Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

по разделам высшей математики
«Интегральное исчисление функций одной переменной»
и «Функции многих переменных»
для студентов всех специальностей БГУИР
дневной формы обучения

Минск 2005

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73
К 65

Составители:
О.А. Феденя, Ж.А. Черняк

К 65 **Контрольные** работы по разделам высшей математики «Интегральное исчисление функций одной переменной» и «Функции многих переменных» для студентов всех специальностей БГУИР дневной формы обучения /Сост. О.А. Феденя, Ж.А. Черняк. – Мн.: БГУИР, 2005. – 58 с.: ил.
ISBN 985-444-841-Х

Данное издание содержит тесты для самопроверки с указаниями и подсказками, математические диктанты и контрольные работы по двум разделам высшей математики, которые изучаются студентами БГУИР во втором семестре. Может быть использовано как для самостоятельного контроля знаний, так и для проведения контрольных мероприятий на практических занятиях, для промежуточных экзаменов, коллоквиумов, итоговых контрольных работ.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1 я 73

ISBN 985-444-841-Х

СОДЕРЖАНИЕ

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. ПРАКТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Задание 1.1.1. Опираясь на определение первообразной для функции $f(x)$ на промежутке *X*, обоснуйте, может ли данная функция $F_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ являться первообразной для некоторой функции $f_i(x)$ на указанном промежутке. В случае отрицательного ответа приведите обоснование, в случае положительного – укажите ту функцию $f_i(x)$, первообразной для которой на промежутке *X* является функция $F_i(x)$:

1) $F_1(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \in [0; 1), \\ -x, & x \in [1; 2], \end{cases}$ $X = [0; 2]$;

2) $F_2(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [-1; 0], \\ -x - 1, & x \in (0; 1], \end{cases}$ $X = [-1; 1]$;

3) $F_3(x) = |x - 1|$, $X = [-1; 2]$;

4) $F_4(x) = |x - 1|$, $X = [-1; 1]$.

Правильные ответы представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Функция	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
Ответ	Нет: разрывна в точке $x = 1$	Нет: не имеет производной в точке $x = 0$	Нет: не имеет производной в точке $x = 1$	Первообразная для функции $f_4(x) = x - \frac{x^2}{2}$

Задание 1.1.2. Для функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ найдите ту первообразную, которая при $x = -1$ принимает значение, равное $\ln 2$:

2.1) $f_1(x) = 2x - 1$; 2.2) $f_2(x) = 2^x$; 2.3) $f_3(x) = \frac{1}{x}$.

Варианты ответов представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

№ ответа	Функция
1	$2^{x+1}+\ln 2$
2	$\ln\frac{\lvert x\rvert}{2}$
3	$x^2-x+\ln 2$
4	$\ln 2\lvert x\rvert$
5	$x^2-x-2+\ln 2$
6	$\frac{1}{2\ln 2}\left(2^{x+1}+2\ln^2 2-1\right)$

Правильные ответы представлены в табл. 1.3

Таблица 1.3

№ функции	2.1	2.2	2.3
№ ответа	5	6	4

Задание 1.1.3. Изучите таблицу основных неопределенных интегралов и вычислите интегралы от функций 3.1–3.4 приведением их к табличным интегралам с помощью тождественных преобразований:

3.1) $f(x)=\frac{1}{x-2}+\sin 3x$; 3.2) $f(x)=\frac{1}{9+x^2}-3^x$;

3.3) $f(x)=\frac{5}{\sin^2 x}-4\cos 2x$; 3.4) $f(x)=8x^7-\frac{5}{2}\sqrt{x^3}+\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}$.

Варианты ответов представлены в табл. 1.4–1.5

Таблица 1.4

№ ответа	№ функции	
	3.1	**3.2**
1	$(x-2)^2+3\cos 3x+C$	$-3\operatorname{arctg} x+3^x+C$
2	$\frac{x^2}{2}-2x-\frac{1}{3}\sin x+C$	$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+C$
3	$\ln\lvert x-2\rvert-\frac{1}{3}\cos 3x+C$	$3\operatorname{arctg} x-3^x\ln 3+C$
4	$(x-2)^{-2}-\frac{1}{3}\cos x+C$	$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x-e^x\ln 3+C$

Таблица 1.5

№ ответа	№ функции	
	3.1	**3.2**
1	$5\operatorname{ctg} x + 2\sin x + C$	$x^8 - \sqrt{x^5} + 7\arcsin x + C$
2	$-\frac{1}{5}\operatorname{ctg} x - 8\cos 2x + C$	$x^8 - \frac{5}{6}\sqrt{x^5} + 7\ln\left\|1 - x^2\right\| + C$
3	$-5\operatorname{ctg} x - 2\sin 2x + C$	$54x^6 - \frac{15}{2}\sqrt{x} + \frac{7}{2\sqrt{1-x^2}} + C$
4	$\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^3 x + 8\sin 2x + C$	$x^8 - 3\sqrt{x^3} + 7\operatorname{arctg} x + C$

Правильные ответы представлены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

№ функции	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**
№ ответа	3	2	3	1

Задание 1.1.4. Изучите метод подведения множителя под знак дифференциала и представьте в виде $\int F\left(f\left(x\right)\right)df\left(x\right)$ следующие интегралы:

4.1) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x + 2}}{x}dx$; 4.2) $\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2}dx$; 4.3) $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}^4 x \sin^2 x}$; 4.4) $\int \frac{xdx}{x^2 + 3}$.

Варианты ответов представлены в табл. 1.7.

Таблица 1.7

№ ответа	**Вид интеграла**
1	2
1	$\int \frac{d\left(\operatorname{ctg} x\right)}{\operatorname{ctg}^4 x}$
2	$\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+3\right)}{x^2 + 3}$
3	$\int \frac{d\left(x^2\right)}{x^2 + 3}$
4	$\int \left(\ln x + 2\right)^{\frac{1}{3}} d\left(\ln x + 2\right)$

Окончание табл. 1.7

1	2
5	$-\int \frac{d(\text{ctg}\, x)}{\text{ctg}^4 x}$
6	$\int \text{arctg}^2 x \cdot d(\text{arctg}\, x)$

Правильные ответы представлены в табл. 1.8.

Таблица 1.8

№ интеграла	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**
№ ответа	4	6	5	2

Задание 1.1.5. Используя результаты задания 1.1.4, вычислите интегралы 4.1–4.4.

Варианты ответов представлены в табл. 1.9.

Таблица 1.9

№ ответа	**№ интеграла**			
	4.1	**4.2**	**4.3**	**4.4**
1	$\frac{4}{3}(\ln x+2)^{3/4}+C$	$\text{arctg}\, x+C$	$\frac{1}{3\text{ctg}^3 x}+C$	$\frac{1}{x^2+3}+C$
2	$\frac{3}{4}(\ln x+2)^{4/3}+C$	$\text{arctg}^2\, x+C$	$\frac{5}{\text{ctg}^5 x}+C$	$\ln(x^2+3)+C$
3	$\frac{1}{3}\ln\lvert x+2\rvert+C$	$\frac{\text{arctg}^3 x}{3}+C$	$-\frac{3}{\text{ctg}^3 x}+C$	$\frac{1}{2(x^2+3)^2}+C$
4	$\frac{4}{3}\left(\ln^{\frac{4}{3}} x+2\right)+C$	$\text{arctg}^3\left(\frac{x}{3}\right)+C$	$-\frac{1}{3\text{ctg}^3 x}+C$	$\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+C$

Правильные ответы представлены в табл. 1.10.

Таблица 1.10

№ интеграла	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**
№ ответа	2	3	1	4

Задание 1.1.6. Запишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла, записанного в виде $\int u(x)\,dv(x)$. Ответьте на следующие вопросы:

а) Какую функцию следует выбирать в качестве $u(x)$?

б) Сколько раз нужно применять метод интегрирования по частям для нахождения (или для приведения к интегралам от рациональных или иррациональных выражений) следующих интегралов:

6.1) $\int P_n(x) e^{ax} dx$;

6.2) $\int P_n(x) \cos axdx$;

6.3) $\int P_n(x) \sin axdx$;

6.4) $\int P_n(x) \operatorname{arctg} xdx$;

6.5) $\int P_n(x) \arcsin xdx$;

6.6) $\int P_n(x) \ln xdx$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

Варианты ответов на вопрос «а» представлены в табл. 1.11.

Таблица 1.11

№ ответа	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Функция	$P_n(x)$	e^{ax}	$\cos ax$	$\sin ax$	$\operatorname{arctg} x$	$\arcsin x$	$\ln x$

Варианты ответов на вопрос «б» представлены в табл. 1.12.

Таблица 1.12

№ ответа	**1**	**2**	**3**	**4**
Количество операций интегрирования по частям	1	2	$\frac{n}{2}$	n

Правильные ответы представлены в табл. 1.13.

Таблица 1.13

Интегралы	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**6.4**	**6.5**
№ ответа на вопрос «а»	1	1	1	5	6
№ ответа на вопрос «б»	4	4	4	1	1

Задание 1.1.7. Найдите целую часть неправильной дроби

$$\frac{2x^6+8x^4+3}{x^3-2x^2+1}.$$

Варианты ответов представлены в табл. 1.14.

Таблица 1.14

№ ответа	**1**	**2**	**3**	**4**
Вид целой части	$2x^3-4x^2+3$	$2x^3+3$	$2x^3+4x^2+16x+30$	$2x^3$

Правильный ответ: 3.

Задание 1.1.8. Изучите способ представления правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей. Дроби 8.1–8.4 запишите в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

8.1) $\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$; 8.2) $\dfrac{x+1}{x^2(x+3)}$; 8.3) $\dfrac{2x-1}{(x+1)(x^2+x+1)}$;

8.4) $\dfrac{1-x}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$.

Варианты ответов представлены в табл. 1.15.

Таблица 1.15

№ дроби	**№ ответа**		
	1	**2**	**3**
8.1	$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{D}{x+2}$	$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$	$\frac{Ax+B}{x-1}+\frac{Dx+E}{x+2}$
8.2	$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{D}{x+3}$	$\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x+3}$	$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}$
8.3	$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x^2+x+1}$	$\frac{Ax+B}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$	$\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$

8.4	$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+D}{x^2+x+1}$	$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}+$ $+\frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}$	$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+$ $+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$

Правильные ответы представлены в табл. 1.16.

Таблица 1.16

№ дроби	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**
№ ответа	2	1	3	2

Задание 1.1.9. Изучив методы нахождения неопределенных коэффициентов, представьте функцию $\frac{3x^2+1}{(x+1)(x^2+1)^2}$ в виде суммы простейших дробей, определив все коэффициенты этого разложения.

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{x+1}+\frac{3x+1}{(x^2+1)^2}$; 2) $\frac{3x+2}{x+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}$; 3) $\frac{1}{x+1}+\frac{x^2-x^3}{(x^2+1)^2}$;

4) $\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{x-1}{(x^2+1)^2}$.

Правильный ответ: 4.

Задание 1.1.10. Изучите методы интегрирования простейших дробей I, II, III типов и вычислите интегралы:

10.1) $\int\frac{dx}{x-2}$; 10.2) $\int\frac{dx}{(x+2)^3}$; 10.3) $\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

10.4) $\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}dx$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 1.1.10

Интегрирование простейших дробей I, II, III типов:

I. $\int\frac{dx}{x+a}=\ln|x+a|+C.$

II. $\int \frac{dx}{(x+a)^k} = \frac{1}{(1-k)(x+a)^{k-1}} + C,\ \ k \ge 2, k \in Z.$

III. $\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}dx = \frac{m}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{(2n-mp)}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C,$

$p^2 - 4q < 0.$

Варианты ответов представлены в табл. 1.17.

Таблица 1.17

№ интеграла	№ ответа		
	1	**2**	**3**
10.1	$\frac{1}{2(x-2)^2}+C$	$\ln\lvert x-2\rvert+C$	$-\frac{1}{(x-2)^2}+C$
10.2	$\frac{1}{2(x+2)^2}+C$	$\frac{1}{4(x+2)^4}+C$	$-\frac{1}{2(x+2)^2}+C$
10.3	$\operatorname{arctg}(x+1)+C$	$\operatorname{arctg}\left(x^2+2x+2\right)+C$	$\operatorname{arctg}\left(x^2+1\right)+C$
10.4	$\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg}x+C$	$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+C$	$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)-$ $-2\operatorname{arctg}(x+1)+C$

Правильные ответы представлены в табл. 1.18

Таблица 1.18

№ интеграла	10.1	10.2	10.3	10.4
№ ответа	2	3	1	3

Задание 1.1.11. Вычислите интеграл $J = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx,$ используя для этого схему интегрирования рациональной дроби (**подсказка к заданию 1.1.11**).

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 1.1.11

Общая схема интегрирования рациональной дроби:

1. Если данная рациональная дробь $f(x)$ неправильная, выделите ее целую часть и представьте $f(x)$ как сумму целой части и правильной рациональной дроби.

2. Правильную дробь разложите в сумму простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами.

3. Найдите неопределенные коэффициенты в полученном разложении.

4. Проинтегрируйте почленно целую часть дроби $f(x)$ и каждую из простейших дробей.

Варианты ответов:

1) $J = \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{3}{4(x-1)} + \frac{5}{12}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C;$

2) $J = -\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C;$

3) $J = \frac{1}{8(x-1)^4} + \frac{1}{8(x-1)^3} + \frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C.$

Правильный ответ: 2.

Задание 1.1.12. Запишите универсальную тригонометрическую подстановку. В каких случаях она применяется? Вычислите интеграл $\int \frac{dx}{2+\cos x - 2\sin x}$ с помощью этой подстановки (см. **подсказку к заданию 1.1.12**).

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 1.1.12

Вычисление интегралов вида $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ можно свести к вычислению интегралов от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u.$ Тогда

$\sin x = \frac{2u}{1+u^2},\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx = \frac{2du}{1+u^2}$ и

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2},\ \frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2}.$$

Варианты ответов:

1) $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right|+C;$ 2) $\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C;$ 3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right)+C.$

Правильный ответ: 1.

Задание 1.1.13. Среди приведенных ниже интегралов вида $\int\sin^n x\cdot\cos^m x dx$, где m и n – рациональные числа, найдите те, у которых подынтегральная функция удовлетворяет условию:

а) $m+n$ — отрицательное четное число;

б) подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$;

в) подынтегральная функция является нечетной относительно $\cos x$;

г) подынтегральная функция содержит $\sin x$ и $\cos x$ в четных положительных степенях.

Укажите метод интегрирования в каждом из этих случаев:

13.1) $\displaystyle\int\frac{\cos^3 xdx}{\sin^5 x}$; 13.2) $\displaystyle\int\sin^2 x\cos^2 xdx$; 13.3) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^6 x}}dx$;

13.4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^7 x}}$; 13.5) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^3 x}$;

13.6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$; 13.7) $\displaystyle\int\frac{\cos^3 xdx}{\sin^4 x}$; 13.8) $\displaystyle\int\sin^4 xdx$.

Правильные ответы представлены в табл. 1.19.

Таблица 1.19

Условие	**а**	**б**	**в**	**г**
№ интеграла	13.1, 13.4	13.1, 13.3, 13.6	13.1, 13.5, 13.7	13.2, 13.8
Метод интегрирования	Замена $t=\operatorname{tg}x$	Замена $t=\cos x$	Замена $t=\sin x$	Использование формул понижения степени $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

Задание 1.1.14. Повторите, какие иррациональные функции относятся к классам:

A) – дробно-линейных иррациональностей;

B) – квадратичных иррациональностей;

C) – дифференциальных биномов.

Отнесите к соответствующему классу A, B, C каждый из следующих интегралов:

14.1) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$; 14.2) $\int \frac{\sqrt[3]{2x-1}-5}{\sqrt{2x-1}+4}dx$;

14.3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$; 14.4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$; 14.5) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}}$;

14.6) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; 14.7) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-25}}$.

Правильные ответы представлены в табл. 1.20.

Таблица 1.20

Класс функций	**A**	**B**	**C**
№ интеграла	14.2, 14.6	14.1, 14.3, 14.7	14.1, 14.3, 14.4, 14.5, 14.7

Задание 1.1.15. Изучите, какими подстановками рационализируются (сводятся к интегралам от рациональных функций) интегралы из классов A, B, C, описанных в **задании 1.1.14.** Среди приведенного ниже множества вариантов отберите те подстановки, которые рационализируют интегралы 14.1–14.7.

Варианты ответов:

1) $\frac{1+x^3}{x^3}=t^3$; 2) $2x-1=t^2$; 3) $x=t^4$;

4) $\sqrt{x}+1=t^2$; 5) $x=2\sin t$; 6) $x=\frac{5}{\cos t}$;

7) $2x-1=t^6$; 8) $x=3\mathrm{tg}t$; 9) $x=t^2$;

10) $x=2\cos t$; 11) $\frac{x^2-25}{x^2}=t^2$; 12) $9+x^2=t^2$; 13) $4-x^2=t^2$.

Правильные ответы представлены в табл. 1.21.

Таблица 1.21

№ интеграла	**14.1**	**14.2**	**14.3**	**14.4**	**14.5**	**14.6**	**14.7**
№ подстановки	5, 10, 13	7	8, 12	4	1	3	6, 11

Задание 1.1.16. Повторите определение определенного интеграла и его свойства. Запомните формулу Ньютона–Лейбница – основную формулу для вычисления определенных интегралов. С ее помощью вычислите следующие интегралы:

16.1) $\int\limits_0^3 2^x\,dx$; 16.2) $\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$; 6.3) $\int\limits_{e^2}^{e^3} \dfrac{dx}{x\ln x}$;

16.4) $\int\limits_0^{\pi/4} \cos^2 x dx$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{\pi}{8}$; 2) $\ln 3/2$; 3) 2; 4) $7\ln 2$; 5) 1; 6) $\dfrac{7}{\ln 2}$;

7) $\dfrac{\pi+\sqrt{2}}{8}$; 8) 0; 9) $\dfrac{\pi+2}{8}$; 10) $\dfrac{8}{\ln 2}$; 11) $2\ln 3$; 12) $\ln 2/3$.

Правильные ответы представлены в табл. 1.22

Таблица 1.22

№ интеграла	16.1	16.2	16.3	16.4
№ ответа	6	5	2	9

Задание 1.1.17. Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле. При каких условиях она справедлива? Опираясь на эту формулу, сделайте в интеграле $\int\limits_0^5 \dfrac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$ замену переменной $\sqrt{3x+1}=t$ и определите, какой вид примет исходный интеграл в результате этого преобразования.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{2}{9}\int\limits_0^5 \left(t^2-1\right)dt$; 2) $\dfrac{2}{3}\int\limits_1^4 \left(t^2-1\right)dt$; 3) $\dfrac{1}{3}\int\limits_1^4 \dfrac{t^2-1}{t}dt$; 4) $\dfrac{2}{9}\int\limits_1^4 \left(t^2-1\right)dt$.

Правильный ответ: 4.

Задание 1.1.18. Повторите определения несобственных интегралов по бесконечному промежутку. Среди приведенных ниже вариантов ответов выберите те, которые соответствуют определениям несобственных интегралов 18.1–18.3:

18.1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$; 18.2) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$; 18.3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Варианты ответов:

1) $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$; 2) $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{B} f(x)\,dx$; 3) $\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{b} f(x)\,dx$;

4) $\lim\limits_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int\limits_{A}^{B} f(x)\,dx$, где $A\to-\infty$ и $B\to+\infty$ независимо друг от друга;

5) $\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{a}^{B} f(x)\,dx$;

6) $\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{c} f(x)\,dx+\lim\limits_{B\to+\infty}\int\limits_{c}^{B} f(x)\,dx$, где c — любая точка из интервала $(-\infty,+\infty)$.

Правильные ответы представлены в табл. 1.23.

Таблица 1.23

№ интеграла	**18.1**	**18.2**	**18.3**
№ ответа	5	3	6

Задание 1.1.19. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} x\cos x\,dx$ (или установите его расходимость).

Варианты ответов: 1) 0; 2) расходится; 3) 1; 4) $\frac{\pi}{2}+1$.

Правильный ответ: 2.

Задание 1.1.20. Дайте определение несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ от неограниченной функции в том случае, если:

1) $f(x)$ непрерывна на промежутке $(a,b]$ и неограниченна в правой окрестности точки $x=a$;

2) $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b)$ и неограниченна в левой окрестности точки $x=b$;

3) $f(x)$ непрерывна на объединении промежутков $[a,c)\cup(c,b]$ и неограниченна в окрестности точки $x=c$.

В каких случаях эти интегралы сходятся и расходятся?

Вычислите интеграл $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2+x-6}$ (или установите его расходимость).

Варианты ответов: 1) $\ln 14$; 2) $\frac{1}{5}\ln\frac{8}{7}$; 3) расходится; 4) $\frac{1}{5}\ln\frac{1}{14}$.

Правильный ответ: 3.

Задание 1.1.21. Определите тип следующих интегралов:

21.1) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^3-3}$; 21.2) $\int \frac{dx}{x^3-3}$; 21.3) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3-3}$;

21.4) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3-3}$; 21.5) $\int\limits_{-2}^1 \frac{dx}{x^2-3}$.

Варианты ответов:

1) неопределенный интеграл;

2) определенный интеграл;

3) несобственный интеграл по бесконечному промежутку;

4) несобственный интеграл от неограниченной функции.

Правильные ответы представлены в табл. 1.24.

Таблица 1.24

№ интеграла	**21.1**	**21.2**	**21.3**	**21.4**	**21.5**
№ ответа	4	1	2	3	4

Задание 1.1.22. Изучите признаки сходимости несобственных интегралов. Используйте подсказки 1 и 2 к заданию 1.1.22 и определите, сходятся или расходятся следующие несобственные интегралы:

22.1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+3}{x^3+x^2+4}dx$; 22.2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^5+3}}$; 22.3) $\int\limits_0^2 \frac{\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{e^x-1}dx$;

22.4) $\int\limits_0^1 \frac{\sin xdx}{x^3+x^5+12x\sqrt{x}}$.

ПОДСКАЗКА 1 К ЗАДАНИЮ 1.1.22

Пусть на промежутке $[a,+\infty)$ непрерывная функция $f(x)>0$ и удовлетворяет условию

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{C}{x^{\alpha}},$$

где C – положительная константа.

Тогда несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \le 1$.

ПОДСКАЗКА 2 К ЗАДАНИЮ 1.1.22

Пусть функция $f(x) > 0$, непрерывна на $(a, b]$ и в точке a неограниченна, причем

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} \frac{C}{(x-a)^{\alpha}},$$

где C – положительная константа.

Тогда несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ сходится, если $\alpha < 1$, и расходится, если $\alpha \ge 1$.

Правильные ответы: 22.1, 22.3, 22.4 – сходятся, 22.2 – расходится.

Задание 1.1.23. Изучите формулы для вычисления площадей фигур с помощью определенных интегралов.

Опираясь на подсказки 1–3 к заданию 1.1.2.3, установите, какими интегралами выражаются площади фигур, изображенных на рис. 1.1. – 1.7.

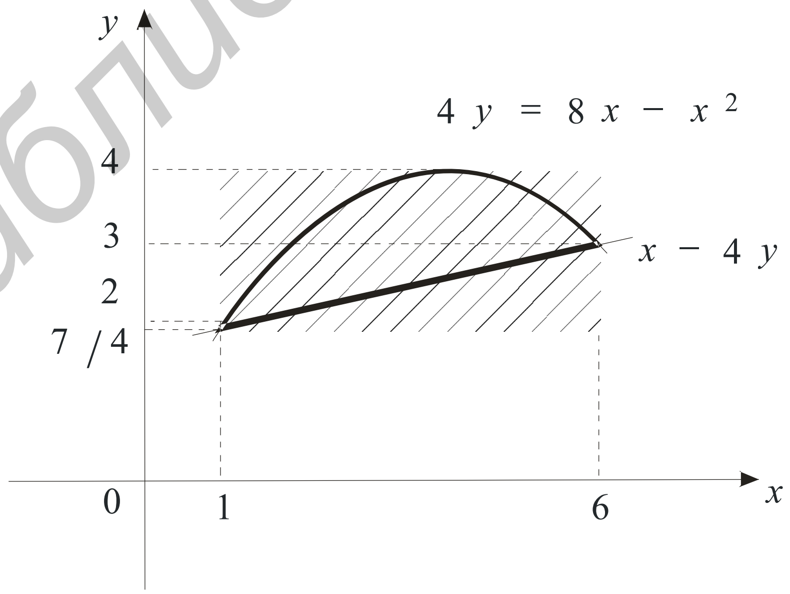

Рис. 1.1

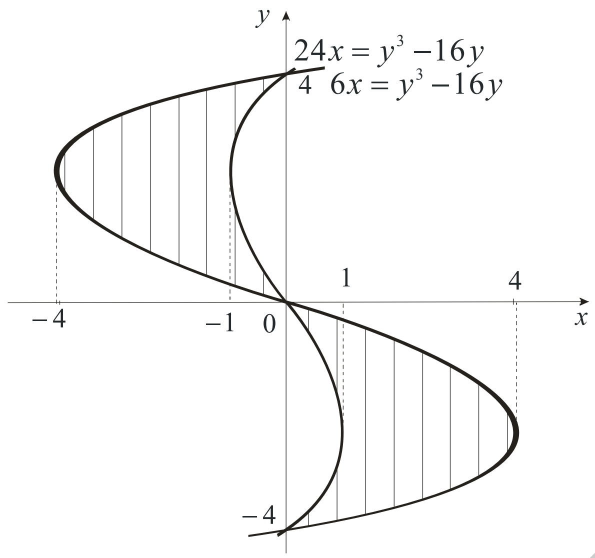

Рис. 1.2

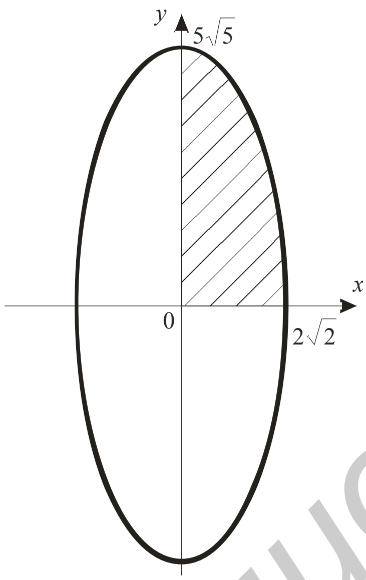

Рис. 1.3

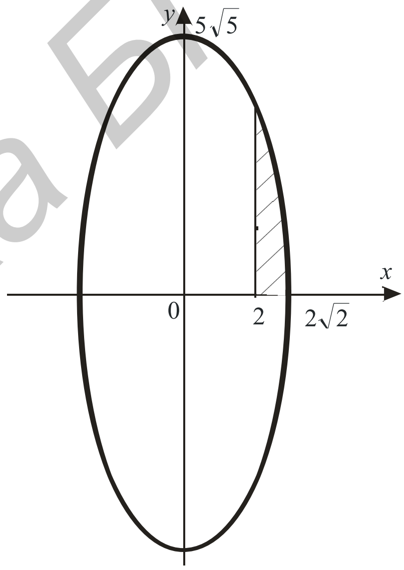

Рис. 1.4

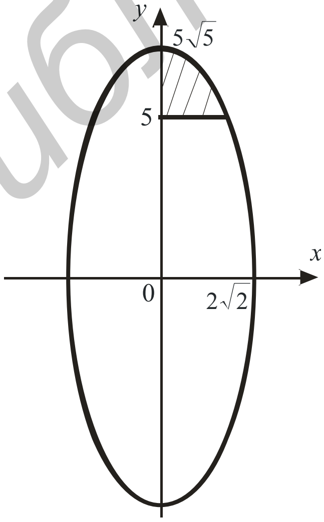

Рис. 1.5

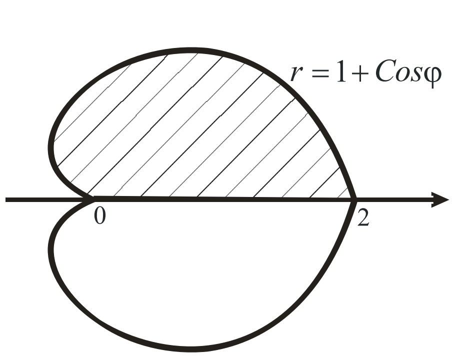

Рис. 1.6

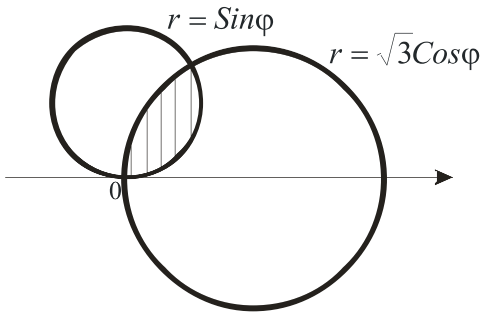

Рис. 1.7

ПОДСКАЗКА 1 К ЗАДАНИЮ 1.1.23

Если фигура ограничена прямыми $x = a, x = b$ и кривыми $y = f(x), y = g(x)$, где $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a; b]$, то ее площадь S можно найти по формуле

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

Если фигура ограничена прямыми $y = c, y = d$ и кривыми $x = \varphi(y), x = \psi(y)$, где $\varphi(y) \geq \psi(y)$ для $y \in [c; d]$, то ее площадь S находится по формуле

$$S = \int_c^d \left(\varphi(y) - \psi(y)\right)dy.$$

ПОДСКАЗКА 2 К ЗАДАНИЮ 1.1.23

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $x = a,\ x = b\ (a < b)$, отрезком $[a; b]$ оси Ox и кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta], \text{ где } a = x(\alpha), b = x(\beta),$$

то ее площадь S выражается интегралом $S = \int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt.$

ПОДСКАЗКА 3 К ЗАДАНИЮ 1.1.23

Площадь S криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$ и кривой $r = r(\varphi)$, заданной уравнением в полярной системе координат, определяется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Варианты ответов: 1) $S = 20\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt$; 2) $S = 20\int_0^{2\sqrt{2}} \sin^2 t\,dt$;

3) $S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos\varphi)^2\,d\varphi$; 4) $S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)\,d\varphi$; 5) $S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)^2\,d\varphi$;

6) $S = 20\int_0^{\pi/4} \sin^2 t\,dt$; 7) $S = 20\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$; 8) $S = 20\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$;

9) $S = 20\int_5^{5\sqrt{2}} \cos^2 t\,dt$; 10) $S = \frac{1}{4}\int_{-4}^{0} (y^3 - 16y)\,dy$; 11) $S = \frac{1}{4}\int_1^6 (7x - x^2 - 6)\,dx$;

12) $S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \sin^2\varphi\,d\varphi + \frac{3}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2\varphi\,d\varphi$; 13) $S = \frac{1}{8}\int_{-4}^{0} (y^3 - 16y)\,dy + \frac{1}{8}\int_0^4 (16y - y^3)\,dy$.

Правильные ответы представлены в табл. 1.25.

Таблица 1.25

№ рисунка	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8
№ ответа	11	10, 13	1	6	8	5	12

Задание 1.1.24. К каким интегралам сводится вычисление длин дуг следующих кривых (см. **подсказку к заданию 1.1.24**):

24.1) $y = x^{3/2}$, $x \in [0; 4]$;

24.2) $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ (одна арка циклоиды);

24.3) $r = a\varphi$, $a > 0$ (один виток спирали Архимеда)?

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 1.1.24

Длина l дуги кривой $y = f(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ выражается интегралом

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

то ее длина l вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt.$$

Если кривая задана уравнением $r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$, в полярной системе координат, то ее длина l может быть вычислена по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}d\varphi.$$

Варианты ответов: 1) $l = \int_0^4 \sqrt{1 + x^3}dx$; 2) $l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx$;

3) $l = 4\int_0^4 \sqrt{2 + t^2 - 2t\sin t - \cos t}dt$; 4) $l = 4\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}dt$;

5) $l = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi$; 6) $l = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2}d\varphi$.

Правильные ответы представлены в табл. 1.26.

Таблица 1.26

№ задачи	**24.1**	**24.2**	**24.3**
№ ответа	2	4	6

1.2. Математический диктант

«Техника вычисления неопределённых интегралов»

Вариант 1

Вычислить неопределенные интегралы 1–8, 10:

1. $\int \frac{x^3 - 4x + 5}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx$.

2. $\int \sqrt{1 - \sin x} dx$.

3. $\int \frac{dx}{chx}$.

4. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$.

5. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} dx$.

6. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx$.

7. $\int arctg(1 - \sqrt{x}) dx$.

8. $\int \sin^2 6x \sin^2 3x dx$.

9. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интегралов

$$I_n = \int cos^n x dx,\ n \geq 2,\ n \in N.$$

10. $\int (\frac{x - 1}{x^2 + 1})^2 e^x dx$.

Вариант 2

Вычислить неопределенные интегралы 1–8, 10:

1. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$.

2. $\int \frac{dx}{shx}$.

3. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$.

4. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$.

5. $\int \frac{2x^4-3x^3-21x^2-26}{\left(x^2-5x+4\right)(x+3)}dx$.

6. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

7. $\int \frac{2tgx+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$.

8. $\int \sin^2 x\cdot\cos^2 3xdx$.

9. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интегралов

$$I_n=\int \frac{dx}{sin^n x}, \quad n\geq 3,\ n\in N.$$

10. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin^2 x}e^x dx$.

Вариант 3

Вычислить неопределенные интегралы 1–8, 10:

1. $\int \sqrt{1+\sin 2x}dx$.

2. $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}dx$.

3. $\int \frac{x^3+x^2}{(x-2)\left(2x^2-x+2\right)}dx$.

4. $\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-19}dx$.

5. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$.

6. $\int \left(2^{2x-1}+3^{-x/3}\right)^2 dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

8. $\int \frac{dx}{2-e^x-e^{2x}}$.

9. Показать, что интеграл $\int \frac{x\sin x-\cos x}{x^2}dx$ не выражается через элементарные функции, представив его как комбинацию элементарных функций и «неберущегося» интеграла $S\,i(x)=\int \frac{\sin x}{x}dx$.

10. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

Вариант 4

Вычислить неопределенные интегралы 1–8, 10:

1. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$.

2. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$.

3. $\int \frac{x^4-4x^3+5x^2+10x-10}{x^3-3x^2+x+5}dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x^3} \cdot x^3}$.

5. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^{10} x} dx$.

6. $\int \frac{2^{3x+1} - 3^{4x-1}}{6^{x+2}} dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{14-4x-2x^2}}$.

8. $\int ch^3 x \quad \sqrt[3]{sh^2 x} dx$.

9. Выразить через интегральный синус $Si(x) = \int \frac{sin\, x}{x} dx$ интеграл

$$\int \sin x \cdot Si(x) dx;$$

10. $\int \frac{dx}{x^{11} + 2x^6 + x}$.

1.3. Математический диктант «Геометрические приложения определенного интеграла»

Вариант 1

Изобразить плоскую область и вычислить её площадь:

1. $x^2 + 4x + y^2 - 6x \le 0$.

2. $7x^2 + 2y^2 \le 5$.

Изобразить кривую, заданную параметрическими (полярными) уравнениями, и найти площадь области, ограниченной кривой:

3. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

4. $r = 2\sqrt{2}\cos 2\varphi.$

5. Изобразить кривую $y = \arcsin x$ и написать интеграл (не вычисляя его), выражающий длину этой кривой.

Изобразить кривые, заданные параметрическими (полярными) уравнениями, и вычислить их длины:

6. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

7. $r = \sqrt{5}\,(1 + \cos\varphi).$

Найти объемы тел, заданных ограничивающими их поверхностями:

8. $x = 0, \;\; y = 0, \;\; z = 0, \;\; 2x + 3y + 4z = 12.$

9. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 12.$

Лепесток, образованный кривыми y_1 и y_2, вращается вокруг а) оси Ox; б) оси Oy. Вычислить объемы получающихся тел вращения.

10. $y_1 = x^2, \;\; y_2 = x^3.$

Вариант 2

Изобразить плоскую область и вычислить её площадь:

1. $y^2 + 10y + x^2 - 2x \le 0.$

2. $3x^2 + 4y^2 \le 2.$

Изобразить кривую, заданную параметрическими (полярными) уравнениями, и найти площадь области, ограниченной кривой:

3. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{3}\sin^3 t. \end{cases}$

4. $r = 2\sin 3\varphi.$

5. Изобразить кривую $y = \arccos x$ и написать интеграл (не вычисляя его), выражающий длину этой кривой.

Изобразить кривые, заданные параметрическими (полярными) уравнениями, и вычислить их длины:

6. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \le t \le 2\pi.$

7. $r = 4(1 - \cos\varphi)$.

Найти объемы тел, заданных ограничивающими их поверхностями:

8. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + 2y + 6z = 18$.

9. $x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 18$.

Лепесток, образованный кривыми y_1 и y_2, вращается вокруг а) оси Ox; б) оси Oy. Вычислить объемы получающихся тел вращения.

10. $y_1 = x^4$, $y_2 = \sqrt{x}$.

1.4. Контрольная работа «Определенный интеграл и его приложения»

Вариант 1

1. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:
$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $I_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

2. Оценить интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 3\cos^2 x}$.

3. Найти $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} (1 - \cos t^2)\, dt}{3^{\sqrt{x^5}} - 1}$.

4. Найти интеграл $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = \ln(1+x), \quad y = -xe^{-x}, \quad x = 1.$$

6. Найти длину кривой $r = a\cos^3\dfrac{\varphi}{3}, a > 0$.

7. Фигура ограничена дугой параболы $y = 4 - x^2$, отрезком [-2; 0] оси Ox и отрезком прямой $y = 3x$. Найти объем тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси Ox.

8. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x} - 1}.$$

Вариант 2

1. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:
$I_1 = \int_1^2 \dfrac{dx}{3 + x^2}$ или $I_2 = \int_1^2 \dfrac{dx}{1 + x^2}$.

2. Оценить интеграл $\int_1^e \dfrac{dx}{1 + \ln x}$.

3. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}dt}{3x^3}$.

4. Найти интеграл $\int_1^9 x\sqrt[3]{1 - x}dx$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = arctg\sqrt{x}, \quad y + x^2 = 0, \quad x = 1.$$

6. Найти длину кривой: $x = \int_1^t \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi, \quad y = \int_1^t \dfrac{\cos\varphi}{\varphi}d\varphi, \quad 1 \le t \le t_0$.

7. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми: $y = x, \quad y = \dfrac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2$.

8. Определить, при каком значении параметра α сходится интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{arctg^2 x \cdot \sin 1/x}{(x^2 + \sqrt{x} + 1)^\alpha}dx.$$

Вариант 3

1. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:
$I_1 = \int_1^2 \sqrt{1 + x^2}dx$ или $I_2 = \int_1^2 xdx$.

2. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3+2^x}$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \arcsin^2 t\,dt}{x^2(e^x-1)}$.

4. Найти интеграл $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей кривой:

$$x = t^2 - a^2, \quad y = t^3 - a^2 t, \quad a > 0.$$

6. Найти длину дуги кривой $3y^2 = x(x-1)^2$ между точками пересечения ее с осью Ox.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = -1, \quad y = \pm 4.$$

8. Определить, при каком значении параметра α сходится интеграл

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{\sin^{2\alpha} 1/x}{\sqrt[3]{x^2}\, arctgx}\,dx.$$

Вариант 4

1. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

$I_1 = \int\limits_{1/e}^{e} \ln x dx$ или $I_2 = \int\limits_1^e \ln x dx$.

2. Оценить интеграл $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{7-3^x}$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_x^0 \sin t^2 dt}{2x^2 tgx}$.

4. Найти интеграл $\int\limits_1^2 \frac{x\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах:

$$r^2 = 2\sin 2\varphi, \quad r = 1\,(r \ge 1).$$

6. Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, заключенной между прямыми $y = 1$ и $y = 2$.

7. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми: $y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad y=0, \quad 0 \le x \le \pi/2$.

8. Определить, при каком значении параметра α сходится интеграл

$$\int_5^{+\infty} \frac{arctg\,\frac{1}{x^2}}{(x^3+4\sqrt[3]{x})^\alpha}dx.$$

Вариант 5

1. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:
$I_1=\int_{1/3}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ или $I_2=\int_{1/3}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

2. Оценить интеграл $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{dx}{2+\cos x}$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{0} tgt dt}{2x^3\arcsin 2x}$.

4. Найти интеграл $\int_0^1 \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+1}dx$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой:
$$x=a(2\cos t-\cos 2t), \quad y=a(2\sin t-\sin 2t)\ (a>0).$$

6. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r=a\sin^4\frac{\varphi}{4}, \quad a>0$.

7. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми: $y=tgx^2, \quad y=0, \quad x=\sqrt{\pi/3}$.

8. Определить, при каком значении параметра α сходится интеграл

$$\int_0^{1/2}\frac{arctgx}{(x-\sqrt{x})^{2\alpha}}dx.$$

Вариант 6

1. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:
$I_1=\int_0^1 3^{x^2}dx$ или $I_2=\int_0^1 3x^{x^3}dx$.

2. Оценить интеграл $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_{2x}^{0}(1-\cos t)dt}{x\ln(1+4x^2)}$.

4. Найти интеграл $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\dfrac{2x^7-x^5+2x^3-x+1}{\cos^2 x}dx$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах:

$$r^2=2\sin 2\varphi,\quad r=1\,(r\ge 1).$$

6. Длина первой арки циклоиды $x=6\,(t-\sin t),\quad y=6\,(1-\cos t)$ равна 48. Найти прямую $y=const$, которая делит ее на три равные части.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{15}=z,\quad z=2.$$

8. Определить, при каком значении параметра α сходится интеграл

$$\int\limits_0^2\frac{arctg^{\alpha}x}{(x^2+2)(e^x-1)^2}dx.$$

Вариант 7

1. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше: $I_1=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3 xdx$ или $I_2=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^7 xdx$.

2. Оценить интеграл $\int\limits_{1/e}^{e}\dfrac{dx}{5-\ln x}$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int\limits_0^{\sqrt{x}}\arcsin t^2dt}{tg(2\sqrt{x^3})}$.

4. Найти интеграл $\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y=1/x,\quad y=\frac{10}{3}-x,\quad x\ge 1.$$

6. Найти длину дуги кривой: $x=e^t,\quad y=e^{-t},\quad z=\sqrt{2}t,\quad 0\le t\le t_0$.

7. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми: $y=\sqrt{x}\cdot e^{-x},\quad y=0,\quad x=a$.

8. Определить, при каком значении параметра α сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{(1-\cos x)^{2\alpha}}{3x^2+5x^4}\,dx\,.$$

Вариант 8

1. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

$$I_1=\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{7+x^2}} \quad \text{или} \quad I_2=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{7+x^2}}\,.$$

2. Оценить интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{2+x^2}$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{3x} \ln(1+2t)\,dt}{5x^2}$.

4. Найти интеграл $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах:

$$r=2-\cos\varphi, \quad r=\cos\varphi.$$

6. Найти длину дуги кривой: $x=6-3t^2, \quad y=4t^3 \ (x\ge 0)$.

7. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $x=1$, $x=3$, если площадь его поперечного сечения обратно пропорциональна квадрату расстояния сечения от начала координат, а при $x=2$ площадь сечения равна 27.

8. Определить, при каком значении параметра α сходится интеграл

$$\int_3^{+\infty} \frac{\arcsin\frac{1}{x}}{x\cdot \ln^{2\alpha}(1+\frac{1}{x})}\,dx\,.$$

Вариант 9

1. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

$$I_1=\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}dx \quad \text{или} \quad I_2=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}dx\,.$$

2. Оценить интеграл $\int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{\sqrt[3]{x}} tg^3 t\,dt}{e^{\sqrt[3]{x^4}}-1}$.

4. Найти интеграл $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} (x^4 \sin 5x + x^2 \cos\frac{x}{3} + tg^3 x)\, dx$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой:

$$x = 12\cos t + 5\sin t, \quad y = 5\cos t - 12\sin t.$$

6. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах: $r = 2(1+\cos\varphi), \quad r \le 1$.

7. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми: $y = e^x + 6, \quad y = e^{2x}, \quad x = 0$.

8. Определить, при каком значении параметра α сходится интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{arctgx^2}{x\cdot \ln^\alpha(1+x)}\,dx.$$

Вариант 10

1. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:
$I_1 = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x}$ или $I_2 = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

2. Оценить интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{3+2\sin^2 x}$.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} (2^t - 1)dt}{x^3 \arcsin x}$.

4. Найти интеграл $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах: $r = 1 + 2\cos\varphi$.

6. Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ между точками пересечения ее с осью Ox.

7. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми: $y = \arcsin x, \quad y = 0, \quad x = 1$.

8. Определить, при каком значении параметра α сходится интеграл

$$\int\limits_e^{+\infty} \frac{x^2 + 2x^4 + 1}{(e^{1/x^2} - 1)^\alpha}\,dx.$$

2. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ
2.1. ПРАКТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Задание 2.1.1. Для функции $z(x, y) = \dfrac{x - 2y}{2x - y}$ вычислите:

1.1) z (3; 1); 1.2) z (1; 3); 1.3) z (1; 2); 1.4) z (a; a); 1.5) z (a;-a)

Варианты ответов: 1) 1; 2) 0; 3) -1; 4) значение не определено; 5) 2; 6) -5; 7) 0,2; 8) 5.

Правильные ответы представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

№ задачи	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**
№ ответа	7	8	4	3	1

Задание 2.1.2. Опираясь на **подсказку к заданию 2.1.2**, для функции $z = x^2 - xy - y^2$ вычислите частные приращения по переменной $x\left(\Delta_x z\right)$, по переменной $y\left(\Delta_y z\right)$ и полное приращение по обеим переменным $\left(\Delta z\right)$, если x изменяется от $x_0 = 2$ до $x_1 = 2{,}1$, а y изменяется от $y_0 = 2$ до $y_1 = 1{,}9$. В ответ запишите тройку чисел $\left(\Delta_x z, \Delta_y z, \Delta z\right)$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.2

Частные приращения $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ по переменным x и y соответственно вычисляются по формулам

$$\Delta_x z = z\left(\Delta x, y_0\right) = z\left(x_1, y_0\right) - z\left(x_0, y_0\right),$$

$$\Delta_y z = z\left(x_0, \Delta y\right) = z\left(x_0, y_1\right) - z\left(x_0, y_0\right).$$

Полное приращение Δz по совокупности переменных x, y вычисляется по формуле

$$\Delta z = z\left(\Delta x, \Delta y\right) = z\left(x_1, y_1\right) - z\left(x_0, y_0\right).$$

Варианты ответов

1) (0,2; 0,03; 0,1); 2) (0,21; 0,1; 0,81); 3) (-0,21; -0,1; 0,03); 4) (0,21; 0,59; 0,81); 5) (-0,2; -0,69; -0,03).

Правильный ответ: 4.

Задание 2.1.3. Дайте определение частной производной функции $z(x, y)$ по переменным x и y. Изучите правила вычисления частных производных функций двух переменных и найдите определитель $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$, если $\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

Варианты ответов: 1) φ; 2) 1; 3) r; 4) 0; 5) -1.

Правильный ответ: 3.

Задание 2.1.4. Повторите определение дифференцируемой в точке $M_0(x_0; y_0)$ функции $z(x, y)$. Что такое полный дифференциал функции? По какой формуле он вычисляется и как используется в приближенных вычислениях?

Воспользуйтесь **подсказкой к заданию 2.1.4**, чтобы для данных функций $z(x, y)$ и указанной для каждой из них пары точек M_0 и M_1

4.1) $z = x^y$, $M_0(1; 3)$, $M_1(1{,}02; 3{,}01)$;

4.2) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M_0(2; 3)$, $M_1(2{,}1; 2{,}5)$

вычислить:

1) $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в произвольной точке $M(x; y)$;

2) полный дифференциал dz в произвольной точке;

3) $dz(M_0)$, где M_0 – данная точка;

4) приближенное изменение функции, вызванное переходом от точки M_0 к точке M_1, заменяя приращение $\Delta z(M_0, M_1)$ полным дифференциалом $dz(M_0)$;

5) приближенное значение функции в точке M_1.

В ответ запишите тройки чисел $\left(z'_x(M_0), z'_y(M_0), \Delta z(M_0, M_1)\right)$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.4

Функция $z = z(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0; y_0)$, если в некоторой окрестности этой точки полное приращение $\Delta z(M_0, M)$ можно представить в виде $\Delta z(M_0, M) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, где $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, точка $M(x; y)$ принадлежит указанной окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$.

Полным дифференциалом функции $z = z(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy, т. е. $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = z(x, y)$ в точке M_0 вычисляется по формуле

$$dz(M_0) = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}dy.$$

Для дифференцируемой в точке $M_0(x_0; y_0)$ функции $z = z(x, y)$ справедливы приближенные равенства

$$\Delta z(M_0, M_1) \approx dz(M_0) \quad \Leftrightarrow \quad z(M_1) \approx z(M_0) + dz(M_0),$$

где $M_1(x_1; y_1)$ – точка, лежащая в достаточно малой окрестности точки M_0.

Варианты ответов:
1) (3; 1; 0,06); 2) (-3; 0; 0,1); 3) (3; 0; 0,06);
4) $\left(-\frac{3}{13}; -\frac{2}{13}; 1\right)$; 5) $\left(\frac{3}{13}; \frac{2}{13}; 0,1\right)$; 6) $\left(-\frac{3}{13}; \frac{2}{13}; -0,1\right)$.

Правильные ответы представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

№ функции	4.1	4.2
№ ответа	3	6

Задание 2.1.5. Приведите определение и напишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Используя подсказку к заданию 2.1.5, составьте уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в указанной точке:

5.1) $z = xy$, $M_0(1; 0; 0)$;

5.2) $z = x + y^2$, $M_0(0; 1; 1)$;

5.3) $z = e^{x+y}$, $M_0(1; -1; 1)$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.5

Касательной плоскостью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, называется плоскость, проходящая через точку M_0 и содержащая касательные ко всем кривым, проведенным на поверхности через точку M_0.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Варианты ответов:
1) $z = x$; 2) $z = y$; 3) $z = x + y + 1$; 4) $z = x + y$; 5) $z = x + 2y - 1$.
Правильные ответы представлены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

№ функции	5.1	5.2	5.3
№ ответа	2	5	3

Задание 2.1.6. Является ли плоскость $z = 0$ касательной плоскостью в точке $O(0;0;0)$:

6.1) к параболоиду $z = x^2 + y^2$;

6.2) к конусу $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

6.3) к гиперболическому параболоиду $z = xy$?

Правильные ответы: 6.1) да; 6.2) нет; 6.3) да.

Задание 2.1.7. Приведите определение и напишите уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Используя **подсказку к заданию 2.1.7**, составьте уравнения нормалей к поверхностям 5.1 - 5.3 из **задания 2.1.5** в указанных там точках.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.7

Нормалью к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, называется прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости в этой точке. Уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ записывается в виде

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Варианты ответов:

1) $\frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$; 2) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$; 3) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$;

4) $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$; 5) $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

Правильные ответы представлены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

№ функции	**5.1**	**5.2**	**5.3**
№ ответа	4	2	3

Задание 2.1.8. Дайте определение производной функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{l}$ и запишите формулу для вычисления этой производной в указанной точке. Какой вектор называется градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0?

Используя **подсказку к заданию 2.1.8**, найдите для функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M_0(1; 1; 1)$:

1) $\overrightarrow{grad\,u}\;(M_0)$; 2) модуль вектора $\overrightarrow{grad\,u}\;(M_0)$;

3) производную $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$ в направлении вектора $\vec{l}\left(\cos 45^\circ; \cos 60^\circ; \cos 60^\circ\right)$.

В ответ запишите пару чисел $\left(\left|\overrightarrow{grad\,u}\,(M_0)\right|,\ \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)\right)$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.8

Пусть дифференцируемая функция $u = f(x, y, z)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, а направление $\vec{l}$ характеризуется направляющими косинусами $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. Тогда производная функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 называется вектор, имеющий координаты, соответственно равные частным производным $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, вычисленным в точке M_0. Таким образом,

$$\overrightarrow{grad u}(M_0) = \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}; \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}; \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \right).$$

Длина (модуль) градиента вычисляется по формуле

$$\left| \overrightarrow{grad u}(M_0) \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial z} \right)^2}.$$

Варианты ответов: 1) $(4; 2\sqrt{2})$; 2) $(12; 2+\sqrt{2})$; 3) $(\sqrt{12}; 2+\sqrt{2})$; 4) $(2\sqrt{3}; 2-\sqrt{2})$; 5) $(\sqrt{6}; \sqrt{2}+2)$.

Правильный ответ: 3.

Задание 2.1.9. Вспомните определения и правила вычисления частных производных второго порядка для функции $z(x, y)$ по переменным x и y. В каком случае частная производная второго порядка называется смешанной? Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных второго порядка функции $z(x, y)$.

Найдите частные производные 2-го порядка следующих функций:

9.1) $z = x^2 y^3$; 9.2) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; 9.3) $v = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Из приведенных вариантов ответов выберите правильные, указав при этом, производной какой из функций (z, u или v) и по какой из переменных (x или y) является данное выражение.

Варианты ответов:

1) $-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 2) $\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 3) $\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 4) $6xy^2$;

5) $6x^2y$; 6) $\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 7) $2y^3$.

Правильные ответы представлены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

№ ответа	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Производная	$u''_{xy}=v''_{x^2}$	v''_{y^2}	u''_{x^2}	z''_{xy}	z''_{y^2}	$u''_{y^2}=v''_{xy}$	z''_{x^2}

Задание 2.1.10. Дайте определение дифференциала второго порядка функции $z=z(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ и запишите формулу для вычисления второго дифференциала (см. **подсказку к заданию 2.1.10**). Найдите второй дифференциал функции 9.1 в точке $M_0(1;-1)$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.10

Второй дифференциал d^2z в точке M_0 определяется как дифференциал в точке M_0 от первого дифференциала и вычисляется по формуле

$$d^2z(M_0)=\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2}dy^2,$$

где $dx^2=(dx)^2$, $dy^2=(dy)^2$.

Варианты ответов: 1) $d^2z(M_0)=2dx^2+3dxdy-6dy^2$;

2) $d^2z(M_0)=-2dx^2+12dxdy-6dy^2$; 3) $d^2z(M_0)=-2dx^2+6dxdy-6dy^2$.

Правильный ответ: 2.

Задание 2.1.11. Запишите формулу Тейлора второго порядка для функции $z=z(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ (см. **подсказку к заданию 2.1.11**). Найдите разложение функции 9.1 по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1;-1)$ до членов второго порядка включительно.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.11

Если функция $z = z(x, y)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, то для любой точки $M(x, y)$ из этой окрестности справедливо равенство

$$z(x, y) = z(M_0) + dz(M_0) + \frac{1}{2!}d^2z(M_0) + R_2 =$$

$$= z(M_0) + \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}(y - y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2\right) + R_2.$$

Эта формула называется формулой Тейлора второго порядка в точке $M_0(x_0; y_0)$ с остаточным членом R_2.

Варианты ответов:

1) $z(x, y) = -2(x-1) + 3(y+1) - 2(x-1)^2 + 12(x-1)(y+1) - 6(y+1)^2 + R_2;$

2) $z(x, y) = -1 - 2x + 3y - x^2 + 6xy - 3y^2 + R_2;$

3) $z(x, y) = -1 - 2(x-1) + 3(y+1) - (x-1)^2 + 6(x-1)(y+1) - 3(y+1)^2 + R_2.$

Правильный ответ: 3.

Задание 2.1.12. Изучите правила дифференцирования сложных функций. Запишите формулы вычисления частных производных сложной функции $z = z(x, y)$ по переменным u и v, если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ (см. **подсказку к заданию 2.1.12**).

Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ для функций

12.1) $z = x^2 + y^2$, где $x = u + v$, $y = u - v$;

12.2) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.12

Пусть $z = z(x, y)$ – функция двух переменных *x* и *y*, каждая из которых является функцией двух независимых переменных *u* и *v*, т.е. $x = x(u, v)$, $y = y(u,v)$. Тогда частные производные сложной функции $z = z(x(u, v),\ y(u, v))$ по переменным *u* и *v* вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Варианты ответов:

1) $2u$; 2) $4v$; 3) $\frac{2}{u}$; 4) $\frac{v^4 - 1}{v(v^4 + 1)}$; 5) $4u$; 6) $\frac{2(v^4 - 1)}{v(v^4 + 1)}$.

Правильные ответы представлены в табл.2.6.

Таблица 2.6

№ функции	12.1		12.2	
Частная производная	$\frac{\partial z}{\partial u}$	$\frac{\partial z}{\partial v}$	$\frac{\partial z}{\partial u}$	$\frac{\partial z}{\partial v}$
№ ответа	5	2	3	6

Задание 2.1.13. Дайте определение неявной функции двух переменных, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0.$ Приведите формулы вычисления частных производных этой функции по своим аргументам (см. **подсказку к заданию 2.1.13**). Найдите частные производные первого порядка в указанной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$:

13.1) $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0,\ M_0(1; -2; 2)$;

13.2) $e^z + 2xz + y^2 - 2 = 0,\ M_0(-1; 1; 0)$.

В ответ запишите пару чисел $\left(\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\right)$.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.13

Функция $z = z(x, y)$ называется неявной, если она задается уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

не разрешенным относительно z.

Частные производные этой функции в точке M_0 по переменным x и y вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(M_0)}{F'_z(M_0)}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_y(M_0)}{F'_z(M_0)}$$

при условии $F'_z(M_0) \neq 0$.

Варианты ответов: 1) $(-1, 1/2)$; 2) $(-1, 2)$; 3) $(0, 2)$; 4) $(1, 1/2)$; 5) $(2, 1)$; 6) $(-1, 1)$.

Правильные ответы представлены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

№ функции	13.1	13.2
№ ответа	4	3

Задание 2.1.14. Опираясь на **подсказку к заданию 2.1.14**, составьте уравнение касательной плоскости к каждой из поверхностей, заданных неявно уравнениями 13.1 и 13.2 задания 1.1.13, в указанных там точках.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.14

Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Варианты ответов: 1) $2y - z - 2 = 0$; 2) $2y - z = 0$; 3) $2x + y - 2z = 0$; 4) $2x + y - 2z + 4 = 0$.

Правильные ответы представлены в табл. 2.8.

Таблица 2.8

№ функции	13.1	13.2
№ ответа	4	1

Задание 2.1.15. Пользуясь **подсказкой к заданию 2.1.15**, составьте уравнение нормали к каждой из поверхностей 13.1, 13.2 в указанной точке.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.15

Уравнение нормали к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ записывается в виде

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Варианты ответов:

1) $\frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$;

2) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$;

3) $\frac{x+1}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$;

4) $\frac{x}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$.

Правильные ответы представлены в табл. 2.9.

Таблица 2.9

№ функции	**13.1**	**13.2**
№ ответа	2	3

Задание 2.1.16. Дайте определение стационарной точки функции двух переменных $z = z(x, y)$ (см. **подсказку к заданию 2.1.16**).

Найдите стационарные точки следующих функций:

16.1) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;

16.2) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

16.3) $z = x^3 + y^3 + 6xy$.

Из приведенных вариантов ответов выберите стационарные точки функций 16.1, 16.2, 16.3 и укажите, для какой именно функции данная точка является стационарной.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.16

Пусть функция $z = z(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется стационарной точкой функции $z = z(x, y)$, если частные производные функции по переменным x и y в этой точке одновременно равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial z\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial z\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}=0.$$

Варианты ответов:

1) $M_1(0;0)$; 2) $M_2(1;1)$; 3) $M_3(3;0)$; 4) $M_4(0;3)$; 5) $M_5(-2;2)$; 6) $M_6(-2;-2)$; 7) $M_7(2;2)$; 8) $M_8(\sqrt{2};-\sqrt{2})$; 9) $M_9(\sqrt{2};\sqrt{2})$; 10) $M_{10}(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Правильные ответы представлены в табл. 2.10.

Таблица 2.10

№ функции	**16.1**	**16.2**	**16.3**
Стац. точки	M_1	M_1, M_8, M_{10}	M_1, M_6

Задание 2.1.17. Изучите достаточные условия существования локального экстремума функции двух переменных $z=z\left(x, y\right)$ (см. **подсказку к заданию 2.1.17**). Основываясь на достаточных условиях экстремума, сделайте вывод о том, имеет ли каждая из функций 16.1 – 16.3 задания 2.1.16 экстремум в своих стационарных точках.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.17

Пусть в стационарной точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ и некоторой ее окрестности функция $z=z\left(x, y\right)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Составим матрицу H вторых производных в стационарной точке M_0:

$$H=\begin{bmatrix} z''_{xx}\left(M_0\right) & z''_{xy}\left(M_0\right) \\ z''_{xy}\left(M_0\right) & z''_{yy}\left(M_0\right) \end{bmatrix}.$$

Обозначим через Δ_1 и Δ_2 главные миноры этой матрицы первого и второго порядков соответственно, т. е.

$$\Delta_1=z''_{xx}\left(M_0\right), \ \Delta_2=z''_{xx}\left(M_0\right) z''_{yy}\left(M_0\right)-\left(z''_{xy}\left(M_0\right)\right)^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta_1>0, \Delta_2>0,$ то точка M_0 является точкой минимума функции $z=z\left(x, y\right)$;

2) если $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0,$ то точка M_0 является точкой максимума функции $z = z(x, y)$;

3) если $\Delta_2 < 0,$ то функция $z = z(x, y)$ в точке M_0 экстремума не имеет.

В остальных случаях требуются дополнительные исследования.

Варианты ответов представлены в табл. 2.11.

Таблица 2.11

№ ответа	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Δ_1	-12	0	20	-4	-12	20	2
Δ_2	108	-36	384	0	108	384	3
Вывод	Точка максимума	Не точка экстремума	Точка минимума	Нужны дополнительные исследования	Точка минимума	Точка максимума	Точка минимума

Правильные ответы представлены в табл. 2.12.

Таблица 2.12

Функция	16.1	16.2	16.2	16.2	16.3	16.3
Точка	M_1	M_1	M_8	M_{10}	M_1	M_6
№ ответа	7	4	3	3	2	1

Задание 2.1.18. На плоскости XOY заданы ограниченные замкнутые множества:

D_1 – прямоугольник $ABCD$, где $A(-3; -3)$, $B(-3; 2)$, $C(1;\ 2)$, $D(1; -3)$;

D_2 – треугольник ABC, где $A(-4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 0)$;

D_3 – трапеция $ABCD$, где $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 5)$.

Выполните следующие задания.

1. Изобразите множества D_1, D_2, D_3 на рисунке.

2. Задайте эти множества с помощью уравнений ограничивающих их прямых.

3. Задайте эти множества с помощью системы неравенств, используя уравнения ограничивающих их прямых.

4. Проверьте, принадлежат ли этим множествам следующие точки:

$M_1(0; 3)$; $M_2(0; 0)$; $M_3(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$; $M_4(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $M_5(-2; 2)$.

Правильные ответы представлены в табл. 2.13.

Таблица 2.13

Множества Точки	$\boldsymbol{M_1}$	$\boldsymbol{M_2}$	$\boldsymbol{M_3}$	$\boldsymbol{M_4}$
$\boldsymbol{D_1}$	Нет	Да	Нет	Да
$\boldsymbol{D_2}$	Да	Да	Нет	Да
$\boldsymbol{D_3}$	Да	Да	Нет	Нет

Задание 2.1.19. Функция $z = x^3 + y^3 + 6xy$ определена на множестве точек треугольника *ABC*, который задан координатами своих вершин: $A(-4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 0)$.

а) Напишите уравнения сторон треугольника *ABC* (см. **задание 2.1.18**).

б) Напишите, каким уравнением определяется данная функция *z* на каждом из отрезков *AB*, *BC*, *AC*, являющихся сторонами треугольника *ABC*.

Варианты ответов представлены в табл. 2.14.

Таблица 2.14

№ ответа	**Сторона Δ**		
	AB	***AC***	***BC***
1	а) $y = x + 4$, б) $z = 2x^3 + 18x^2 + 72x + 64$, $x \in [-4; 0]$	а) $y = 0$, б) $z = x^3 + 6x$, $x \in [-4; 4]$	а) $y = x - 4$, б) $z = 2x^3 - 6x^2 + 24x - 64$, $x \in [0; 4]$
2	а) $y = x - 4$, б) $z = 2x^3 - 6x^2 + 24x - 64$, $x \in [-4; 4]$	а) $x = 0$, б) $z = y^3$, $x \in [-4; 4]$	а) $y = x + 4$, б) $z = 2x^3 + 18x^2 + 72x + 64$, $x \in [-4; 0]$
3	а) $y = x + 4$, б) $z = 2x^3 + 6x^2 + 24x + 64$, $x \in [0; 4]$	а) $y = 0$, б) $z = x^3$, $x \in [-4; 4]$	а) $y = -x - 4$, б) $z = -2x^3 - 18x^2 - 72x - 64$, $x \in [-4; 4]$
4	а) $y = 4 - x$, б) $z = 6x^2 - 24x + 64$, $x \in [-4; 0]$	а) $x = 0$, б) $z = x^3$, $x \in [0; 4]$	а) $y = -4 - x$, б) $z = 6x^2 - 24x + 64$, $x \in [0; 4]$

Правильные ответы представлены в табл. 2.15.

Таблица 2.15

Сторона треугольника	AB	AC	BC
№ ответа	1	3	4

Задание 2.1.20. Изучите алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $z = z(x, y)$ на произвольном ограниченном замкнутом множестве *D*. Рассмотрите случай, когда множество *D* состоит из всех точек $\triangle ABC$ (см. **подсказку к заданию 2.1.20**). Используя результат задания 2.1.19, найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 + 6xy$ на множестве точек треугольника *ABC* из **задания 2.1.19**.

ПОДСКАЗКА К ЗАДАНИЮ 2.1.20

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = z(x, y)$ на множестве точек треугольника ABC:

1) найдите стационарные точки функции $z = z(x, y)$, принадлежащие множеству точек треугольника ABC, и вычислите в них значения функции;

2) зная уравнения сторон треугольника ABC и уравнения, которыми задается функция $z(x, y)$ на отрезках *AB*, *BC* и *AC*, найдите значения функции на концах отрезков и в стационарных точках, принадлежащих каждому из отрезков;

3) среди вычисленных значений функции *z* выберите наибольшее и наименьшее значения.

В вариантах ответов приведены пары чисел, являющихся наибольшим (первое число) и наименьшим значениями данной функции.

Варианты ответов представлены в табл. 2.16.

Таблица 2.16

№ ответа	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$(z_{\max}; z_{\min})$	(64; 0)	(64; -64)	(64; 40)	(208; 64)	(40; -64)	(64;-40)	(64;-280)

Правильный ответ: 7) $z_{\max} = 64$; $z_{\min} = -280$.

2.2. Математический диктант «Функции нескольких переменных»

Вариант 1

1. Привести графический пример плоского несвязного ограниченного множества.

2. Написать уравнение 5-мерной сферы радиусом $\sqrt{2}$ и центром в точке $A(1;0;-1;2;3)$.

3. Задать аналитически и изобразить на плоскости область определения функции $z=\sqrt{y\ \ \sin x}$.

4. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=2xy+xe^{y/x}$ уравнению $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}-xy-z=0$.

5. Пояснить, является ли плоскость $z=0$ касательной плоскостью к поверхности $z=-\sqrt{5x^2+y^2}$ в точке $O(0;\ 0;\ 0)$.

6. Написать уравнение нормали к поверхности, заданной уравнением $z=x^2+y^2+xy$, в точке $A\left(x_0;\ y_0;\ z(x_0;\ y_0)\right)$, где $x_0=y_0=1$.

7. Найти производную функции $z=arctg\left(xy^2\right)$ в точке $A(2;-1)$ по направлению $\overrightarrow{grad z}(A)$.

8. Найти $d^2z(A)$, если $z=x^2+3y^2-xy+5y-4$, $A\left(\sqrt{2};\ 1\right)$.

9. Пусть M_0 – стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой в этой точке функции $u=f(x,\ y,\ z)$. Является ли точка M_0 точкой экстремума функции, если матрица вторых производных в точке M_0 имеет вид

$$H(M_0)=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & 5 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

10. При каких размерах открытого прямоугольного ящика объёмом $V=32м^3$ площадь его поверхности будет наименьшей?

Вариант 2

1. Привести графический пример плоского неограниченного замкнутого множества.

2. Как задаётся 4-мерный открытый шар с центром в точке $A(2;-1;1;0)$ и радиусом $\sqrt{3}$?

3. Задать аналитически и изобразить на плоскости область определения функции $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-2\sqrt{x}}}$.

4. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=e^{x/y}\ln y$ уравнению $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{z}{\ln y}=0.$

5. Пояснить, является ли плоскость $z=0$ касательной плоскостью к поверхности $z=-\dfrac{x^2}{2}+3y^2$ в точке $O(0;\ 0;\ 0)$.

6. Написать уравнение нормали к поверхности, заданной уравнением $z=3x^4+2x^2y^3$, в точке $A\left(x_0;\ y_0;\ z\left(x_0;\ y_0\right)\right)$, где $x_0=-1,\ y_0=2.$

7. Найти производную функции $z=\arccos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ в точке $A(1;\ 2)$ по направлению $\overrightarrow{grad} z(A)$.

8. Найти $d^2z(A)$, если $z=x^3+y^3-3xy,\ A(1/3;\ 1/2)$.

9. Пусть M_0 – стационарная точка дважды непрерывно дифференцируемой в этой точке функции $u=f(x;\ y;\ z)$. Является ли точка M_0 точкой экстремума функции, если матрица вторых производных в точке M_0 имеет вид $H(M_0)=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -4\end{bmatrix}$?

10. Определить размеры цилиндра наибольшего объёма при условии, что

его полная поверхность $S = 6\pi \ \ м^2$.

2.3. Контрольная работа «Дифференциальное исчисление ФМП»

Вариант 1

1. Показать, что функция $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u,v)$, где $u = e^{x^2-y^2}$, $v = \ln(x^2 + y)$.

3. Дано: функция $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$, точка $M_0(0;1)$, вектор $\vec{a}(1;3)$. Найти:

1) дифференциал dz функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$;

2) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$, если точка $M_0(x_0; y_0)$ является проекцией точки P_0 на плоскость *Oxy*;

3) величину и направление градиента функции $z = z(x, y)$ в точке M_0;

4) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0;

5) разложение функции $z = z(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M_0;

6) локальный экстремум функции $z = z(x, y)$.

4. Найти экстремум функции $z = 6 - 4x - 3y$ при условии, что x и y связаны уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

5. Вычислить приближенно $\sqrt{5e^{0,02} + (1,97)^2}$.

Вариант 2

1. Показать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 z + e^{xz} + 3y = 0$.

3. Дано: функция $z = (x-2)^2 + 2y^2$, точка $M_0(1;1)$, вектор $\vec{a}(1;1)$. Найти:

1) дифференциал dz функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$;

2) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$, если точка $M_0(x_0; y_0)$ является проекцией точки P_0 на плоскость *Oxy*;

3) величину и направление градиента функции $z = z(x, y)$ в точке M_0;

4) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0;

5) разложение функции $z = z(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M_0;

6) локальный экстремум функции $z = z(x, y)$.

4. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $x + 2y - 6 = 0$.

5. Вычислить приближенно $arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$.

Вариант 3

1. Показать, что функция $z = e^{xy}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, где $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$.

3. Дано: функция $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$, точка $M_0(-1;0)$, вектор $\vec{a}(2;1)$. Найти:

1) дифференциал dz функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$;

2) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$, если точка $M_0(x_0; y_0)$ является проекцией точки P_0 на плоскость *Oxy*;

3) величину и направление градиента функции $z = z(x, y)$ в точке M_0;

4) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0;

5) разложение функции $z = z(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M_0;

6) локальный экстремум функции $z = z(x, y)$.

4. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $\frac{2}{x} + \frac{16}{y} = 1$.

5. Вычислить приближенно $\sqrt{(4{,}02)^2 + (3{,}07)^2}$.

Вариант 4

1. Показать, что функция $z = \ln(x + e^{-y})$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z^3 - 4xz + y^2 = 4$.

3. Дано: функция $z = x^2 + 3xy - 5x - 4y + 8$. Точка $M_0(0; 1)$, вектор $\vec{a}(-1; 1)$. Найти:

1) дифференциал dz функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$;

2) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$, если точка $M_0(x_0; y_0)$ является проекцией точки P_0 на плоскость *Oxy*;

3) величину и направление градиента функции $z = z(x, y)$ в точке M_0;

4) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0;

5) разложение функции $z = z(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M_0;

6) локальный экстремум функции $z = z(x, y)$.

4. Найти экстремум функции $z = 3x - 4y + 12$ при условии, что x и y связаны уравнением $x^2 + y^2 = 4$.

5. Вычислить приближенно $(1{,}03)^{2{,}94}$.

Вариант 5

1. Показать, что функция $z = x^y$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, где $u = arctg\frac{x}{y}$, $v = x\sin y$.

3. Дано: функция $z = 3x^2 - 2xy + 4y^2 - 6y - 5$, точка $M_0(-1;0)$, вектор $\vec{a}(1;2)$. Найти:

1) дифференциал dz функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$;

2) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$, если точка $M_0(x_0; y_0)$ является проекцией точки P_0 на плоскость Oxy;

3) величину и направление градиента функции $z = z(x, y)$ в точке M_0;

4) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0;

5) разложение функции $z = z(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M_0;

6) локальный экстремум функции $z = z(x, y)$.

4. Найти экстремум функции $z = 2y^2 - x^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $x - y + 6 = 0$.

5. Вычислить приближенно $\ln\left((0{,}03)^2 + (0{,}98)^2\right)$.

Вариант 6

1. Показать, что функция $z = xe^{y/x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z\ln(x + z) - \dfrac{xy}{z} = 0$.

3. Дано: функция $z = 3x - x^3 + 3y^2 + 4y$, точка $M_0(1;1)$, вектор $\vec{a}(1;-1)$. Найти:

1) дифференциал dz функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$;

2) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$, если точка $M_0(x_0; y_0)$ является проекцией точки P_0 на плоскость Oxy;

3) величину и направление градиента функции $z = z(x, y)$ в точке M_0;

4) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0;

5) разложение функции $z = z(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M_0;

6) локальный экстремум функции $z = z(x, y)$.

4. Найти экстремум функции $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ при условии, что x и y связаны уравнением $x+y=2$.

5. Вычислить приближенно $\sin 32^{\circ}\cdot\cos 59^{\circ}$.

Вариант 7

1. Показать, что функция $z=y\ln(x^2-y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=f(u,v)$, где $u=tg(x^2-y)$, $v=\arcsin(xy)$.

3. Дано: функция $z=4xy-2x^2-4y^2+2y-3$, точка $M_0(1;1)$, вектор $\vec{a}(3;-1)$. Найти:

1) дифференциал dz функции $z=z(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$;

2) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=z(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0;z_0)$, если точка $M_0(x_0;y_0)$ является проекцией точки P_0 на плоскость Oxy;

3) величину и направление градиента функции $z=z(x,y)$ в точке M_0;

4) производную функции $z=z(x,y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0;

5) разложение функции $z=z(x,y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M_0;

6) локальный экстремум функции $z=z(x,y)$.

4. Найти экстремум функции $z=\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}$ при условии, что x и y связаны уравнением $x^2+y^2=1$.

5. Вычислить приближенно $(0{,}97)^{1{,}05}$.

Вариант 8

1. Показать, что функция $z=y^{y/x}\cdot\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$.

3. Дано: функция $z = 2x^2 + 6xy + 3y^2 + 2x - 1$, точка $M_0(-1;\ 0)$, вектор $\vec{a}(2;\ 3)$. Найти:

1) дифференциал dz функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$;

2) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$, если точка $M_0(x_0; y_0)$ является проекцией точки P_0 на плоскость Oxy;

3) величину и направление градиента функции $z = z(x, y)$ в точке M_0;

4) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0;

5) разложение функции $z = z(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M_0;

6) локальный экстремум функции $z = z(x, y)$.

4. Найти экстремум функции $z = x + y$ при условии, что x и y связаны уравнением $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

5. Вычислить приближенно $\sin 29^\circ \cdot tg 46^\circ$.

Вариант 9

1. Показать, что функция $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, где $u = x\ln(x^2 + y^2)$, $v = e^{3x^2+2y^2}$.

3. Дано: функция $z = 3x^2 + xy + 2y^2 - 4x + 7y - 4$, точка $M_0(-1;1)$, вектор $\vec{a}(1;4)$. Найти:

1) дифференциал dz функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$;

2) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$, если точка $M_0(x_0; y_0)$ является проекцией точки P_0 на плоскость Oxy;

3) величину и направление градиента функции $z = z(x, y)$ в точке M_0;

4) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0;

5) разложение функции $z = z(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M_0;

6) локальный экстремум функции $z = z(x, y)$.

4. Найти экстремум функции $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии, что x и y связаны уравнением $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$.

5. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05^3}}$.

Вариант 10

1. Показать, что функция $z = arctg\frac{x+y}{x-y}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z + \sin(x - z) + y^2 z = 0$.

3. Дано: функция $z = 8y - 3x^2 - 4xy - 2y^2 + 1$, точка $M_0(2;-1)$, вектор $\vec{a}(-1;1)$. Найти:

1) дифференциал dz функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$;

2) уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$, если точка $M_0(x_0; y_0)$ является проекцией точки P_0 на плоскость *Oxy*;

3) величину и направление градиента функции $z = z(x, y)$ в точке M_0;

4) производную функции $z = z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0;

5) разложение функции $z = z(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M_0;

6) локальный экстремум функции $z = z(x, y)$.

4. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x + y = 2$.

5. Вычислить приближенно $\sqrt{(1{,}02)^3 + 8e^{-0{,}03}}$.

Св. план 2005, поз. 64

Учебное издание

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

по разделам высшей математики
«Интегральное исчисление функций одной переменной»
и «Функции многих переменных»
для студентов всех специальностей БГУИР
дневной формы обучения

Составители:
Феденя Ольга Александровна,
Черняк Жанна Альбертовна

Редактор Т.А. Лейко
Корректор Н.В. Гриневич

Подписано в печать 24.10.2005. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать ризографическая. Усл. печ. л. 3,6.
Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 200 экз. Заказ 213.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0131518 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6