

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ:  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь по образованию  
в области информатики и радиоэлектроники в качестве  
учебно-методического пособия для студентов учреждений,  
обеспечивающих получение высшего образования  
по специальностям, закрепленным за УМО*

Минск БГУИР 2013

УДК 517.2(076)  
ББК 22.161.1я7  
П75

**Авторы:**

С. Е. Карпович, И. В. Дайняк, В. В. Жарский, С. Сорко, Л. Голдын

**Рецензенты:**

кафедра высшей математики №1 Белорусского национального  
технического университета (протокол №4 от 26 ноября 2012 г.);

директор Республиканского института инновационных технологий  
Белорусского национального технического университета,  
профессор, доктор технических наук В. Л. Соломахо

**Прикладные задачи по высшей математике: Дифференциальные**  
П75 уравнения : учеб.-метод. пособие / С. Е. Карпович [и др.]. – Минск :  
БГУИР, 2013. – 76 с. : ил.  
ISBN 978-985-488-960-3.

Учебно-методическое пособие по разделу курса высшей математики «Дифференциальные уравнения» включает прикладные задачи и примеры их решения для различных случаев формирования программируемых движений в мехатронных системах перемещений. Приведенные математические модели и постановки задач на математическое и компьютерное исследование полностью основываются на базовых знаниях по высшей математике, получаемых в техническом университете. Пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов технических специальностей.

Пособие подготовлено в рамках реализации рабочей программы сотрудничества учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» и Технического университета г. Белосток (Польша).

**УДК 517.2(076)**  
**ББК 22.161.1я7**

**ISBN 978-985-488-960-3**

© УО «Белорусский государственный  
университет информатики  
и радиоэлектроники», 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГРАММИРУЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ АНАЛИЗАТОРОВ .....	5
1.1 Принцип построения программы движения для мехатронной системы .....	5
1.2 Дифференциальные анализаторы управляющих устройств для реализации программы движения .....	10
1.3 Прикладные задачи на построение программируемых движений на основе подходов и методов голономных автоматических систем .....	14
2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КООРДИНАТНЫХ ПОЗИЦИОНЕРОВ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ .....	45
2.1 Прикладные задачи на построение динамических моделей базовых координатных позиционеров мехатронных систем .....	45
2.2 Формализованный подход к построению и анализу уравнений движения .....	57
2.3 Моделирование колебательного движения каретки координатного стола установки экспонирования .....	61
2.3.1 Расчетная схема и исходная математическая модель .....	61
2.3.2 Прикладные задачи на моделирование колебательного движения каретки .....	64
ЛИТЕРАТУРА .....	76

## ВВЕДЕНИЕ

Техническое и технологическое развитие в течение последних десятилетий характеризуется быстрым увеличением функциональной сложности современных изделий самого широкого назначения. Это достигается за счет эффективной междисциплинарной интеграции знаний естественных и технических наук, интеграции механических, электрических и электронных компонентов. Такие интегрированные системы, включающие в себя датчики (сенсоры), источники энергии, исполнительные механизмы, микропроцессоры и системы управления на их основе, называются мехатронными системами.

Термин «мехатроника» объединяет два понятия «механика» и «электроника». Под механикой подразумеваются современные прецизионные координатные системы и исполнительные механизмы с цифровыми электроприводами. Под электроникой подразумеваются, прежде всего, микроэлектроника и информатика, которые являются основой построения современных систем автоматического управления. Таким образом, мехатроника – это комплекс средств и принципов механики, электроники и информатики, синтез современных технологий, эффективно используемых для достижения конкретных целей по созданию наукоемких интегрированных технических изделий на основе интеграции механических систем с цифровыми электронными системами и информационными технологиями.

Для построения и реализации сложного пространственного движения по нескольким координатам одновременно служат, как правило, электромагнитные координатные модули движения и их конструктивные сочетания, обеспечивающие электрическое редуцирование и масштабирование параметров движения методами электронного дробления шага. При этом формирование требуемого закона перемещения осуществляется по математической модели в виде дифференциальных уравнений первого и второго порядков, включая дифференциальные уравнения в частных производных и системы дифференциальных уравнений.

В пособии приведена общая постановка задачи построения программируемых движений мехатронных систем перемещений, на основании которой рассмотрены два наиболее характерных для таких систем случая: математическое моделирование программируемых движений на основе дифференциальных анализаторов и формирование дифференциальных уравнений движения координатных позиционеров. Рассмотренные примеры и задачи взяты из результатов, полученных авторами в рамках реальных исследований, проводимых в учебно-научной лаборатории «Математическое моделирование технических систем и информационные технологии» при участии студентов, магистрантов и аспирантов БГУИР по разработке и алгоритмизации систем управления многокоординатными мехатронными устройствами под научным руководством д-ра техн. наук, профессора С. Е. Карповича и канд. техн. наук, доцента И. В. Дайняка.

# 1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГРАММИРУЕМЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ АНАЛИЗАТОРОВ

## 1.1 Принцип построения программы движения для мехатронной системы

Для построения программы перемещений в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^3$  с прямоугольной декартовой системой координат  $Oxyz$  задается некоторая кривая  $l$ , представляющая собой программу движения

$$l: \begin{cases} x = f_1(\varphi); \\ y = f_2(\varphi); \\ z = f_3(\varphi), \end{cases} \quad (1.1)$$

где параметр  $\varphi$  пробегает некоторый отрезок  $I = [\varphi_0, \varphi_1]$ . Примером кривой, задаваемой таким образом, может быть полувиток спирали, выражение которого имеет вид

$$x = \sin \varphi; \quad y = \cos \varphi; \quad z = \varphi, \quad (1.2)$$

где  $\varphi \in [0, \pi]$ .

Параметр  $\varphi$  в выражении (1.1) произволен, то есть никак не связан с возможностями и способами прохождения кривой  $l$ . Например, тот же полувиток (1.2) спирали может быть задан и по-другому:

$$x = 2 \sin \varphi \cos \varphi; \quad y = 2 \cos^2 \varphi - 1; \quad z = 2\varphi, \quad (1.3)$$

где  $\varphi \in [0, \pi/2]$ , или в виде

$$x = \sqrt{1 - \varphi^2}; \quad y = \varphi; \quad z = \arccos \varphi, \quad (1.4)$$

где  $\varphi \in [-1, 1]$ .

Таким образом, хотя параметрические представления (1.2), (1.3) и (1.4) различны, множества точек в пространстве  $\mathbf{R}^3$ , определяемые ими, совпадают, то есть (1.2), (1.3) и (1.4) задают в  $\mathbf{R}^3$  одну и ту же кривую.

Построение управляемого движения точки по кривой  $l$  сводится к воспроизведению этой кривой с помощью устройства – дифференциального анализатора, управляющее воздействие которого в каждый момент времени  $t$  заключается в изменении скорости этой точки по каждой координате, которое описывается линейной функцией текущих фазовых координат с зависящими от времени  $t$  коэффициентами. Эти коэффициенты и есть предмет управления. Кроме того, заданы ограничения, которым должен удовлетворять максимально возможный модуль  $v$  скорости движения точки по этой кривой. Обычно эти

ограничения заданы в виде закона  $v = v(t)$  зависимости модуля максимальной скорости от времени и определяются типом управляющего устройства. Как правило, график функции  $v = v(t)$  является трапецией (рисунок 1.1).

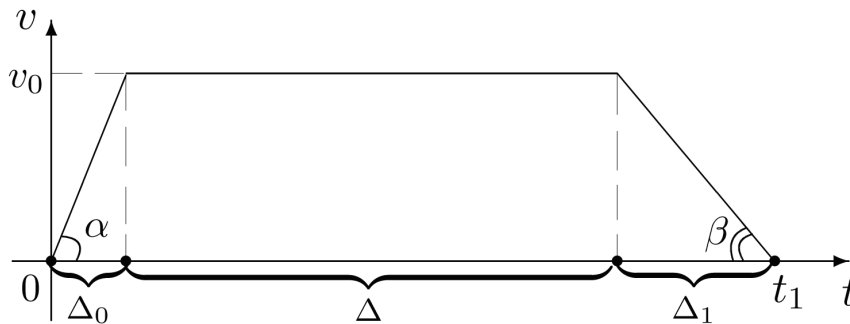


Рисунок 1.1 – График зависимости модуля максимальной скорости от времени

На рисунке 1.1  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$  – участки разгона и торможения точки соответственно (их длины фиксированы), а  $\Delta$  – участок постоянства скорости  $v_0$ , который может выбираться сколь угодно большим (таким, чтобы обеспечить прохождение точкой всей кривой). Учитывая все сказанное выше, можно сформулировать следующую задачу: нужно так выбрать управление – коэффициенты  $u_{ij}(t)$ , где  $i, j = 1, 2, 3$ , в системе линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка –

$$\begin{cases} \dot{x} = u_{11}(t)x + u_{12}(t)y + u_{13}(t)z; \\ \dot{y} = u_{21}(t)x + u_{22}(t)y + u_{23}(t)z; \\ \dot{z} = u_{31}(t)x + u_{32}(t)y + u_{33}(t)z, \end{cases} \quad (1.5)$$

чтобы фазовая кривая этой системы, начавшись в начальный момент времени вектором  $[f_1(\varphi_0), f_2(\varphi_0), f_3(\varphi_0)]^T$ , за некоторый промежуток времени описала кривую  $l$  и только ее, причем чтобы в каждый момент времени  $t$  движения модуль скорости точки, воспроизводящей кривую  $l$ , не превосходил  $v(t)$ .

Перейдем в задании кривой  $l$  (1.1) от параметра  $\varphi$  (он произволен) к естественному, или как его еще называют, натуральному параметру  $s$  – длине кривой. После такого перехода (перепараметризации) параметрическое задание кривой  $l$  будет иметь вид

$$l: \begin{cases} x = x(s); \\ y = y(s); \\ z = z(s); \end{cases} \quad (1.6)$$

$$s \in [0, S_\ell],$$

где  $S_\ell$  – длина кривой  $l$ .

Поскольку закон изменения модуля максимальной скорости точки при движении вдоль кривой задан в виде  $v = v(t)$ , то можно найти закон изменения длины пути  $s$ , пройденного точкой за время от 0 до  $t$ , по формуле

$$s = s(t) = \int_0^t v(\xi) d\xi. \quad (1.7)$$

Остановимся подробнее на вычислении интеграла (1.7), поскольку функция  $v(\xi)$ , если говорить о рассматриваемом ее задании, дана нам только с точностью до величины  $\Delta$  – длины отрезка ее постоянства. Обозначим через  $L$  величину

$$L = S_l - \frac{v_0}{2}(\Delta_0 + \Delta_1), \quad (1.8)$$

то есть  $L$  – это разность между длиной кривой  $l$  и длиной, которую проходит точка на участках разгона и торможения.

Пусть  $L > 0$ . Тогда положим в задании функции  $v = v(t)$  участок постоянства скорости  $\Delta = \frac{L}{v_0}$  и вычислим интеграл (1.7) от теперь уже полностью заданной функции  $v = v(t)$  (см. рисунок 1.1).

Пусть теперь  $L \leq 0$ . Тогда если требовать, чтобы кривая  $l$  была пройдена за наименьшее время, то участка постоянства скорости с некоторым  $v_1 \leq v_0$  быть не может и, как легко подсчитать (площадь под графиком  $v = v(t)$  должна быть равна  $S_l$ ), функция  $v = v(t)$  имеет вид, показанный на рисунке 1.2, где

$$t_1 = \sqrt{\frac{2S_\ell(k_1 + k_2)}{k_1 \cdot k_2}}; \quad \tau = \frac{k_2 \cdot t_1}{k_1 + k_2}; \quad v_1 = \sqrt{\frac{2S_\ell k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}}, \quad (1.9)$$

и  $k_1 = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $k_2 = \operatorname{tg} \beta$ .

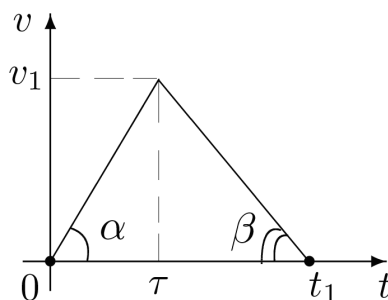


Рисунок 1.2 – График скорости изображающей точки

Это значит, что в случае  $L \leq 0$  интеграл (1.7) – это интеграл от функции, показанной на рисунке 1.2, параметры которой задаются формулами (1.9).

Теперь, воспользовавшись соотношением (1.7), перейдем в (1.6) от натурального параметра  $s$  (длины) к параметру  $t$  (время):

$$l: \begin{cases} x = x(s(t)); \\ y = y(s(t)); \\ z = z(s(t)) \end{cases} \quad (1.10)$$

или, обозначив в (1.10)

$$x(s(t)) = X(t); \quad y(s(t)) = Y(t); \quad z(s(t)) = Z(t),$$

окончательно получим

$$l: \begin{cases} x = X(t); \\ y = Y(t); \\ z = Z(t). \end{cases} \quad (1.11)$$

Итак, получены равенства (1.11), которые задают закон движения точки по кривой  $l$  в зависимости от времени  $t$  при заданном модуле скорости  $v = v(t)$  движения точки.

Алгоритмически этот основной переход  $\varphi \rightarrow s \rightarrow t$ , состоящий в замене произвольного параметра  $\varphi$  в задании кривой  $l$  к временному параметру  $t$ , можно описать с помощью следующих шагов.

**Шаг 1.** Взяв кривую  $l$  в форме (1.1), вычисляем длину  $s = s(\varphi)$  кривой  $l$  как функцию параметра  $\varphi$ :

$$s(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{(f_1'(\varphi))^2 + (f_2'(\varphi))^2 + (f_3'(\varphi))^2} d\varphi, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]. \quad (1.12)$$

Функция  $s = s(\varphi)$  – возрастающая на отрезке  $[\varphi_0, \varphi_1]$ , поэтому существует обратная ей функция  $\varphi = \omega(s)$ ,  $s \in [0, S_l]$ , где  $S_l = s(\varphi_1)$ . Сделаем замену переменной:

$$l: \begin{cases} x = f_1(\omega(s)); \\ y = f_2(\omega(s)); \\ z = f_3(\omega(s)) \end{cases} \quad (1.13)$$

или, обозначив  $f_1(\omega(s)) = x(s)$ ,  $f_2(\omega(s)) = y(s)$ ,  $f_3(\omega(s)) = z(s)$ , получим другую параметризацию (1.6) кривой  $l$  через ее натуральный параметр  $s$ .

**Шаг 2.** Этот шаг аналогичен шагу 1: вычислим интеграл (1.7), то есть найдем  $s = s(t)$  и, сделав замену  $s = s(t)$  в (1.6), или, что то же, в (1.13), получим задание кривой  $l$  через временной параметр  $t$  в виде (1.10) или (1.11).

Пусть кривая  $l$  задана формулами (1.11), в которых параметр  $t$  – время (к этим формулам мы приходим с помощью шагов 1 и 2). Нужно выбрать



коэффициенты-управления  $u_{ij}(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , так, чтобы система дифференциальных уравнений (1.5) имела решение  $[X(t), Y(t), Z(t)]^T$ , где  $X(t), Y(t), Z(t)$  – функции (1.11). При этом коэффициенты-управления  $u_{ij}(t)$ , где  $i, j = 1, 2, 3$ , ищутся в классе непрерывных функций.

В такой общей (то есть если считать функции  $u_{ij}$  не зависящими друг от друга) постановке задача легко разрешима – можно указать бесконечное множество систем (1.5), реализующих любую кривую  $l$ . Поэтому мы можем заранее задаться каким-либо критерием качества управляющей системы (1.5) и искать коэффициенты-управления в этом классе. Например, можно считать, что коэффициенты  $u_{ij}$  не должны превосходить по абсолютной величине некоторую константу, или что матрица коэффициентов системы (1.5) должна иметь заранее заданный вид, или что число не тождественно нулевых коэффициентов должно быть минимальным и т.д.

Так как система (1.5) удовлетворяет теореме существования и единственности решения и всегда имеет тождественно нулевое решение, то никакая ее фазовая кривая  $l$  не может проходить через начало координат. Это условие считаем в дальнейшем выполненным, то есть для  $\forall t$

$$X^2(t) + Y^2(t) + Z^2(t) \neq 0, \quad (1.14)$$

где  $X(t), Y(t), Z(t)$  – функции (1.11).

Если заранее на матрицу коэффициентов системы (1.5) не накладывать никаких дополнительных ограничений, то для любой кривой  $l$ , не проходящей через начало координат, можно определить коэффициенты  $u_{ij}(t)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  системы (1.5) сразу и в общем виде, так чтобы  $l$  была ее фазовой кривой. Действительно, учитывая выражение (1.14) и обозначая

$$D = X^2(t) + Y^2(t) + Z^2(t),$$

положим:

$$\begin{aligned} u_{11}(t) &= \frac{X(t)\dot{X}(t)}{D}; & u_{12}(t) &= \frac{Y(t)\dot{X}(t)}{D}; & u_{13}(t) &= \frac{Z(t)\dot{X}(t)}{D}; \\ u_{21}(t) &= \frac{X(t)\dot{Y}(t)}{D}; & u_{22}(t) &= \frac{Y(t)\dot{Y}(t)}{D}; & u_{23}(t) &= \frac{Z(t)\dot{Y}(t)}{D}; \\ u_{31}(t) &= \frac{X(t)\dot{Z}(t)}{D}; & u_{32}(t) &= \frac{Y(t)\dot{Z}(t)}{D}; & u_{33}(t) &= \frac{Z(t)\dot{Z}(t)}{D}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $X(t), Y(t), Z(t)$  – функции (1.11).

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что вектор-функция  $[X(t), Y(t), Z(t)]^T$  является решением системы (1.5) с таким образом определенными коэффициентами, а значит,  $l$  – ее фазовая кривая.

## 1.2 Дифференциальные анализаторы управляющих устройств для реализации программы движения

Среди современных машин, автоматических устройств и разнообразных технических средств автоматизации можно выделить широкий класс систем, поведение которых задается с точностью до кривых, поверхностей, в общем случае – до пересечения многообразий, на котором необходимо сформировать траекторию с заданными свойствами. Задание для таких систем может быть записано в виде конечных уравнений, связывающих переменные и время, определяющие текущее состояние технической системы. Такие автоматические системы, разрабатываемые на голономных заданиях, характеризуются тем, что построение управляющей математической модели является важнейшей задачей.

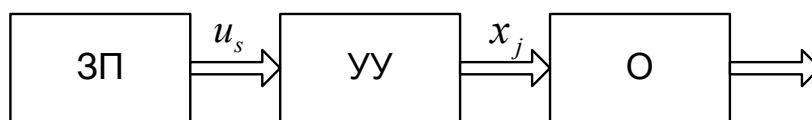
Голономная автоматическая система может быть описана системой дифференциальных уравнений, структура которых определяет поведение системы с точностью до многообразия. При этом общими условиями алгоритма функционирования является выполнение соотношений

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.16)$$

Функции  $F_j$  между  $(n + 1)$  переменными параметрами системы, включая параметр  $t$ , являются дифференцируемыми функциями в рассматриваемой области изменения переменных. Кроме выполнения условия (1.16), алгоритм функционирования этих систем должен включать в себя траекторные задания, устанавливать движение в заданном направлении, осуществлять синтез генерирующих функций, обеспечивающих движение изображающей точки с заданной скоростью и ускорением.

На основании условий (1.16) можно определить, как это будет показано ниже, в каждом случае свою структуру дифференциальных уравнений, на основании которых синтезировать управляющее устройство в автоматической системе. При этом в дифференциальных уравнениях, описывающих управляющую систему, необходимо установить число и принадлежность произвольных функций  $u_s$ , которые могут быть использованы как управления для задания движения системы на заданном многообразии в соответствии с условием (1.16). Две основных разновидности голономных автоматических систем представлены на рисунках 1.3 и 1.4.

На рисунке 1.3 изображена укрупненная структурная схема голономной автоматической системы без обратной связи, состоящая из управляющего устройства (УУ) и исполнительного устройства или объекта (О). Управляющее устройство в этом случае является генератором управляющих воздействий  $x_j$ , подаваемых на объект для того, чтобы принудить его к перемещению по заданному многообразию в нужном направлении. Функции управления  $u_s$ , подаваемые на вход управляющего устройства, являются независимыми, обеспечивают инвариантность выполняемого задания от помех и динамических свойств исполнительных устройств.

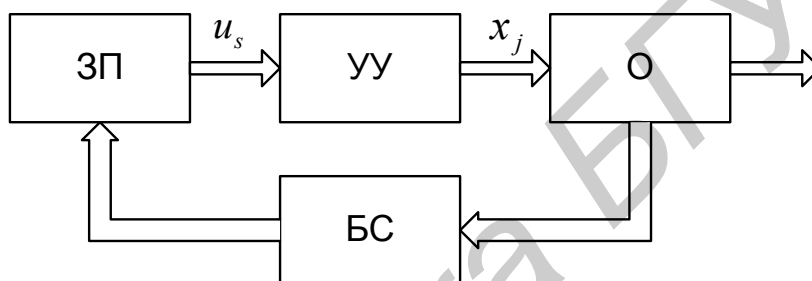


*ЗП – задающая программа;*

*УУ – управляющее устройство; О – объект*

Рисунок 1.3 – Голономная система без обратной связи

На рисунке 1.4 изображена укрупненная структурная схема той же голономной системы, что и на рисунке 1.3, но с обратной связью, когда функции управления  $u_s$  подстраиваются в зависимости от показателей качества исполнения управляющих воздействий  $x_j$ . Показателем качества может быть, например, погрешность исполнительной следящей системы.



*ЗП – задающая программа; УУ – управляющее устройство; О – объект; БС – блок сравнения*

Рисунок 1.4 – Голономная система с обратной связью

В современных системах управления вычислительные функции управляющих устройств могут быть выделены в формирующем команды  $x_j$  внешнем контроллере (УУ на рисунках 1.3 и 1.4) или могут быть полностью сосредоточены в задающей программе более высокого уровня. Как в первом, так и во втором случае необходимо осуществлять синтез так называемых «дифференциальных анализаторов», воспроизводящих ту или иную функцию движения путем нахождения дифференциальных уравнений, решением которых и будет воспроизводимая функция.

Управляющее устройство вырабатывает сигналы  $x_j$ , управляющие объектом, поведение которого реализуется с точностью до того или иного многообразия. Управляющее устройство синтезируется на основе дифференциальных анализаторов, при этом в нем выделяются произвольные коэффициенты, которые используются как параметры управления. Варьируя эти параметры, можно задавать ту или иную траекторию на заданном многообразии.

Дифференциальные анализаторы могут быть построены для воспроизведения дифференциальных функций с любым числом переменных, причем в

качестве метода синтеза может быть использован прием обращения в тождество уравнения, полученного дифференцированием исходной функции по параметру.

Дифференциальный анализатор появился в начале XX века как механическое вычислительное устройство, реализующее функцию интегрирования. В первых дифференциальных анализаторах считалось необходимым иметь четыре типа основных блоков: масштабные, суммирующие, интегрирующие и блоки функционального преобразования. На основании конечного числа этих блоков были разработаны способы воспроизведения непрерывных функций одной или нескольких переменных со сколь угодно большой заранее заданной точностью. Дифференциальный анализатор являлся устройством, составленным из сумматоров и интеграторов, в которых осуществляется интегрирование по Стильтьесу.

В зависимости от принципа действия (механический, электромеханический, пневматический, электронный и т.д.) схемы интегрирующих и суммирующих блоков несколько отличаются друг от друга. Так, в электронных интеграторах постоянного тока интегрирование по Стильтьесу осуществляется введением дополнительного блока умножения, в котором реализована операция

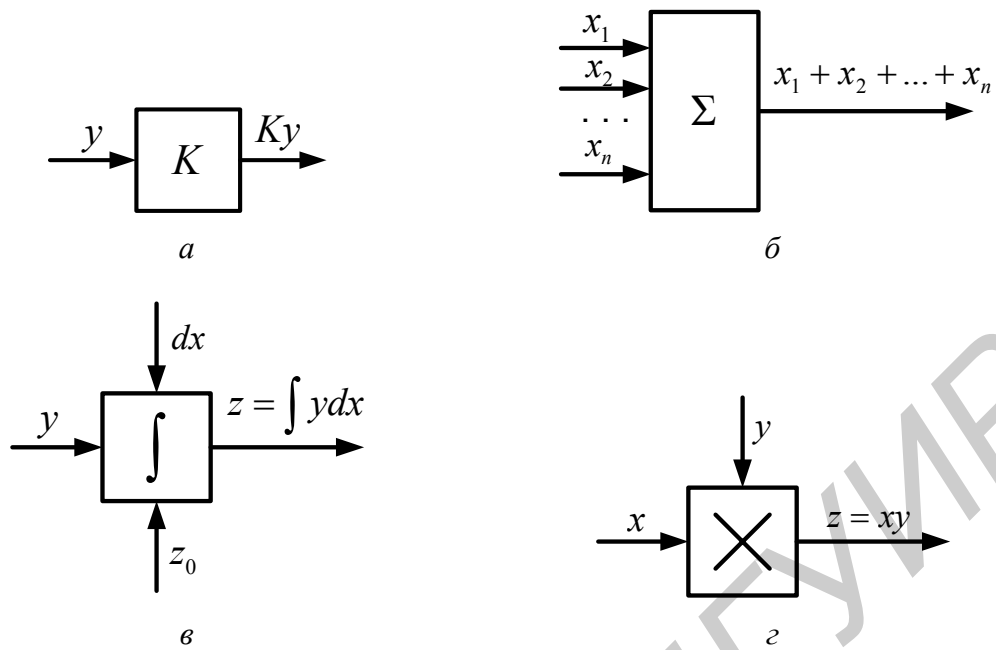
произведения двух переменных величин  $y$  и  $\frac{dx}{dt}$ . Действительно, если  $z = \int y dx$ ,

то  $z = \int y \frac{dx}{dt} dt$ , где  $y \frac{dx}{dt} = w$  является произведением двух величин. С учетом

этого окончательно имеем  $z = \int w dt$ .

При разработке схем дифференциальных анализаторов используется блочно-модульный принцип построения, когда отдельно указывают масштабные блоки, сумматоры и интеграторы. Масштабный блок обозначается квадратом с записанным множителем (рисунок 1.5, а), суммирующий блок – квадратом со знаком  $\sum$  (сигма) внутри со входами слагаемых и выходом суммы (рисунок 1.5, б), интегрирующий блок (рисунок 1.5, в) – квадратом со знаком  $\int$  (интеграл) с указанием интегрируемой функции  $y$ , интегрирующей  $dx$  и начальных условий  $z_0$ . Блок умножения, в котором выполняется операция произведения двух переменных, представлен на рисунке 1.5, г.

При синтезе дифференциальных анализаторов по дифференциальным уравнениям фактически находится структурная схема непрерывного вычислительного устройства, по которой на основе формальной замены непрерывных элементов цифровыми синтезируется структурная схема цифрового аналога или моделирующая программа голономной автоматической системы.



*a – масштабный блок; б – суммирующий блок;  
 в – интегрирующий блок; г – блок умножения*

Рисунок 1.5 – Обозначения основных блоков, используемых при синтезе дифференциальных анализаторов

Синтез дифференциальных анализаторов, воспроизводящих ту или иную функцию, сводится к нахождению дифференциальных уравнений, решением которых и будет воспроизводимая функция. Это обратная задача в теории дифференциальных уравнений, которая в общем случае имеет множество решений. Исходя из этого был разработан параметрический метод синтеза дифференциальных анализаторов, на основании которого любая непрерывная функция сколь угодно большого числа переменных может быть представлена в виде конечной суперпозиции непрерывных функций одной переменной и операций сложения. Таким образом, задача синтеза дифференциального анализатора для воспроизведения той или иной функции, представляющей программу движения инструмента, может быть сведена к задаче синтеза дифференциального анализатора для воспроизведения функции одной переменной.

Синтез системы для воспроизведения заданных движений начинается с нахождения дифференциальных уравнений, решением которых и являются функции задаваемых перемещений. Но не для любых функций, особенно – многих переменных, удастся указать такую параметризацию, которая позволяет синтезировать простейшую воспроизводящую схему. Для упрощения решения во многих случаях представляется возможным, минуя параметрическое представление, сразу найти дифференциальные уравнения, решение которых имеет аналитический вид

$$x = x(t); y = y(t). \quad (1.17)$$

В этом случае при аналитическом построении дифференциального уравнения анализатора исходят из внутренних свойств функции. Пусть эта функция  $n$  переменных имеет вид

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (1.18)$$

Будем искать систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{d\varphi} = f_i; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.19)$$

решение которых удовлетворяет условию (1.18) в заданной области  $M$  изменения переменных.

В уравнениях (1.19)  $\varphi$  является аргументом синтезируемого дифференциального анализатора, а функции  $f_i$  требуется определить. Продифференцировав уравнение (1.18) по  $\varphi$ , получим условие

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.20)$$

которое может быть использовано для отыскания функций  $f_i$ . Будем искать эти функции такими, чтобы обратив уравнение (1.20) в тождество, так как в этом случае решение системы (1.19) обращает при начальных условиях в тождество исходную неявную функцию (1.18). Эта задача по определению функций  $f_i$  имеет множество решений, связанных с тем, что в общем виде  $f_i$  являются некоторыми функциями от частных производных  $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ , что и определяет

неоднозначность решения задачи нахождения структуры дифференциальных уравнений дифференциального анализатора.

При синтезе дифференциальных анализаторов голономных автоматических систем, как правило, искомые функции  $f_i$  определяются как линейные функции частных производных  $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ , тем самым обеспечивая однозначность решения.

### **1.3 Прикладные задачи на построение программируемых движений на основе подходов и методов голономных автоматических систем**

#### **Задача 1.1 Перемещение по параболе на плоскости**

Рассмотрим синтез вычислительного алгоритма, построенного на принципах дифференциального анализатора. Необходимо синтезировать такую вычислительную схему, чтобы точка, координаты которой являются

«выходами», перемещалась по кривой второго порядка, общее уравнение которой имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (1.21)$$

Проанализируем структуру вычислительного устройства на примере реализации параболической кривой (аналогичные рассуждения можно провести для окружности, эллипса, гиперболы).

В общем случае парабола представляет собой многочлен второй степени, получаемый из (1.21) в виде

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0. \quad (1.22)$$

Передаточная функция управляющей системы, реализующей движение по параболе, будет иметь вид

$$W(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}. \quad (1.23)$$

Таким образом, ядром структурной схемы устройства для воспроизведения параболической кривой будет разомкнутая цепочка, содержащая два последовательно соединенных интегрирующих звена.

В случае воспроизведения криволинейных контуров операция интегрирования аппроксимируется цифровым устройством с помощью последовательных операций сложения. В этом случае основная вычислительная операция

$$\begin{cases} y = y_0 + \int dy; \\ dz = c y dx \end{cases} \quad (1.24)$$

заменяется операциями последовательных сложений

$$\begin{cases} y = y_0 + \sum \Delta y; \\ \Delta z = c y \Delta x. \end{cases} \quad (1.25)$$

Как видно из (1.25), основным цифровым узлом (устройством), или вычислительным модулем при моделировании является интегратор, имеющий отдельные входы для ввода приращений подынтегральной функции  $\Delta y$ , приращения аргумента  $\Delta x$  и выход для получения  $\Delta z$ . Передаточная функция интегратора имеет вид

$$W_1(s) = \frac{1}{T_{\text{и}} \cdot s}, \quad (1.26)$$

где  $T_{\text{и}}$  – постоянная интегрирования.

В системе цифрового устройства воспроизведения кривой второго порядка вторым звеном в полученной цепочке является интегрирующий

привод, непосредственно воспроизводящий заданные кривые. Передаточная функция разомкнутого привода для случая, когда выходной величиной является угол поворота вала двигателя  $\alpha$ , имеет вид

$$W_2(s) = \frac{\alpha(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{K_y K_d}{s(Ts + 1)}, \quad (1.27)$$

где  $K_y$  – коэффициент усиления усилителя;

$K_d$  – коэффициент усиления двигателя;

$T$  – электромеханическая постоянная времени двигателя.

Для замкнутого интегрирующего привода с обратной связью по скорости передаточная функция имеет вид

$$\Phi_2(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)} = \frac{(K_y + K_d)/(1 + K)}{s(1 + T_p s)}, \quad (1.28)$$

где  $W_3(s) = K_{\text{тт}}s$  – передаточная функция тахогенератора;

$K = K_y \cdot K_d \cdot K_{\text{тт}}$  – общий коэффициент усиления привода;

$$T_p = \frac{T}{(1 + K)}.$$

Таким образом, из анализа выражений (1.26) – (1.28) следует, что устройство воспроизведения кривых второго порядка является позиционной системой, удовлетворяет требованиям двойного интегрирования и следовательно, возможно синтезировать цифровой анализатор и цифровую систему автоматического воспроизведения указанных кривых, содержащую в своей структуре два последовательных интегрирующих звена.

Вычислительную схему устройства для воспроизведения кривых второго порядка на основании общего уравнения (1.21) будем искать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{12}x + a_{22}y + a_{23}}. \quad (1.29)$$

Заменяя (1.29) параметрическими уравнениями, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = \omega(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}); \\ \frac{dy}{d\varphi} = -\omega(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}), \end{cases} \quad (1.30)$$

где  $\omega$  – произвольное число, знак которого определяет направление, а величина – скорость движения изображающей точки.



В случае, когда контур описывается кривыми второго порядка, управляющие воздействия на исполнительную систему будут определяться уравнениями

$$\begin{cases} d\varphi = \omega dt; \\ \frac{dx}{d\varphi} = \omega(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}); \\ \frac{dy}{d\varphi} = -\omega(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}). \end{cases} \quad (1.31)$$

Известно, что, например, для параболы выполняется условие

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

из которого получим

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \lambda.$$

Тогда

$$\begin{cases} a_{11} = a_{12} \cdot \lambda; \\ a_{22} = \frac{a_{12}}{\lambda}. \end{cases}$$

Для получения скорости перемещения по координатам преобразуем систему (1.31) к виду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega^2(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}); \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}). \end{cases} \quad (1.32)$$

Тогда для параболической кривой из (1.32) получим

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \omega^2(a_{12}x + \frac{a_{12}}{\lambda}y + a_{23}); \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2(a_{12}\lambda x + a_{12}y + a_{13}). \end{cases} \quad (1.33)$$

Структурная схема вычислительного устройства (дифференциального анализатора), формирующего управляющие сигналы по координатным осям  $x$  и  $y$ , для воспроизведения кривых второго порядка и криволинейных контуров, аппроксимированных кривыми второго порядка, приведена на рисунке 1.6.

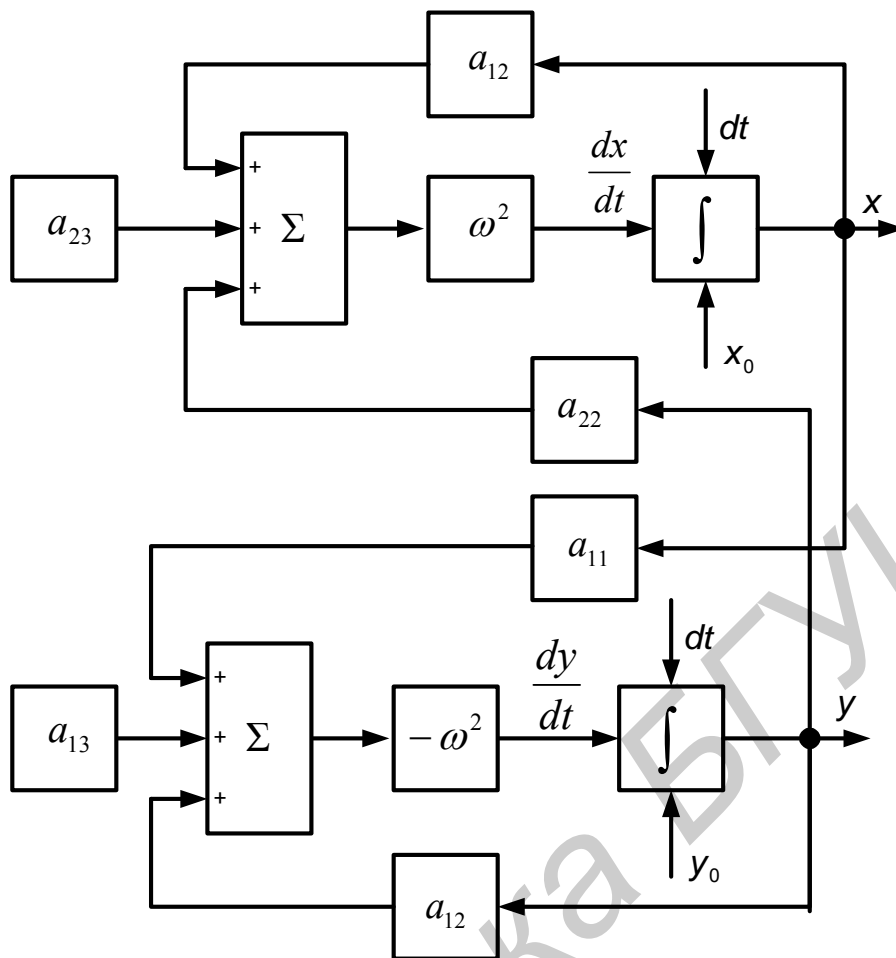


Рисунок 1.6 – Структурная схема вычислительного устройства для формирования криволинейных контуров второго порядка

Для моделирования алгоритма движения по параболе на плоскости, в соответствии с системой уравнений (1.33) составим в среде MATLAB/Simulink структурную схему дифференциального анализатора, изображающая точка которого движется по параболической кривой. Структурная схема вычислительного устройства, решающего систему (1.33), приведена на рисунке 1.7.

Результаты моделирования работы дифференциального анализатора с параметрами

$$\omega = -1; \quad a_{12} = 0,5; \quad a_{13} = -7; \quad a_{23} = -5$$

при начальных условиях

$$x_0 = 4; \quad y_0 = 10$$

и трех значениях параметра  $\lambda = 0,05$ ;  $\lambda = 0,1$  и  $\lambda = 0,5$  приведены на рисунках 1.8 – 1.10.

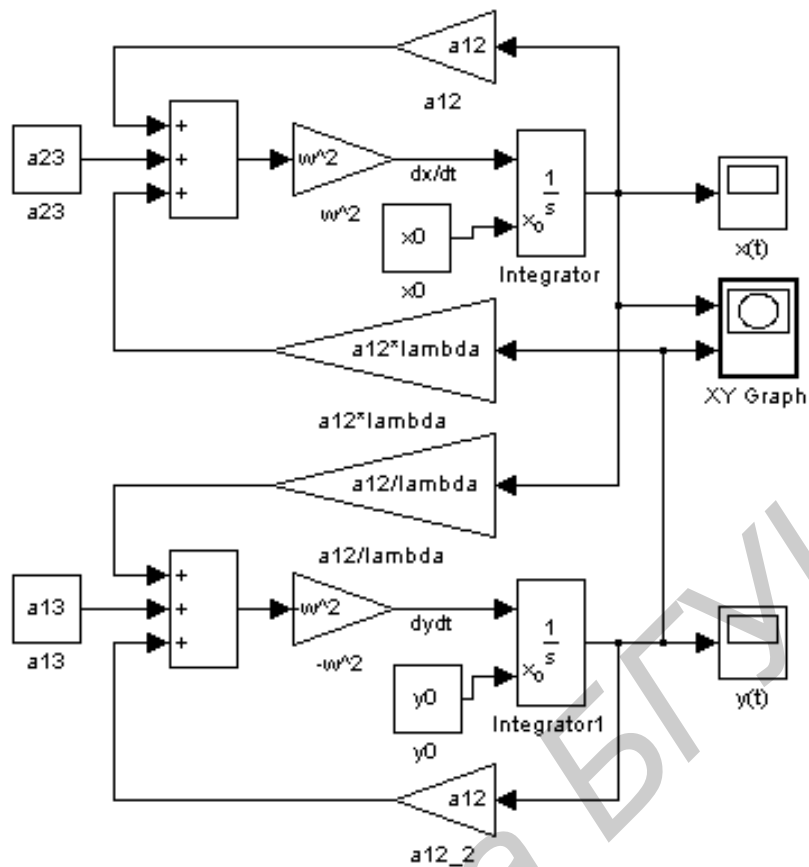


Рисунок 1.7 – Структурная схема дифференциального анализатора для воспроизведения параболы в MATLAB/Simulink

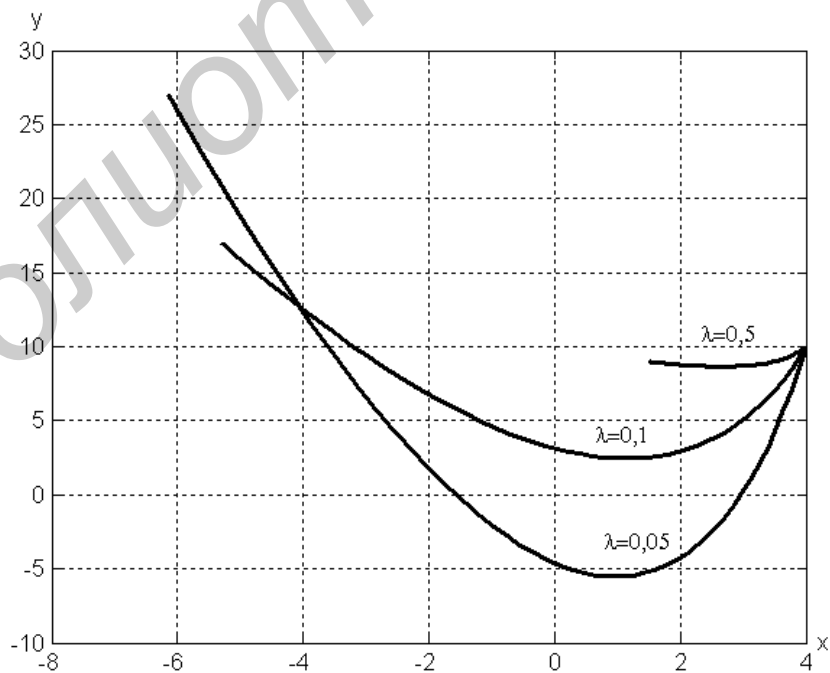


Рисунок 1.8 – Семейство парабол, воспроизводимых дифференциальным анализатором, при различных значениях параметра  $\lambda$

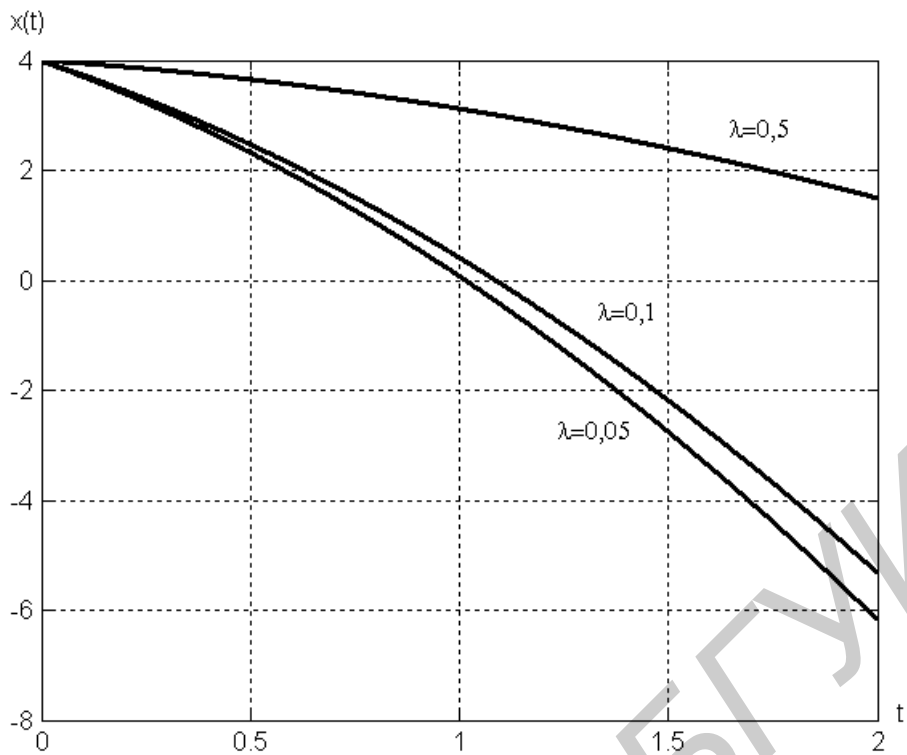


Рисунок 1.9 – Зависимость координаты  $x$  дифференциального анализатора, воспроизводящего параболические кривые, от времени

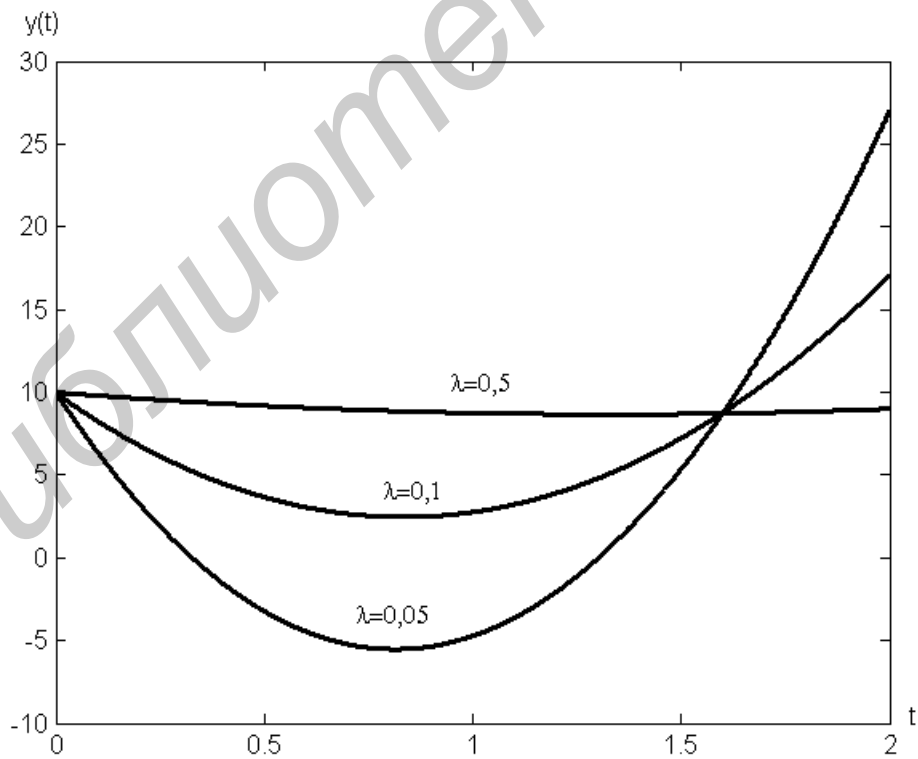


Рисунок 1.10 – Зависимость координаты  $y$  дифференциального анализатора, воспроизводящего параболические кривые, от времени

## Задача 1.2 Перемещение по окружности на плоскости

Синтезируем схему дифференциального анализатора, воспроизводящего окружности на плоскости  $xу$ , поскольку она будет отличаться от структуры, приведенной на рисунке 1.7.

Как известно, уравнение окружности имеет следующий вид:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0. \quad (1.34)$$

Искать схему устройства будем в виде структуры, которая описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = b_0 + b_1x + b_2y; \\ \frac{dy}{d\varphi} = c_0 + c_1x + c_2y. \end{cases} \quad (1.35)$$

Определим соотношения между коэффициентами уравнений в (1.35), которые должны выполняться для того, чтобы изображающая точка располагалась на окружности (1.34).

Полная производная по параметру  $\varphi$  от функции  $F(x, y) = 0$  тождественно равна нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\varphi} = 0. \quad (1.36)$$

Тождество (1.36) должно выполняться для любого параметрического задания  $x$  и  $y$ . Оно должно выполняться и при задании  $x$  и  $y$  в виде (1.35). Выполнение тождества (1.36) является необходимым условием того, чтобы изображающая точка устройства, решающего систему уравнений (1.35), располагалась на заданной кривой  $F(x, y) = 0$ . Исходя из этого, определим коэффициенты уравнений (1.35).

Найдем частные производные от  $F(x, y) = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y. \end{cases} \quad (1.37)$$

Подставив (1.35) и (1.37) в (1.36), получим

$$2x \cdot (b_0 + b_1x + b_2y) + 2y \cdot (c_0 + c_1x + c_2y) = 0.$$

После деления на 2 и приведения подобных слагаемых получим

$$b_1x^2 + c_2y^2 + b_0x + c_0y + (b_2 + c_1)xy = 0. \quad (1.38)$$

Для выполнения тождества (1.38) необходимо и достаточно, чтобы все его коэффициенты равнялись нулю. В итоге получим

$$b_1 = c_2 = b_0 = c_0 = 0; \quad b_2 = -c_1. \quad (1.39)$$

Если положить  $b_2 = u$ , то  $c_1 = -u$ .

Используя выражения (1.35), (1.39) и введенное обозначение, получим систему дифференциальных уравнений, определяющую структуру дифференциального анализатора для воспроизведения окружностей на плоскости:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = u \cdot y; \\ \frac{dy}{d\varphi} = -u \cdot x. \end{cases} \quad (1.40)$$

Вычислительное устройство, решающее систему уравнений (1.40), легко синтезируется на основе матричного метода. Структурная схема устройства приведена на рисунке 1.11.

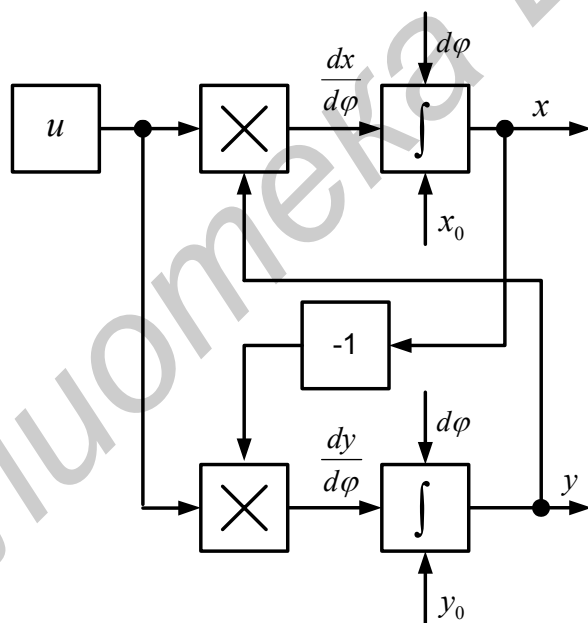


Рисунок 1.11 – Структурная схема дифференциального анализатора, воспроизводящего окружности на плоскости

Следует отметить, что параметр  $u$  может быть любой функцией. Вид этой функции определяет характер скорости движения изображающей точки по окружности.

Вид окружностей, обрабатываемых изображающей точкой при различных начальных условиях, приведен на рисунке 1.12.

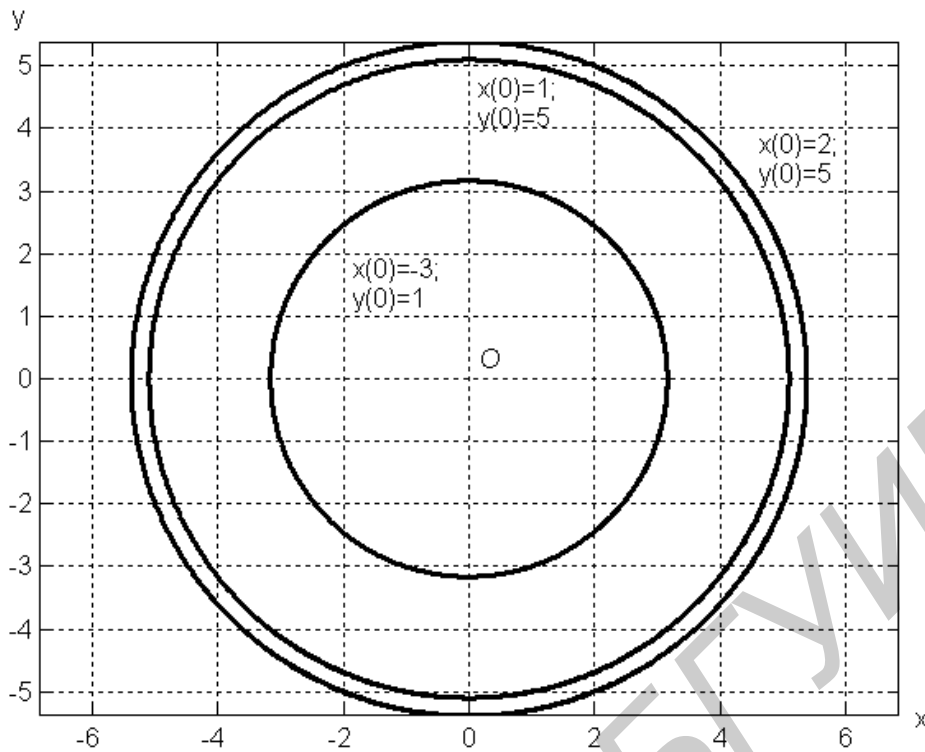


Рисунок 1.12 – Семейство окружностей, обрабатываемых дифференциальным анализатором при различных начальных условиях

Если в системе (1.40) для простоты принять  $u = 1$ , то структурная схема дифференциального анализатора значительно упростится. Система дифференциальных уравнений в этом случае примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = y; \\ \frac{dy}{d\varphi} = -x. \end{cases} \quad (1.41)$$

Структурная схема вычислительного устройства, решающего систему уравнений (1.41), представлена на рисунке 1.13.

Следует отметить, что приведенный дифференциальный анализатор будет воспроизводить окружности с радиусом  $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ , то есть вычислительное устройство будет работать при любых начальных условиях.

Если же необходимо, чтобы изображающая точка обрабатывала окружность с изначально заданным радиусом  $R$ , то на структурной схеме, приведенной на рисунке 1.11, вход  $y_0$  необходимо соединить с блоком, реализующим расчет по выражению  $y_0 = \pm\sqrt{R^2 - x_0^2}$ , где  $R$  – радиус окружности, которую должна обрабатывать изображающая точка. В этом случае структурная схема вычислительного устройства формирования окружности с явным заданием радиуса  $R$  будет иметь вид, представленный на рисунке 1.14.

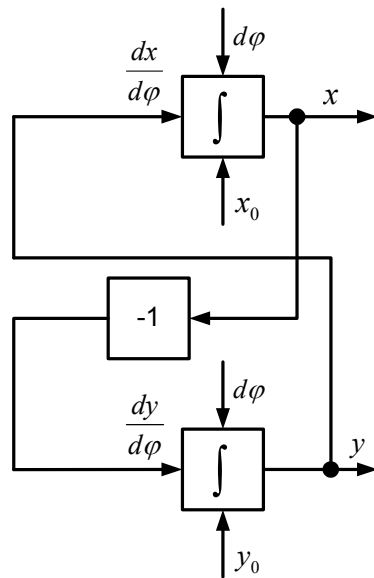


Рисунок 1.13 – Упрощенная структурная схема дифференциального анализатора, воспроизводящего окружности на плоскости

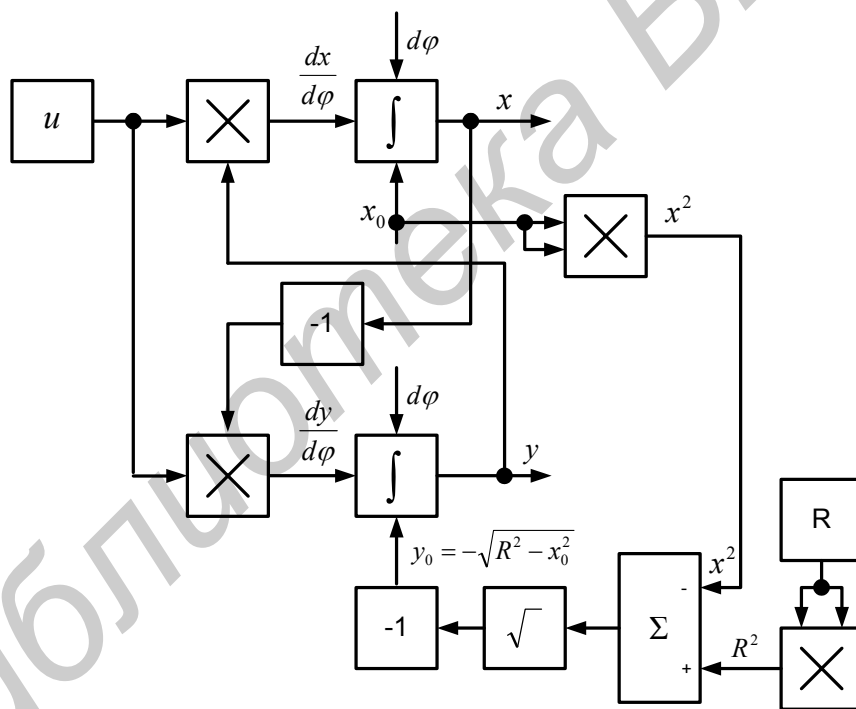


Рисунок 1.14 – Структурная схема вычислительного устройства для воспроизведения окружностей с явным заданием радиуса

### Задача 1.3 Перемещение по кривой на поверхности второго порядка

Рассмотрим параметрический метод синтеза вычислительного устройства для воспроизведения линий на поверхностях второго порядка на основе подхода голономных автоматических систем. Изображающая точка, координаты которой являются выходами дифференциального анализатора



голономной автоматической системы, будет перемещаться по определенным траекториям на поверхности второго порядка.

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (1.42)$$

Схему устройства будем искать в виде структуры, которая описывается системой дифференциальных уравнений в полных производных с линейными правыми частями от координат системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z; \\ \frac{dy}{d\varphi} = c_0 + c_1x + c_2y + c_3z; \\ \frac{dz}{d\varphi} = d_0 + d_1x + d_2y + d_3z. \end{cases} \quad (1.43)$$

Необходимо определить соотношения между коэффициентами уравнений системы (1.43), которые должны выполняться для того, чтобы изображающая точка располагалась на заданной поверхности.

Полная производная по  $\varphi$  от функции  $F(x, y, z) = 0$  тождественно равна нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = 0. \quad (1.44)$$

Это тождество должно выполняться для любого параметрического задания  $x, y, z$ , в том числе и при задании  $x, y, z$  в виде системы (1.43). Выполнение тождества (1.44) является необходимым условием того, чтобы изображающая точка устройства, решающего систему уравнений (1.43), располагалась на заданной поверхности  $F(x, y, z) = 0$ . Исходя из этого условия, определим соотношения между коэффициентами уравнений (1.43). Найдем частные производные функции  $F(x, y, z)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{31}z + a_{14}); \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(a_{22}y + a_{12}x + a_{23}z + a_{24}); \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2(a_{33}z + a_{23}y + a_{31}x + a_{34}). \end{cases} \quad (1.45)$$

Подставив (1.45) и (1.43) в (1.44) и приведя подобные члены, получим

$$\begin{aligned}
& f_{11}x^2 + f_{22}y^2 + f_{33}z^2 + f_{12}xy + \\
& + f_{23}yz + f_{31}zx + f_{14}x + f_{24}y + f_{34}z + f_{44} = 0,
\end{aligned}
\tag{1.46}$$

где  $f_{ij}$  – функции коэффициентов  $a_{ij}$ , характеризующих поверхность, и коэффициентов  $b_k, c_k, d_k$ , вводимых в программирующее устройство.

Так как (1.46) является тождеством, то для его удовлетворения необходимо и достаточно, чтобы все функции  $f_{ij}$  были равны нулю. Для определения 12 коэффициентов  $b_k, c_k, d_k$  получаем систему

$$\begin{cases}
a_{11}b_1 + a_{12}c_1 + a_{31}d_1 = 0; \\
a_{12}b_2 + a_{22}c_2 + a_{23}d_2 = 0; \\
a_{31}b_3 + a_{23}c_3 + a_{33}d_3 = 0; \\
a_{11}b_2 + a_{12}b_1 + a_{22}c_1 + a_{12}c_2 + a_{23}d_1 + a_{31}d_2 = 0; \\
a_{11}b_3 + a_{31}b_1 + a_{12}c_3 + a_{23}c_1 + a_{31}d_3 + a_{33}d_1 = 0; \\
a_{12}b_3 + a_{31}b_2 + a_{22}c_3 + a_{23}c_2 + a_{23}d_3 + a_{33}d_2 = 0; \\
a_{11}b_0 + a_{14}b_1 + a_{12}c_0 + a_{24}c_1 + a_{31}d_0 + a_{34}d_1 = 0; \\
a_{12}b_0 + a_{14}b_2 + a_{22}c_0 + a_{24}c_2 + a_{23}d_0 + a_{34}d_2 = 0; \\
a_{31}b_0 + a_{14}b_3 + a_{23}c_0 + a_{24}c_3 + a_{33}d_0 + a_{34}d_3 = 0; \\
a_{14}b_0 + a_{24}c_0 + a_{34}d_0 = 0
\end{cases}
\tag{1.47}$$

из 10 однородных линейных уравнений, одно из которых является комбинацией других. Три коэффициента могут быть заданы произвольно.

Уравнения (1.47) являются такими соотношениями между коэффициентами синтезируемого устройства, выполнение которых необходимо для того, чтобы изображающая точка располагалась на поверхности (1.42).

Следует отметить, что структура (1.45) может быть использована для воспроизведения кривых на поверхностях второго порядка лишь потому, что число коэффициентов в ней больше числа уравнений (1.47). Очевидно, могут быть предложены и другие структуры, которые удовлетворяют этому требованию.

Как видно из рассмотренного, для нахождения уравнений, определяющих структуру дифференциального анализатора, воспроизводящего кривые на поверхности, с помощью метода, описанного выше, необходимо решение громоздкой системы линейных уравнений в общем виде, что в большинстве случаев затруднительно.

Может быть предложена другая модификация данного метода, которая позволяет избавиться от этого неудобства и исследовать разнообразные структуры дифференциальных анализаторов в общем виде.

Положим

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2; \\ \frac{dy}{d\varphi} = \lambda_1 \psi_3 + \lambda_2 \psi_4; \\ \frac{dz}{d\varphi} = \lambda_1 \psi_5 + \lambda_2 \psi_6, \end{cases} \quad (1.48)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – неопределенные коэффициенты;

$\psi_k$  – произвольные функции,  $k = 1, 2, \dots, 6$ .

Подставив (1.48) в (1.44), получим уравнение

$$\lambda_1 \left( \psi_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \psi_3 \frac{\partial F}{\partial y} + \psi_5 \frac{\partial F}{\partial z} \right) + \lambda_2 \left( \psi_2 \frac{\partial F}{\partial x} + \psi_4 \frac{\partial F}{\partial y} + \psi_6 \frac{\partial F}{\partial z} \right) = 0,$$

которое обращается в тождество при

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\psi_2 \frac{\partial F}{\partial x} - \psi_4 \frac{\partial F}{\partial y} - \psi_6 \frac{\partial F}{\partial z}; \\ \lambda_2 = \psi_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \psi_3 \frac{\partial F}{\partial y} + \psi_5 \frac{\partial F}{\partial z}. \end{cases}$$

Подставив  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в (1.48), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = u_1 \frac{\partial F}{\partial y} - u_2 \frac{\partial F}{\partial z}; \\ \frac{dy}{d\varphi} = -u_1 \frac{\partial F}{\partial x} + u_3 \frac{\partial F}{\partial z}; \\ \frac{dz}{d\varphi} = u_2 \frac{\partial F}{\partial x} - u_3 \frac{\partial F}{\partial y}, \end{cases} \quad (1.49)$$

где  $u_1 = \psi_2 \psi_3 - \psi_1 \psi_4$ ;  $u_2 = \psi_1 \psi_6 - \psi_2 \psi_5$ ;  $u_3 = \psi_4 \psi_6 - \psi_3 \psi_6$ .

По уравнениям (1.49) может непосредственно составляться схема дифференциального анализатора, воспроизводящего кривые на любой поверхности  $F(x, y, z) = 0$ , причем задание  $u_s$  определяет ту или иную траекторию на ней. Вследствие произвольности  $u_s$  дифференциальный анализатор, структура которого описывается системой уравнений (1.49), позволяет воспроизводить любую траекторию на этой поверхности.

В соответствии с (1.49) структура дифференциального анализатора, воспроизводящего любые траектории на любых поверхностях второго порядка, будет описываться системой дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\varphi} = (a_{12}u_1 - a_{31}u_2)x + \\ \quad + (a_{22}u_1 - a_{23}u_2)y + (a_{23}u_1 - a_{33}u_2)z + (a_{24}u_1 - a_{34}u_2); \\ \frac{dy}{d\varphi} = (a_{31}u_3 - a_{11}u_1)x + \\ \quad + (a_{23}u_3 - a_{12}u_1)y + (a_{33}u_3 - a_{31}u_1)z + (a_{34}u_3 - a_{14}u_1); \\ \frac{dz}{d\varphi} = (a_{11}u_2 - a_{12}u_3)x + \\ \quad + (a_{13}u_2 - a_{22}u_3)y + (a_{31}u_2 - a_{23}u_3)z + (a_{14}u_2 - a_{24}u_3), \end{array} \right. \quad (1.50)$$

в которой  $u_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) представляют собой управляющие воздействия, определяющие параметры движения изображающей точки по поверхности второго порядка.

Могут быть предложены самые разнообразные методы обращения уравнения (1.44) в тождество. В частности, можно выразить первые производные координат через частные производные исходной функции  $F(x, y, z)$ :

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x}}; \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}}; \quad \frac{dz}{d\varphi} = -\frac{2}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

но это будет частный случай системы (1.49). Действительно, умножив  $\frac{dx}{d\varphi}$ ,  $\frac{dy}{d\varphi}$ ,

$\frac{dz}{d\varphi}$  на  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial z}$ , получим

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}; \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}; \quad \frac{dz}{d\varphi} = -2 \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Эта система определяет лишь одну траекторию на поверхности.

Вместо подстановки (1.48) может быть использована аналогичная подстановка в более общем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\varphi} = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \dots + \lambda_j \psi_j; \\ \frac{dy}{d\varphi} = \lambda_1 \psi_{j+1} + \lambda_2 \psi_{j+2} + \dots + \lambda_j \psi_{2j}; \\ \frac{dz}{d\varphi} = \lambda_1 \psi_{2j+1} + \lambda_2 \psi_{2j+2} + \dots + \lambda_j \psi_{3j}, \end{array} \right. \quad (1.51)$$

где  $\lambda_j$  – неопределенные коэффициенты ( $j = 1, 2, \dots, l_1$ );

$\psi_k$  – произвольные функции ( $k = 1, 2, \dots, l_2$ ).

В системе (1.51) может быть взято как произвольное число коэффициентов  $\lambda_j$ , так и произвольное число функций  $\psi_k$ . Во избежание

тривиального случая  $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{dz}{d\varphi} = 0$  необходимо, чтобы  $l_1 \geq 2$ .

Если произвольные коэффициенты  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в системе (1.50) являются постоянными величинами, то дифференциальный анализатор будет воспроизводить плоские кривые.

#### Задача 1.4 Перемещение по кривой на сфере

Рассмотрим построение структурной схемы дифференциального анализатора для воспроизведения кривых на сфере.

Уравнение сферы с центром в начале координат имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (1.52)$$

где  $R$  – радиус сферы.

Для сферы значения коэффициентов в общем уравнении поверхности второго порядка (1.42) следующие:

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1; \\ a_{12} = a_{23} = a_{31} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0; \\ a_{44} = -R^2. \end{cases} \quad (1.53)$$

Подставив коэффициенты (1.53) в систему (1.50), получим, что структура устройства, воспроизводящего кривые на сфере, определяется системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = u_1 y - u_2 z; \\ \frac{dy}{d\varphi} = -u_1 x + u_3 z; \\ \frac{dz}{d\varphi} = u_2 x - u_3 y. \end{cases} \quad (1.54)$$

В соответствии с приведенной системой уравнений составляется блок-схема дифференциального анализатора, воспроизводящего кривые на сфере, представленная на рисунке 1.15.

Следует отметить, что для приведенной схемы может быть использовано управление скоростью, когда управляющие воздействия  $u_1, u_2, u_3$  являются функциями времени  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ .

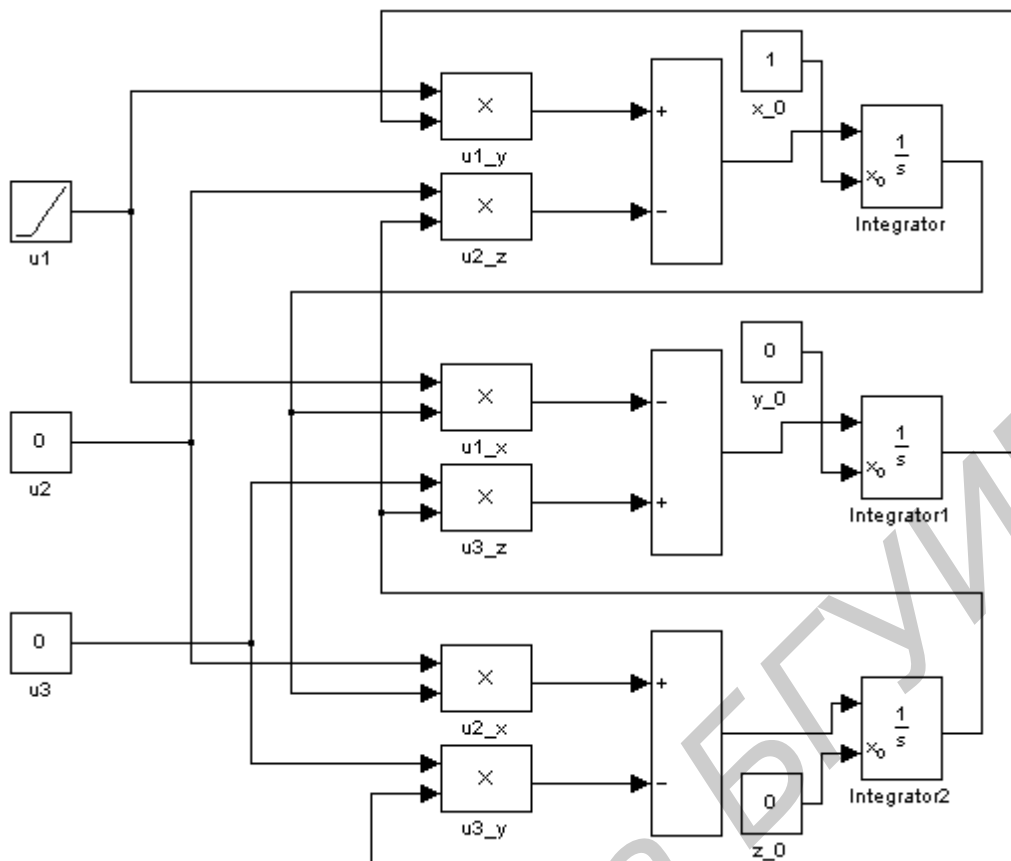


Рисунок 1.15 – Структурная схема дифференциального анализатора, воспроизводящего кривые на сфере

При проведении компьютерного моделирования с помощью дифференциального анализатора, представленного на рисунке 1.15, было рассмотрено несколько случаев (примеров) движения изображающей точки при различных управляющих функциях  $u_1, u_2, u_3$ , которые, как уже упоминалось выше, определяют параметры ее движения (скорость движения, вид и форму кривой, лежащей на сфере). Время моделирования, а также начальные условия от эксперимента к эксперименту оставались неизменными, что позволило оценить влияние параметров управляющих функций  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$  на параметры движения изображающей точки, координатами которой являются выходные координаты  $x, y, z$  дифференциального анализатора голономной автоматической системы.

Здесь следует отметить, что управление скоростью может быть осуществлено либо путем задания сложных функций управляющих воздействий  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ , либо путем изменения структуры самого дифференциального анализатора.

Ниже приведены результаты компьютерного моделирования в среде MATLAB/Simulink при различных управляющих функциях  $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$  и начальных условиях  $x_0, y_0, z_0$ .

### Пример 1.1

Управляющие функции:  $u_1(t) = 5$ ;  $u_2(t) = 5$ ;  $u_3(t) = 5$ ;

начальные условия:  $x_0 = 1$ ;  $y_0 = 0$ ;  $z_0 = 0$ ;

время моделирования:  $t = 10$  с.

Результаты моделирования представлены на рисунках 1.16 – 1.18.

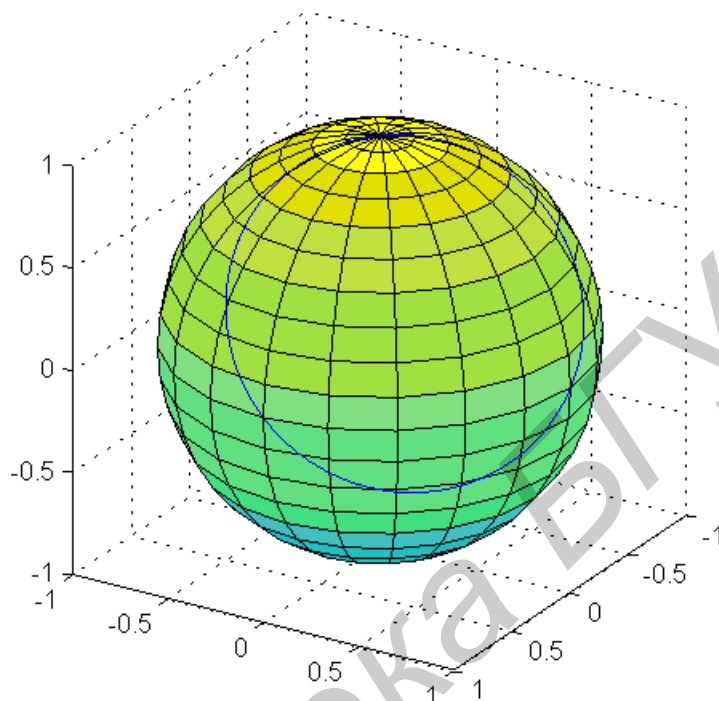


Рисунок 1.16 – Траектория движения изображающей точки по сфере

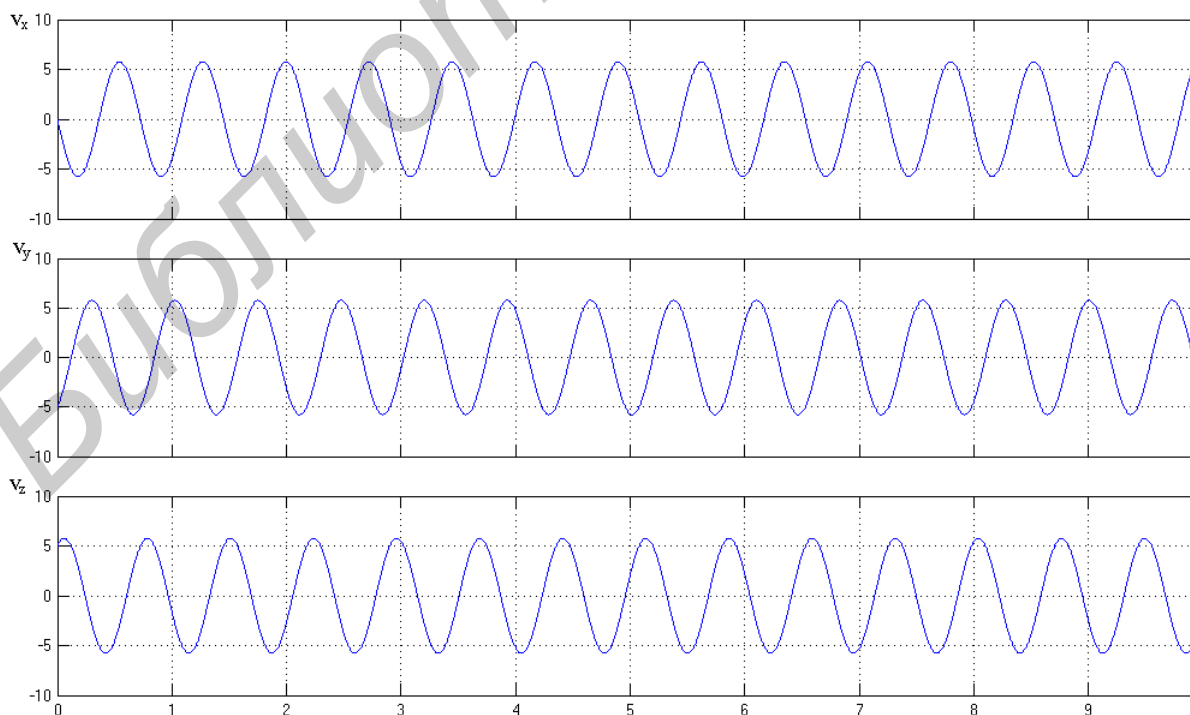


Рисунок 1.17 – Графики скоростей движения по координатам



Рисунок 1.18 – График квадрата полной скорости

Из приведенных рисунков видно, что задание постоянных и равных между собой управляющих функций  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  приводит к движению по окружности, причем изменением задания начальной точки  $(x_0, y_0, z_0)$  можно менять положение окружности на сфере. Из исходной модели построения программы движения следует, что суммарная скорость будет оставаться постоянной, не зависящей от времени, что и подтверждается графиком, приведенным на рисунке 1.18.

### Пример 1.2

Управляющие функции:  $u_1(t) = t$ ;  $u_2(t) = 5$ ;  $u_3(t) = 5$ ;

начальные условия:  $x_0 = 1$ ;  $y_0 = 0$ ;  $z_0 = 0$ ;

время моделирования:  $t = 10$  с.

На рисунке 1.19 представлена траектория движения изображающей точки дифференциального анализатора по сфере, графики скоростей по координатам и квадрата траекторной скорости приведены на рисунках 1.20 и 1.21 соответственно.

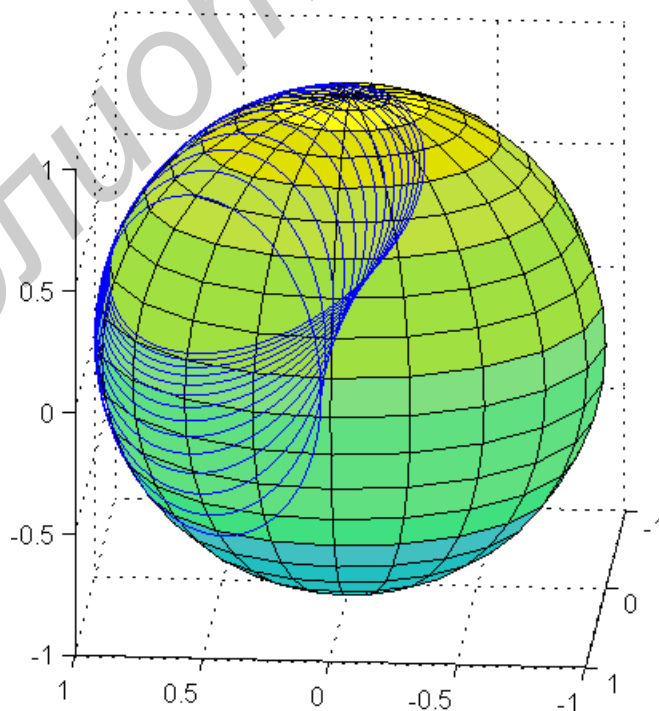


Рисунок 1.19 – Траектория движения изображающей точки по сфере



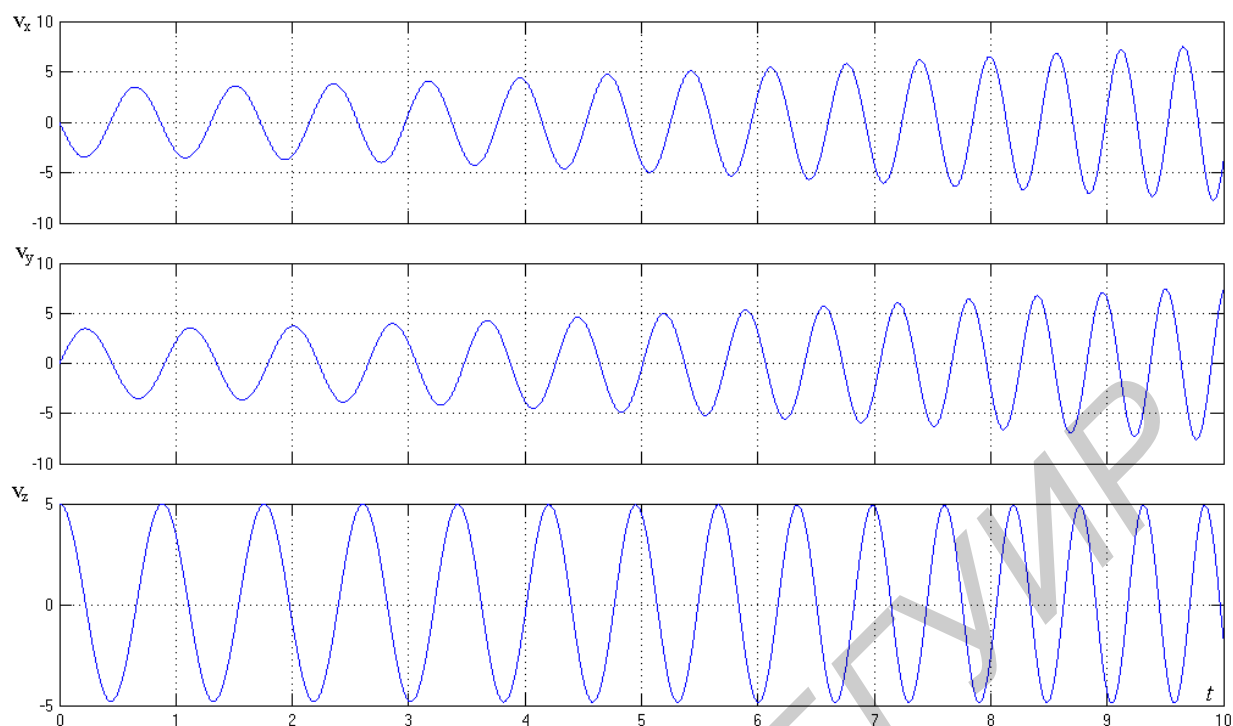


Рисунок 1.20 – Графики скоростей движения по координатам

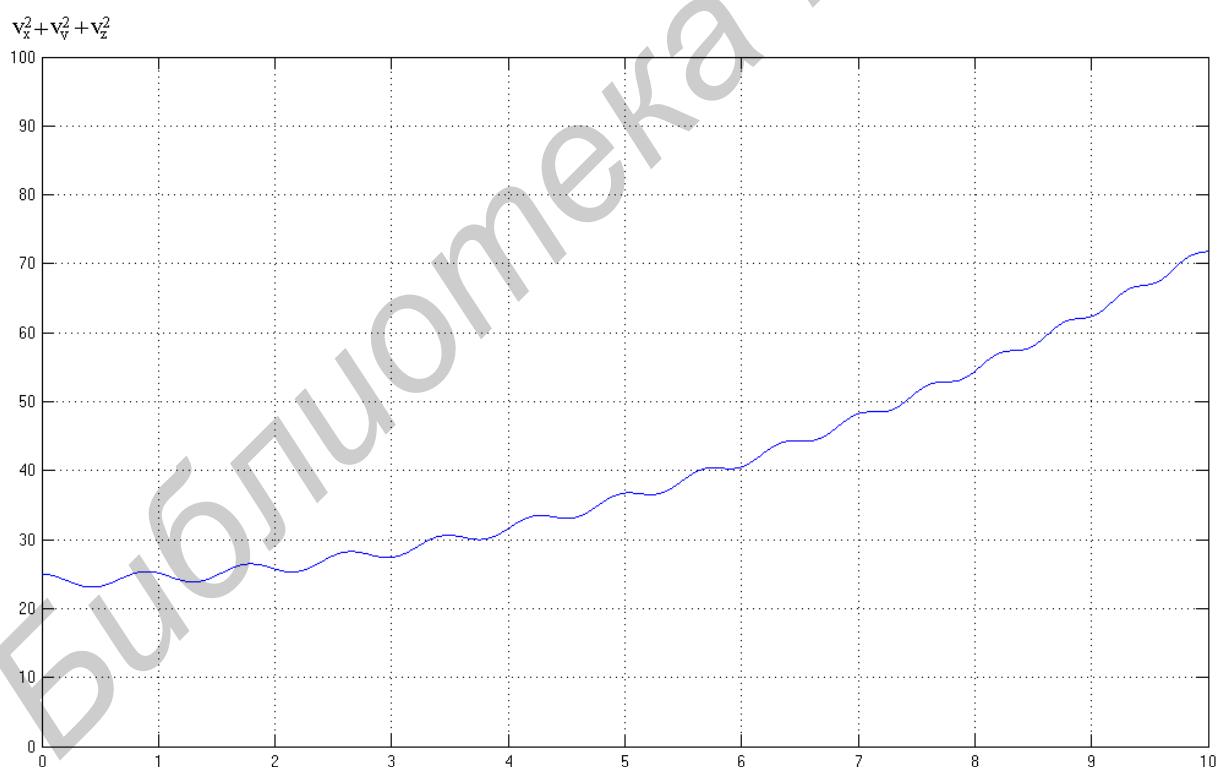


Рисунок 1.21 – График квадрата полной скорости

Изменение во времени параметра управления  $u_1(t)$  по линейному закону при двух других управлениях, равных между собой и постоянных во времени, приводит к формированию семейства окружностей, у которых центр симметрии перемещается по одному из «меридианов» сферы, выбор которого зависит от

заданных начальных условий  $(x_0, y_0, z_0)$ . Как видно из рисунка 1.19, траектория движения изображающей точки по сфере имеет достаточно сложный вид.

Графики, приведенные на рисунке 1.20, показывают, что частота всех составляющих траекторной скорости  $v_x, v_y, v_z$  растет во времени, кроме того, возрастает и амплитуда составляющих  $v_x, v_y$ , что в свою очередь влечет сложную форму квадрата траекторной скорости, график которого представлен на рисунке 1.21.

Следует отметить, что при необходимости управления скоростью можно использовать управление аргументом дифференциального анализатора.

### Пример 1.3

Управляющие функции:  $u_1(t) = \sin(10t)$ ;  $u_2(t) = t$ ;  $u_3(t) = 5$ ;

начальные условия:  $x_0 = 1$ ;  $y_0 = 0$ ;  $z_0 = 0$ ;

время моделирования:  $t = 10$  с.

Результаты моделирования приведены на рисунках 1.22 – 1.24.

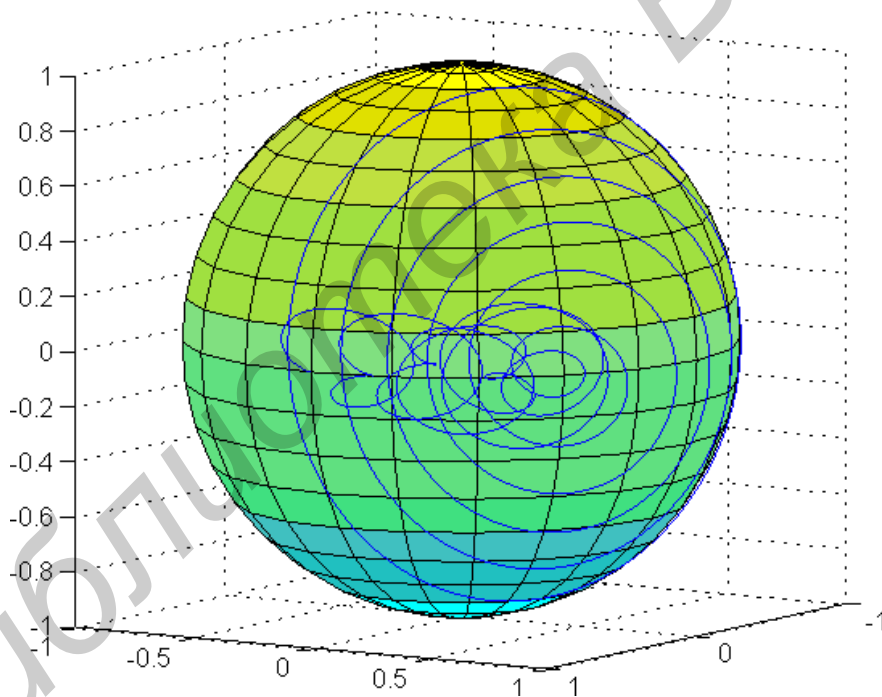


Рисунок 1.22 – Траектория движения изображающей точки по сфере

Усложнение закона управления, при котором  $u_1$  и  $u_2$  являются переменными функциями, особенно в данном случае, когда одна из них периодическая вида  $u_1(t) = \sin(10t)$ , а вторая линейная вида  $u_2(t) = t$ , приводит к отсутствию цикличности траектории, а также, возможно, к нарушению гладкости формируемой кривой вне зависимости от задания исходной точки  $(x_0, y_0, z_0)$ .

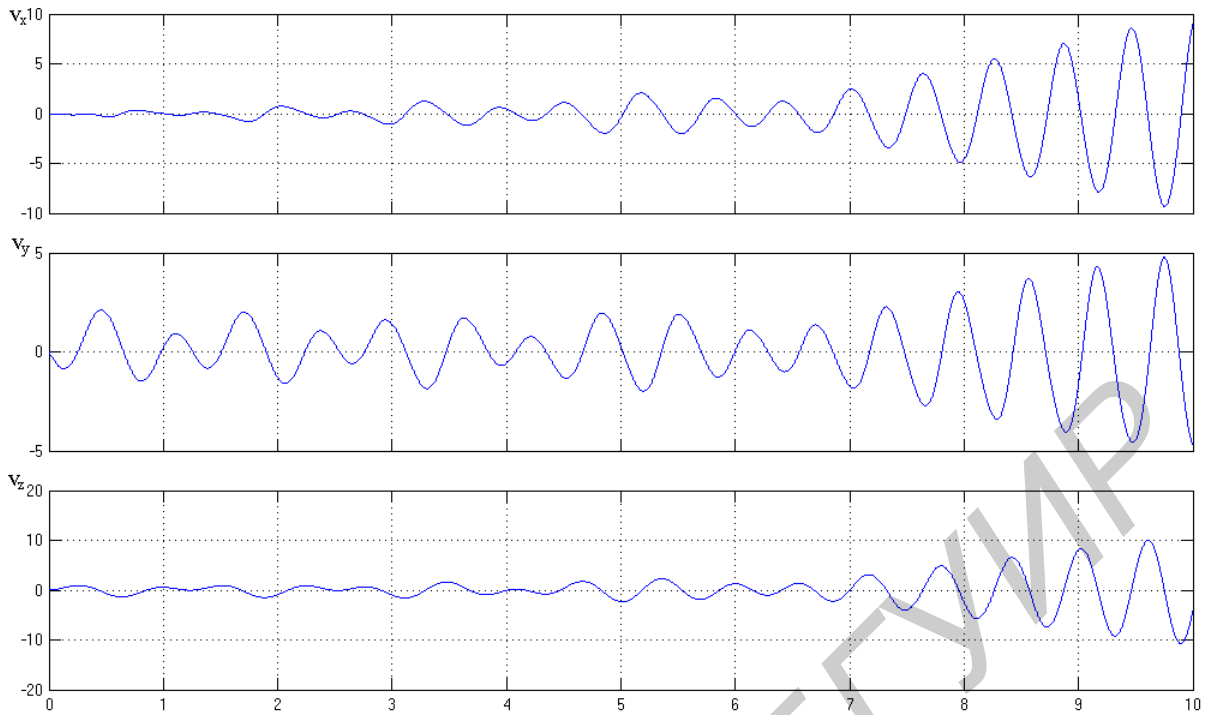


Рисунок 1.23 – Графики скоростей движения по координатам

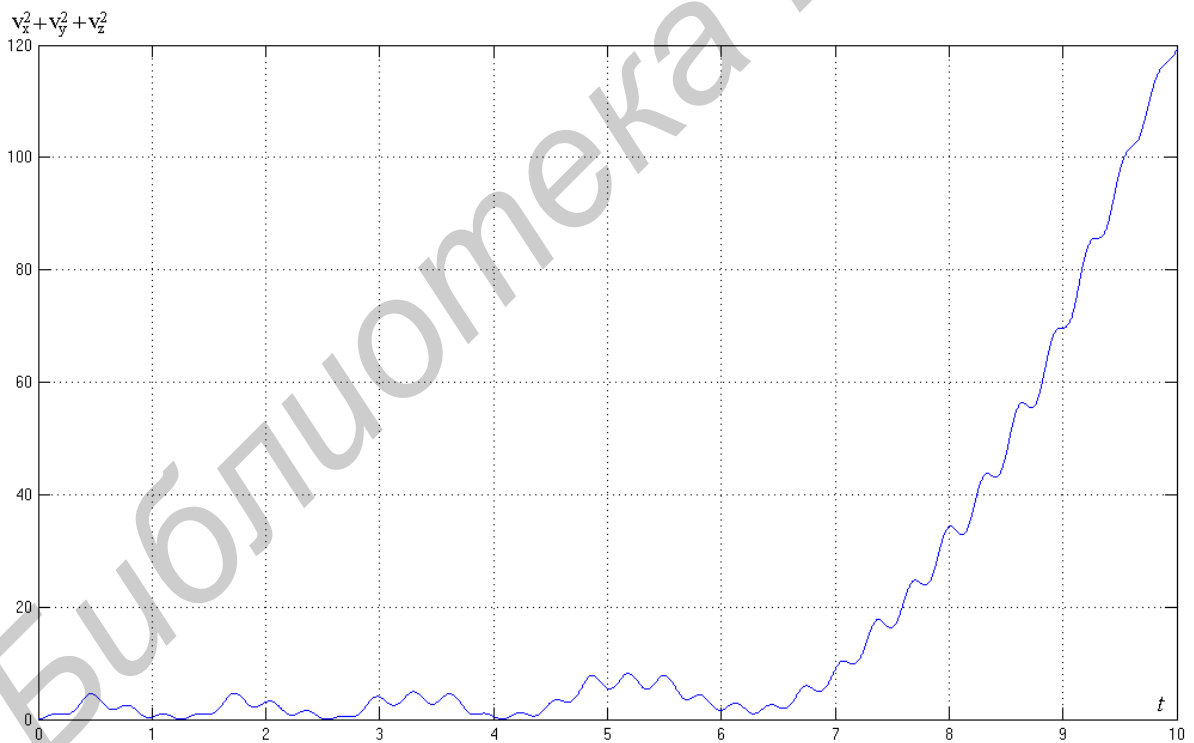


Рисунок 1.24 – График квадрата полной скорости

Графики скорости движения показывают, что если хотя бы одно из управляющих воздействий  $u_1, u_2, u_3$  не является константой, то и квадрат полной скорости  $v_{\Pi}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  не является постоянной величиной. Задача придания профилю скорости требуемого вида будет рассмотрена ниже.

### Пример 1.4

Пусть требуется синтезировать вычислительное устройство для воспроизведения кривых на сфере, лежащих в плоскостях, параллельных координатным плоскостям. В этом случае использование системы дифференциальных уравнений (1.54) и структуры дифференциального анализатора, показанной на рисунке 1.15, является сложной задачей.

Но для данного примера структуру дифференциального анализатора можно существенно упростить. Так, при движении изображающей точки в плоскости, параллельной плоскости  $xu$ , когда  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ , система дифференциальных уравнений (1.50) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = a_{12}x + a_{22}y + (a_{23}z_0 + a_{24}); \\ \frac{dy}{d\varphi} = -a_{11}x - a_{12}y - (a_{31}z_0 + a_{14}). \end{cases} \quad (1.55)$$

При движении в плоскости, параллельной плоскости  $xz$ , имеем

$$u_1 = u_3 = 0; \quad u_2 = 1;$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = -a_{31}x + a_{33}z - (a_{23}y_0 + a_{34}); \\ \frac{dz}{d\varphi} = a_{11}x + a_{31}z + (a_{12}y_0 + a_{14}). \end{cases} \quad (1.56)$$

При движении в плоскости, параллельной плоскости  $yz$ , имеем

$$u_1 = u_2 = 0; \quad u_3 = 1;$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\varphi} = a_{23}y + a_{33}z + (a_{31}x_0 + a_{34}); \\ \frac{dz}{d\varphi} = -a_{22}y - a_{23}z - (a_{12}x_0 + a_{24}). \end{cases} \quad (1.57)$$

Для случая поверхности в виде сферы структура вычислительного устройства, формирующего окружности в плоскостях, параллельных плоскости  $xu$ , будет иметь вид, представленный на рисунке 1.25. Этот случай наиболее простой из всех рассмотренных выше, но несмотря на это, он имеет широкое применение при программировании станков с ЧПУ для фасонного фрезерования различных деталей со сферическими поверхностями, а также при программировании шлифования и полировки сферических оптических деталей.

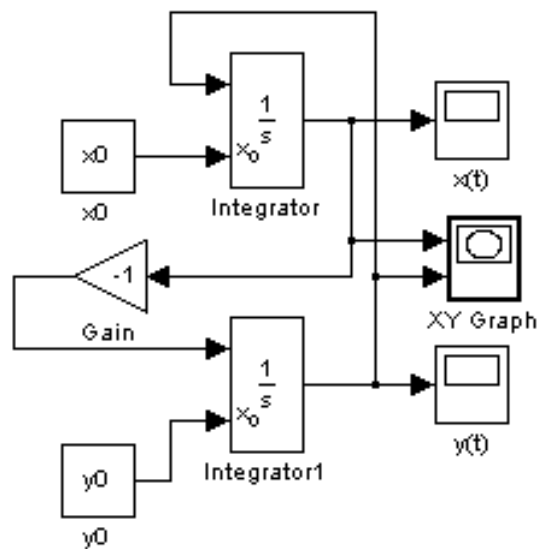


Рисунок 1.25 – Упрощенная блок-схема дифференциального анализатора для воспроизведения кривых, лежащих на сфере, в плоскостях, параллельных координатной плоскости  $xu$  в MATLAB/Simulink

Траектория движения изображающей точки такого вычислительного устройства представлена на рисунке 1.26.

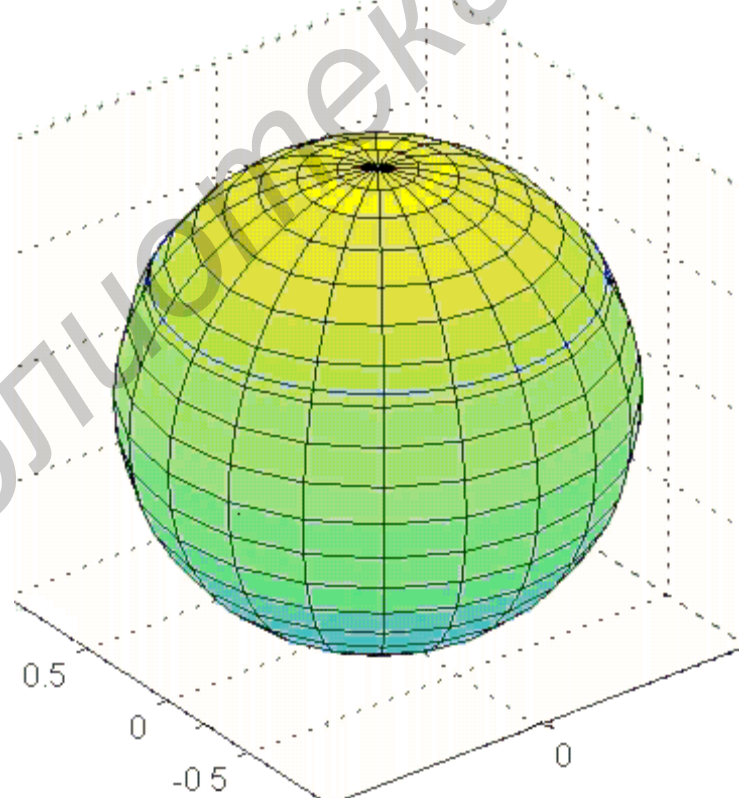


Рисунок 1.26 – Траектория движения изображающей точки устройства, воспроизводящего кривые на сфере, лежащие в плоскостях, параллельных координатной плоскости  $xu$

Как видно из рисунка 1.25, полученная структура вычислительного устройства значительно проще по сравнению с исходной структурой, представленной на рисунке 1.15. При программной реализации дифференциального анализатора, приведенного на рисунке 1.25, объем вычислений, связанный с расчетом координат изображающей точки, значительно уменьшается, что позволяет в значительной степени повысить скорость обработки информации.

### Задача 1.5 Перемещение по кривой на сфере с постоянной скоростью

Рассмотрим последовательность синтеза дифференциального анализатора, воспроизводящего кривые на сфере с постоянной скоростью

$$V^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая структуру вычислительного устройства, воспроизводящего кривые на сфере, имеет вид (1.54). Положим в этой системе  $d\varphi = \omega(t)dt$ . Тогда выражение для  $\omega^2$  примет следующий вид:

$$\omega^2 = \frac{V^2}{(u_1y - u_2z)^2 + (-u_1x + u_3z)^2 + (u_2x - u_3y)^2}.$$

Из этого выражения определим  $\omega$ :

$$\omega = \pm \frac{V}{\sqrt{(u_1y - u_2z)^2 + (-u_1x + u_3z)^2 + (u_2x - u_3y)^2}}, \quad (1.58)$$

при этом знак  $\omega$  определяет направление движения по кривой.

Подставив в систему (1.54)  $d\varphi = \omega(t)dt$  и выражение (1.58), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\varphi} = u_1y - u_2z; \\ \frac{dy}{d\varphi} = -u_1x + u_3z; \\ \frac{dz}{d\varphi} = u_2x - u_3y; \\ d\varphi = \omega(t) dt; \\ \omega = \pm \frac{V}{\sqrt{(u_1y - u_2z)^2 + (-u_1x + u_3z)^2 + (u_2x - u_3y)^2}}. \end{array} \right. \quad (1.59)$$

В соответствии с системой дифференциальных уравнений (1.59) составляется структурная схема дифференциального анализатора. Схема

соответствующего вычислительного устройства, разработанная в среде MATLAB/Simulink, приведена на рисунке 1.27.

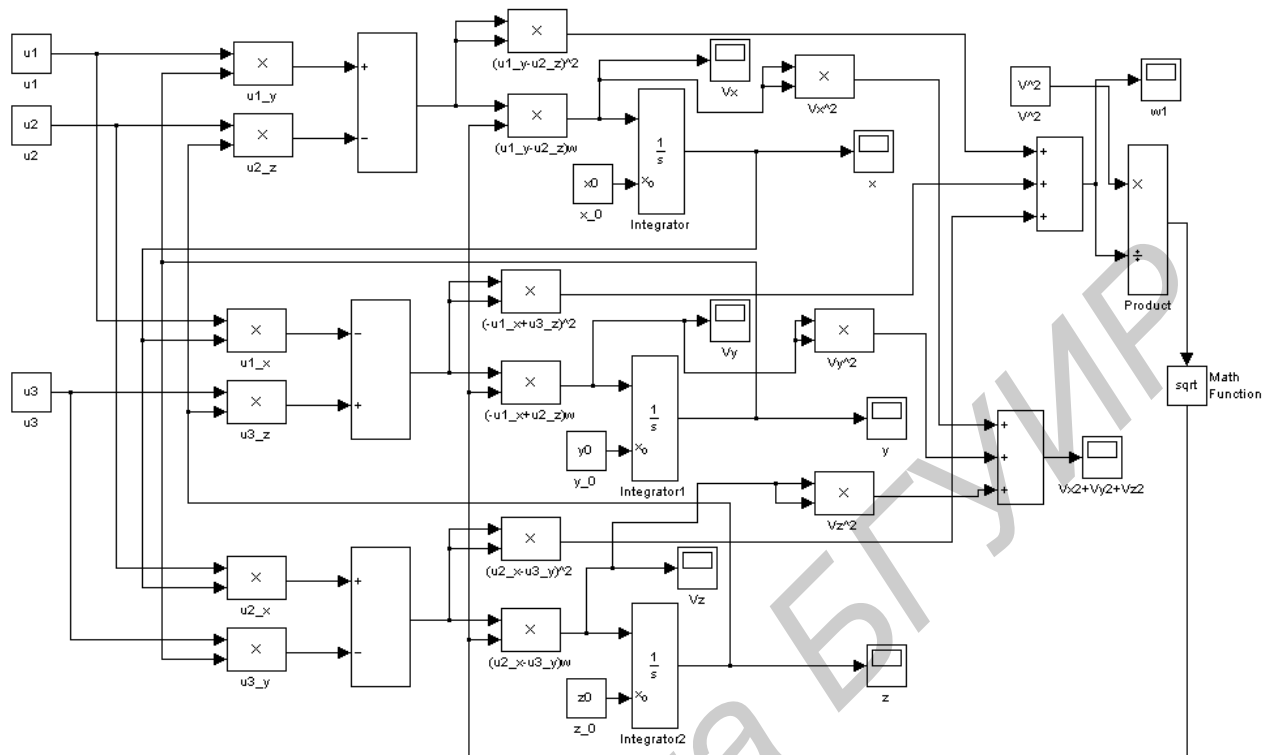


Рисунок 1.27 – Структурная схема дифференциального анализатора в MATLAB/Simulink для воспроизведения кривых на сфере со стабилизацией скорости

В приведенной схеме рассчитывается значение  $\omega^2$ , и из полученного значения извлекается квадратный корень с помощью блока «Math Function», после чего полученное значение умножается на правые части уравнений системы (1.59), затем полученные результаты поступают на соответствующие интеграторы. Следует отметить, что если нужно, чтобы изображающая точка двигалась по кривой в противоположном направлении, полученное значение  $\omega$  необходимо умножить на минус единицу. Для этого случая после блока «Math Function» следует поставить масштабирующий блок с соответствующим коэффициентом.

В приведенной структурной блок-схеме (рисунок 1.27) задается квадрат требуемой скорости  $V^2$  для уменьшения объема вычислений при программной реализации дифференциального анализатора.

Результаты моделирования работы системы представлены на рисунках 1.28 и 1.29.

Как показывают результаты моделирования, приведенные на рисунке 1.29, скорость изображающей точки на протяжении всего времени движения остается постоянной.

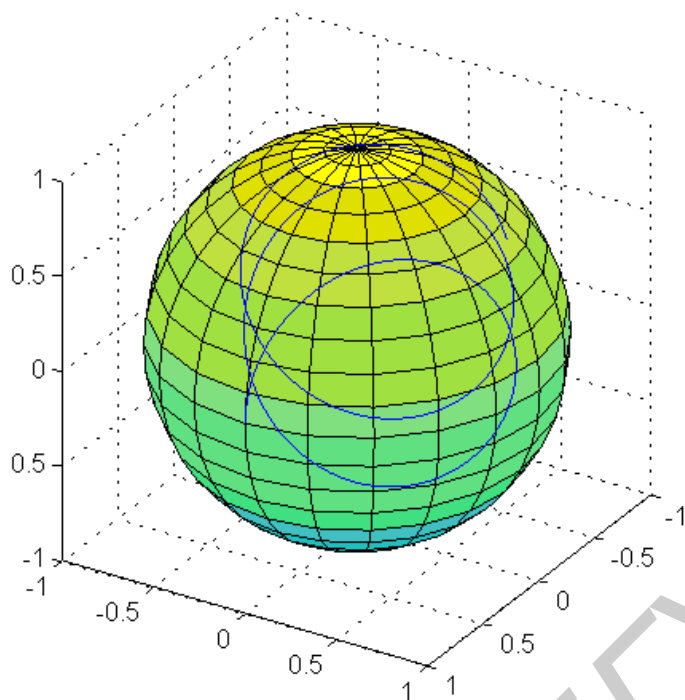


Рисунок 1.28 – Движение изображающей точки по сфере с постоянной скоростью  $V=1$

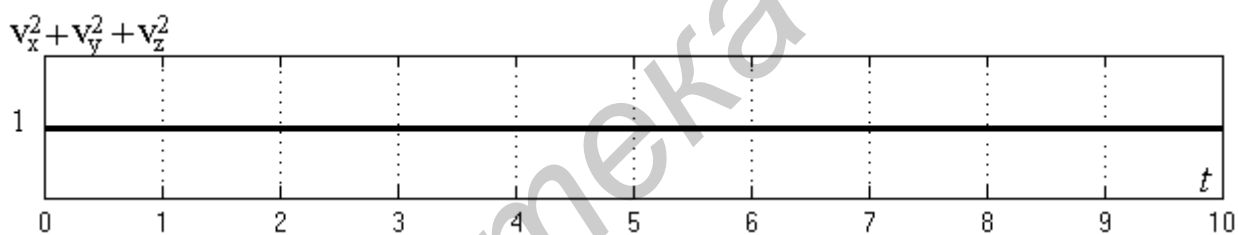


Рисунок 1.29 – График скорости движения изображающей точки по сфере

Следует отметить, что в последнем уравнении системы (1.59) значение  $V$  может быть как постоянным, так и переменным. В случае переменной скорости в структурной схеме, приведенной на рисунке 1.27, необходимо использовать задатчик скорости, на выход которого поступала бы функция, определяющая требуемый профиль скорости.

### Задача 1.6 Перемещение по кривой на эллипсоиде

Синтезируем дифференциальный анализатор для воспроизведения кривых на эллипсоиде на основе общей методики, рассмотренной в разделе 1.2.

Уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1.60)$$

где  $a, b, c$  – полуоси эллипсоида.



Коэффициенты общего уравнения поверхности второго порядка (1.42) для эллипсоида равны

$$\begin{cases} a_{11} = b^2 c^2; \\ a_{22} = a^2 c^2; \\ a_{33} = a^2 b^2; \\ a_{44} = -a^2 b^2 c^2; \\ a_{12} = a_{23} = a_{31} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0. \end{cases} \quad (1.61)$$

Структура устройства, воспроизводящего линии на эллипсоиде, определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = a^2 c^2 u_1 y - a^2 b^2 u_2 z; \\ \frac{dy}{d\varphi} = -b^2 c^2 u_1 x + a^2 b^2 u_3 z; \\ \frac{dz}{d\varphi} = b^2 c^2 u_2 x - a^2 c^2 u_3 y. \end{cases} \quad (1.62)$$

Из (1.62) видно, что структура вычислительного устройства для воспроизведения кривых на эллипсоиде сходна со структурой дифференциального анализатора для воспроизведения кривых на сфере. Отличительной особенностью является наличие коэффициентов, зависящих от значений полуосей эллипсоида, перед выходными координатами устройства.

Если разделить уравнения системы (1.62) на  $a^2 b^2 c^2 \neq 0$ , то получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{b^2} u_1 y - \frac{1}{c^2} u_2 z; \\ \frac{dy}{d\varphi} = -\frac{1}{a^2} u_1 x + \frac{1}{c^2} u_3 z; \\ \frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{a^2} u_2 x - \frac{1}{b^2} u_3 y. \end{cases} \quad (1.63)$$

В соответствии с этой системой дифференциальных уравнений в среде MATLAB/Simulink составляется схема вычислительной структуры, приведенная на рисунке 1.30.

Проведем моделирование перемещения по эллипсоиду в среде MATLAB/Simulink с помощью дифференциального анализатора, структура которого показана на рисунке 1.30.

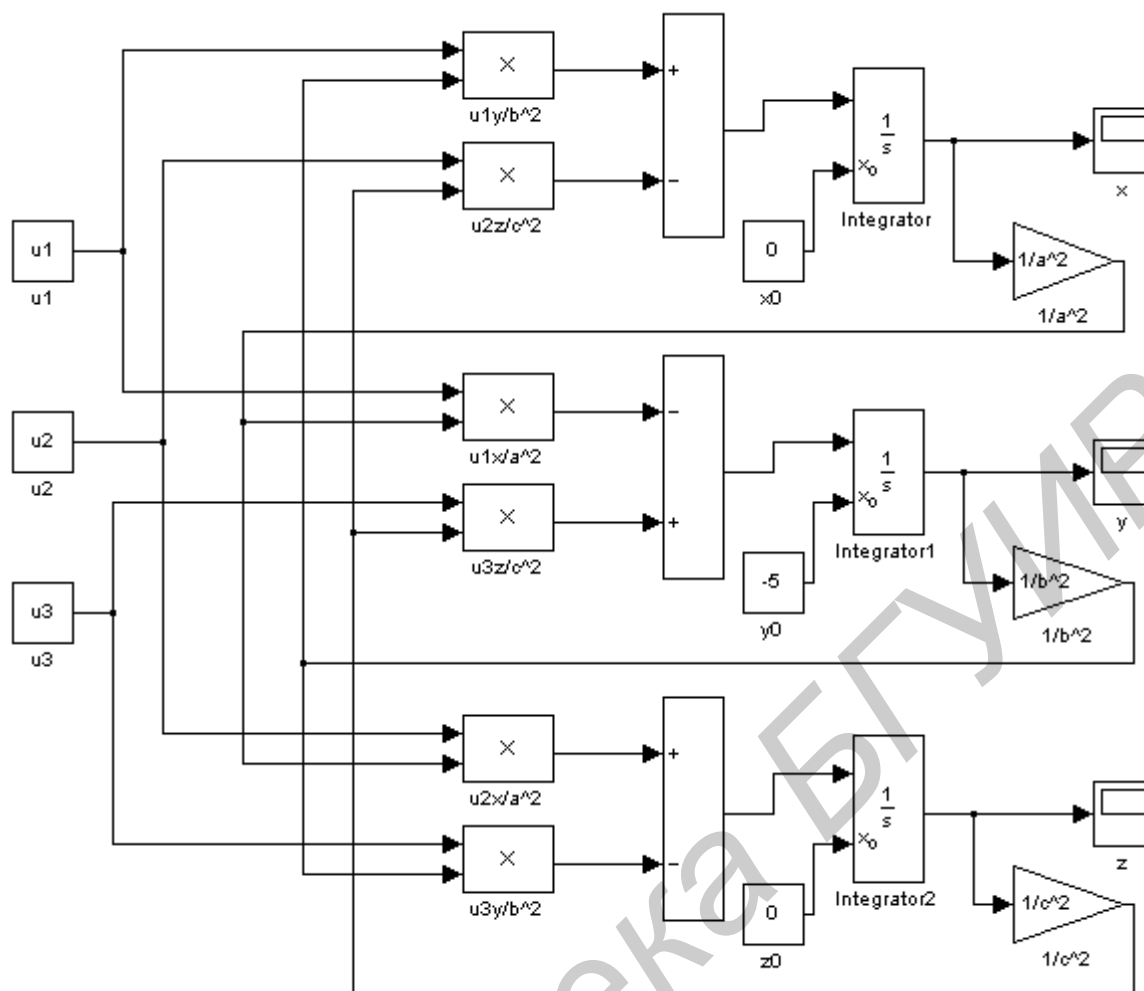


Рисунок 1.30 – Структурная схема вычислительного устройства для воспроизведения кривых, лежащих на эллипсоиде, реализованная в MATLAB/Simulink

Управляющие функции:  $u_1(t) = 5t$ ;  $u_2(t) = \frac{t}{10}$ ;  $u_3(t) = 5$ ;

параметры эллипсоида:  $a = 10$ ;  $b = 5$ ;  $c = 1$ ;

начальные условия:  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = -5$ ;  $z_0 = 0$ ;

время моделирования:  $t = 10$  с.

Траектория движения изображающей точки приведена на рисунке 1.31.

Следует отметить, что значения  $a, b, c$  в системе дифференциальных уравнений (1.63) определяют лишь соотношения полуосей, но не сами значения полуосей. Значения полуосей определяются начальными условиями. То есть, если  $a = 10$ ;  $b = 5$ ;  $c = 1$  и  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 50$ ;  $z_0 = 0$ , то действительные значения полуосей будут равны

$$a_x = 100; \quad b_y = 50; \quad c_z = 10.$$

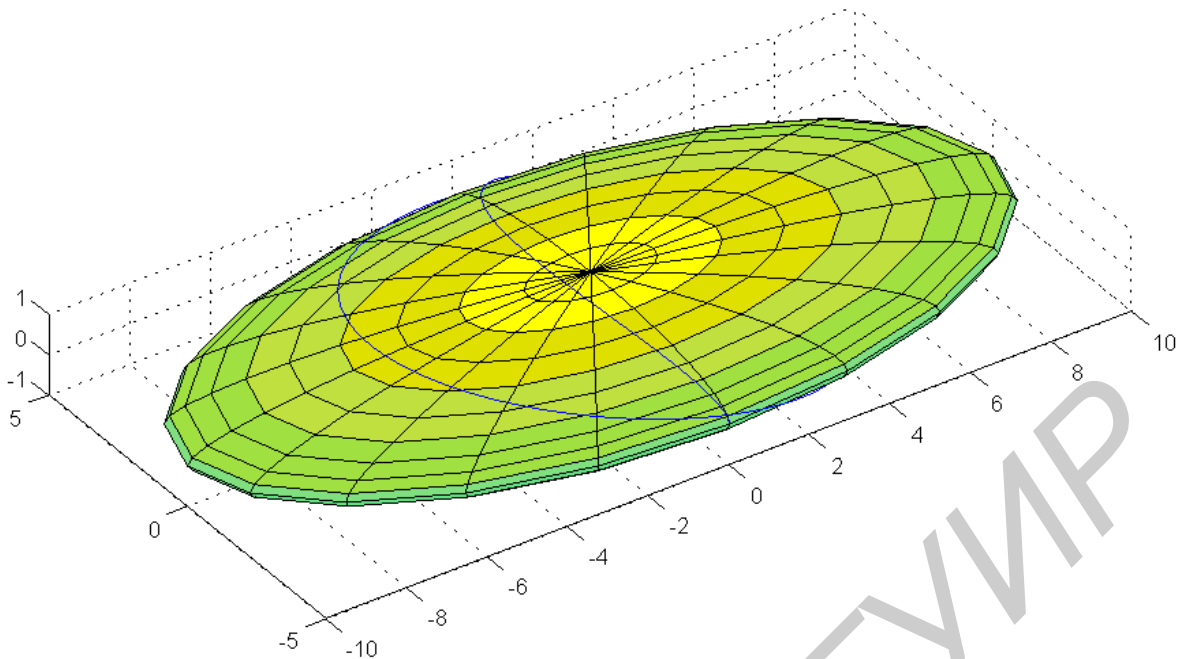


Рисунок 1.31 – Траектория движения изображающей точки на эллипсоиде

При начальных условиях  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 5$ ;  $z_0 = 0$  и тех же значениях  $a = 10$ ;  $b = 5$ ;  $c = 1$  значения полуосей будут уже иными:

$$a_x = 10; \quad b_y = 5; \quad c_z = 1.$$

### Задачи для самостоятельного решения

**С1.1** Постройте уравнения дифференциального анализатора для воспроизведения окружности  $x^2 + z^2 = R^2$  на плоскости.

Выполните моделирование при начальных условиях  $x_0 = 0$ ,  $z_0 = R$ , если параметр траектории  $u(t)$  имеет вид

- |                 |                      |
|-----------------|----------------------|
| а) $u(t) = 1$ ; | в) $u(t) = t^2$ ;    |
| б) $u(t) = t$ ; | г) $u(t) = \sin t$ . |

**С1.2** Постройте уравнения дифференциального анализатора для воспроизведения параболы  $y^2 = 2x$  на плоскости.

Выполните моделирование при начальных условиях  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , если параметр траектории  $u(t)$  имеет вид

- |                 |                      |
|-----------------|----------------------|
| а) $u(t) = 1$ ; | в) $u(t) = t^2$ ;    |
| б) $u(t) = t$ ; | г) $u(t) = \sin t$ . |

**С1.3** Постройте уравнения дифференциального анализатора для воспроизведения траектории движения на плоскости  $XU$  от точки  $A$  до точки  $B$

в виде прямой, заданной каноническим уравнением  $\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$ .

Выполните моделирование при начальных условиях  $x_A = y_A = 0$ ,  $x_B = y_B = 4$ , если параметр траектории  $u(t)$  имеет вид

- а)  $u(t) = 1$ ;                      в)  $u(t) = t^2$ ;  
б)  $u(t) = t$ ;                        г)  $u(t) = \sin t$ .

Рассмотрите общий случай построения прямолинейной траектории, заданной уравнением  $y = kx + b$ , где  $k, b$  – фиксированные коэффициенты для конкретной траектории.

**С1.4** Постройте уравнения дифференциального анализатора для воспроизведения эллипса на плоскости  $XY$ , заданного уравнением  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ .

Выполните моделирование, если параметр траектории  $u(t)$  имеет вид

- а)  $u(t) = 1$ ;                      в)  $u(t) = t^2$ ;  
б)  $u(t) = t$ ;                        г)  $u(t) = \sin t$ .

**С1.5** Найдите систему дифференциальных уравнений и структуру дифференциального анализатора для воспроизведения кривых:

а) на цилиндрической поверхности, описываемой уравнением

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

б) на конической поверхности, описываемой уравнением

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

в) на поверхности параболоида, описываемой уравнением

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0;$$

г) на поверхности гиперboloида, описываемой уравнением

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

## 2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КООРДИНАТНЫХ ПОЗИЦИОНЕРОВ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ

### 2.1 Прикладные задачи на построение динамических моделей базовых координатных позиционеров мехатронных систем

Применение мехатронных систем в качестве исполнительных механизмов (позиционеров) позволяет описывать движение подвижных частей механизма как движение твердых тел, состоящих из совокупности материальных точек. В этом случае для описания движения  $i$ -й материальной точки достаточно знать или радиус-вектор  $\vec{r}_i$ , или ее координаты  $(x_i, y_i, z_i)$ . Рассматривая любое движение исполнительный механической системы как совокупность простейших движений (поступательного и вращательного), происходящих одновременно под управлением контроллера, можно ставить и решать задачи динамического управления.

#### Задача 2.1 Динамическая модель однокоординатного линейного позиционера

Однокоординатный линейный позиционер позволяет реализовывать только прямолинейное поступательное движение, при котором приращение координаты для всех точек подвижных частей механической системы, а также их скорости и ускорения одинаковы по модулю и направлению.

Схема однокоординатного линейного позиционера приведена на рисунке 2.1.

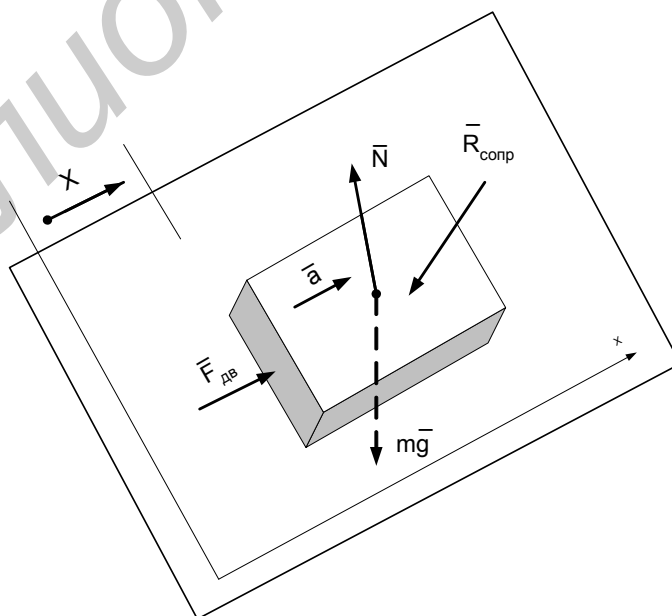


Рисунок 2.1 – Линейный позиционер

Для описания баланса сил при движении такой системы удобнее воспользоваться принципом Даламбера:

$$\sum \bar{F}_A + \sum \bar{N} - \sum m_i \bar{a}_i = 0, \quad (2.1)$$

где  $\sum \bar{F}_A$  – результирующая совокупности активных сил, действующих на систему, включая движущие силы и силы сопротивления;  
 $\sum \bar{N}$  – силы реакций связей;  
 $\sum m_i \bar{a}_i$  – даламберовы силы инерции материальных точек механической системы позиционера.

Так как ускорения всех подвижных точек одинаковы, то

$$\sum m_i a_i = a \sum m_i = \sum m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} = M \frac{d^2 x}{dt^2},$$

где  $M = \sum M_i$  – масса подвижных частей позиционера.

Тогда уравнение (2.1) в проекции на ось  $X$ , совпадающую с направлением перемещения позиционера, примет вид

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum (F_A)_x + \sum N_x. \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.2) позволяет определить текущее значение ускорения подвижной массы позиционера, если известны приложенные к ней силы. В случае если задан закон движения позиционера, то уравнение (2.2) позволяет найти закон изменения результирующей активных сил в правой части.

### Задача 2.2 Динамическая модель вращательного позиционера

Вращательный позиционер позволяет получить изменение угловой координаты  $\varphi$  как функции времени, то есть  $\varphi = f(t)$ . Вращательное движение характеризуется наличием оси, проходящей через неподвижные точки вращающейся массы, в то время как все остальные точки описывают окружности.

Схема вращательного позиционера приведена на рисунке 2.2.

Динамические процессы, происходящие при вращении подвижного элемента такого позиционера, удобнее всего описывать дифференциальным уравнением вращательного движения, вытекающим из принципа Даламбера:

$$J_{np} \ddot{\varphi} = \sum M_z(\bar{F}^e), \quad (2.3)$$

где  $J_{np} = \sum_{i=1}^n J_{iz} = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2$  – сумма моментов инерции  $n$  вращающихся частей

позиционера относительно оси вращения  $Z$ ;

$\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  – угловое ускорение;

$\sum M_z(\bar{F}^e)$  – сумма моментов всех внешних сил, действующих на подвижную часть позиционера, относительно оси вращения  $Z$ .

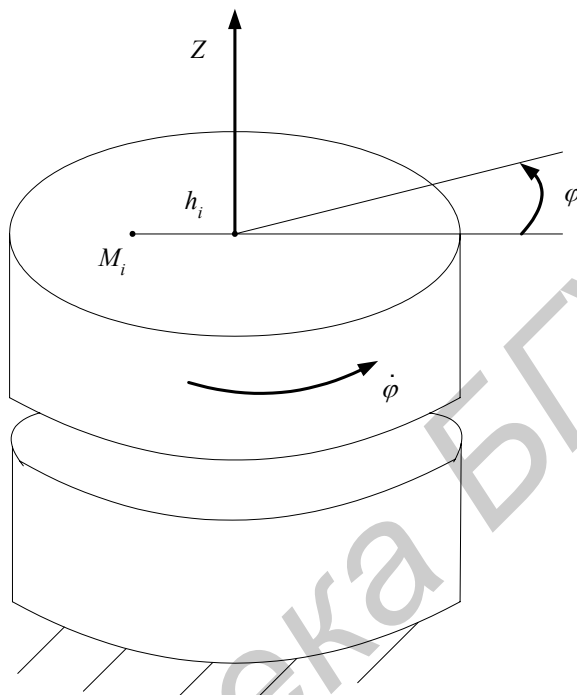


Рисунок 2.2 – Вращательный позиционер

Тогда математическая модель динамики движения вращательного позиционера будет иметь следующий вид:

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 \right) \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_z(\bar{F}^e). \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) позволяет решать как прямую, так и обратную задачи в формулировках, приведенных выше для однокоординатного линейного позиционера.

### Задача 2.3 Динамическая модель двухкоординатного планарного позиционера

Двухкоординатный планарный позиционер позволяет осуществлять перемещения в плоскости движения по двум отдельным независимым координатам  $X$  и  $Y$ , при необходимости осуществляя одновременно два линейных перемещения под управлением контроллера.

Схема двухкоординатного планарного позиционера приведена на рисунке 2.3.

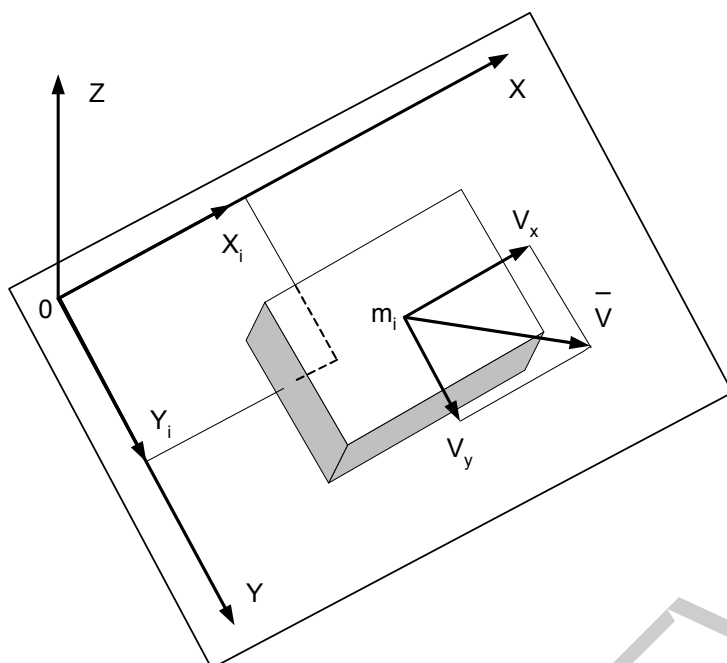


Рисунок 2.3 – Двухкоординатный планарный позиционер

Скорость и ускорение движения могут быть найдены через их проекции по формулам

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2};$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}.$$

Для получения математической модели, описывающей динамическое поведение позиционера, воспользуемся уравнением Лагранжа в обобщенных координатах  $[q_1 = x; q_2 = y]$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + Q_x; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} + Q_y, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $T$  – кинетическая энергия позиционера;

$U$  – потенциальная энергия;

$Q_g$  – обобщенная сила, обусловленная непотенциальными силами.

Кинетическая энергия системы может быть найдена как сумма кинетических энергий подвижных частей исполнительной механической системы:



$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i \left( \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \left[ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \sum m_i = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Найдем частные производные кинетической энергии по обобщенной скорости и координате:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= M \dot{x}; & \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= M \dot{y}; \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тогда с учетом (2.6) из (2.5) получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = M \ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = M \ddot{y}. \quad (2.7)$$

В случае горизонтального расположения позиционера будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (2.8)$$

В случае вертикального расположения позиционера (ось  $Y$  расположена вертикально) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial y} \neq 0. \quad (2.9)$$

Обобщенную силу  $Q_g$  находим как множитель при возможном перемещении из выражения

$$\delta A = Q_g \delta g$$

или

$$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x}; \quad Q_y = \frac{\delta A}{\delta y}. \quad (2.10)$$

Подставив выражения (2.7) и (2.10) в уравнение (2.5), получим

$$\begin{cases} M \ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\delta A}{\delta x}; \\ M \ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\delta A}{\delta y} \end{cases} \quad (2.11)$$

или

$$\begin{cases} M \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\delta A}{\delta x}; \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\delta A}{\delta y}. \end{cases} \quad (2.11')$$

#### Задача 2.4 Динамическая модель трехкоординатной планарной системы перемещений

Трехкоординатный планарный позиционер позволяет, используя двухкоординатные планарные модули с линейными перемещениями по осям  $X$  и  $Y$ , получить не только линейное результирующее перемещение рабочего стола, но и его поворот на угол  $\varphi$  (рисунок 2.4).

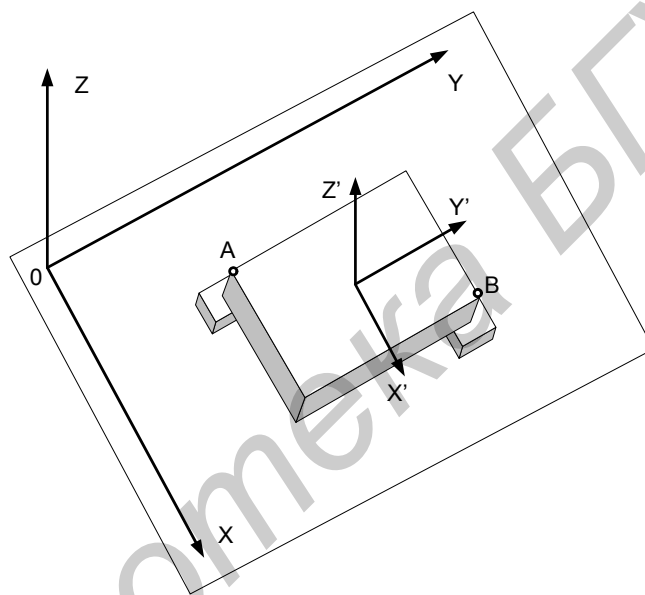


Рисунок 2.4 – Трехкоординатная планарная система перемещений

При этом стол совершает плоскопараллельное движение, описываемое законом  $x_A = f_1(t)$ ;  $y_A = f_2(t)$ ;  $\varphi = f_3(t)$ . Соотношение между координатами (рисунок 2.5) двух планарных модулей осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} X_B &= X_A + AB \cdot (1 - \cos \varphi); \\ Y_B &= Y_A + AB \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отсюда получим

$$\varphi(t) = \arcsin\left(\frac{y_B(t) - y_A(t)}{AB}\right)$$

или

$$\varphi(t) = \arccos\left(1 - \frac{x_B(t) - x_A(t)}{AB}\right).$$

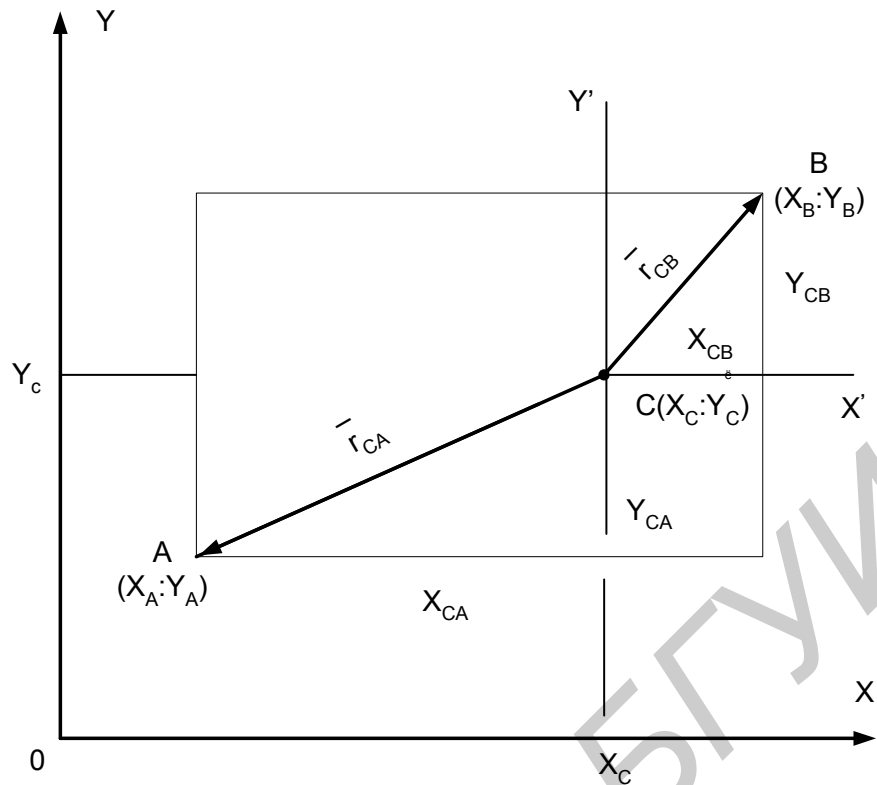


Рисунок 2.5 – Соотношение координат планарной системы перемещений

Для построения математической модели, описывающей движение позиционера, воспользуемся уравнением Лагранжа в обобщенных координатах  $q_1$  и  $q_2$  ( $q_1 = x_A(t) = x$ ,  $q_2 = y_A(t) = y$ ):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} + Q_x; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} + Q_y. \end{cases} \quad (2.13)$$

Кинетическая энергия подвижных частей позиционера будет равна

$$T = T_A + T_B + T_{AB},$$

где  $T_A$  – кинетическая энергия планарного модуля А;

$T_B$  – кинетическая энергия планарного модуля В;

$T_{AB}$  – кинетическая энергия стола, которые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A \left[ \left( \frac{dx_A}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_A}{dt} \right)^2 \right]; \\ T_B &= \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_B \left[ \left( \frac{dx_B}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_B}{dt} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m_{AB} v_A^2 + \frac{1}{2} J_{npA} \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_{AB} \left[ \left( \frac{dx_A}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_A}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} J_{npA} \frac{d\varphi}{dt},$$

где  $m_A$  – масса планарного модуля А;

$m_B$  – масса планарного модуля В;

$m_{AB}$  – масса рабочего стола;

$J_{npA}$  – приведенный момент инерции стола относительно оси  $Z$ , проходящей через точку  $A$  планарного модуля.

С учетом (2.14) окончательно получим

$$T = T_A + T_B + T_{AB} =$$

$$= \frac{1}{2} m_A \left[ \left( \frac{dx_A}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_A}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} m_B \left[ \left( \frac{dx_B}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_B}{dt} \right)^2 \right] + \quad (2.15)$$

$$+ \frac{1}{2} m_{AB} \left[ \left( \frac{dx_A}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_A}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} J_{npA} \frac{d\varphi}{dt} = T \left( \frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt} \right).$$

Нахождение обобщенной силы, действующей на планарные модули А, В и стол, выполним по формулам

$$Q_x = \frac{\delta A}{\delta x}; \quad Q_y = \frac{\delta A}{\delta y}. \quad (2.16)$$

Подставив выражения (2.15) и (2.16) в исходные дифференциальные уравнения (2.13), получим систему дифференциальных уравнений в принятых обобщенных координатах, которая является динамической моделью трехкоординатной планарной системы перемещений.

### **Задача 2.5 Динамическая модель системы перемещений рабочего стола с шестью степенями свободы**

Для получения шести степеней свободы рабочего стола при линейных перемещениях трех индукторов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , совершаемых в одной плоскости, применяется система перемещений, показанная на рисунке 2.6.

Для получения математической модели воспользуемся уравнением Лагранжа в обобщенных координатах  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ :

$$q_1 = x_A(t); \quad q_2 = y_A(t);$$

$$q_3 = x_B(t); \quad q_4 = y_B(t);$$

$$q_5 = x_C(t); \quad q_6 = y_C(t);$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial q_1} + Q_{q_1}; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial U}{\partial q_2} + Q_{q_2}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_3} = -\frac{\partial U}{\partial q_3} + Q_{q_3}; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_4} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_4} = -\frac{\partial U}{\partial q_4} + Q_{q_4}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_5} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_5} = -\frac{\partial U}{\partial q_5} + Q_{q_5}; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_6} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_6} = -\frac{\partial U}{\partial q_6} + Q_{q_6}. \end{cases}$$

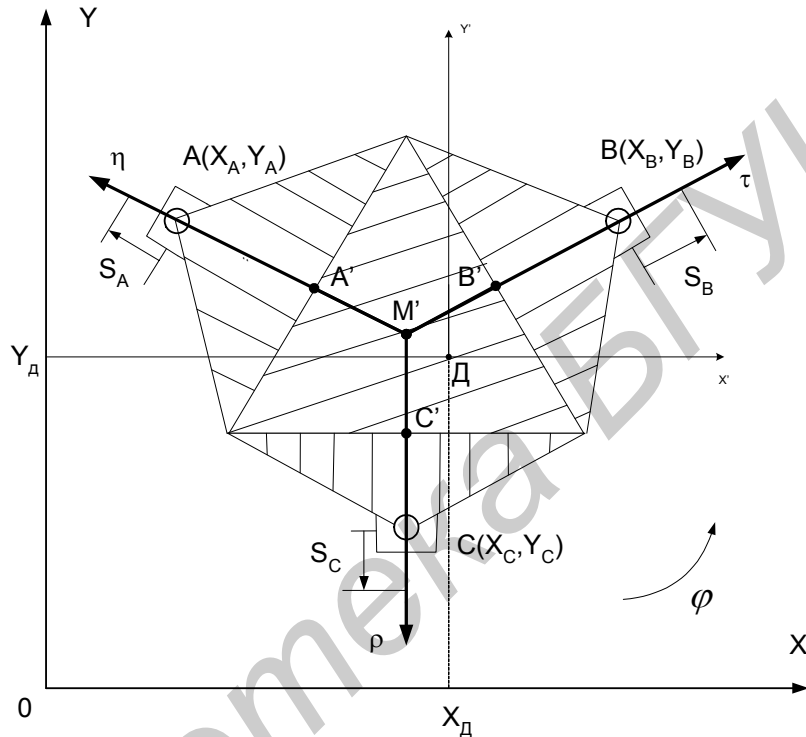


Рисунок 2.6 – Схема рабочего стола с шестью степенями свободы

Или, переходя к естественным координатам системы, получим:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_A} = -\frac{\partial U}{\partial x_A} + Q_{x_A}; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_A} = -\frac{\partial U}{\partial y_A} + Q_{y_A}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_B} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_B} = -\frac{\partial U}{\partial x_B} + Q_{x_B}; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_B} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_B} = -\frac{\partial U}{\partial y_B} + Q_{y_B}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_C} = -\frac{\partial U}{\partial x_C} + Q_{x_C}; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_C} = -\frac{\partial U}{\partial y_C} + Q_{y_C}. \end{cases}$$

Представим абсолютные движения точек рабочего стола и планарного индуктора как сложные, состоящие из двух переносных и одного относительного для каждого индуктора.

В относительных движениях индукторы движутся вдоль осей  $\tau$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ , расположенных на виртуальной плоскости и перпендикулярных сторонам

базового треугольника стола, формируя соответствующие перемещения  $S_A, S_B, S_C$ . В первом переносном движении виртуальная плоскость с осями  $\tau, n, \rho$  перемещается поступательно (рисунок 2.7) по закону  $x = f(t); y = f(t)$ , во втором переносном движении виртуальная плоскость с осями  $\tau, n, \rho$  совершает вращательное движение вокруг оси  $Z$ , проходящей через точку  $D$  (рисунок 2.8).

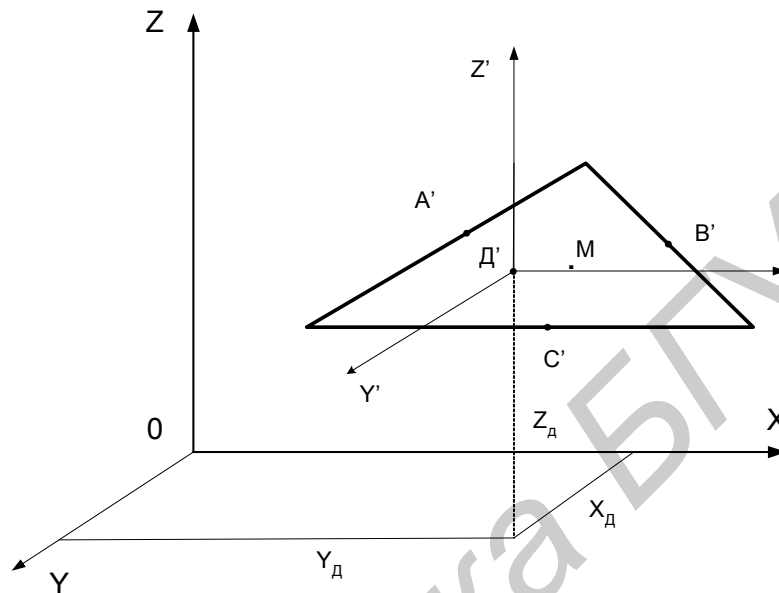


Рисунок 2.7 – Поступательное перемещение рабочего стола

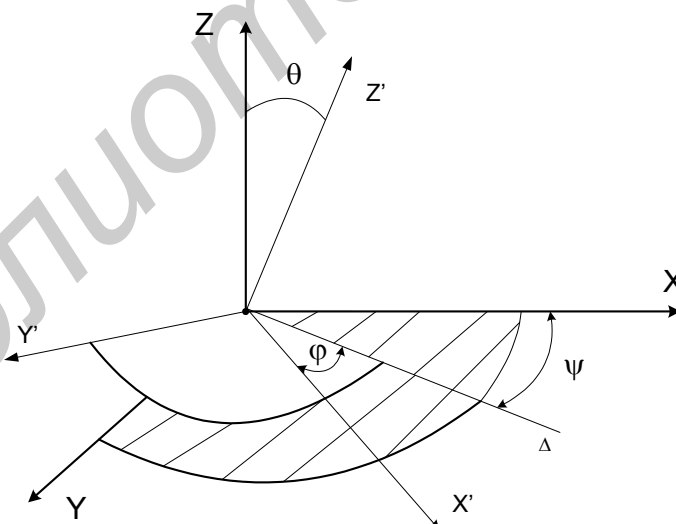


Рисунок 2.8 – Вращательное перемещение рабочего стола

Угол наклона плоскости стола и положение точки  $D(x_D, y_D, z_D)$  задается, исходя из условий построения программы движения.

Уравнение плоскости рабочего стола по трем точкам в векторной форме имеет следующий вид:

$$(\vec{r}_{A'} - \vec{r}_0)(\vec{r}_{B'} - \vec{r}_0)(\vec{r}_{C'} - \vec{r}_0) = 0,$$

а в координатной форме –

$$\begin{vmatrix} x_{A'} - x_0 & y_{A'} - y_0 & z_{A'} - z_0 \\ x_{B'} - x_0 & y_{B'} - y_0 & z_{B'} - z_0 \\ x_{C'} - x_0 & y_{C'} - y_0 & z_{C'} - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Запишем нормальное уравнение плоскости в виде

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - h = 0,$$

где  $x, y, z$  – координаты любой точки  $D$ , лежащей на плоскости;

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  – направляющие косинусы нормали;

$h$  – расстояние от начала координат до плоскости.

Зная координаты точки  $D(x_D, y_D, z_D)$  и уравнение плоскости стола, находим координаты точек  $A'(x'_A, y'_A, z'_A)$ ,  $B'(x'_B, y'_B, z'_B)$ ,  $C'(x'_C, y'_C, z'_C)$ , как показано на рисунке 2.9.

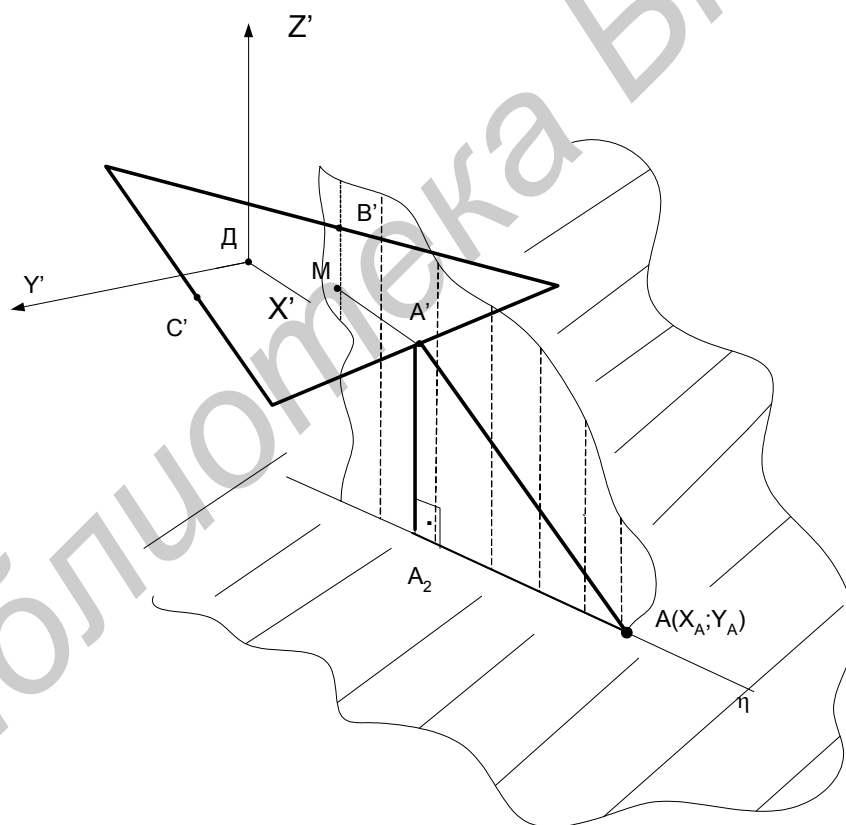


Рисунок 2.9 – Расчет координат рабочего стола

Величины  $Z'_A, Z'_B, Z'_C$  определяют перемещение индукторов  $A, B, C$  вдоль виртуальных осей  $\tau, n, \rho$ . Значения координат  $x_A, y_A; x_B, y_B; x_C, y_C$  определяются также поворотом стола на угол  $\varphi$  вокруг оси  $Z$ , проходящей через точку  $D$ , и координатами точки  $D(x_D, y_D)$ .

Кинетическая энергия системы может быть найдена как сумма кинетических энергий всех ее подвижных частей по формуле

$$T = T_c + T_A + T_B + T_C + T_{AA'} + T_{BB'} + T_{CC'},$$

где  $T_c$  – кинетическая энергия стола в сложном движении, состоящем из переносного, поступательного и сферического относительного, равная

$$T_c = \frac{1}{2} M_c (\dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2 + \dot{z}_D^2) + \frac{1}{2} Z_D (\dot{\gamma}^2 + \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2);$$

$T_A, T_B, T_C$  – кинетическая энергия индукторов, определяемая по формулам

$$T_A = \frac{1}{2} m_A (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2);$$

$$T_B = \frac{1}{2} m_B (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2);$$

$$T_C = \frac{1}{2} m_C (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2);$$

$T_{AA'}, T_{BB'}, T_{CC'}$  – кинетическая энергия «ног» стола, вычисляемая по формулам

$$T_{AA'} = \frac{1}{2} m_{AA'} (\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2) + \frac{1}{2} J_A \omega_A^2;$$

$$T_{BB'} = \frac{1}{2} m_{BB'} (\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2) + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2;$$

$$T_{CC'} = \frac{1}{2} m_{CC'} (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2.$$

Значение потенциальной энергии системы определяется изменением значения координат  $Z_i$  центров масс отдельных ее частей:

$$U = U_{\text{стола}} + U_{AA'} + U_{BB'} + U_{CC'} + U_A + U_B + U_C,$$

где  $U_A = U_B = U_C = 0$  – потенциальная энергия индукторов.

Обобщенная сила  $Q_{g_i}$  определяется как коэффициент при соответствующей обобщенной координате в выражении виртуальной работы

$$\delta A^e = Q_{g_i} \delta g_i,$$

откуда

$$Q_{g_i} = \frac{\delta A^e}{\delta g_i}.$$

Подстановка полученных значений в исходное дифференциальное уравнение Лагранжа в обобщенных координатах дает шесть уравнений, описывающих динамику перемещения рабочего стола.



## 2.2 Формализованный подход к построению и анализу уравнений движения

В разделе представлен формализованный, ориентированный на использование ЭВМ, подход к построению уравнений движения, основанный на едином подходе к структуре, кинематике и динамике механизмов. Рассмотрим развитие метода условного размыкания, предложенного к исследованию кинематики механизмов в приложении к построению динамических моделей в самом общем случае постановки задачи динамического исследования, при наличии голономных и неголономных связей. Объединение метода условного размыкания, метода линейных пространств подвижностей и условий связей с общим формализованным алгоритмом построения динамических моделей систем твердых тел позволило создать общий метод построения динамических моделей и разработать соответствующие ему программы компьютерного моделирования. Ниже приведено описание алгоритма формирования уравнений движения с учетом возможных голономных и неголономных связей.

Уравнения связей запишем в следующем виде:

– голономные связи

$$f_i(\bar{q}, t) = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots, v_1; \quad (2.17)$$

– неголономные связи

$$g_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = 0; \quad i = v_1 + 1, \dots, v_2. \quad (2.18)$$

По определению, уравнения неголономных связей являются неинтегрируемыми, поскольку в противном случае они свелись бы к голономным связям. На практике в технических приложениях  $g_i$  – это линейные функции обобщенных скоростей, которые можно записать, например, в следующем виде:

$$g_i = a_i \dot{q}_{i1} + \dots + a_{in} \dot{q}_n + a_i^* = 0; \quad i = v_1 + 1, \dots, v_2, \quad (2.19)$$

где  $n$  – общее число обобщенных координат.

В общем случае для функции  $f_i$  коэффициенты  $a_{i1}, \dots, a_{in}, a_i^*$  являются нелинейными функциями обобщенных координат и времени.

Вариации функций  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, v_1$ ), вызванные вариациями обобщенных координат (при фиксированном времени), равны нулю, откуда следует матричное равенство

$$\delta f_i = \delta q^T (f_i')^T = 0; \quad i = 1, 2, \dots, v_1, \quad (2.20)$$

где  $f_i'$  – матрицы-строки вида  $f_i' = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial q_n} \right]$ .

Из уравнения (2.19) следует, что вариации обобщенных координат удовлетворяют также соотношениям

$$a_{i1} \delta q_1 + a_{i2} \delta q_2 + \dots + a_{in} \delta q_n = 0; \quad i = v_1 + 1, \dots, v_2 \quad (2.21)$$

или в матричном виде

$$\partial q^T q_i^T = 0; \quad i = v_1 + 1, \dots, v_2,$$

где  $a_i$  – матрица-строка

$$a_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}]; \quad i = v_1 + 1, \dots, v_2.$$

Запишем уравнения движения, основываясь на принципе Даламбера. Для полной системы с замкнутыми и незамкнутыми кинетическими цепями получим

$$\partial \bar{q}^T \left[ -A\ddot{q} + B + \sum_{i=1}^{v_1} \lambda(f'_i)^T + \sum_{i=v_1+1}^{v_2} \lambda a_i^T \right] + \partial W^* = 0. \quad (2.22)$$

Здесь каждому уравнению связей ставится в соответствие множитель Лагранжа  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, v_2$ ). Полную работу, совершаемую во всех «разрезанных» в результате размыкания шарнирах, обозначим  $\delta W^*$ . Ее можно записать в виде  $\delta W^* = \delta \bar{q}^T B^*$ , где матрица-столбец  $B^*$  образована из обобщенных сил, которые действуют в разрезанных шарнирах.

Перепишем уравнение (2.22) в виде

$$\partial \bar{q}^T \left[ -A\ddot{q} + B + B^* + \sum_{i=1}^{v_1} \lambda(f'_i)^T + \sum_{i=v_1+1}^{v_2} \lambda a_i^T \right] + \partial W^* = 0. \quad (2.23)$$

Объединив члены, содержащие  $\lambda_1, \dots, \lambda_{v_2}$ , в матрицу, запишем  $H^T \lambda$ , где  $\lambda$  – матрица-столбец  $[\lambda_1, \dots, \lambda_{v_2}]^T$  а  $H$  – прямоугольная матрица

$$H = [f'_1 \quad \dots \quad f'_{v_1} \quad a_{v_1+1} \quad \dots \quad a_{v_2}]^T.$$

Субматрица, образованная из  $H$  первыми  $v_1$  строками, представляет собой якобиан уравнений голономных связей. С учетом всего сказанного уравнение (2.23) перепишем в матричном виде

$$\delta q^T (-A\ddot{q} + B + B^* + H^T \lambda) = 0. \quad (2.24)$$

Предполагая, что все  $v_2$  уравнений связей независимы, найдем  $v_2$  линейно зависимых вариаций обобщенных координат (элементов вектора  $\delta \bar{q}$ ). Оставшиеся  $(n - v_2)$  вариаций – линейно независимые. Множители  $\lambda_1, \dots, \lambda_{v_1}$  выбираются таким образом, чтобы коэффициенты при линейно зависимых вариациях в уравнении (2.24) обратились в нуль. Коэффициенты при остальных вариациях должны быть нулями в силу независимости этих вариаций. Отсюда получаем уравнение движения механизма в матричной форме

$$A\ddot{q} = B + B^* + H^T \lambda, \quad (2.25)$$

где  $A$  – матрица коэффициентов в уравнениях движения (если число обобщенных координат  $n$ , то матрица  $A$  имеет размер  $n \times n$ );

$B = [B_1, \dots, B_n]^T$  – матрица-столбец из обобщенных сил размером  $n$ ;

$B^*$  – матрица-столбец из обобщенных сил в «разрезанных» шарнирах;

$\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{v_2}]^T$  – матрица-столбец из множителей Лагранжа, каждый из которых, как уже отмечалось выше, соответствует определенному уравнению;

$H$  – прямоугольная матрица размером  $n \times n$ , элементы которой определяются по уравнениям связей (2.17) и (2.18).

Уравнение (2.25) вместе с уравнениями (2.17) и (2.18) описывают движение полной системы. Для практических приложений такой записи еще недостаточно, так как она не допускает применения алгоритмов численного интегрирования. Для численного интегрирования полученных уравнений движений необходимо предварительно исключить неизвестные множители Лагранжа  $\lambda_1, \dots, \lambda_{v_1}$ . Для этой цели уравнение голономных связей продифференцируем по времени:

$$\dot{f}_i = \frac{\partial f_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0$$

или в матричной форме

$$\dot{f}_i = f'_i \dot{q} + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, v_1, \quad (2.26)$$

где  $f'_i$  – матрица-строка, имеющая вид  $f'_i = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial q_n} \right]$ ;

$\dot{q} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T$  – матрица-столбец скоростей по обобщенным координатам.

Дифференцируя еще раз по времени, из выражения (2.26) получим

$$\ddot{f}_i = f'_i \ddot{q} + \Phi_i(q, \dot{q}, t); \quad i = 1, 2, \dots, v_1. \quad (2.27)$$

Вычисление получаемой при втором дифференцировании функции  $\Phi(q, \dot{q}, t)$  является несложной процедурой, хотя на практике может приводить к громоздким выражениям. Подробнее представление функции  $\Phi_i$  будет показано на примере.

Продифференцируем теперь еще один раз по времени уравнение неголономных связей (2.18):

$$\dot{g}_i = a_{i1}\dot{q}_1 + a_{i2}\dot{q}_2 + \dots + a_{in}\dot{q}_n + \Phi_i(q, \dot{q}, t) = 0$$

или в матричной форме:

$$\dot{g}_i = a_i \ddot{q} + \Phi_i(q, \dot{q}, t); \quad i = v_1 + 1, \dots, v_2. \quad (2.28)$$

Матрица-строка  $a_i$  определена ранее, как  $a_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}]$ ; то, что было сказано о функциях  $\Phi_1, \dots, \Phi_{v_1}$ , относится и к функциям  $\Phi_{v_1+1}, \dots, \Phi_{v_2}$ .

Уравнения (2.26) и (2.28) объединим в одно матричное выражение

$$H \dot{q} = -\Phi(q, \dot{q}, t), \quad (2.29)$$

где

$$H = [f'_1 \quad \dots \quad f'_{v_1} \quad a_{v_1+1} \quad \dots \quad a_{v_2}]^T;$$

$$\Phi(q, \dot{q}, t) = \left[ \frac{\partial f_1}{\partial t} \quad \dots \quad \frac{\partial f_{v_1}}{\partial t} \quad a_{v_1+1} \quad \dots \quad a_{v_2} \right]^T.$$

Если все связи стационарные, то последняя матрица равна нулевой матрице. Аналогично уравнения (2.27) и (2.28) объединяются в матричное уравнение

$$H \ddot{q} = -\Phi(q, \dot{q}, t), \quad (2.30)$$

где  $\Phi(q, \dot{q}, t) = [\Phi_1, \dots, \Phi_{v_2}]^T$  – матрица-столбец обобщенной функции сил.

Рассмотрим последовательность решения задачи о движении механической системы координатного устройства.

Предположим, что интегрирование начинается в момент времени  $t = t_0$ . Сначала нужно определить начальные значения обобщенных координат и скоростей. Для обобщенных координат они должны удовлетворять уравнениям (2.17) и (2.18). Как только определены начальные значения  $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$ , для нахождения начальных скоростей используется уравнение (2.30). Исходя из полученных таким образом начальных условий, далее можно исключить множители  $\lambda$ . Для этого используются две системы дифференциальных уравнений второго порядка (2.22) и (2.23).

Уравнение (2.25) разрешается относительно  $\ddot{q}$ , результаты подставляются в уравнение (2.30), последнее разрешается относительно  $\lambda$ , и  $\lambda$  снова подставляется в (2.25). Получающиеся при этом дифференциальные уравнения можно далее интегрировать численно при помощи какого-либо стандартного алгоритма.

Проследим описанную последовательность на формулах. Уравнения (2.25) разрешим относительно  $\ddot{q}$ :

$$\ddot{q} = A^{-1}(B + B^* + H^T \lambda), \quad (2.31)$$

где  $A^{-1}$  – обратная матрица к матрице  $A$ .

Подставив (2.31) в (2.30), получим

$$HA^{-1}H^T \lambda = -(HA^{-1}(B + B^*) + \Phi). \quad (2.32)$$

Если все уравнения связей независимы, то матрица  $H$  имеет полный ранг, равный количеству строк  $v_2$ ; матрица  $HA^{-1}H^T$  имеет тот же ранг, равный  $v_2$ , если матрица  $A^{-1}$  – определенная квадратная матрица.

Так как обратная матрица существует, то вектор  $\lambda$  определяется из матричного выражения

$$\lambda = -(HA^{-1}H^T)(HA^{-1}(B + B^*) + \Phi). \quad (2.33)$$

Подставляя найденные  $\lambda$  в уравнение (2.31), получим

$$\ddot{q} = A^{-1} \left\{ B + B^* - H^T (HA^{-1}H^T)^{-1} [HA^{-1}(B + B^*) + \Phi] \right\}. \quad (2.34)$$

Это и есть окончательная матричная форма записи уравнений движения механической системы с размыканием контура исполнительного механизма по одному из изложенных выше методов. Число уравнений в системе (2.34) равно числу обобщенных координат. Удовлетворение уравнений связей обеспечивается матричными членами  $H$  и  $\Phi$ . Численное интегрирование, как уже отмечалось выше, начинается от начальных условий для  $t_0, q_0, \dot{q}_0$ , которые удовлетворяют уравнениям (2.17) и (2.18).

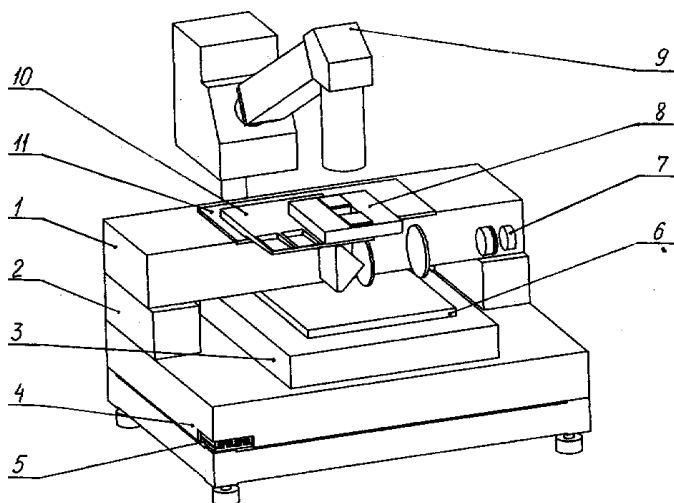
## 2.3 Моделирование колебательного движения каретки координатного стола установки экспонирования

В этом разделе рассматриваются прикладные задачи, возникающие при разработке математической модели исследования динамики движения каретки координатного стола установки экспонирования ЭМ-5034, выпускаемой серийно ГНПО ТМ «Планар» (г. Минск).

### 2.3.1 Расчетная схема и исходная математическая модель

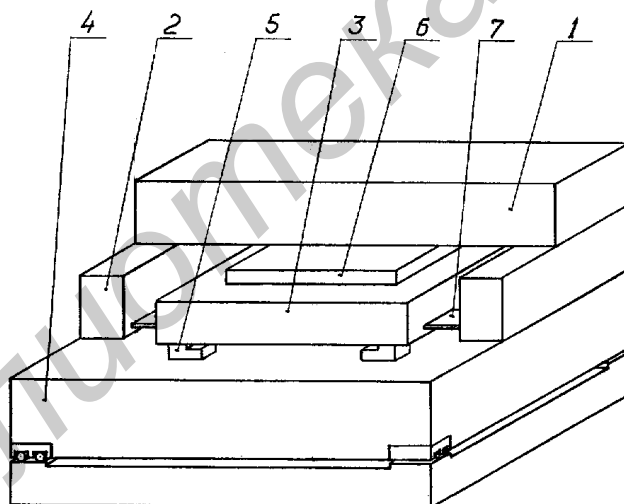
Установка экспонирования ЭМ-5034 (рисунок 2.10) состоит из несущей твердокаменной плиты 1, на которой закреплены все узлы и устройства, обеспечивающие точность работы системы: проекционный объектив 7, интерферометры координатных столов, датчики совмещения, базирования и фокусировки. Эта плита через амортизаторы 5 опирается на витую раму, установленную через регулируемые жесткие опоры на виброзащищенный фундамент.

Координатный стол установки ЭМ-5034 строится на планарных двухкоординатных линейных шаговых двигателях с контролем положения каретки лазерными интерферометрами. Такие столы обеспечивают точное перемещение с хорошим ускорением по двум ортогональным осям с ограничением разворота каретки до одной угловой минуты. Каретка координатного стола «плавает» на воздушной (левитационной) опоре по плоскости статора, при этом отпадает необходимость в сложных многослойных столах-сэндвичах  $x, y, z$  – каретки, точность работы которых очень сложно обеспечить.



1 – основная плита; 2 – стойка; 3 – статор КСП; 4 – основание статора КСП; 5 – амортизаторы; 6 – КСП; 7 – проекционный объектив; 8 – диафрагма; 9 – осветительная система; 10 – КСР; 11 – статор КСР  
Рисунок 2.10 – Оптико-механическая установка экспонирования

Остановимся более подробно на координатном столе пластин (КСП), изображенном на рисунке 2.11.

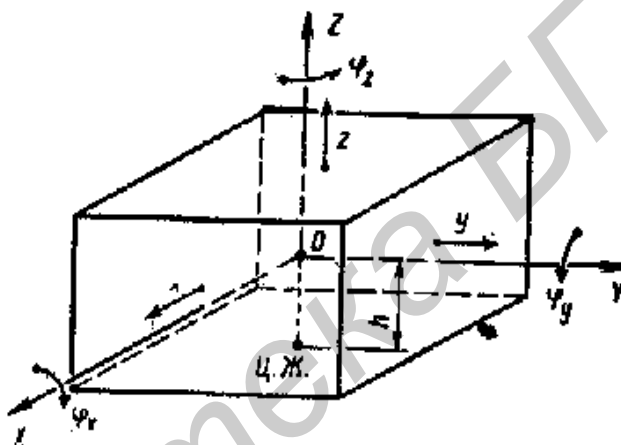


1 – основная плита; 2 – стойки; 3 – статор КСП; 4 – основание КСП; 5 – привод фокусировки; 6 – каретка КСП; 7 – пружинная подвеска  
Рисунок 2.11 – Координатный стол пластин

Координатный стол пластин построен по однокареточному принципу с приводом на линейных шаговых двигателях (ЛШД). Он состоит из подвижной каретки, содержащей плоскую плиту с вакуумным прихватом стеклянных пластин и зеркалами трех лазерных интерферометров. Один из них предназначен для контроля перемещений по оси  $x$ , второй – по оси  $y$  и третий – для контроля разворота каретки в плоскости  $xy$ .

Индуктор состоит из двух пар ЛШД, создающих усилие для перемещения по осям  $x$  и  $y$  разворота в плоскости  $xu$ . Статор координатного стола (см. рисунок 2.11) изготовлен из твердокаменной плиты, на которую наклеен лист электротехнической стали с зубцовой нарезкой по двум координатам.

В основу математического моделирования и расчета характеристик колебательного движения координатных столов нами положена теория колебаний твердого тела. Колебательное движение наиболее полно характеризуется динамической моделью движения твердого тела в пространстве под действием сил электромагнитного взаимодействия индуктор–статор ЛШД и сил реакции аэростатической опоры (рисунок 2.12). Таким образом, характерной особенностью рассматриваемых систем с точки зрения механики является динамическое взаимодействие систем левитации и тяги, возникающие вследствие переменности зазора характеристик магнитного взаимодействия индуктор–статор.



$O$  – центр тяжести каретки, Ц.Ж. – центр жесткости левитационной опоры

Рисунок 2.12 – Расчетная схема для одномассовой динамической модели каретки

Наиболее полно колебательное движение координатного стола может быть математически описано на основе уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial W}{\partial q} = Q(t), \quad (2.35)$$

где  $E$  и  $W$  – кинетическая и потенциальная энергии механической системы;  
 $Q(t)$  – внешняя силовая функция;  
 $q$  – обобщенная координата.

С учетом (2.35) уравнения Лагранжа движения координатного стола как твердого тела в пространстве будут иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.36)$$

где  $Q_i$  – обобщенные силы, не имеющие потенциала;

$i$  – номер степени свободы;

$n$  – число степеней свободы механической системы координатного стола (в общем случае движения в трехмерном пространстве  $n = 6$ ).

Таким образом, для колебательной системы будем составлять столько уравнений Лагранжа, сколькими степенями свободы она обладает.

Независимые декартовы координаты обычно выражаются через линейные и угловые перемещения  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , которые в общем случае могут быть записаны в виде нелинейной параметрической системы:

$$\begin{cases} x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \\ y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t); \\ z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \end{cases} \quad (2.37)$$

### 2.3.2 Прикладные задачи на моделирование колебательного движения каретки

#### Задача 2.6 Математическая модель колебательного движения каретки без учета внешних воздействий

Применительно к динамике координатного стола, обладающего шестью степенями свободы и не подверженного воздействию внешних возмущений  $Q(t)$ , уравнения запишутся так:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0; & \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0; & \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0; \\ \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial W}{\partial \varphi_x} = 0; & \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E}{\partial \varphi_y} + \frac{\partial W}{\partial \varphi_y} = 0; & \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E}{\partial \varphi_z} + \frac{\partial W}{\partial \varphi_z} = 0, \end{cases} \quad (2.38)$$

где  $x, y, z$  – поступательные перемещения по трем осям пространственной системы координат;

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  – поворотные перемещения относительно каждой из трех осей пространственной системы координат.

Кинематическая и потенциальная каретки координатного стола в общем случае соответственно равны

$$E = \frac{1}{2}(mx^2 + my^2 + mz^2 + I_x\varphi_x^2 + I_y\varphi_y^2 + I_z\varphi_z^2); \quad (2.39)$$

$$W = \frac{1}{2}(C_x x^2 + C_y y^2 + C_z z^2 + K_x \varphi_x^2 + K_y \varphi_y^2 + K_z \varphi_z^2 + 2C_x h x \varphi_y + 2C_y h y \varphi_x), \quad (2.40)$$

где  $m$  – масса каретки в сборе;

$I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции каретки относительно координатных осей;



$C_x, C_y, C_z$  – поступательные жесткости воздушной опоры;

$K_x, K_y, K_z$  – поворотные жесткости воздушной опоры;

$h$  – расстояние между центром тяжести и центром жесткости.

Производные потенциальной энергии по обобщенным координатам  $x, y, z$  и  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  будут равны

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x} = C_x x + C_x h \varphi_y; & \frac{\partial W}{\partial y} = C_y y + C_y h \varphi_x; & \frac{\partial W}{\partial z} = C_z z; \\ \frac{\partial W}{\partial \varphi_x} = K_x x + C_y h y; & \frac{\partial W}{\partial \varphi_y} = K_y y + C_x h x; & \frac{\partial W}{\partial \varphi_z} = K_z z. \end{cases} \quad (2.41)$$

С учетом (2.39) и (2.40) получим следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + C_z = 0; \\ I_z \ddot{\varphi}_z + K_z \varphi_z = 0; \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + C_x x + C_x h \varphi_y = 0; \\ I_y \ddot{\varphi}_y + K_y \varphi_y + C_x h x = 0; \end{cases} \quad (2.43)$$

$$\begin{cases} m\ddot{y} + C_y y + C_y h \varphi_x = 0; \\ I_x \ddot{\varphi}_x + K_x \varphi_x + C_y h y = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Моделируя колебательное движение каретки перемещением проекции центра масс  $m$  на одну из двух взаимно перпендикулярных осей плоской системы прямоугольных координат при статическом смещении центра вращения на величину  $e$ , заметим, что равновесное состояние точки определяется уравнением

$$P_{ж} = P_i, \quad (2.45)$$

где  $P_{ж}$  и  $P_i$  – сила жесткости оси вращения и сила инерции вращающейся точки (массы), или

$$Cq = m\varpi^2 R, \quad (2.46)$$

где  $C$  – жесткость оси вращения;

$q$  – вертикальное перемещение центра вращения;

$R$  – радиус вращения массы.

Вертикальное упругое перемещение центра вращения

$$Q = e + z;$$

$$c(e + z) = m\varpi^2 R, \quad (2.47)$$

отсюда

$$z = \frac{m\varpi^2 R}{c - m\varpi^2}. \quad (2.48)$$

Динамическое упругое перемещение центра вращения достигнет своего критического значения при выполнении равенства

$$C - m\varpi^2 = 0. \quad (2.49)$$

Значит, частота линейных колебаний диска массой  $m$  равна

$$\varpi = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (2.50)$$

Моделируя поворотные колебания крутильными колебаниями диска массой  $m$ , эксцентрично посаженного на тонком упругом горизонтально расположенном валу, будем иметь следующее условие его мгновенного динамического равновесия:

$$M_{\text{ж}} = M_0(P_i), \quad (2.51)$$

где  $M_{\text{ж}}$  и  $M_0(P_i)$  – соответственно момент сил упругости и момент силы инерции центра тяжести относительно оси колебаний,

или

$$k\varphi = m\varpi^2(e+z)^2, \quad (2.52)$$

где  $k$  – поворотная жесткость вала;

$\varphi$  – угол поворота диска;

$m$  – масса диска;

$\varpi$  – частота поворотных колебаний;

$e$  – эксцентриситет диска;

$z$  – упругий прогиб вала.

Приняв радиус вращения центра тяжести диска равным  $e+z=q$ , а угол поворота диска равным  $\varphi=1$ , получим

$$\varpi = \sqrt{\frac{k}{mq^2}}. \quad (2.53)$$

Здесь произведение массы  $m$  на квадрат расстояния  $q$  от ее центра тяжести до оси вращения есть момент инерции  $I$ . Тогда частота поворотных колебаний равна

$$\varpi = \sqrt{\frac{k}{I}}. \quad (2.54)$$

Формулы частоты, выраженные в герцах (Гц), запишутся в виде

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad (2.55)$$

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{I}}. \quad (2.56)$$

Поступательные и круговые перемещения амортизированного аппарата относительно вертикальной оси  $Z$  не зависят друг от друга. Поскольку эти перемещения представляют собой поступательные и поворотные колебания, описываемые уравнениями (2.42), то последние отражают так называемые *односвязные* колебания.

Оси  $X$  и  $Y$  лежат в одной плоскости, совпадающей с плоскостью центра жесткости, ниже центра тяжести на величину  $h$ . Поэтому поступательные колебания центра тяжести аппарата вдоль оси  $X$  и поворотные колебания относительно оси  $Y$  взаимосвязаны. Описывающие их уравнения (2.43) отражают так называемые *двухсвязные* колебания.

Предположим, что закон поступательных и угловых колебательных перемещений аппарата синусоидальный. Тогда

$$x = A_x \sin \varpi_c t; \quad (2.57)$$

$$\varphi_y = A_{\varphi_y} \sin \varpi_K t, \quad (2.58)$$

где  $x$  и  $\varphi_y$  – линейное, вдоль оси  $X$ , и круговое, вокруг оси  $Y$ , перемещения центра тяжести аппарата;

$A_x$  и  $A_{\varphi_y}$  – амплитуды линейных и круговых колебаний центра тяжести;

$\varpi t$  – произведение частоты на время (фаза колебаний).

Производные, входящие в уравнения (2.39), (2.42), (2.44) линейных и круговых перемещений, равны

$$\dot{x} = \varpi_c A_x \cos \varpi_c t; \quad (2.59)$$

$$\ddot{x} = -\varpi_c^2 A_x \sin \varpi_c t; \quad (2.60)$$

$$\dot{\varphi}_y = \varpi_K A_{\varphi_y} \cos \varpi_K t; \quad (2.61)$$

$$\ddot{\varphi}_y = -\varpi_K^2 A_{\varphi_y} \sin \varpi_K t. \quad (2.62)$$

Подставляя в (2.43) выражения (2.60) и (2.62) и производя сокращения на  $\sin \varpi t$ , получим

$$\begin{cases} -m\varpi^2 A_x + C_x A_x + C_x h A_{\varphi_y} = 0; \\ -I_y \varpi^2 A_{\varphi_y} + K_y A_{\varphi_y} + C_x h A_x = 0 \end{cases} \quad (2.63)$$

или

$$\begin{cases} A_x (C_x - m\varpi^2) + C_x h A_{\varphi_y} = 0; \\ A_{\varphi_y} (K_y - I_y \varpi^2) + C_x h A_x = 0. \end{cases} \quad (2.64)$$

Выражение (2.64) представляет собой систему однородных алгебраических уравнений с ненулевым решением относительно  $A_x$  и  $A_{\varphi_y}$  лишь в случае, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} C_x - m\varpi^2 & C_x h \\ C_x h & K_y - I_y \varpi^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.65)$$

Раскрываем определитель:

$$(C_x - m\varpi^2)(K_y - I_y \varpi^2) - C_x^2 h^2 = 0;$$

$$mI_y \varpi^4 - (I_y C_x + mK_y) \varpi^2 + C_x K_y - C_x^2 h^2 = 0;$$

$$\varpi^4 - \left( \frac{C_x}{m} + \frac{K_y}{I_y} \right) \varpi^2 + \frac{C_x K_y - C_x^2 h^2}{m I_y} = 0.$$

Отсюда частота двухсвязных колебаний (вдоль оси  $X$  и вокруг оси  $Y$ )

$$\begin{aligned} \varpi_{x,\varphi_y} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_x}{m} + \frac{K_y}{I_y} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_x}{m} + \frac{K_y}{I_y} \right)^2 - \frac{C_x K_y - C_x^2 h^2}{m I_y}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_x}{m} + \frac{K_y}{I_y} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_x}{m} + \frac{K_y}{I_y} \right)^2 - \frac{C_x K_y}{m I_y} + \frac{C_x^2 h^2}{m I_y}}}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Преобразуем второе радикальное выражение:

$$\frac{1}{4} \left( \frac{C_x}{m} + \frac{K_y}{I_y} \right)^2 - \frac{C_x K_y}{m I_y} = \frac{1}{4} \left( \frac{C_x^2}{m^2} + 2 \frac{C_x K_y}{m I_y} + \frac{K_y^2}{I_y^2} \right) - \frac{4 C_x K_y}{4 m I_y} = \frac{1}{4} \left( \frac{C_x}{m} - \frac{K_y}{I_y} \right)^2.$$

Тогда частота поступательных колебаний каретки вдоль оси  $X$  равна

$$\varpi_x = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_x}{m} + \frac{K_y}{I_y} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_x}{m} - \frac{K_y}{I_y} \right)^2 - \frac{C_x^2 h^2}{m I_y}}}. \quad (2.67)$$

Частота поворотных колебаний каретки вокруг оси  $Y$  равна

$$\varpi_{\varphi_y} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_x}{m} + \frac{K_y}{I_y} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_x}{m} - \frac{K_y}{I_y} \right)^2 - \frac{C_x^2 h^2}{m I_y}}}. \quad (2.68)$$

Соответственно частоты, выраженные в герцах, равны

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_x}{m} + \frac{K_y}{I_y} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_x}{m} - \frac{K_y}{I_y} \right)^2 - \frac{C_x^2 h^2}{m I_y}}}; \quad (2.69)$$

$$f_{\varphi y} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_x}{m} + \frac{K_y}{I_y} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_x}{m} - \frac{K_y}{I_y} \right)^2 - \frac{C_x^2 h^2}{m I_y}}} . \quad (2.70)$$

Решая уравнение (2.44), получим аналогичные формулы частот, поступательных вдоль оси  $Y$  и поворотных вокруг оси  $X$ :

$$f_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_y}{m} + \frac{K_x}{I_x} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_y}{m} - \frac{K_x}{I_x} \right)^2 - \frac{C_y^2 h^2}{m I_x}}} ; \quad (2.71)$$

$$f_{\varphi x} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{C_y}{m} + \frac{K_x}{I_x} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{C_y}{m} - \frac{K_x}{I_x} \right)^2 - \frac{C_y^2 h^2}{m I_x}}} . \quad (2.72)$$

В случае совпадения центра тяжести с центром жесткости, то есть при  $h=0$ , второе слагаемое второго радикала в выражениях (2.67) – (2.72) обращается в нуль.

Теперь предположим, что начало координат  $X, Y, Z$  не совпадает с центром тяжести каретки в сборе. Тогда координаты ее центра тяжести равны

$$X_c = \frac{\sum P_i X_i}{P}; \quad Y_c = \frac{\sum P_i Y_i}{P}; \quad Z_c = \frac{\sum P_i Z_i}{P}, \quad (2.73)$$

где  $P_i$  – вес каждого из элементов каретки;

$X_i, Y_i, Z_i$  – координаты центров тяжести каждого из элементов компоновки каретки.

Моменты инерции массы каретки относительно внешних осей инерции  $X, Y, Z$  определяются по известной из механики формуле Гюйгенса–Штейнера:

$$I_{z,x,y} = I_c + m \rho_{z,x,y}^2, \quad (2.74)$$

где  $I_c$  – момент инерции каретки относительно осей, проходящих через его центр тяжести;

$m$  – масса каретки;

$\rho$  – расстояние от центра тяжести каретки до начала координат  $X, Y, Z$ .

В первом приближении примем следующие обозначения геометрических параметров каретки:  $H$  – высота по оси  $Z$ ;  $a$  – ширина по оси  $Y$ ;  $b$  – длина по оси  $X$ . Тогда, рассматривая каретку как параллелепипед, получим следующие выражения момента инерции (2.74) относительно трех координатных осей:

$$I_z = m \left( \frac{a^2 + b^2}{12} \right) + X^2 + Y^2; \quad (2.75)$$

$$I_x = m \left( \frac{b^2 + h^2}{12} \right) + Z^2 + Y^2; \quad (2.76)$$

$$I_y = m \left( \frac{a^2 + h^2}{12} \right) + X^2 + Z^2. \quad (2.77)$$

### Задача 2.7 Математическая модель колебательного движения каретки с учетом внешних воздействий

Как мы установили выше, динамическая модель каретки координатного стола представляет собой пространственную колебательную систему, в общем случае обладающую шестью степенями свободы.

Не нарушая общности постановки задачи исследования, подробно остановимся на вынужденных колебаниях вдоль одной оси.

Рассмотрим случай, когда на каретку действует периодически изменяющаяся возмущающая сила  $F$ , направленная вдоль одной из осей, например, вдоль оси  $q$ , и сила сопротивления, оказываемая воздушной опорой. В этом случае уравнение Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = -b\dot{q} + F_0 \sin \omega_0 t \quad (2.78)$$

или

$$m\ddot{q} + c\dot{q} = -P\dot{q} + F_0 \sin \omega_0 t,$$

где  $L$  – функция Лагранжа ( $L = E - W$ );

$b$  – коэффициент демпфирования магнитовоздушной опоры координатного стола;

$F_0 \sin \omega_0 t$  – функция возмущающей силы.

Принимая  $\frac{b}{m} = 2f$ , из выражения (2.78) окончательно получим

$$\ddot{q} + 2f\dot{q} + \omega^2 q = \tau \sin \omega_0 t, \quad (2.79)$$

где  $f = \frac{b}{2m}$ ;  $\omega^2 = \frac{c}{m}$ ;  $\tau = \frac{F_0}{m}$ .

Дифференциальное уравнение Лагранжа (2.79) является неоднородным со специальной правой частью, решение которого будем строить по общему решению однородного уравнения  $q_0$ , индуцируемого исходным дифференциальным уравнением (2.79), и частному решению самого неоднородного уравнения (2.79), обозначаемого  $q^*$ .

Общее решение однородного уравнения для случая малого сопротивления ( $f > \omega$ ), характеризуемого аperiodическим затуханием, будет иметь вид

$$q_0 = Ae^{-ft} \sin(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (2.80)$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - f^2}$ .

Частное решение ищем в виде

$$q^* = M \cos \omega_0 t + N \sin \omega_0 t, \quad (2.81)$$

где  $M$  и  $N$  – произвольные постоянные.

Дифференцируя (2.81), получим

$$\begin{cases} \dot{q}^* = -\omega_0 M \sin \omega_0 t + \omega_0 N \cos \omega_0 t; \\ \ddot{q}^* = -\omega_0^2 M \cos \omega_0 t + \omega_0^2 N \sin \omega_0 t. \end{cases} \quad (2.82)$$

Подставив (2.82) в уравнение (2.81), получим

$$\begin{aligned} -\omega_0^2 M \cos \omega_0 t - \omega_0^2 N \sin \omega_0 t - 2f\omega_0 M \sin \omega_0 t + \\ + 2f\omega_0 N \cos \omega_0 t + \omega_0^2 M \cos \omega_0 t + \omega_0^2 N \sin \omega_0 t = \tau \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Для выполнения этого равенства при любом  $t$  необходимо, чтобы сумма коэффициентов соответственно при  $\cos \omega_0 t$  и  $\sin \omega_0 t$  была равна нулю:

$$\begin{cases} -\omega_0^2 M + 2f\omega_0 N + \omega_0^2 M = 0; \\ -\omega_0^2 N - 2f\omega_0 M + \omega_0^2 N - \tau = 0. \end{cases} \quad (2.84)$$

Из первого уравнения системы (2.84) получим

$$N = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2f\omega_0}. \quad (2.85)$$

Второе уравнение из системы (2.84) после подстановки в него полученного в (2.85) выражения для  $N$  примет вид

$$-\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2f\omega_0} M - 2f\omega_0 M - \tau = 0.$$

Отсюда

$$M = \frac{-2f\omega_0 \tau}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4f^2 \omega_0^2}. \quad (2.86)$$

С учетом (2.86) выражение (2.85) запишется в следующем виде:

$$N = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) \cdot 2f\omega_0 \tau}{2f\omega_0 \cdot [(\omega^2 - \omega_0^2) + 4f^2 \omega_0^2]} = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2) \cdot \tau}{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4f^2 \omega_0^2}. \quad (2.87)$$

Выразим  $M$  и  $N$  через значения начальной амплитуды:

$$\begin{cases} M = A_0 \sin \varphi_1; \\ N = A_0 \cos \varphi_1. \end{cases}$$

Тогда амплитуда вынужденных колебаний будет равна

$$A_0 = \sqrt{M^2 + N^2}.$$

С учетом (2.86) и (2.87) окончательно получим

$$A_0 = \frac{\tau}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4f^2 \omega_0^2}}. \quad (2.88)$$

Используя (2.86) и (2.87), получим выражение для определения тангенса фазового угла  $\varphi_1$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{M}{N} = \frac{-2f\omega_0\tau[(\omega^2 - \omega_0^2) + 2f\omega_0^2]}{[(\omega^2 - \omega_0^2) + 4f^2\omega_0^2]\tau(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (2.89)$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{M}{N} = \frac{-2f\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (2.90)$$

С учетом значений  $M$  и  $N$  частные решения неоднородного уравнения (2.79) будут иметь вид

$$q^* = A_0 \sin \varphi_1 \cos \omega_0 t + A_0 \cos \varphi_1 \sin \omega_0 t = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_1). \quad (2.91)$$

Общее решение уравнения (2.79) с учетом (2.80) и (2.91) запишется следующим образом:

$$q = q_0 + q^* = Ae^{-ft} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\tau}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4f^2 \omega_0^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi_1). \quad (2.92)$$

Таким образом, получены необходимые уравнения для исследования колебательного движения координатного стола.

Представленная в разделе 2 математическая модель исследования колебаний координатного стола является общей для любых координатных систем, построенных на основе линейных шаговых двигателей с левитационными аэростатическими опорами и подшипниками. Координатный стол или конкретный позиционер рассматривается в виде сосредоточенной одномассовой системы с распределенной геометрией и массой в виде прямоугольного параллелепипеда, который обладает в трехмерном пространстве шестью степенями свободы по отношению к неподвижному статору.

Математическая модель, построенная на уравнениях Лагранжа второго рода, позволяет получить алгоритм расчета амплитудно-частотных и



амплитудно-фазовых характеристик координатного позиционера по каждой из шести координат, включая три линейных и три угловых, в диапазоне малых колебаний относительно центра жесткости. Такие расчеты особенно важны в прецизионных системах перемещений как позиционного, так и контурного типа, когда повышенная амплитуда колебаний может существенно уменьшить точность измерения текущего положения, и, вследствие этого, расширяется область неконтролируемой погрешности системой управления. Модель позволяет проводить оптимизационное проектирование позиционных или координатных столов путем вычислительного подбора константных параметров системы, включающих массогабаритные, жесткостные и силовые характеристики таким образом, чтобы рабочая точка на амплитудно-частотной и амплитудно-фазовой характеристиках была бы расположена наилучшим образом. Углубленное математическое моделирование систем перемещений по обобщенным динамическим моделям во многих случаях обеспечивает повышение точностных и динамических характеристик без существенного изменения конструкции.

### Задачи для самостоятельного решения

**С2.1** Запишите дифференциальные уравнения для манипулятора с одной степенью свободы, показанного на рисунке 2.13.

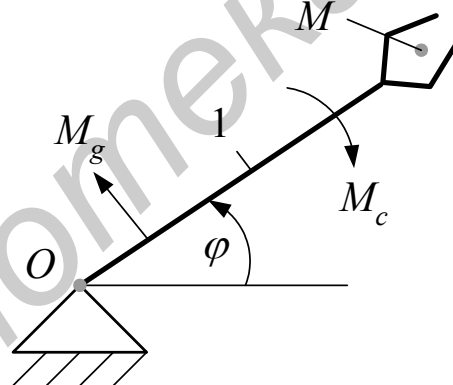


Рисунок 2.13 – Кинематическая схема манипулятора с одной степенью свободы

Найдите алгоритм и выполните решение, если манипулятор имеет следующие параметры:  $l_{OM} = 0,2$  м;  $m_1 = 0,4$  кг;  $J_0 = 0,01$  кг·м<sup>2</sup>, а силовые функции имеют вид

а)  $M_g = 2$  Н·м;  $M_c = 0$ ;

б)  $M_g = 2$  Н·м;  $M_c = 0,1\varphi$ ;  $\varphi_0 = 0$ ;  $\varphi_k = 180^\circ$ ;

в)  $M_g = \begin{cases} 2\varphi, & 0 \leq \varphi \leq 4\pi; \\ 8\pi, & \varphi > 4\pi; \end{cases} \quad M_c = 0,1 \sin \varphi.$

**С2.2** Запишите дифференциальные уравнения для манипулятора с одной поступательной степенью свободы, показанного на рисунке 2.14, на траектории  $y = x + 1$ .

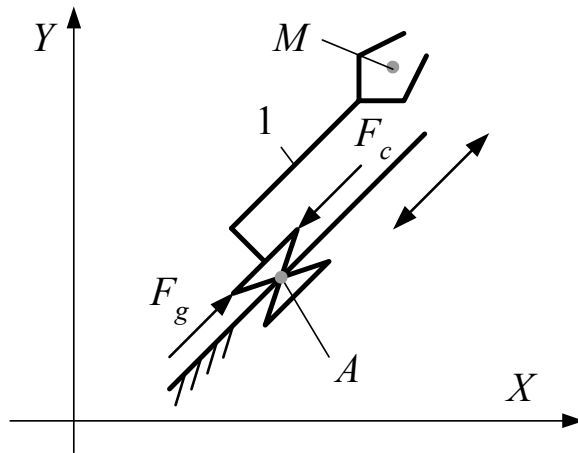


Рисунок 2.14 – Кинематическая схема манипулятора с одной степенью свободы

Найдите алгоритм решения для параметров манипулятора  $m = 0,5$  кг;  $l_{AM} = 0,2$  м, если

- а)  $F_g = 5$  Н;  $F_c = 0$ ;
- б)  $F_g = 2 \sin t$ ;  $F_c = 0$ ;  $t_0 = 0$ ;  $t = 10$ ;
- в)  $F_g = 2 \sin t$ ;  $F_c = t$ ;  $t_0 = 0$ ;  $t = 10$ .

**С2.3** Постройте дифференциальные уравнения для манипуляторов с двумя степенями свободы, показанных на рисунке 2.15, а – в.

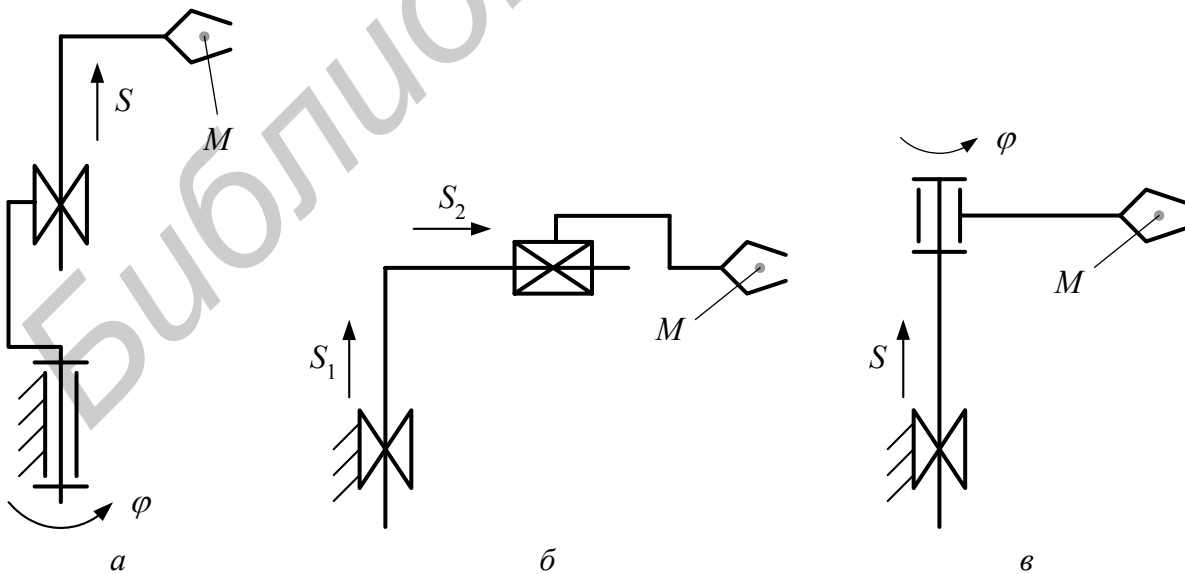


Рисунок 2.15 – Кинематические схемы манипулятора с двумя степенями свободы

**С2.4** Постройте дифференциальные уравнения для манипулятора с тремя степенями свободы, структура которого показана на рисунке 2.16, для следующих случаев:

- а) ограниченного перемещения по осям  $X, Y, Z$  по отдельной координате;
- б) ограниченного перемещения по осям  $X, Y, Z$  по двум координатам одновременно:  $x$  и  $y$ ;  $x$  и  $z$ ;  $y$  и  $z$ ;
- в) одновременного движения по трем координатам  $x, y$  и  $z$ .

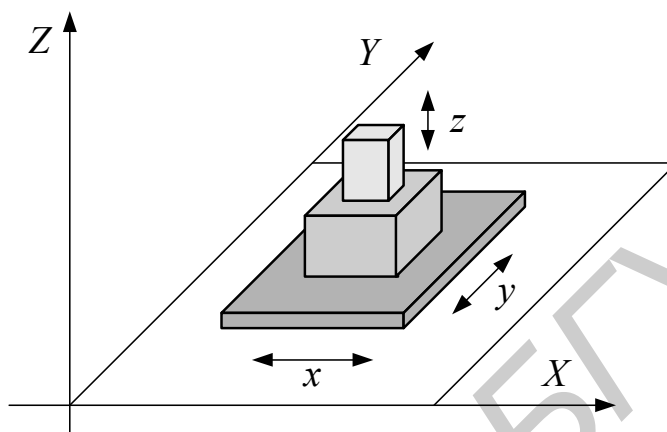


Рисунок 2.16 – Структура манипулятора с тремя степенями свободы

**С2.5** Запишите систему дифференциальных уравнений для двухкоординатного позиционера, показанного на рисунке 2.3, позволяющую учитывать разворот подвижного элемента в плоскости движения, описываемый углом  $\varphi$ . Обобщенные координаты  $x, y, \varphi$  считать независимыми.

**С2.6** Для системы перемещений, представленной на рисунке 2.6, запишите систему дифференциальных уравнений для следующих случаев:

- а) положение позиционера  $A$  фиксировано в точке с координатами  $x_A = a, y_A = b, z_A = 0$ ;
- б) положение позиционера  $A$  фиксировано в точке с координатами  $x_A = a, y_A = b, z_A = 0$ ; а положение позиционера  $B$  – в точке с координатами  $x_B = c, y_B = d, z_B = 0$ ;
- в) движение позиционеров  $A, B$  и  $C$  осуществляется по одной и той же окружности фиксированного радиуса  $R$  с центром в точке  $x_O = y_O = z_O = 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Аналитическая механика и мехатронные системы перемещений / С. Е. Карпович [и др.] ; под ред. С. Е. Карповича. – Минск : Технопринт, 2004. – 187 с.
- 2 Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1979. – 286 с.
- 3 Галиуллин, А. С. Аналитическая динамика / А. С. Галиуллин. – М. : Высш. шк., 1989. – 264 с.
- 4 Голубев, Ю. Ф. Основы теоретической механики / Ю. Ф. Голубев. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – 525 с.
- 5 Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – Минск : Высш. шк., 1979. – 489 с.
- 6 Игнатъев, М. Б. Голономные автоматические системы / М. Б. Игнатъев. – М.-Л. : Изд-во АН СССР, 1963. – 203 с.
- 7 Карпович, С. Е. Имитационное моделирование голономных и мобильных автоматических систем / С. Е. Карпович, В. В. Жарский, И. В. Дайняк. – Минск : Белпринт, 2008. – 212 с.
- 8 Карпук, А. А. Высшая математика для технических университетов. Дифференциальные уравнения / А. А. Карпук, В. Ф. Бондаренко, О. Ф. Борисенко. – Минск : Харвест, 2010. – 304 с.
- 9 Карпук, А. А. Высшая математика для технических университетов. Интегральное исчисление функций многих переменных / А. А. Карпук. – Минск : Харвест, 2009. – 272 с.
- 10 Мехатроника / Т. Исии [и др.]. – М. : Мир, 1988. – 318 с.
- 11 Основы механики машин и роботов / С. Е. Карпович [и др.] ; под ред. С. Е. Карповича. – Минск : Технопринт, 2002. – 155 с.
- 12 Прикладные задачи по высшей математике : учеб. пособие / С. Е. Карпович [и др.]. – Минск : БГУИР, 2000. – 35 с.
- 13 Карпович, С. Е. Программируемые движения в прецизионных системах перемещений / С. Е. Карпович, В. В. Жарский, И. В. Дайняк. – Минск : ФУАинформ, 2008. – 206 с.
- 14 Численные методы решения задач на ПЭВМ : пособие. В 2 ч. / Р. М. Жевняк [и др.]. – Ч. 1. – Минск : Технопринт, 2004. – 150 с. ; Ч. 2. – Минск : Технопринт, 2005. – 236 с.
- 15 Jakowluk, A. Algorithmization of mathematical models for non-holonomic constrains system and non-linear mechanics in the biaxial stress states of solid bodies / A. Jakowluk, S. Karpowicz. – Bialystok, Poland, 1998. – 186 p.
- 16 Murray, R. M. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation / R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry. – CRC PressINC, 1994. – 456 p.

*Учебное издание*

**Карпович** Святослав Евгеньевич  
**Дайняк** Игорь Викторович  
**Жарский** Владимир Владимирович и др.

**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ:  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Г. С. Корбут*  
Корректор *Е. Н. Батурчик*  
Компьютерная верстка *И. В. Дайняк*

Подписано в печать 16.04.2013. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,5. Тираж 150 экз. Заказ 50.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»  
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.

220013, Минск, П. Бровки, 6