

УДК 621.385.6

## УСТОЙЧИВЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

А.А. КУРАЕВ, Т.Л. ПОПКОВА, В.В. МАТВЕЕНКО

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровки, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 12 января 2016

Приведены алгоритмы с уточняющими и стабилизирующими коэффициентами, позволяющие получать устойчивые решения систем уравнений, относящихся к плохо обусловленным задачам электродинамики и нелинейной динамики. Продемонстрировано применение модифицированных алгоритмов в задаче распространения  $E_{0i}$ -волн в нерегулярном волноводе и модели динамического хаоса Ресслера. В последнем случае показано, что «детерминированный» (т.е. воспроизводимый) хаос невозможен.

*Ключевые слова:* плохо обусловленная задача, устойчивый численный метод, закритические волны в волноводе, динамический хаос.

### Введение

Как в электродинамике, так и в нелинейной динамике существует широкий класс плохо обусловленных или некорректных задач. Например, в электродинамике – это задачи расчета закритических или частично (в нерегулярных структурах) закритических волн в волноводах. В нелинейной динамике – режимы динамического («детерминированного») хаоса в колебательных системах. В первом случае сколь угодно малые ошибки счета или задания начальных условий приводят к экспоненциальному росту ошибки, т. е. к расходимости решения. Во втором случае сколь угодно малые погрешности счета приводят к их накоплению и сбою аттрактора – появляется «странный аттрактор». Следует отметить, что в реальных структурах, описываемых этими моделями, «странный аттрактор» действительно появляется. Но его «запуск» производится естественными шумами в физических системах, а не «численными шумами» численной модели, где хаос действительно носит «детерминированный» характер.

В статье предлагаются несколько модификаций исключения «численных шумов», позволяющих обеспечить устойчивость решения по отношению к ошибкам вычислений.

### Распространение $E_{0i}$ -волн в нерегулярном волноводе с круговым сечением

Теория распространения волн в нерегулярных волноводах, базирующаяся на методе преобразования координат и проекционном методе, приводит в конечном итоге к двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно амплитуд связанных нормальных волн в преобразованной системе координат [1]. Для нерегулярных волноводов с круговым сечением системы ОДУ для  $H_{0i}$ - и  $E_{0i}$ -волн (волн с нулевым азимутальным индексом) разделяются, т.е. оказываются независимыми [1]. Поэтому задачи возбуждения  $H_{0i}$  и  $E_{0i}$ -мод решаются независимо.

В предлагаемой статье использован (для формулировки уравнений возбуждения  $E_{0i}$ -волн) целесообразный (в свете изложенных в [2, 3] соображений) подход: в преобразованной системе исключается  $\vec{E}'$  и строится уравнение второго порядка относительно  $\vec{H}'$ . При таком подходе

краевая задача для  $E_{0i}$ -волн становится скалярной ( $\vec{H}'$  имеет только одну компоненту  $\rho H'_{\phi}$ ), а результирующая система ОДУ относительно амплитуд нормальных волн приводится к четной форме. Приведенные в статье примеры численного решения задач для  $E_{0i}$ -волн иллюстрируют устойчивость численных алгоритмов для решения полученной для  $E_{0i}$ -волн системы ОДУ. Следует также подчеркнуть актуальность формулировки уравнений возбуждения волн  $E_{0i}$  в нерегулярных волноводах с круговым сечением в адекватной для устойчивых численных методов форме, поскольку эти типы волн используются в супермощных черенковских генераторах и усилителях, обеспечивающих создание радиолокационных систем и систем ПРО нового поколения.

Используя развитую в [3] теорию возбуждения волн в нерегулярных волноводах получаем в рассматриваемом случае следующие решения. Физическая напряженность магнитного поля на частоте  $m\omega$  выражается как  $\vec{H}_m = \vec{\Phi}_0 \dot{H}_{m\phi}$ , причем

$$\dot{H}_{m\phi} = \sum_{p=1}^l \dot{C}_{mp}^M(z) \cdot J_1\left(v_{0p} \frac{r}{b(z)}\right) \cdot e^{im\omega t}, \quad (1)$$

физическая напряженность  $\vec{E}_m = \frac{1}{im\omega\epsilon_0} \left\{ \frac{\partial(r\dot{H}_{m\phi})}{r\partial r} \vec{z}_0 - \frac{\partial\dot{H}_{m\phi}}{\partial z} \vec{r}_0 \right\}$ , где комплексные амплитуды

$$\begin{aligned} \dot{C}_{mp}^M \text{ определяются уравнениями} \\ \frac{d^2\dot{C}_{mp}^M}{dz^2} + \left( m^2 - \frac{v_{0p}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} \left( \frac{db}{dz} \right)^2 + \frac{2}{b} \frac{d^2b}{dz^2} - \frac{1}{b^2} \left( \frac{db}{dz} \right) \frac{I_{3pp}}{h_{pp}} \right) \dot{C}_{mp}^M + \\ + \sum_{k=1, p \neq k}^l \left\{ -\frac{2}{b^2} \frac{db}{dz} \frac{I_{1kp}}{h_{pp}} \left( \frac{db}{dz} \dot{C}_{mk}^M + b \frac{d\dot{C}_{mk}^M}{dz} \right) + \dot{C}_{mk}^M \left[ \left( \frac{3}{b^2} \left( \frac{db}{dz} \right)^2 + \frac{1}{b} \frac{d^2b}{dz^2} \right) \frac{I_{1kp}}{h_{pp}} - \frac{1}{b^2} \left( \frac{db}{dz} \right) \frac{I_{3kp}}{h_{pp}} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $b(z)$  – профиль волновода;  $v_{0p}$  –  $p$  – корень функции Бесселя  $J_0(x)$ :  $J_0(v_{0p}) = 0$ ;  $h_{pp} = J_1^2(v_{0p})/2$ ;  $\rho = r/b(z)$ .

$$I_{1kp} = \int_0^1 J_0(v_{0k}\rho) \cdot J_1(v_{0p}\rho) v_{0k} \rho^2 d\rho,$$

$$I_{3kp} = \int_0^1 J_1(v_{0k}\rho) \cdot J_1(v_{0p}\rho) (v_{0k}\rho)^2 d\rho.$$

Уравнения (1) и (2) приведены в размерных единицах длин  $z$ ,  $b(z)$ . Очевидно, что если левые и правые части этих уравнений умножить на  $1/k^2 = c^2/\omega^2$ , то величины  $z$ ,  $b(z)$  в них преобразуются в безразмерные, что, естественно, удобно для выполнения расчетов. В дальнейшем мы условимся без изменения обозначений указанных величин считать, что в уравнениях (1) и (2)  $b(z) \equiv kb(z)$ ,  $z \equiv kz$ .

Четная форма уравнений возбуждения  $E_{0i}$ -волн (2) открывает путь для использования четных алгоритмов пошагового решения этих уравнений, предложенных в [3] и апробированных на решении задач возбуждения  $H_{0i}$ -волн [3].

Воспользуемся приведенным в [3] пошаговым алгоритмом решения четного уравнения для  $H_{0i}$ -волн вида

$$\frac{d^2\dot{C}}{dz^2} + Q(z)\dot{C} = f \quad (3)$$

в следующей форме:

$$\dot{C}_{k+2} = \frac{2\dot{C}_{k+1}}{\tau} - \frac{\dot{C}_k}{\tau^2} - \frac{\dot{C}_{k+1}}{\tau} h^2 Q_{k+1} + h^2 \frac{f_{k+1}}{\tau^2}, \quad (4)$$

где  $\tau > 1$ , число, выбираемое при конкретных расчетах, причем  $\tau \rightarrow 1$  при уменьшении шага интегрирования. Введение в алгоритм (4) параметра  $\tau > 1$  обусловлено необходимостью

обеспечить однозначность решения краевой задачи для уравнения (2): в решении должна оставаться только компонента поля, возбуждаемая источниками на левом конце. На самом деле при использовании стандартных алгоритмов из-за незначительных ошибок счета возникает не отвечающая физическому смыслу обратная компонента поля, которая для закритических мод резко возрастает в  $+z$  направлении, приводя к быстрому развалу решения. Введение в алгоритм параметра  $\tau$  исключает появление этой ошибочной компоненты и тем самым обеспечивает устойчивость пошаговой процедуры счета. Заметим, что введение  $\tau$  необходимо для удовлетворения условия теоремы единственности: в среде должны иметь место хотя бы небольшие потери.

На рис. 1, *a* приведен профиль  $b(z)$  рассчитываемого волновода, на рис. 1, *б* – распределения  $|\dot{C}_{1p}^M|$  при числе шагов четного алгоритма  $N = 20000$ . Приемлемая точность достигается уже при  $N = 2000$ .

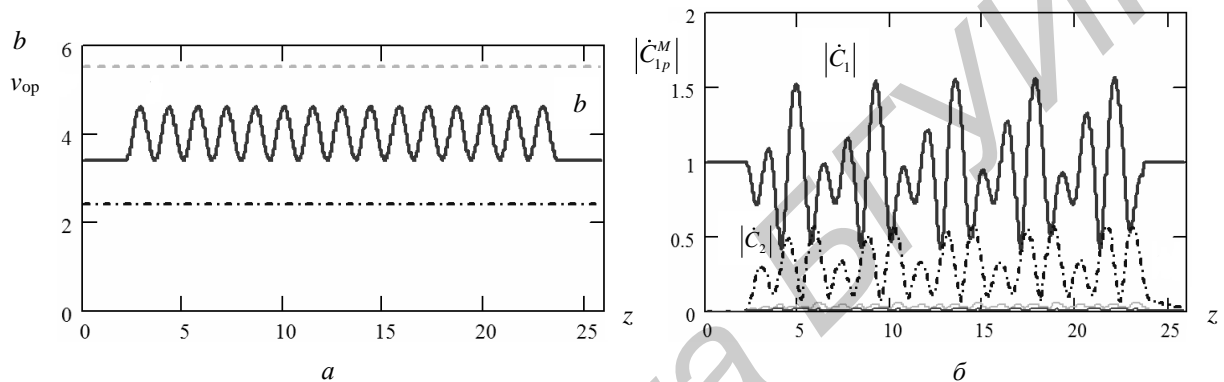


Рис. 1. Расчет поля  $E$ -волны с помощью четного алгоритма: профиль волновода и  $v_{op}$  :-- $v_{01}$ , --- $v_{02}$  (а);  $|\dot{C}_{1p}^M|(z)$  при  $N = 20000$  :--- $p = 1$ ; -·- $p = 2$ ; —  $p = 3$ ; --  $p = 4$  (б)

Сходимость четного алгоритма при увеличении  $N$  проиллюстрирована на рис. 2. Здесь приведены зависимости максимальной на  $z$  относительной погрешности  $\delta|\dot{C}_{1p}^M|$  и зависимость  $1/\tau_p$  от  $N$  ( $p = 1, 2, \dots$ ).

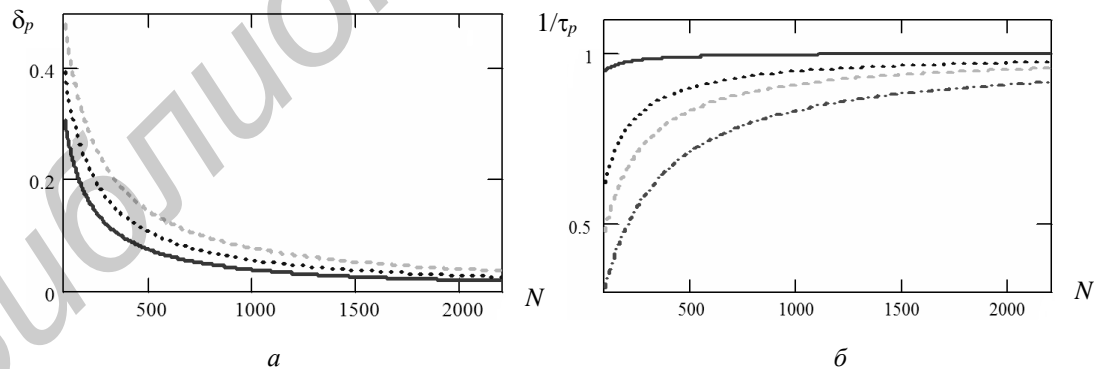


Рис. 2. Сходимость четного алгоритма при увеличении  $N$ :  $\delta_p = \delta_p(N)$  (а);  $1/\tau_p(N)$ ; —  $p = 1$ ; -·-  $p = 2$ ; —  $p = 3$ ; --  $p = 4$  (б)

### Исключение экспоненциальных погрешностей вычислений

Воспользуемся рекуррентной формулой расчета экспоненциальной функции  $e^{\dot{A}t}$  ( $\dot{A}$  – комплексное число) [4]:

$$e^{\dot{A} \cdot \Delta \cdot n} \approx \frac{(2 + \Delta \cdot \dot{A})^n}{(2 - \Delta \cdot \dot{A})^n}. \quad (5)$$

Здесь  $t = \Delta \cdot n$ ;  $\Delta$  – шаг,  $n$  – номер узловой точки.

Пусть функция  $f(t)$  вычисляется с помощью простейшего одношагового алгоритма:

$$f_{n+1} = f_n + \Delta \cdot f_n', \quad (6)$$

$f_{n+1} \equiv f(t_{n+1}) = f(\Delta(n+1))$ ,  $f_n \equiv f(t_n) = f(\Delta n)$ .

На примере расчетов по формуле (5) можно проиллюстрировать простой численный способ «отсоединения» экспоненты с показателями степени ( $\alpha t$ ) ( $e^{\alpha t}$  – «отсоединяемая» экспонента):

$$f_n = \frac{(2 + \Delta \cdot \dot{A})}{(2 - \Delta \cdot \dot{A})} \cdot f_{n-1} \cdot [1 - \Delta \cdot \alpha]. \quad (7)$$

Сомножитель  $\beta = [1 - \Delta \cdot \alpha]$  и обеспечивает «отсоединение» экспоненты.

Одной из наиболее известных математических моделей нелинейной динамики, демонстрирующих «детерминированный хаос», является система уравнений Ресслера [5]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(y + z) \\ \frac{dy}{dt} = x + ey \\ \frac{dz}{dt} = w - mz + xz \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $e$ ,  $w$ ,  $m$  – постоянные числа, параметры модели,  $t$  – аргумент функций  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Введем также функцию  $pif = z^2_{k+1} - z^2_k - (z_{k+1} - z_k)(z_{k+1} + z_k)$ . Эта функция определяет численную невязку «по энергии» решения  $z(t)$  и является, следовательно, индикатором «численного шума».

При решении (8) обычными пошаговыми методами на фазовой плоскости  $x$ ,  $y$  получается «странный аттрактор» и демонстрируется «детерминированный», т.е. воспроизводимый в расчетах хаос. На рис. 3 приведено подобное решение с использованием метода Рунге-Кутты IV порядка при  $e = w = 0,2$ ;  $m = 6,5$ ;  $\Delta = 0,00042$ ,  $n_{\max} = 100000$ . Точно такое же решение получается при использовании любого другого стандартного метода – Адамса, Хемминга, Бимона, Верле и др.

Отметим, что «всплески»  $pif$  коррелируют с возникновением «пиков» в решении  $z(t)$ , что является индикатором «сбоя» аттрактора на плоскости  $x$ ,  $y$ .

Построим алгоритм расчета (8) с уточняющим коэффициентом  $\beta = [1 - \Delta \cdot \alpha]$ :

$$\begin{cases} x_{n+1} = [-(y_n + z_n) \cdot \Delta + x_n] \cdot \beta \\ y_{n+1} = [(x_n + e \cdot y_n) \cdot \Delta + y_n] \cdot \beta \\ z_{n+1} = [w \cdot \Delta - m \cdot \Delta \cdot z_n + \Delta \cdot x_n \cdot z_n + z_n] \cdot \beta \end{cases} \quad (9)$$

На основе алгоритма (9) выполним решение (8) при тех же, что в предыдущем случае параметрах:  $e = w = 0,2$ ;  $m = 6,5$ ;  $\Delta = 0,00042$ ,  $n_{\max} = 100000$ ,  $\alpha = 0,0979$ , «странный аттрактор» и «хаос» не присутствуют, решение приводит к стационарному предельному циклу.

Повторение решения при  $\Delta = 0,008$ ,  $n_{\max} = 10000$ ,  $\alpha = 0,1017$  приводит к точно тому же результату, что приведен на рис. 4. Как следует из рис. 4,  $pif = 0$  при  $t > 0,5$ , т.е. «численные шумы» в области формирования предельного цикла устранены. При этом решение системы (8) дает стационарный аттрактор на плоскости  $x$ ,  $y$ . Таким образом, появление «странного аттрактора» и «детерминированного хаоса» в решении аналитической системы уравнений – следствие экспоненциального накопления погрешности ( $pif \neq 0$ , рис. 3) счета в плохо обусловленной системе уравнений модели. Введение уточняющего коэффициента  $\beta$  снимает численную погрешность и «хаос» не возникает, как и должно быть в детерминированной математической модели. В реальной же физической системе, описываемой моделью (8) за счет естественных шумов возможно возникновение хаоса, поскольку система неустойчива. Но это не будет детерминированный, т.е. воспроизводимый хаос, так как естественный шум не воспроизводим.

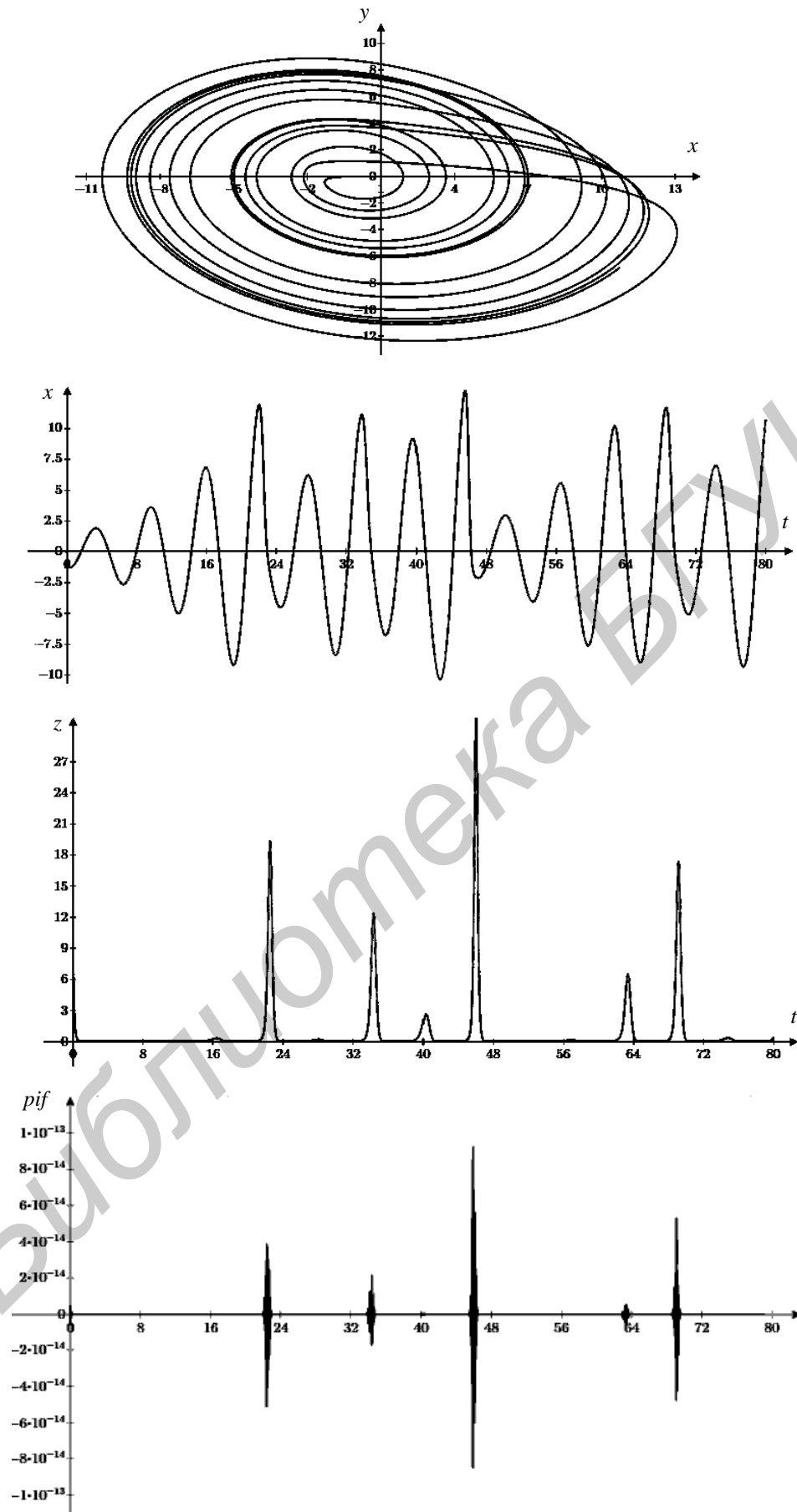


Рис. 3. «Странный аттрактор», «детерминированный» хаос при следующих параметрах модели  $e = w = 0,2; m = 6,5; \Delta = 0,00042, n_{\max} = 100000, \alpha = 0,0979, pif = z^2_{k+1} - z^2_k - (z_{k+1} - z_k)(z_{k+1} + z_k)$

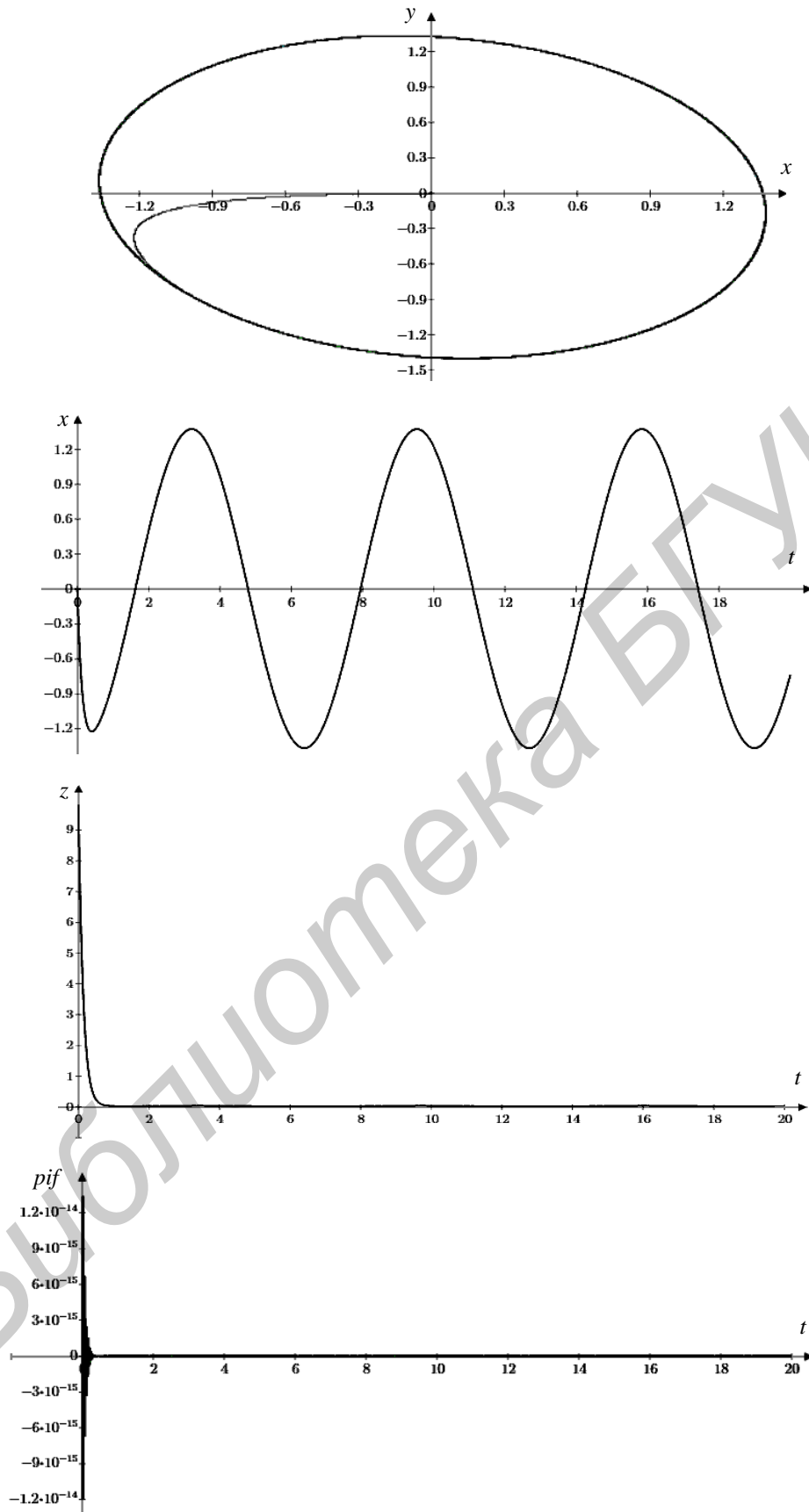


Рис. 4. Точное решение уравнения (8) при следующих параметрах модели  $e = w = 0,2$ ;  $m = 6,5$ ;  $\Delta = 0,008$ ,  
 $n_{\max} = 10000$ ,  $\alpha = 0,1017$ ,  $pif = z^2_{k+1} - z^2_k - (z_{k+1} - z_k)(z_{k+1} + z_k)$

### Заключение

Приведенные в статье алгоритмы с уточняющими или стабилизирующими коэффициентами  $\beta$  и  $\tau$  позволяют решать уравнения математической физики, относящиеся к плохо обусловленным задачам электродинамики и нелинейной динамики.

### ROBUST NUMERICAL METHODS FOR SOLVING THE POORLY DETERMINED TASKS OF ELECTRODYNAMICS AND NONLINEAR DYNAMICS

A.A. KURAEV, T.L. POPKOVA, V.V. MATVEENKO

### Abstract

The algorithms with specializing and stabilizing coefficients to provide sustainable solutions to systems of equations related to poorly determined tasks of electrodynamics and nonlinear dynamics are described. It demonstrates the use of the modified algorithms in the task of  $E_{0i}$ -waves propagation in irregular waveguide and dynamic model of Ressler's chaos. In the latter case it is demonstrated that "deterministic" (i.e. reproducible) chaos is impossible.

*Keywords:* poorly determined task, stable numerical method, supercritical waves in waveguide, dynamic chaos.

### Список литературы

1. Кураев А.А., Попкова Т.Л., Сеницын А.К. Электродинамика и распространение радиоволн. М., 2016.
2. Кураев А.А. Мощные приборы СВЧ. Методы анализа и оптимизации параметров. М., 1986.
3. Кураев А.А., Попкова Т.Л. // Вести НАНБ, сер.ФТН. 2001. № 4 С. 70–76.
4. Самарский А.А. Вабищевич П.Н., Матус П.П. Разностные схемы с операторными множителями. Минск, 1998.
5. Rössler O.E. // Phys. Letters. 1976. Vol. 57A. P. 397.