из него в результате замены переменных (автомодельные переменные, переменные бегущей волны и т.д.) имеет (возможно, после дополнительного преобразования) свойство Пенлеве.

Система Лоренца (если независимую переменную t считать комплексной, а параметры $b, s\ , r$ – произвольными) при определенных соотношениях между $b, s\ , r$ обладает свойством Пенлеве. Действительно, Х. Сигур получил 4 набора параметров [16] (см. также [10]), при которых система (4.6) либо вырождается в линейную систему, либо ее решения выражаются через эллиптические функции, либо через функции-решения второго или третьего уравнения Пенлеве. Характерно, что в каждом из этих случаев в системе (4.6) отсутствуют решения с хаотическим поведением, т.е. она не обладает странным аттрактором.

Существенный вклад в развитие и построение теории уравнений и систем со свойством Пенлеве внесли представители белорусской школы по обыкновенным дифференциальным уравнениям под руководством академика Н. П. Еругина А. П. Воробьев, В. И. Громак, Н. А. Лукашевич, И. П. Мартынов, А. И. Яблонский и др.

В учебном пособии [10] представлены методы нахождения аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений, которые проиллюстрированы многочисленными примерами.

Примеры систем различной природы, допускающих хаотическое поведение, критерии и математические модели хаоса, его количественные характеристики, описания и результаты физических и численных экспериментов с хаотическими системами, а также словарь терминов по хаотическим и нелинейным колебаниям содержатся в учебном пособии [12].

История открытия и изучения солитонов, солитонные явления в различных системах подробно и доступно изложены в книге [15].

Самостоятельная работа
«Дифференциальные уравнения»
Структура

1. Показать, что функция $y = f(x)$ есть решение указанного ДУ.
2. ДУ с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.
3. Однородные ДУ и приводящиеся к ним.
4. ЛДУ-1.
5. ДУ Бернулли.
6. ДУ в полных дифференциалах.
7. Задача на составление ДУ.
8. Исследовать на линейную зависимость или независимость систему функций в их области определения.
9. ЛОДУ с постоянными коэффициентами.
10. ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.
11. Указать вид частного решения ДУ, используя принцип суперпозиции частных решений.
12. Проинтегрировать ДУ методом Лагранжа.
13. Методом исключения решить СДУ.
14. Методом Эйлера найти общее решение данной СДУ.
15. Проинтегрировать неоднородную ЛСДУ с постоянными коэффициентами.
16. Определить характер точки покоя $(0,0)$ данной СДУ.
17. Исследовать на устойчивость по первому приближению решение $x = 0$, $y = 0$ данной СДУ.

Вариант 1

1. $xydx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$. $\qquad y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$.

2. а) $\sec^2 x \cdot tgy \cdot dx + \sec^2 y \cdot tgxdy = 0$. **Отв.** $tgx \cdot tgy = C$.

б) $y' = \dfrac{y+x}{x+3} - \ln\dfrac{y+x}{x+3}$. $\qquad$ **Отв.** $\ln\dfrac{y+x}{x+3} - 1 = \dfrac{c}{x+y}$.

3. а) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$. **Отв.** $y = 2x(arctgCx + pk)$, $y = (2k+1)px$, $k \in \mathrm{Z}$.

б) $y' = \dfrac{(x-y)}{(x+y)}$. $\qquad$ **Отв.** $x^2 - 2xy - y^2 = C$.

4. а) $y' = 2y + e^x - x$; $y(0) = \dfrac{1}{4}$. $\qquad$ **Отв.** $y = e^{2x} - e^x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$.

б) $y^2dx-\left(xy-2a^2\right)dy=0$. **Отв.** $x=\dfrac{a^2}{y}+Cy$.

5. $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{y^2}{x}$. **Отв.** $y=\dfrac{x}{(x+C)}$.

6. $e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0$. **Отв.** $xe^{-y}-y^2=C$.

7. а) На тело действует сила, пропорциональная времени. Кроме того, среда сопротивляется движению тела с силой, пропорциональной скорости. Найти закон движения тела. **Отв.** $s=\dfrac{kt^2}{2a^2}-\dfrac{kt}{a^4}-C_1e^{-a^2t}+C_2$.

(k – коэффициент пропорциональности, a – ускорение).

б) Найти кривую, касательная к которой в точке (x,y) проходит через точку $\left(x^2,y^2\right)$. **Отв.** $y=\dfrac{x^2}{2x-1+C(x-1)^2}$.

8. $\left\{x,2x,x^2\right\}$. **Отв.** линейно зависима.

9. а) $y^{IV}-8y''+16y=0$; б) $y^{V}-6y^{IV}+9y'''=0$;

в) $y^{VI}-2y^{V}+3y^{IV}-4y'''+3y''-2y'+y=0$.

Отв.: а) $y=(C_1+C_2x)\,e^{2x}+(C_3+C_4x)\,e^{-2x}$;

б) $y=C_1+C_2x+C_3x^2+e^{3x}(C_4+C_5x)$;

в) $y=(C_1+C_2x)\,e^{x}+(C_1+C_3x)\cos x+(C_5+C_6x)\cos x$.

10. а) $y'''-y''=12x^2+6x$; б) $y''+y'=4x^2e^x$; в) $y''+3y'+2y=x\sin x$.

Отв.: а) $y=C_1+C_2x+C_3e^x-x^4-5x^3-15x^2$;

б) $y=C_1+C_2e^{-x}+\left(2x^2-6x+7\right)e^x$;

в) $y^*=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$.

11. а) $y''-16y=xe^{4x}+\cos 4x$; б) $y''-2y'+y=2xe^x+e^x\sin 2x$.

Отв.: а) $y=(Ax+B)xe^{4x}+C\cos 4x+D\sin 4x$;

б) $y=x^2(Ax+B)\,e^x+(C\cos 2x+D\sin 2x)\,e^x$.

12. $y''+y=2/\sin^3 x$. **Отв.** $y=\dfrac{\cos 2x}{\sin x}+C_1\cos x+C_2\sin 2x$.

13. $\begin{cases}\dot{x}=3x+8y,\\ \dot{y}=-x-3y;\end{cases}$ $x(0)=6$, $y(0)=-2$. **Отв.** $x=4e^t+2e^{-t}$, $y=-e^t-e^{-t}$.

14. $\begin{cases}\dot{x}=x-5y,\\ \dot{y}=2x-y.\end{cases}$

Отв.
$x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t$, $y = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t)$.

15. $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = x - 5\sin t$.

Отв. $x = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - \cos t + 3\sin t$, $y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2\cos t - \sin t$.

16. $\dot{x} = 3x + y$, $\dot{y} = -2x + y$. **Отв.** неустойчивый фокус.

17. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2, \\ \dot{y} = -x - 3y + x\left(e^{x^2/2} - 1\right). \end{cases}$ **Отв.** неустойчиво.

Вариант 2

1. $(xy + 1)\,dx - (x^2 + 1)\,dy = 0$. $y = x + C\sqrt{1 + x^2}$.

2. $x(1 + y^2)\,dx - y(1 + x^2)\,dy = 0$. **Отв.** $C(1 + y^2) = 1 + x^2$.

3. а) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$. **Отв.** $arctg\dfrac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = C$.

б) $y' = \dfrac{x + 2y - 3}{2x - 2}$. **Отв.** $(x - 1)\,e^{2\frac{1-y}{x-1}} = C$.

4. а) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$; $y(1) = 0$. **Отв.** $y = x(x^2 - 1)\cdot 0,5$.

б) $y^2 dx + \left(x + e^{\frac{2}{y}}\right)dy = 0$; $y(e) = 2$. **Отв.** $x = e^{2/y}$.

5. $y' + xy = (1 + x)\,e^{-x} y^2$; $y(0) = 1$. **Отв.** $y = e^x$.

6. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$. **Отв.** $x^2 y + 3xy^2 - y^3 = C$.

7. а) Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2. **Отв.** $(C \pm x)y = 2a^2$.

б) Тело охладилось за 10 мин. от 100º до 60º. Температура окружающей среды равна 20º. За какое время тело остынет до 25º? **Отв.** 40 мин.

8. $\{1; 2; x; x^2\}$. **Отв.** линейно зависима.

9. а) $3y'' - 2y' - 8y = 0$. **Отв.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4/3x}$.

б) $y'' - 6y' + 13y = 0$. **Отв.** $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

в) $y''' + y'' - y' - y = 0$. **Отв.** $y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)e^{-x}$.

10. а) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$.

Отв. $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^{-x} + \frac{x^4}{3} - \frac{8}{3}x^3 + 12x^2$.

б) $y''' - 3y' - 2y = -4xe^x$. **Отв.** $y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)e^{-x} + xe^x$.

в) $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

Отв. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{3\sin 3x}{8} - \frac{\cos 3x}{4}$.

11. а) $y'' - 4y' + 4y = x + e^{2x}$. **Отв.** $y = ax + b + cx^2 e^{2x}$.

б) $y'' - 2y' + y = e^x x \sin x$.

Отв. $y = Axe^x + e^x((Cx + B)\cos x + (Dx + F)\sin x)$.

12. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.

Отв. $y = \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\left(e^x + 1\right) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + z, \\ \dot{z} = 3y + 4z. \end{cases}$ $y(0) = 0$, $z(0) = 4$. **Отв.** $y = e^t - e^{5t}$, $z = -e^t - 3e^{5t}$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x + 7y. \end{cases}$

Отв. $x = e^{5t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$, $y = e^{5t}((C_1 - C_2)\sin 2t + (C_1 + C_2)\cos 2t)$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - \sin t, \\ \dot{y} = 3x - 2y - \cos t. \end{cases}$

Отв. $x = \sin t + C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, $y = \sin t - \cos t + C_1 e^t + 3C_2 e^{-t}$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + \frac{y}{3}, \\ \dot{y} = -2x + \frac{y}{2}. \end{cases}$ **Отв.** седло.

17. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2\sin y - y^3 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$ **Отв.** неустойчива.

Вариант 3

1. $y'(1+xy)+y^2=0$. $\begin{cases} x=te^t, \\ y=e^{-t}. \end{cases}$

2. $(1+x^2)\,y^3dx-(1+y^2)\,x^3dy=0$. **Отв.** $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}+2\ln\dfrac{x}{y}=C$.

3. а) $xy'=\dfrac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}$. **Отв.** $\dfrac{y}{x^2}\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}}=C$.

б) $(2x-4y+6)\,dx+(x+y-3)\,dy=0$.

Отв. $(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$, $y=x+1$.

4. а) $y'-yctgx=2x\sin x$; $y\left(\dfrac{p}{2}\right)=0$. **Отв.** $y=\left(x^2-\dfrac{p^2}{4}\right)\sin x$.

б) $\left(y^4e^y+2x\right)y'=y$; $y(0)=1$. **Отв.** $x=e^y\left(y^3-y^2\right)$.

5. $xy'+y=2y^2\ln x$; $y(1)=0{,}5$. **Отв.** $y=\dfrac{1}{2(\ln x+1)}$.

6. $\left(2x\sin y-y^2\sin x\right)dx+\left(x^2\cos y+2y\cos x+1\right)dy=0$.

Отв. $x^2\sin y+y^2\cos x+y=C$.

7. а) Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная b. **Отв.** $b\ln y-y=\pm x+C$.

б) Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 мин. За какое время вытечет вся вода. **Отв.** $\left(5\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\approx 17{,}07$ мин.

8. $\{\sin x;\cos x;\cos 2x\}$. **Отв.** линейно независима.

9. а) $y''-3y'+2y=0$. **Отв.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

б) $y'''-4y''+5y'-2y=0$. **Отв.** $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{2x}$.

в) $y^{IV}+2y'''+y''=0$. **Отв.** $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)\,e^{-x}$.

10. а) $y'''+y''=5x^2-1$. **Отв.** $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+\dfrac{5}{12}x^4-\dfrac{5}{3}x^3+\dfrac{9}{2}x^2$.

б) $y'''-3y'+2y=(4x+9)\,e^{2x}$. **Отв.** $y=(C_1+C_2x)\,e^x+xe^{2x}+C_3e^{-2x}$.

в) $y''+2y'+5y=-2\sin x$.

Отв. $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)\,e^{-x}-\dfrac{2}{5}\sin x+\dfrac{\cos x}{5}$.

11. а) $y''-y'-2y=e^x+e^{-2x}$. **Отв.** $y=Ae^x+Be^{-2x}$.

б) $y'''-2y'+y=2xe^x+e^x\sin 2x$.

Отв. $y = x(Ax+B)e^{x} + (C\cos 2x + D\sin 2x)e^{x}$.

12. $y''+y=\dfrac{2}{\cos^{3}x}$. **Отв.** $y = tg^{2}x\cdot\cos x + C_1\cos x + C_2\sin x$.

13. $\begin{cases}\dot{x} = x+2y,\\ \dot{y} = 4x+3y.\end{cases}$ $x(0)=3, y(0)=2$.

Отв. $x=\dfrac{5}{3}e^{5t}+\dfrac{4}{3}e^{-t}$, $y=\dfrac{10}{3}e^{5t}-\dfrac{4}{3}e^{-t}$.

14. $\begin{cases}\dot{x} = x+3y,\\ \dot{y} = -x+5y.\end{cases}$ **Отв.** $x=3C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}$.

15. $\begin{cases}\dot{x} = 2x+4y+\cos t,\\ \dot{y} = -x-2y+\sin t.\end{cases}$

Отв. $x=-3\sin t-2\cos t+2C_1t+C_1-2C_2$, $y=2\sin t-C_1t+C_2$.

16. $\begin{cases}\dot{x} = x+2y,\\ \dot{y} = -3x+y.\end{cases}$ **Отв.** неустойчивый фокус.

17. $\begin{cases}\dot{x} = 2x+8\sin y,\\ \dot{y} = 2-e^{x}-3y-\cos y.\end{cases}$ **Отв.** асимптотически устойчива.

Вариант 4

1. $(x+y)^2y'=1$; $y = arctg(x+y)+C$.

2. $2x\sqrt{1+y^2}\,dx+e^{-x^2}dy=0$. **Отв.** $e^{x^2}+\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=C$.

3. а) $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+6\dfrac{y}{x}+3$. **Отв.** $x+y=Cx(3x+y)$.

б) $(2x+y+1)\,dx-(4x+2y-3)\,dy=0$. **Отв.** $2x+y-1=Ce^{2y-x}$.

4. а) $y'+ytgx=\cos^2 x$; $y\left(\dfrac{p}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$. **Отв.** $y=0{,}5\sin 2x$.

б) $2\left(4y^2+4y-x\right)y'=1$; $y(0)=0$. **Отв.** $x=4y^2$.

5. $2(xy'+y)=xy^2$; $y(1)=2$. **Отв.** $y=\dfrac{2}{x(1-\ln x)}$.

6. $\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+\left(y^2-4xy-2x^2\right)dy=0$.

Отв. $\dfrac{x^3}{3}-2x^2y-2y^2x+\dfrac{y^3}{3}=C$.

7. а) Найти кривую, проходящую через точку $M(1;2)$, касательные к которой пересекают прямую $y=1$ в точках с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. **Отв.** $y=1+\dfrac{1}{x}$.

б) Найти время падения мяча с высоты 16,3 м без начальной скорости с учетом сопротивления воздуха, которое пропорционально квадрату скорости и равно 0,48 г при скорости 1м/с. **Отв.** 1,78 с.

8. $\left\{e^x, xe^x, x^2e^x\right\}$. **Отв.** линейно независима.

9. а) $y''-y'=0$. **Отв.** $y=C_1+C_2e^x$.

б) $4y''-8y'+5y=0$. **Отв.** $y=e^x\left(C_1\cos\dfrac{x}{2}+C_2\sin\dfrac{x}{2}\right)$.

в) $y^V-y^{IV}=0$. **Отв.** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5e^x$.

10. а) $3y^{IV}+y'''=6x-1$.

Отв. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-\frac{x}{3}}+\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{19x^3}{6}$.

б) $y'''+y''-y'-y=(8x+4)\,e^x$.

Отв. $y=C_1e^x+(C_2+C_3x)\,e^{-x}+\left(x^2-x\right)e^x$.

в) $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 4x$.

Отв. $y=\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)e^{-3x}-\dfrac{e^{-3x}\cos 4x}{12}$.

11. а) $y''+6y'+9y=x+e^{-3x}$. **Отв.** $y=Ax+B+Cx^2e^{-3x}$;

б) $y^{IV}+y=\sin x+x^2$. **Отв.** $y=Ax^2+Bx+C+D\cos x+F\sin x$;

12. $y''+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{4}ctg\dfrac{x}{2}$. **Отв.** $y=\sin\dfrac{x}{2}\ln\left|tg\dfrac{x}{4}\right|+C_1\cos\dfrac{x}{2}+C_2\sin\dfrac{x}{2}$.

13. $\begin{cases}\dot{x}=x+y,\\ \dot{y}=-2x+4y;\end{cases}$ $x(0)=0$, $y(0)=-1$. **Отв.** $x=e^{2t}-e^{3t}$, $y=e^{2t}-2e^{3t}$.

14. $\begin{cases}\dot{x}=y+x,\\ \dot{y}=-2x+4y.\end{cases}$ **Отв.** $y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$. $z=C_1e^{2t}+2C_2e^{3t}$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 4, \\ \dot{y} = x + 2y + 3t - 6. \end{cases}$

Отв. $x = t + 2 + C_1 e^t + C_2 e^{3t}$, $y = -2t + 1 - C_1 e^t + C_2 e^{3t}$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x + 7y. \end{cases}$ **Отв.** неустойчивый фокус.

17. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^2 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$. **Отв.** устойчива.

Вариант 5

1. $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$. $y = C(e^x + 8)$.

2. $xy' - y \ln x = 0$. **Отв.** $\ln^2 x = 2 \ln \dfrac{y}{c}$.

3. а) $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$. **Отв.** $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^3$.

б) $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$. **Отв.** $(y - x + 2)^2 + 2x = C$.

4. а) $y' - \dfrac{y}{x + 2} = x^2 + 2x$; $y(-1) = 1{,}5$. **Отв.** $y = \dfrac{x^3}{2} + x^2 + x + 2$.

б) $(\cos 2y \cdot \cos^2 y - x)y' = \sin y \cdot \cos y$; $y\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{p}{3}$. **Отв.** $x = \cos^2 y$.

5. $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2$; $y(0) = 1$. **Отв.** $y = e^{4x}$.

6. $(x \ln y - x^2 - \cos y)dy + (x^3 + y \ln y - y - 2xy)dx = 0$.

Отв. $\dfrac{x^4}{4} + xy \ln y - xy - x^2 y - \sin y = C$.

7. а) Найти кривую, у которой отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам точкой касания. **Отв.** $y = \dfrac{c}{x}$.

б) Согласно опытам в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?
Отв. 1375 лет.

8. $\{1, \sin x, \cos 2x\}$. **Отв.** линейно независима.

9. а) $y'' + 4y' + 4y = 0$. **Отв.** $y = C_1 e^{-2x} + xC_2 e^{-2x}$.

б) $y''' - 8y = 0$. **Отв.** $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos\sqrt{3}x + C_3 \sin\sqrt{3}x)$.

в) $y''' + 2y'' = 0$. **Отв.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x}$.

10. а) $y^{V} + y^{IV} = 2x + 3$.

Отв. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-x} + \dfrac{x^5}{60} + \dfrac{5x^4}{24}$.

б) $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)\,e^{2x}$. **Отв.** $y = C_1 + (C_2 + xC_3)\,e^{-x} + xe^{2x}$.

в) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$. **Отв.** $y = (C_1 + C_2 x)\,e^{2x} - \dfrac{e^{2x}}{9}\sin 3x$.

11. а) $y'' + 8y' + 16y = x^2 + xe^{-4x}$.

Отв. $y = Ax^2 + Bx + C + (Dx + F)\,x^2 e^{-4x}$;

б) $y''' - y' = 2 + xe^{x}\sin x$.

Отв. $y = Ax + [(Cx + D)\cos x + (Bx + F)\sin x]\,e^{2x}$.

12. $y'' + y' = \dfrac{e^x}{2 + e^x}$.

Отв. $y = -1 + \ln\left(2 + e^x\right) + 2e^{-x}\ln\left(2 + e^x\right) + C_1 + C_2 e^{-x}$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 4x - 3y; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2$. **Отв.** $x = e^{-t},\ y = 2e^{-t}$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 10x - 4y. \end{cases}$ **Отв.** $x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t},\ \ y = 2C_1 e^{t} + 5C_2 e^{-2t}$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 2e^{-t}, \\ \dot{y} = -6x + 4y - 4e^{-t}. \end{cases}$

Отв. $x = e^{-t} + C_1 e^{t} + C_2 e^{2t},\ y = 2e^{-t} + 2C_1 e^{t} + 3C_2 e^{2t}$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$ **Отв.** неустойчивый фокус.

17. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^{x} + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2. \end{cases}$ **Отв.** неустойчива.

Вариант 6

1. $y\ln y + xy' = 0$. **Отв.** $x\ln y = C$.

2. $dy\left(1 + x^2\right)xy = dx\left(1 + y^2\right)$. **Отв.** $\left(1 + y^2\right)\left(1 + x^2\right) = Cx^2$.

3. а) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$. **Отв.** $\ln|x| + \sin\frac{y}{x} = C$.

б) $(x+4y)y' = 2x + 8y - 5$. **Отв.** $(y - x + 5)^5(x + 2y - 2) = C$.

4. а) $(x+1)y' - y = e^x(x+1)^2$; $y(0) = 1$. **Отв.** $y = (x+1)e^x$.

б) $\left(x\cos^2 y - y^2\right)y' = y\cos^2 y$; $y(p) = \frac{p}{4}$. **Отв.** $x = (5 - tgy)y$.

5. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x$; $y(1) = 1$. **Отв.** $y = \frac{x}{1 + x\ln^2 x}$.

6. $\left(xe^y + e^x\right)y' + e^y + ye^x = 0$. **Отв.** $xe^y + ye^x = C$.

7. а) Кривая $y = j(x)$ проходит через точку $M(0;1)$ и известно, что в каждой ее точке тангенс угла наклона касательной к кривой равен удвоенному произведению координат точки касания. Найти эту кривую.

Отв. $y = e^{x^2}$.

б) Экспериментально установлено, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству вещества. Найти период полураспада радиоактивного вещества.

Отв. $T = \frac{\ln 2}{K}$, где K – коэффициент пропорциональности.

8. $\left\{5, \cos^2 x, \sin^2 x\right\}$. **Отв.** линейно зависима.

9. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$. **Отв.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

б) $y'' + 9y = 0$. **Отв.** $y = C_1\sin 3x + C_2\cos 3x$.

в) $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$.

Отв. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x) + e^{-x}(C_3\cos 2x + C_4\sin 2x)$.

10. а) $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$.

Отв. $y = C_1 + C_2x + (C_3x + C_4x)\,e^{-x} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2}$.

б) $y''' - 4y'' + 4y' = (x-1)e^x$. **Отв.** $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\,e^{2x} + xe^x$.

в) $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$. **Отв.** $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{e^x}{10}(3\sin x - \cos x)$.

11. а) $y'' + y' = e^x - e^{-x}x$. **Отв.** $y = Ae^x + (Cx + D)xe^{-x}$.

б) $y'' - 16y = xe^{4x} + \cos 4x$. **Отв.** $y = x(Ax + B)\,e^{4x} + C\cos 4x + D\sin 4x$.

12. $y'' + 4y = 2tgx$.

Отв. $y = -x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\ln\left(2\cos^2 x\right) + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4y - 2x; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = -1.$ **Отв.** $x = e^{2t} - e^{3t},\ y = e^{2t} - 2e^{3t}$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + 4y. \end{cases}$ **Отв.** $x = C_1 + C_2e^{5t}.\ y = C_1 - 4C_2e^{5t}$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t, \\ \dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$

Отв. $x = -t\cos t + C_1\cos t + C_2\sin t$,

$y = t(\cos t + \sin t) - (C_1 - C_2)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$ **Отв.** устойчивый фокус.

17. $\begin{cases} \dot{x} = 3y + x^5 - \sin x, \\ \dot{y} = \dfrac{x}{4} - 2y - \dfrac{y^3}{6}. \end{cases}$ **Отв.** устойчива.

Вариант 7

1. $y' = y + e^{2x}$. $y = e^{2x} + Ce^x$.

2. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$. **Отв.** $1 + y^2 = C(1 - x^2)$.

3. а) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$. **Отв.** $y^2 = Cxe^{-y/x}$.

б) $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$. **Отв.** $(y + 2)^2 = C(x + y - 1);\ y = 1 - x$.

4. а) $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x;\ y\left(\dfrac{p}{2}\right) = 1$. **Отв.** $y = x\left(\dfrac{2}{p} - \cos x\right)$.

б) $e^{y^2}(dx - 2xydy) = ydy;\ y(0) = 0$. **Отв.** $x = \dfrac{shy^2}{2}$.

5. $2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x}y^2;\ y(0) = 2$. **Отв.** $y = 2e^x$.

6. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$. **Отв.** $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$.

7. а) Найти уравнение кривой, все касательные которой проходят через начало координат. **Отв.** $y = C\,x$.

б) Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, скорость ее через 4 с стала 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 см/с?

Отв. 50 с.

8. $\{4, \sin^2 x, \cos 2x\}$. **Отв.** линейно зависима.

9. а) $y''+5y'+6y=0$. **Отв.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$.

б) $y''+2y'+2y=0$. **Отв.** $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

в) $y^{IV} + 2y'''+4y''-2y'-5y=0$.

Отв. $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + e^{-x}(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$.

10. а) $y^{IV} - 2y'''+y''= 2x(1-x)$.

Отв. $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)\, e^{x} - \dfrac{x^4}{6} - x^3 - 4x^2$.

б) $y'''-5y''+8y'-4y = (2x-5)e^{x}$.

Отв. $y = C_1e^{x} + (C_2 + C_3x)\, e^{2x} + \left(x^2 - x\right) e^{x}$.

в) $y''-4y'+8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x)$.

Отв. $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{2x} + \dfrac{e^{x}}{10}(13\sin x - \cos x)$.

11. а) $y''+3y'= x + e^{-3x}$. **Отв.** $y = x(Ax+B) + Cxe^{-3x}$.

б) $y''' + y' = \sin 2x + \cos x$.

Отв. $y = A\sin 2x + B\cos 2x + x(D\cos x + F\sin x)$.

12. $y''+2y'+y = \dfrac{e^{-x}}{x}$. **Отв.** $y = xe^{-x}\ln|x| + (C_1 + C_2x)\, e^{-x}$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 5y, \\ \dot{y} = x; \end{cases}$ $x(0)=0$, $y(0)=1$.

Отв. $x = 5e^{2t}\sin t$, $y = e^{2t}(\cos t - 2\sin t)$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -6x - 3y. \end{cases}$ **Отв.** $x = C_1 + C_2\, e^{-t}$, $y = -2C_1 - 3C_2e^{-t}$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^{t}. \end{cases}$

Отв. $x = 4C_1e^{t} + C_2e^{-2t} - 4te^{t}$, $y = C_1e^{t} + C_2e^{-2t} - (t-1)\, e^{t}$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4y - 2x. \end{cases}$ **Отв.** неустойчивый узел.

17. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$ **Отв.** неустойчива.

Вариант 8

1. $y'\cos x + y = tgx$. $y = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$.

2. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$. **Отв.** $\frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(2+y^2\right)^3} = C$.

3. а) $y' - 4 - \frac{y}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2$. **Отв.** $arctg\left(\frac{y}{2x}\right) = 2\ln Cx$.

б) $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$. **Отв.** $y + 2 = Ce^{-2arctg\frac{y+2}{x-3}}$.

4. а) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$; $y(p) = \frac{1}{p}$. **Отв.** $y = \frac{\sin x}{x} - \cos x - \frac{p-1}{x}$.

б) $\left(104y^3 - x\right)y' = 4y$; $y(8) = 1$. **Отв.** $x = 8y^3$.

5. $3(xy' + y) = y^2\ln x$; $y(1) = 3$. **Отв.** $y = \frac{3}{1+\ln x}$.

6. $(2x - y)\,dx - xdx = 0$. **Отв.** $x^2 - xy = C$.

7. а) Найти кривую, у которой подкасательная равна сумме абсциссы и ординаты точки касания. **Отв.** $y = Ce^{\frac{x}{y}}$.

б) Сосуд объемом в 20 л содержит воздух (80 % азота и 20 % кислорода). В сосуд втекает 0,1 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99 % азота? **Отв.** через 10 мин.

8. $\left\{1, x, e^x\right\}$. **Отв.** линейно независима.

9. а) $y'' = 0$. **Отв.** $y = C_1 + C_2x$.

б) $y'' + 4 = 0$. **Отв.** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

в) $y''' - 3y' + 2y = 0$. **Отв.** $y = e^x(C_1 + C_2x) + C_3e^{-2x}$.

10. а) $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2$.

Отв. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x - \dfrac{x^5}{12} - \dfrac{5}{4}x^4 - \dfrac{25}{3}x^3$.

б) $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$.

Отв. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + C_3e^{-x} + e^{-x}\left(x^2 - x\right)$.

в) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

Отв. $y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x} - \dfrac{\sin 2x}{17} + \dfrac{4\cos 2x}{17}$.

11. а) $y'' - 5y' = x^2 - \sin 5x$.

Отв. $y = \left(Ax^2 + Bx + C\right)x + D\sin 5x + F\cos 5x$.

б) $y''' + y' = \sin x + x\cos x$.

Отв. $y = [(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]\,x$.

12. $y'' + 2y' + y = -\dfrac{e^x}{x}$. **Отв.** $y = -xe^x\ln|x| + (C_1 + C_2x)\,e^{-x}$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x - 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 0$. **Отв.** $x = y = 0$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

Отв. $x = e^{2t}(C_2\sin 3t + C_1\cos 3t),\ y = (C_1\sin 3t - C_2\cos 3t)\cdot e^{2t}$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

Отв. $x = (C_1 + 2C_2t)\,e^t - 3,\ y = (C_1 + C_2 + 2C_2t)\,e^t - 2$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = -6x - 5y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$ **Отв.** устойчивый узел.

17. $\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(4y + e^{-3x}\right), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases}$ **Отв.** устойчива.

Вариант 9

1. $y' = -\dfrac{y}{1 + x^2}$. $y = e^{C - arctgx}$.

2. $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$. **Отв.** $\dfrac{\left(3 + x^2\right)^3}{\left(2 + y^2\right)^2} = C$.

3. а) $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$. **Отв.** $y = x\arcsin Cx$.

б) $y' = \dfrac{x + y - 2}{3x - y - 2}$. **Отв.** $\ln|y - x| + 2\dfrac{y - 1}{y - x} = C$.

4. а) $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2$; $y(1) = 1$. **Отв.** $y = \dfrac{5}{7\sqrt{x}} + \dfrac{2x^3}{7}$.

б) $dx + \left(xy - y^3\right)dy = 0$; $y(-1) = 0$. **Отв.** $x = y^2 - 2 + e^{\frac{-y^2}{2}}$.

5. $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}\left(1 - x^3\right)$; $y(0) = -1$. **Отв.** $y = -e^{-4x}$.

6. $\left(6xy + x^2 + 3\right)y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$. **Отв.** $3xy^2 + x^2 y + 3y + x^2 = C$.

7. а) Найти кривые, у которых нормаль совпадает с радиусом-вектором точки касания. **Отв.** $x^2 + y^2 = C$.

б) За какое время вытечет вся вода из бака цилиндрической формы с диаметром основания $2R = 1{,}8$ м и высотой $H = 2{,}45$ м через отверстие в дне диаметром $2r = 6$ см? Ось цилиндра вертикальна. **Отв.** За 17,5 мин.

8. $\left\{shx, chx; 2 + e^x\right\}$. **Отв.** линейно независима.

9. а) $y'' + 4y' = 0$. **Отв.** $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$.

б) $y'' - 4y' + 5y = 0$. **Отв.** $y' = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

в) $y^{IV} - y = 0$. **Отв.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$.

10. а) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$.

Отв. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 xe^x + C_4 x^2 e^x - x^2 - 6x$.

б) $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}$. **Отв.** $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^x x + xe^{2x}$.

в) $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.

Отв. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{\sin 7x}{16} - \dfrac{\cos 7x}{24}$.

11. а) $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 - xe^{2x}$.

Отв. $y = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + (Dx + F)\,e^{2x}$.

б) $y'' + y' + y = xe^x + e^x\sin x$.

Отв. $y = (Ax + B)\,e^x + (C\cos x + D\sin x)\,e^x$.

12. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$.

Отв. $y = 3x\sin 3x + \cos 3x \cdot \ln|\cos 3x| + C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x; \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=2$. **Отв.** $x=(t+1)\,e^{3t},\ y=(2+t)\,e^{3t}$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y, \\ \dot{y} = -4x - 4y. \end{cases}$

Отв.
$x=5C_1\cos 2t+5C_2\sin 2t,\ y=(-4C_1+2C_2)\cos 2t-(2C_1+4C_2)\sin 2t$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

Отв. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-2\sin t-\cos t,\ y=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+\sin t+3\cos t$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$ **Отв.** неустойчивый фокус.

17. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{\sin 2y}{2}, \\ \dot{y} = -y - 2x. \end{cases}$. **Отв.** устойчива.

Вариант 10

1. $dy+(xy-x^3)\,dx=0$. $y=x^2-2+Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

2. $xdx\sqrt{3+y^2}+y\sqrt{2+x^2}\,dy=0$. **Отв.** $\sqrt{2+x^2}+\sqrt{3+y^2}=C$.

3. а) $xy'-y=3\sqrt{x^2+y^2}$. **Отв.** $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^4$.

б) $y'=\dfrac{2x+y-3}{x-1}$. **Отв.** $(x-1)\,e^{\frac{1-y}{2(x-1)}}=C$.

4. а) $y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=\dfrac{2x^2}{1+x^2};\ y(0)=\dfrac{2}{3}$. **Отв.** $y=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

б) $(3y\cos 2y-2y^2\sin 2y-2x)y'=y;\ y(16)=\dfrac{p}{4}$. **Отв.** $x=y\cos 2y+\dfrac{p^2}{y^2}$.

5. $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2};\ y(0)=-1$. **Отв.** $y=-e^{-\frac{2}{3}x^2}$.

6. $3x^2e^y dx+(x^3e^y-1)\,dy=0$. **Отв.** $x^3e^y-y=C$.

7. а) Найти уравнение кривой, проходящей через точку $N(2;-2)$, если известно, что площадь треугольника, образованного радиусом-вектором OM любой ее точки $M(x,y)$, касательной (проведенной в этой же точке) и осью OX, равна 2. **Отв.** $2xy+3y^2-4=0$.

б) Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 мин. За какое время вытечет вся вода? Ответ округлить до целых чисел. **Отв.** за 17 мин.

8. $\{x;0;e^x\}$. **Отв.** линейно зависима.

9. а) $y''-2y'=0$. **Отв.** $y=C_1+C_2e^{2x}$.

б) $y''+2y'+10y=0$. **Отв.** $y'=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

в) $y^{IV}+4y''=0$. **Отв.** $y=C_1+C_2x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$.

10. а) $y'''-y'=x^2+x$. **Отв.** $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x$.

б) $y'''-y''-y'+y=e^{2x}(3x+7)$. **Отв.** $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{-x}+xe^{2x}$.

в) $y''+2y'=-2e^x(\sin x+\cos x)$.

Отв. $y=C_1+C_2e^{-2x}-\dfrac{e^x}{5}(3\sin x-\cos x)$.

11. а) $y''-y=e^x+x^2$. **Отв.** $y=Ax^2+Bx+C+xDe^x$.

б) $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$. **Отв.** $y=Axe^{-4x}+(Cx+D)\,e^{-x}$.

12. $y''+4y=8ctg\,2x$. **Отв.** $y=2\sin 2x\cdot\ln|tgx|+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

13. $\begin{cases}\dot{x}=3x-y,\\ \dot{y}=4x-y;\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=2$. **Отв.** $x=e^t,\ y=2e^t$.

14. $\begin{cases}\dot{x}=x-y,\\ \dot{y}=4x-3y.\end{cases}$ **Отв.** $x=e^{-t}(C_1+C_2t),\ y=e^{-t}(2C_1+C_2(2t-1))$.

15. $\begin{cases}\dot{x}=4x+y-e^{2t},\\ \dot{y}=y-2x.\end{cases}$

Отв. $x=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+(t+1)\,e^{2t},\ y=-2C_1e^{2t}-C_2e^{3t}-2te^{2t}$.

16. $\begin{cases}\dot{x}=-x+4y,\\ \dot{y}=-9x+y.\end{cases}$ **Отв.** центр.

17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = -3y - e^{x} + 2 - \cos y. \end{cases}$ **Отв.** асимптотически устойчива.

Вариант 11

1. $xdy - \left(2y + 2x^4\right)dx = 0$. $y = Cx^2 + x^4$.

2. $\left(e^{2x} + 5\right)dy + ye^{2x}dx = 0$. **Отв.** $y\sqrt{e^{2x} + 5} = C$.

3. а) $2y' - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = 8\dfrac{y}{x} + 8$. **Отв.** $2x + y = Cx(4x + y)$.

б) $y' = \dfrac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}$. **Отв.** $\ln|y - x| + 8\dfrac{x - 1}{y - x} = C$.

4. а) $y' - \dfrac{2x - 5}{x^2}y = 5$; $y(2) = 4$. **Отв.** $y = x^2$.

б) $8\left(4y^3 + xy - y\right)y' = 1$; $y(0) = 0$. **Отв.** $x = -4y^2$.

5. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}$; $y(0) = 1$. **Отв.** $y = e^{x}$.

6. $\left(3x^2 + \dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx - \dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}dy = 0$. **Отв.** $x^3 + \sin\dfrac{2x}{y} = C$.

7. а) Найти кривые, удовлетворяющие условию: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равен $2a$. **Отв.** $a\ln\left(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}\right) \mp \sqrt{a^2 - y^2} = x + C$.

б) Конденсатор емкостью Q включается в цепь с напряжением E и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения. **Отв.** $R\dfrac{dq}{dt} = E - \dfrac{q}{Q}$; $q = QE\left(1 - e^{-\frac{t}{QR}}\right)$.

8. $\left\{2^{x}, 3^{x}, b^{x}\right\}$. **Отв.** линейно независима.

9. а) $y'' + 4y' + 3y = 0$. **Отв.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.

б) $y'' + 9y = 0$. **Отв.** $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$.

в) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$. **Отв.** $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$.

10. а) $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$. **Отв.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{x} - \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{5x^3}{2} - \dfrac{15x^2}{2}$.

б) $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{x}$. **Отв.** $y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{2x} + e^{x}\left(x^2 - x\right)$.

в) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$. **Отв.** $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \dfrac{1}{36}e^{2x}\sin 6x$.

11. а) $y''-3y'-4y=e^{-x}\cdot x^2+\cos 4x$;

Отв. $y=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{-x}\cdot x+D\cos 4x+F\sin 4x$.

б) $y'''+2y''=5+e^{-2x}$. **Отв.** $y=Axe^{-2x}+Bx^2$.

12. $y''+y=\dfrac{2}{\sin^3 x}$. **Отв.** $y=\dfrac{\cos 2x}{\sin x}+C_1\cos x+C_2\sin x$.

13. $\begin{cases}\dot{x}=3x+y,\\ \dot{y}=-x+y;\end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0$. **Отв.** $x=(1+t)\,e^{2t},\ y=-te^{2t}$.

14. $\begin{cases}\dot{x}=x-y,\\ \dot{y}=y-4x.\end{cases}$ **Отв.** $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t},\ y=2C_1e^{-t}-2C_2e^{3t}$.

15. $\begin{cases}\dot{x}=y+2e^t,\\ \dot{y}=x+t^2.\end{cases}$

Отв. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+te^t-t^2-2,\ y=C_1e^t-C_2e^{-t}+(t-1)\,e^t-2t$.

16. $\begin{cases}\dot{x}=-2x-3y,\\ \dot{y}=x+y.\end{cases}$ **Отв.** устойчивый фокус.

17. $\begin{cases}\dot{x}=-2x+x^2+y^2,\\ \dot{y}=-x+3y+3x^2.\end{cases}$ **Отв.** неустойчива.

Вариант 12

1. $dy=\left(y\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)dx$. $y=C\cos x+\sin x$.

2. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$. **Отв.** $\dfrac{\left(2+x^2\right)^2}{\left(3+y^2\right)^3}=C$.

3. а) $xyy'=y^2+2x^2$. **Отв.** $y^2=4x^2\ln Cx$.

б) $y'=\dfrac{x+3y+4}{3x-6}$. **Отв.** $(x-2)\,e^{\frac{3(y+2)}{2-x}}=C$

4. а) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x+1}{x}e^x$; $y(1)=e$. **Отв.** $y=e^x$.

б) $\left(2\ln y-\ln^2 y\right)dy=ydx-xdy$; $y(4)=e^2$. **Отв.** $x=\ln^2 y$.

5. $y' - y = 2xy^2$; $y(0) = 0{,}5$. **Отв.** $y = \dfrac{1}{2(1-x)}$.

6. $\left(3x^2 + 4y^2\right)dx + \left(8xy + e^y\right)dy = 0$. **Отв.** $x^3 + 4xy^2 + e^y = C$.

7. а) Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(0;-2)$ и обладающей свойством, что угловой коэффициент касательной в любой точке касания равен утроенной ординате точки касания. **Отв.** $y = -2e^{3x}$.

б) Найти закон движения материальной точки массы m по прямой OA под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной третьей степени расстояния точки $x = OM$ от неподвижного центра O.

Отв. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{k}{x^3}$; $x^2 = \dfrac{a^2}{C_1}(t + C_2)^2 + C_1$, $a^2 = \dfrac{k}{m}$.

8. $\{\sin x, \sin(x+2), \cos(x-5)\}$. **Отв.** линейно зависима.

9. а) $y'' - 3y' + 2y = 0$. **Отв.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

б) $y^{IV} + 16y'' = 0$. **Отв.** $y = C_1 + C_2x + C_3\cos 4x + C_4\sin 4x$.

в) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. **Отв.** $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$.

10. а) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.

Отв. $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{5}{4}x$.

б) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^{-x}(16 - 12x)$.

Отв. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{2x} + xe^{-x}$.

в) $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$. **Отв.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + e^{3x}\left(\dfrac{6}{37}\sin x - \dfrac{\cos x}{37}\right)$.

11. а) $y''' + y' = \sin x + 5x$. **Отв.** $y = x(A\cos x + B\sin x) + (Cx + D)\,x$.

б) $y'' + 16y = x\sin 4x + e^x$.

Отв. $y = [(Ax + B)\cos 4x + (Cx + D)\sin 4x]\,x + Fe^x$.

12. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$. **Отв.** $y = xe^x\ln|x| + (C_1 + C_2x)\,e^x$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 1$. **Отв.** $x = 2te^{-t}$, $y = 2e^{-t}\left(t + \dfrac{1}{2}\right)$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 8y - x, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ **Отв.** $x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t}$, $y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t, \\ \dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$

Отв.
$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\cos t$, $y = (C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t + t(\cos t + \sin t)$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ **Отв.** неустойчивый узел.

17. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2xy, \\ \dot{y} = 2x - 3y + 5x^4 + y^3. \end{cases}$ **Отв.** устойчива.

Вариант 13

1. $dy - (xy - y^2 x)\,dx = 0$. $y = \dfrac{1}{C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} + 1}$.

2. $x\sqrt{5 + y^2}\,dx + y\sqrt{4 + x^2}\,dy$. **Отв.** $\sqrt{4 + x^2} + \sqrt{5 + y^2} = C$.

3. а) $xdy\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) + xdx = y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)dx$. **Отв.** $Cx = e^{\cos\frac{y}{x}}$.

б) $y' = \dfrac{3y + 3}{2x + y - 1}$. **Отв.** $\dfrac{(y - x + 2)^3}{(y + 1)^2} = C$

4. а) $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}$; $y(1) = 1$. **Отв.** $y = 2(\ln x + 1) - x$.

б) $2(x + y^4)\,y' = y$; $y(-2) = -1$. **Отв.** $x = y^4 - 3y^2$.

5. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$; $y(0) = \sqrt{2}$. **Отв.** $y = \sqrt{\dfrac{2}{1 + 2x^2}}$.

6. $\left(2x - 1 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \dfrac{1}{x}\right)dy = 0$. **Отв.** $x^2 - x + \dfrac{y}{x} - y^2 = C$.

7. а) Найти кривую, обладающую тем свойством, что отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам. **Отв.** $y' = -\dfrac{y}{x}$; $xy = C$; $(C \neq 0)$.

б) Найти путь S, пройденный телом за время t, если его скорость пропорциональна проходимому пути и если тело проходит 100 м за 10 с и 200 м за 15 с. **Отв.** $\dfrac{dS}{dt} = kS$; $S = 25 \cdot 2^{t/5}$.

8. $\left\{\sqrt{x}, \sqrt{x+1}, \sqrt{x+2}\right\}$. **Отв.** линейно независима.

9. а) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$. **Отв.** $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$.

б) $y''' + 9y' = 0$. **Отв.** $y = C_1 + C_2 \sin 3x + C_3 \cos 3x$.

в) $y''' - 4y'' + 13y' = 0$. **Отв.** $y = C_1 + e^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x)$.

10. а) $y''' + 3y'' + 2y' = 2 - x^2$.

Отв. $y = -\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{3x}{4} + C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$.

б) $y''' - 2y'' + y' = xe^{2x}$.

Отв. $y = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{4}\right)e^{2x} + C_1 + C_2 e^{x} + C_3 x e^{x}$.

в) $y'' + 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x)$.

Отв. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \dfrac{2}{5} e^{x}(3\sin x - \cos x)$.

11. а) $y'' + 9y = x \sin 3x + x^2$;

Отв. $y = x\left[(Ax + B)\cos 3x + (Cx + D)\sin 3x\right] + Kx^2 + Mx + N$;

б) $y'' + 4y = e^{2x} + xe^{-2x}$. **Отв.** $y = Ae^{2x} + (Cx + B)\, e^{-2x}$;

12. $y'' + 4y = 2ctgx$.

Отв. $y = -x\cos 2x + \dfrac{\sin 2x}{2} \cdot \ln\left(2\sin^2 x\right) + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1$. **Отв.** $x = 2t\, e^{t}$, $y = 2t\, e^{t} + e^{t}$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

Отв. $x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, $y = e^{2t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t)$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + te^{2t}, \\ \dot{y} = 3x - y + e^{3t}. \end{cases}$

Отв. $x = \left(C_1 + C_2 t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{2} - 3e^{t}\right)e^{2t}$, $y = \left(C_1 - \dfrac{C_2}{3} + C_2 t + \dfrac{t^3}{2} - 2e^{t}\right)e^{2t}$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$ **Отв.** устойчивый фокус.

17. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y, \\ \dot{y} = -3y + e^x - 1. \end{cases}$ **Отв.** неустойчива.

Вариант 14

1. $dy = \left(\dfrac{y + y^2}{x - 1}\right) dx$. $y = \dfrac{x-1}{C + 1 - x}$.

2. $2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$. **Отв.** $\dfrac{(2 + x^2)}{1 + y^2} = C$.

3. а) $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$. **Отв.** $y = xe^{Cx}$.

б) $y' = \dfrac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$. **Отв.** $\ln|y - x| + 3\dfrac{x-1}{y-x} = C$

4. а) $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^2}$; $y(1) = 4$. **Отв.** $y = \dfrac{6}{x} - 2x$.

б) $y^3(y-1)\,dx + 3xy^2(y-1)\,dy - (y+2)\,dy = 0$; $y(0{,}25) = 2$.

Отв. $x = \dfrac{(y + 3\ln(y-1))}{y^3}$.

5. $xy' + y = y^2 \ln x$; $y(1) = 1$. **Отв.** $y = \dfrac{1}{\ln x + 1}$.

6. $(y^2 + y\sec^2 x)\,dx + (2xy + tgx)\,dy = 0$. **Отв.** $xy^2 + ytgx = C$.

7. а) Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

Отв. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$; $y = C(x^2 + y^2)$.

б) По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой T тела и температурой воздуха T_0. Если температура воздуха 20º С и тело в течение 20 мин охлаждается от 100º до 60º, то через какое время его температура понизится до 30º?

Отв. $t = 60$ мин; $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_0)$, $T = 20 + 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$.

8. $\{arctgx, arcctgx, 1\}$. **Отв.** линейно зависима.

9. а) $y'' - 5y' + 4y = 0$. **Отв.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$.

б) $y'' - 4y' + 13 = 0$. **Отв.** $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

в) $y^{IV} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4 = 0$.

Отв. $y = C_1 e^{x} + xC_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

10. а) $y''' + y' = x^2 - 1$. **Отв.** $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + x\left(\dfrac{x^2}{3} - 3\right)$.

б) $y''' - 4y'' = xe^{4x}$. **Отв.** $y = \dfrac{x^2 - x}{32} e^{4x} + C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x}$.

в) $y'' + y = 3\cos x$. **Отв.** $y = \dfrac{3}{2} x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

11. а) $y''' + 4y'' = x + e^{4x}$. **Отв.** $y = (Ax + B)\, x^2 + Ce^{4x}$.

б) $y'' - 9y = -xe^{-3x} + e^{3x}$. **Отв.** $y = x(Ax + B)\, e^{-3x} + xCe^{3x}$.

12. $y'' + y = 2ctgx$. **Отв.** $y = 2\sin x \cdot \ln\left(tg\dfrac{x}{2}\right) + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2$. **Отв.** $x = \dfrac{e^{-3t}}{2} + \dfrac{e^{-t}}{2},\ y = e^{3t} + e^{-t}$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

Отв. $x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t,\ y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + e^{t}. \end{cases}$

Отв. $x = (C_1 \cos t + C_2 \sin t - 1)\, e^{t},\ y = (C_1 \sin t - C_2 \cos t)\, e^{t}$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$ **Отв.** неустойчивый узел.

17. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y\cos y, \\ \dot{y} = 3x + 2y - y^3 e^{y}. \end{cases}$ **Отв.** неустойчива.

Вариант 15

1. $dy = (y\sin x + \sin x\cos x)\, dx = 0$. $y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$.

2. $y\left(4 + e^{x}\right) dy - e^{x} dx = 0$. **Отв.** $y^2 - 2\ln\left(4 + e^{x}\right) = C$.

3. а) $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$. **Отв.** $3arctg\dfrac{y}{x} - \ln\dfrac{x^2 + y^2}{x} = C$.

б) $y'=\dfrac{x-2y+3}{-2x-2}$. **Отв.** $(x+1)\,e^{\frac{2(y-1)}{x+1}}=C$.

4. а) $y'+\dfrac{2}{x}\,y=x^3$; $y(1)=-\dfrac{5}{6}$. **Отв.** $y=\dfrac{x^4}{6}-\dfrac{1}{x^2}$.

б) $2y^2dx+\left(x+e^{\frac{1}{y}}\right)dy=0$; $y(e)=1$. **Отв.** $x=e^{\frac{1}{y}}$.

5. $2y'+3y\cos x=(8+12\cos x)\,e^{2x}y^{-1}$; $y(0)=2$. **Отв.** $y=2e^x$.

6. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx-\dfrac{2y}{x^3}dy=0$. **Отв.** $\dfrac{x^2+y^2}{x^3}=C$.

7. а) Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

Отв. $y=Cx^2$.

б) Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которое пропорционально скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, скорость его через 5 с станет 8 м/с. Через какое время скорость его уменьшится до 1 м/с? **Отв.** $m\dfrac{dv}{dt}=-kv$, $t=-\dfrac{5\ln 10}{\ln 0{,}8}$ с.

8. $\{x^2+2x, 3x^2-1, x+4\}$. **Отв.** линейно независима.

9. а) $y''-9y'+8=0$. **Отв.** $y=C_1e^x+C_2e^{8x}$.

б) $y''+25y=0$. **Отв.** $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$.

в) $y^{IV}-4y'''+8y''-16y'+16y=0$.

Отв. $y=C_1e^{2x}+xC_2e^{2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$.

10. а) $y'''-2y'=x$. **Отв.** $y=-\dfrac{x^2}{2}+C_1+C_2e^{\sqrt{2}x}+C_3e^{-\sqrt{2}x}$.

б) $y'''+2y''=2e^{-x}$. **Отв.** $y=2e^{-x}+C_1+C_2x+C_3e^{-2x}$.

в) $y''+4y=3\sin 2x$. **Отв.** $y=-\dfrac{x}{2}\cos 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

11. а) $y''-16y=xe^{4x}-e^{-4x}$. **Отв.** $y=(Ax+B)xe^{4x}+Cxe^{-4x}$;

б) $y''+9y=x\sin 3x+e^x$. **Отв.** $y=x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin 3x]+Ee^x$.

12. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$. **Отв.** $y=x\sin x+\cos x\cdot\ln|\cos x|+C_1\cos x+C_2\sin x$.

13. $\begin{cases}\dot{x}=8y-x,\\ \dot{y}=x+y.\end{cases}$ $x(0)=2$, $y(0)=1$. **Отв.** $x=2e^{3t}$, $y=e^{3t}$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$ **Отв.** $x = (C_1 + C_2 t)\, e^t$, $y = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)\, e^t$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + t, \\ \dot{y} = 3x - 4y. \end{cases}$

Отв. $x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \dfrac{2}{3}t - \dfrac{5}{18}$, $\quad y = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{-3t} - \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{12}$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ **Отв.** седло.

17. $\begin{cases} \dot{x} = -9y + \dfrac{e^x - 1}{4}, \\ \dot{y} = \dfrac{x}{5} - \sin y. \end{cases}$ **Отв.** устойчива.

Литература

1. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 480 с.

2. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 720 с.

3. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М.: Наука, 1987. – 160 с.; М.: Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.

4. Громак, В. И. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В. И. Громак, Н. А. Лукашевич. – Минск : Университетское, 1990. – 160 с.

5. Жевняк, Р. М. Высшая математика / Дифференциальные уравнения. Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной: учеб. пособие / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ «Обозрение», 1997. – 570 с.

6. Краснов, М. Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие для втузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М.: Высш. шк., 1978. – 287 с.

7. Компьютеры и нелинейные явления: информатика и современное естествознание / под ред. А. А. Самарского. – М.: Наука, 1988. – 102 с.

8. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования / под ред. А. Л. Самарского. – М.: Наука, 1988. – 176 с.

9. Кудряшов, Н. А. Нелинейные волны на воде и теория солитонов / Н. А. Кудряшов // Инженерно-физический журнал. – 1999. – Т. 72, №6. – С. 1266–1278.

10. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. – М.: МИФИ, 2002. – 304 с.

11. Матвеев, Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. – Минск: Выш. шк., 1987. – 319 с.

12. Мун, Ф. Хаотические колебания / Ф. Мун. – М.: Наука, 1990. – 312с.

13. Олейник, О. А. Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и ее приложениях / О. А. Олейник // Соросовский образ. журнал – 1996, № 4. – С. 114–121.

14. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособие / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, С. А. Перестюк. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.

15. Филиппов, А.Т. Многоликий солитон / А. Т. Филиппов. – М.: Мир, 1986. – 224 с.

16. Bountis, T. C. On the complete and partial integrability of non-hamiltonian systems / T.C. Bountis [et al.] // Physica. – 1984. – Vol. 128A, № 1–2. – P. 268–288.

17. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – М.: Наука. – 1985. – Т. 2. – 576 с.

Содержание

Учебное издание

Карпук Андрей Андреевич
Цегельник Владимир Владимирович
Ранцевич Валентина Алексеевна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 10-ти частях

Часть 9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *Т. П. Андрейченко*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная верстка *Г. М. Кореневская, Е. С. Лаврецкий*

Подписано в печать 05.09.2008. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 9,88. Уч.-изд. л. 9,0. Тираж 400 экз. Заказ 110.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6