Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

РЯДЫ. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Индивидуальные задания
по курсу высшей математики
для студентов всех специальностей
дневной формы обучения

Минск БГУИР 2011

УДК 517(076)
ББК 22.16я73
Р98

С о с т а в и т е л и:
О. А. Феденя, Н. С. Щедрова, М. А. Сафронова

Р е ц е н з е н т:
доцент кафедры информатики учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»,
кандидат технических наук Н. А. Волорова

Р98 **Ряды.** Ряды и интеграл Фурье : индивидуальные задания по курсу высшей математики для студ. всех спец. днев. формы обуч. / сост. О. А. Феденя, Н. С. Щедрова, М. А. Сафронова. – Минск : БГУИР, 2011. – 40 с.
ISBN 978-985-488-670-1.

Издание содержит задачи по теме «Ряды. Ряды и интеграл Фурье», может быть использовано как для проведения практических занятий, так и для контроля. Все задачи представлены в 10 вариантах и содержат ответы. Кроме типовых задач в пособии имеются задачи повышенного уровня сложности.

УДК 517(076)
ББК 22.16я73

ISBN 978-985-488-670-1

Глава 1. Числовые ряды

Задача 1. Написать четыре первых члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(3^n - 1)$. Ответ: ln2; ln8; ln26; ln80.

1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 1}{n^3}$. Ответ: 2; $\frac{11}{8}$; $\frac{26}{27}$; $\frac{47}{64}$.

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4 - (-1)^n}{n^2}$. Ответ: 5; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{3}{16}$.

1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(2n - 1)$. Ответ: sin1; sin3; sin5; sin7.

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. Ответ: 1; 2; $\frac{9}{2}$; $\frac{32}{3}$.

1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{n}$. Ответ: 1; $\frac{5}{2}$; $\frac{19}{3}$; $\frac{65}{4}$.

1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n - 1)!}{n^2}$. Ответ: 1; $\frac{3!}{4}$; $\frac{5!}{9}$; $\frac{7!}{16}$.

1.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n - 1)(n + 2)}$. Ответ: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{5}{28}$.

1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi n$. Ответ: 1; 1; 1; 1.

1.10. $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n!}$. Ответ: 1; $\frac{3}{2!}$; $\frac{1}{3!}$; $\frac{3}{4!}$.

Задача 2. Написать формулу общего члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

2.1. $\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 4} + \ldots$ Ответ: $a_n = \frac{1}{(n+1)n}$.

2.2. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ Ответ: $a_n = \frac{1}{n^2}$.

2.3. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \ldots$ Ответ: $a_n = \frac{n}{2n - 1}$.

2.4. $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots$ Ответ: $a_n = \frac{(-1)^n}{2n - 1}$.

2.5. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots$ Ответ: $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$.

2.6. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ldots$ Ответ: $a_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$.

2.7. $-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\ldots$ Ответ: $a_n=\frac{(-1)^n}{3^n}$.

2.8. $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{8}{9}+\frac{16}{17}+\ldots$ Ответ: $a_n=\frac{2^n}{2^n+1}$.

2.9. $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{15}-\ldots$ Ответ: $a_n=\frac{(-1)^n}{2^n-1}$.

2.10. $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{17}-\ldots$ Ответ: $a_n=\frac{(-1)^n}{2^n+1}$.

Задача 3. Найти сумму ряда:

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$. Ответ: 1.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$. Ответ: 1.

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$. Ответ: 1.

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$. Ответ: $\frac{23}{90}$.

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{3^n}\cdot\cos\frac{2}{3^n}$. Ответ: $\frac{1}{2}\sin 1$.

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{6^{n+1}}$. Ответ: $\frac{1}{2}$.

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)$. Ответ: $1-\sqrt{3}$.

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$. Ответ: ln2.

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача 4. Из заданных числовых рядов выбрать расходящиеся, вычислив $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$:

4.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n^2+2n+3}{n^2+2n-1}$; Ответ: а) 0;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{4n^3+5}{5n^3-2}$. б) не существует, ряд расходится.

4.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^3+3}{3n^2+2} \cdot \arcsin\dfrac{4}{n+1}$; Ответ: а) $\dfrac{8}{3}$, ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{5n^2+3}{4n^3+7}$. б) 0.

4.3. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \cos\dfrac{n^2-1}{n^3-3n+5}$; Ответ: а) 1, ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\dfrac{12n+5}{5n^2+4}}$. б) 0.

4.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+3)\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{n^2+2}$; Ответ: а) 0;

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n}$. б) 1, ряд расходится.

4.5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{25}{n+1}\right)^{n-1}$; Ответ: а) 1, ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\dfrac{3n^2+5}{4n^5+2}$. б) 0.

4.6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+2) \cdot \mathrm{tg}\dfrac{3n+1}{15n^4+8}$; Ответ: а) 0;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left((-1)^n + n^2 + 3\right)$. б) не существует, ряд расходится.

4.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}\left(n^2+1\right)$; Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}$, ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{15n^2+n+3}{n^3+4}\right)$. б) 0.

4.8. а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{2}{n}}-1}{3n^2+2}$; Ответ: а) 0;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n^2+5n+7}{6n^2+2n+5}$. б) не существует, ряд расходится.

4.9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{15n^2+9}}{\sqrt[5]{2n^2+3n+5}}$; Ответ: а) $+\infty$, ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\dfrac{3n+5}{12n^3+4}$. б) 0.

4.10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0{,}02}$; Ответ: а) 0;

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{10}{n^2-1}\right)^n$. б) 1, ряд расходится.

Задача 5. Для общего члена a_n ряда найти оценку вида $a_n < b_n$ и сделать, если это возможно, вывод о его сходимости или расходимости:

5.1. $a_n=\dfrac{1}{3\cdot 4^{2n}+5}$. Ответ: $b_n=\dfrac{1}{3\cdot 4^{2n}}$, ряд сходится.

5.2. $a_n=\sin\dfrac{\pi}{3^n}$. Ответ: $b_n=\dfrac{\pi}{3^n}$, ряд сходится.

5.3. $a_n=\dfrac{\cos^2(5n-4)}{3n\sqrt[5]{n^2}}$. Ответ: $b_n=\dfrac{1}{3n^{7/5}}$, ряд сходится.

5.4. $a_n=\dfrac{\sin^2(3n+2)}{n+3}$. Ответ: $b_n=\dfrac{1}{n+3}$.

5.5. $a_n=\dfrac{1}{3^n}\arccos\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{2n+2}$. Ответ: $b_n=\dfrac{\pi}{3^n}$, ряд сходится.

5.6. $a_n=\dfrac{\operatorname{arctg}(n^2+3)}{n+5}$. Ответ: $b_n=\dfrac{\pi/2}{n+5}$.

5.7. $a_n=\dfrac{1}{n^2+1}\cdot\arcsin\dfrac{(-1)^n+5}{7}$. Ответ: $b_n=\dfrac{\arcsin 6/7}{n^2+1}$, ряд сходится.

5.8. $a_n=\dfrac{\ln n}{2n^3\cdot\sqrt[7]{n}}$. Ответ: $b_n=\dfrac{1}{2n^{5/7}}$, ряд сходится.

5.9. $a_n=\dfrac{\operatorname{arctg}\big((-1)^n+2\big)}{2^{2n+1}}$. Ответ: $b_n=\dfrac{\pi/2}{2^{2n+1}}$, ряд сходится.

5.10. $a_n=\dfrac{5}{3^n+2n}$. Ответ: $b_n=\dfrac{5}{3^n}$, ряд сходится.

Задача 6. С помощью признаков сравнения исследовать сходимость ряда:

6.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7+4\cdot(-1)^{n-1}}{3^{n+2}}$. Ответ: $a_n < \dfrac{1}{3^{n+1}}$, ряд сходится.

6.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} 1}{\ln n}$. Ответ: $a_n > \dfrac{\pi/4}{n}$, ряд расходится.

6.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n + \sin n}{n^2}$. Ответ: $a_n < \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$, $\forall\alpha > 0$, ряд сходится.

6.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4+3\cdot(-1)^{n}}{n+2}$. Ответ: $a_n > \dfrac{1}{n+2}$, ряд расходится.

6.5. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arcctg}(-1)^n}{\sqrt{n(n-3)}}$. Ответ: $a_n > \dfrac{3\pi/4}{n}$, ряд расходится.

6.6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}+1}{n\cdot(3+\cos \pi n/2)}$. Ответ: $a_n > \dfrac{1}{4n^{1/3}}$, ряд расходится.

6.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^4 \dfrac{(-1)^n\cdot\pi}{2}}{\ln(\sqrt[5]{n}+2)}$. Ответ: $a_n > \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}+2}$, ряд расходится.

6.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3-2\cos \pi n}{n^2+\sin n}$. Ответ: $a_n < \dfrac{1}{n^2-1}$, ряд сходится.

6.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4\arccos 1/2}{5^n+n}$. Ответ: $a_n < \dfrac{4\pi/3}{5^n}$, ряд сходится.

6.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+2n+5}}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{3n^4+n+1}{2n^2}$. Ответ: $a_n < \dfrac{\pi/2}{n^{3/2}}$, ряд сходится.

Задача 7. Получить эквивалентную оценку $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{x^{\alpha}}$ **и сделать вывод о сходимости или расходимости ряда** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

7.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n^3+7n^2+15}{n\cdot\sqrt[5]{12n^9+n^7-3}}$. Ответ: $\alpha = -\dfrac{1}{5}$, ряд расходится.

7.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$. Ответ: $\alpha = \dfrac{1}{2}$, ряд расходится.

7.3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$. Ответ: $\alpha = \dfrac{3}{2}$, ряд сходится.

7.4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{n+3}{(n^2-2)\cdot\sqrt[7]{n^2+4}}$. Ответ: $\alpha = \dfrac{9}{7}$, ряд сходится.

7.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot(e^{2/n}-1)^3$. Ответ: $\alpha = 2$, ряд сходится.

7.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2 \dfrac{3}{\sqrt{n}}$. Ответ: $\alpha = 1$, ряд расходится.

7.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln\left(1+\operatorname{tg}^2 \dfrac{1}{\sqrt[5]{n+2}}\right)}{3n+4}$. Ответ: $\alpha = \dfrac{7}{5}$, ряд сходится.

7.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\dfrac{3\pi}{n}\right)$. Ответ: $\alpha = 2$, ряд сходится.

7.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \dfrac{n+3}{n^2+4}$. Ответ: $\alpha = 1$, ряд расходится.

7.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\sin\dfrac{2}{n}\right)\cdot \arcsin\dfrac{n}{\sqrt{n^3+2}}$. Ответ: $\alpha = \dfrac{3}{2}$, ряд сходится.

Задача 8. Найти все значения α, при которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

8.1. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$. Ответ: $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

8.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(e^{\operatorname{tg} 1/n}-1\right)^{\alpha}}{n}$. Ответ: $\alpha > 0$.

8.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^{\alpha}\left(1+\sqrt{\operatorname{arctg} 1/n}\right)}{\sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$. Ответ: $\alpha > 3$.

8.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)\,(e^{\operatorname{tg}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}-1)^{\alpha}$. Ответ: $\alpha > 4$.

8.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}}{n^{\alpha}}$. Ответ: $\alpha > -\dfrac{1}{3}$.

8.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sh}\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n})^{\alpha}$. Ответ: $\alpha > \frac{1}{3}$.

8.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{-1/2n^2} - \cos{1/n} \right)^{\alpha}$. Ответ: $\alpha > \frac{1}{4}$.

8.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\ln \operatorname{sh}\frac{1}{n} - \ln\frac{1}{n} \right)^{\alpha}$. Ответ: $\alpha > \frac{1}{2}$.

8.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(\ln(n^2+1) - 2\ln n \right)$. Ответ: $\alpha < 1$.

8.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch}\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n} \right)^{\alpha}$. Ответ: $\alpha > \frac{1}{2}$.

Задача 9. Исследовать сходимость ряда с помощью признака Даламбера:

9.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$. Ответ: $\ell = \frac{3}{4}$, ряд сходится.

9.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$. Ответ: $\ell = \frac{e}{3}$, ряд сходится.

9.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}$. Ответ: $\ell = 0$, ряд сходится.

9.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Ответ: $\ell = \frac{1}{e}$, ряд сходится.

9.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n+1)!}$. Ответ: $\ell = +\infty$, ряд расходится.

9.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$. Ответ: $\ell = 0$, ряд сходится.

9.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$. Ответ: $\ell = \frac{2}{3}$, ряд сходится.

9.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (2n+1)!}{(3n)!}$. Ответ: $\ell = \frac{4}{9}$, ряд сходится.

9.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)! \cdot n^2}{5^n}$. Ответ: $\ell = +\infty$, ряд расходится.

9.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!}$. Ответ: $\ell = \frac{3}{2}$, ряд расходится.

Задача 10. Исследовать сходимость ряда, используя радикальный признак Коши:

10.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$. Ответ: $\ell=\frac{1}{\sqrt{2}}$, ряд сходится.

10.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^{n^2}\cdot 2^n}{n^{n^2}}$. Ответ: $\ell=\frac{2}{e}$, ряд сходится.

10.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^{n+5}}{5^n}$. Ответ: $\ell=\frac{3}{5}$, ряд сходится.

10.4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot 4^n$. Ответ: $\ell=\frac{4}{e}$, ряд расходится.

10.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+4}{2n^2+8}\right)^{n^4}$. Ответ: $\ell=0$, ряд сходится.

10.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{3^n}$. Ответ: $\ell=\frac{e}{3}$, ряд сходится.

10.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+1}\right)^{n^2}$. Ответ: $\ell=0$, ряд сходится.

10.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n/2}$. Ответ: $\ell=\sqrt{\frac{2}{3}}$, ряд сходится.

10.9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^5\cdot\left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^{n}$. Ответ: $\ell=\frac{2}{3}$, ряд сходится.

10.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^3\cdot\ln^n(n+1)}$. Ответ: $\ell=+\infty$, ряд расходится.

Задача 11. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, получив асимптотическую формулу вида $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n\cdot\ln^{\beta} n}$:

11.1. $a_n=\frac{5n^2+4n+1}{(13n^3+2)\cdot\sqrt{\ln^5\cdot(3n+3)}}$. Ответ: $\beta=\frac{5}{2}$, ряд сходится.

11.2. $a_n=\frac{\operatorname{tg}\frac{3n+2}{4n^2+3}}{\sqrt[7]{\ln^2(5n+4)}}$. Ответ: $\beta=\frac{2}{7}$, ряд расходится.

11.3. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{4+2n^6}}{(n^3+5)\cdot\ln^4 n}$. Ответ: $\beta = 4$, ряд сходится.

11.4. $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{7n+8}{12n^2-3}}{\sqrt[5]{\ln^3(4n+1)}}$. Ответ: $\beta = \dfrac{3}{5}$, ряд расходится.

11.5. $a_n = \dfrac{\arcsin\dfrac{2n^2+3}{4n^3+2}}{\ln(5n-1)}$. Ответ: $\beta = 1$, ряд расходится.

11.6. $a_n = \dfrac{e^{2/n}-1}{\sqrt{3\ln^4 n}}$. Ответ: $\beta = 2$, ряд сходится.

11.7. $a_n = \dfrac{n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)}{\ln^3(2n+3)}$. Ответ: $\beta = 3$, ряд сходится.

11.8. $a_n = \dfrac{n\cdot\sin\dfrac{4n^2+2}{15n^4+n^2+3}}{\sqrt[14]{\ln^2(3n+5)}}$. Ответ: $\beta = \dfrac{1}{7}$, ряд расходится.

11.9. $a_n = \dfrac{3^{n/(n^2+1)}-1}{\ln^5(2n+1)}$. Ответ: $\beta = 5$, ряд сходится.

11.10. $a_n = \dfrac{(2n^3+3n-1)\sin\dfrac{2}{n^2}}{\sqrt{n^4+2}\cdot\sqrt[3]{\ln^2(n+2)}}$. Ответ: $\beta = \dfrac{2}{3}$, ряд расходится.

Задача 12. Исследовать сходимость знакочередующего ряда:

12.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$. Ответ: ряд сходится условно.

12.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(3n^2+n+1)}{(5n+2)\cdot n}$. Ответ: ряд расходится.

12.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4n}$. Ответ: ряд сходится условно.

12.4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin 2}{n(n+1)}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

12.5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt{\ln n}}$. Ответ: ряд сходится условно.

12.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{2n}}{n+3}$. Ответ: ряд расходится.

12.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{5^{n} \cdot (n+1)}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

12.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2})}{n\sqrt{n}}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

12.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cdot (2n+1)}{n(3n+1)}$. Ответ: ряд сходится условно.

12.10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\ln^{2} n}{n}$. Ответ: ряд сходится условно.

Задача 13

Сколько членов ряда нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

13.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(n+1)(n+2)}$. Ответ: 4.

13.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^{4}-2}$. Ответ: 3.

13.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n!\, 3^{n} (2n+1)}$. Ответ: 3.

Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда суммой первых трех его членов:

13.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} (n+1)}{(n+2)(n+3)}$. Ответ: $\frac{5}{42}$.

13.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(n+1)(n^{2}+2)}$. Ответ: $\frac{1}{162}$.

13.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2}(n+2)}$. Ответ: $\frac{1}{16}$.

Найти сумму ряда с точностью до 0,01:

13.7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n(n+1)(n+2)}$. Ответ: 0,04.

13.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$. Ответ: – 0,41.

13.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$. Ответ: 0,96.

13.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(n+1)}$. Ответ: 0,76.

Задача 14. Найти все значения α, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$: а) сходится абсолютно; б) сходится условно:

14.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$. Ответ: а) $\alpha > 1$; б) $0 < \alpha \le 1$.

14.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln^\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Ответ: а) $\alpha > 1$; б) $0 < \alpha \le 1$.

14.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha$. Ответ: а) $\alpha > \frac{1}{2}$; б) $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$.

14.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})^\alpha$. Ответ: а) $\alpha > 2$; б) $0 < \alpha \le 2$.

14.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(e^{1/2n^3}-1\right)^\alpha$. Ответ: а) $\alpha > \frac{1}{3}$; б) $0 < \alpha \le \frac{1}{3}$.

14.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+3n+1)}{(n+1)^\alpha}$. Ответ: а) $\alpha > 3$; б) $2 < \alpha \le 3$.

14.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin^\alpha \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{3n^2}$. Ответ: а) $\alpha > \frac{2}{3}$; б) $0 < \alpha \le \frac{2}{3}$.

14.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln\left(1+\frac{4n}{5n^2+3}\right)}{(n+2)^\alpha}$. Ответ: а) $\alpha > 2$; б) $1 < \alpha \le 2$.

14.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n^2+2)^\alpha}{n\sqrt{n}}$. Ответ: а) $\alpha < 1$; б) $1 \le \alpha < 3$.

14.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{\left(n\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}+1\right)^\alpha}$. Ответ: а) $\alpha > \frac{3}{4}$; б) $0 < \alpha \le \frac{3}{4}$.

Задача 15. Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

15.1. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos n\alpha}{2^n}$, Ответ: а) ряд сходится абсолютно;

б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$, $|a|<1$. б) ряд расходится.

15.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{n\pi}{3}$, Ответ: а) ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n^3}{2^n}$. б) ряд сходится абсолютно.

15.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2n+1)}{n(n+1)}$, Ответ: а) ряд сходится условно;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \cos n}{n\sqrt{n}+5}$. б) ряд сходится абсолютно.

15.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (3n-2)}{3n-1}$, Ответ: а) ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n!}$. б) ряд сходится абсолютно.

15.5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1-4\sin 2n}{n^5+\sqrt[15]{n^{12}+n^6}}$, Ответ: а) ряд сходится абсолютно;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\ln n}{(3n-1)^2}$. б) ряд сходится абсолютно.

15.6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n^2+1}{4n^2+3n-2}$, Ответ: а) ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n \cdot \ln^2 n}$. б) ряд сходится абсолютно.

15.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(n^2+1)}{6n^2-5n+13}$, Ответ: а) ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5-18\cos 2n}{n^{10}+\sqrt[5]{n^2+n-1}}$. б) ряд сходится абсолютно.

15.8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(1+n\cdot 10^{-n})$, Ответ: а) ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n^2}$. б) ряд сходится абсолютно.

15.9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{n^n}$, Ответ: а) ряд сходится абсолютно;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$. б) ряд сходится условно.

15.10. а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot\ln n}$, Ответ: а) ряд сходится условно;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$. б) ряд сходится абсолютно.

Дополнительные задачи

1. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{\ldots}}}}}_{n-\textit{корней}}$ расходится.

2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\alpha)$.

3. Пусть $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ..., $a_n=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

4. Найти значения α и β, при которых ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}n}$ сходится.

5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n!)}$.

6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{n^{-\alpha}}-1)$.

7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если $a_n=\left(\int\limits_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx\right)^{-1}$.

8. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если $a_n=\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)}\dfrac{\sin^2 x}{x}dx$.

9. Члены сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

Глава 2. Функциональные ряды

Задача 1. Найти область сходимости функционального ряда:

1.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2x+1}}$; Ответ: а) $x\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln x)^n}$; б) $x\in\left(0;\frac{1}{e}\right)\cup(e;+\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$. в) $x\in(-1;0]$.

1.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^8}+\sqrt[4]{n}+1\right)^{5x+1}}$; Ответ: а) $x\in\left(-\frac{1}{8};+\infty\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{n\cdot\sin x}}$; б) $x\in(2\pi k;\pi+2\pi k),\ k\in\mathrm{Z}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}(x^2-4x+8)^n$. в) $x\in(1;3)$.

1.3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/11}}$; Ответ: а) $x\in\varnothing$.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^{2n}+2^n}$; б) $x\in(-\infty;+\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(36x^2+3)^n}{2^n(n^2+1)}$. в) $x\in\varnothing$.

1.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$; Ответ: а) $x\neq-n$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3x^n}{1-x^n}$; б) $|x|<1$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n\cdot\frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{n}}\cos(3x+\pi n)$. в) $|x|\le\frac{\sqrt{7}}{2},\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\quad k\in Z$.

1.5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+1\right)^{2x+5}}$; Ответ: а) $x\in\left(-\frac{7}{4};+\infty\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^3}{3^{nx}+2}$; б) $x\in[0;+\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n (x+2)}$. — в) $x \in \left(-2; \frac{1}{e}-2\right) \cup (e-2; +\infty)$.

1.6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(x-3)\cdot n^x}$; — Ответ: а) $x \in (2;3) \cup (3;+\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$; — б) $x \neq \pm 1$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \sin^n x}{n\cdot(n+1)}$. — в) $x \in \left[-\frac{\pi}{6}+\pi k; \quad \frac{\pi}{6}+\pi k\right]$.

1.7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3x}{2n+3x^2}$; — Ответ: а) $x = 0$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$; — б) $|x| > 1$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(5+\frac{2}{n}\right)^n \cdot 7^{-n^3/x}$. — в) $x \in (0; +\infty)$.

1.8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3nx}{1+n^2x^2}$; — Ответ: а) $x = 0$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n+x^{2n}}$; — б) $x \in [-1;1]$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3}\cdot \arcsin\frac{x}{n}\right)^n$. — в) $x \in (-3;3)$.

1.9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3}\cdot\frac{1}{x^2+4x+11}$; — Ответ: а) $x \in \varnothing$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\cdot \sin n\, x$; — б) $x \in [0;+\infty)$; $\quad x = -\pi k,\, k \in N$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 32^n x^{5n} \operatorname{arctg}\frac{2x}{3n+2}$. — в) $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

1.10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\cdot(n+3^x)}$; — Ответ: а) $x \in (-\infty; +\infty)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n$; — б) $x \neq 1$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2+4}$. — в) $x \in \left[-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k\right],\, k \in Z$.

Задача 2. Для данного функционального ряда построить мажорирующий ряд и доказать равномерную сходимость в указанном промежутке:

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2x+4}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+7}}, \quad x \in [0; 2].$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{n^5}}.$

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{x^n+n^5}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^5}.$

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^4+2x^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \cdot (x^n + x^{-n}), \quad \frac{1}{2} \le |x| \le 2.$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \cdot 2^{n+1}.$

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{n^2}}.$

2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad x \in [0; +\infty).$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot e^{-2}}{n^2}.$

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \mathrm{arctg} 2n^2 x}{\sqrt[3]{n^7+n+x}}, \quad x \in [0; +\infty).$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi/2}{\sqrt[3]{n^4}}.$

2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{nx}}, \quad x \in [1; +\infty).$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}.$

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-x} \ln^2 n, \quad x \in [2; +\infty).$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^2}.$

2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{4+n^3x^2}, \quad x \in [0; +\infty).$ Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n^3}}.$

Задача 3. Найти радиус, интервал и область сходимости степенного ряда:

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4} \cdot (x+2)^n.$ Ответ: $R = 1;\ x \in (-3; -1].$

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 7^n} \cdot (x-1)^n.$ Ответ: $R = 7;\ x \in (-6; 8].$

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+3}}{n^{n+1}}.$ Ответ: $R = +\infty;\ x \in (-\infty; +\infty).$

3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \cdot (x+5)^{2n-1}.$ Ответ: $R = 0;\ x = -5.$

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot x^n}{(n+1)!}$. Ответ: $R=\frac{1}{e}$; $x \in \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right]$.

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot x^{2n}}{n^2+5}$. Ответ: $R=\frac{1}{\sqrt{7}}$; $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}}\right]$.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{7^n+5}$. Ответ: $R=\sqrt{7}$; $x \in (-\sqrt{7}; \sqrt{7})$.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin\frac{1}{n^2}}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \cdot x^n$. Ответ: $R=1$; $x \in (-1; 1)$.

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n \cdot (x+2)^n$. Ответ: $R=\frac{3}{2}$; $x \in \left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

3.10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+3)}{3n^2+4} \cdot x^{2n+1}$. Ответ: $R=1$; $x \in [-1; 1]$.

Задача 4. Найти сумму степенного ряда:

4.1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n-1} \cdot n}$; Ответ: а) $-4\ln|4-x|+8\ln 2$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n-2) \cdot x^{3n-1}$. б) $\frac{3x^4}{(1-x^3)^2}$.

4.2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot x^{2n}}{2n-1}$; Ответ: а) $x \cdot \ln\left|\frac{2x+1}{2x-1}\right|$;

б) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+4) \cdot x^{n+3}$. б) $\frac{8x^7+7x^8}{(1+x^2)^2}$.

4.3. а) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{4n^2+4n}$; Ответ: а) $-\frac{x^2}{3}+\frac{1}{4x}\left(\ln\left|1-x^2\right|-x^2\right)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{4^n} \cdot x^{2n}$. б) $\frac{x^2}{(2-x)^2}$.

4.4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{8^n \cdot 3n}$; Ответ: а) $-\frac{x}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{x}\ln\left|\frac{x}{2}-1\right|$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(4n^2+8n+3\right) \cdot x^{2n}$. б) $\frac{3+3x^2-4x^3+2x^5}{(1-x^2)^3}$.

4.5. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3x^{n-1}}{n^2-3n+2}$; Ответ: а) $3\cdot(1-x)\cdot(\ln|1-x|-1)$;

б) $\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(49n^2+14n+1\right)\cdot x^{7n}$. б) $\frac{1+48x}{(1+x^7)^2}+\frac{14x^7\cdot(1+6x^7)}{(1+x^7)^3}$.

4.6. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n+2}{2n+2}\cdot x^{2n+3}$; Ответ: а) $x\cdot\left(-\frac{1}{8}\ln\left|1-4x^2\right|-\ln\left|1-x^2\right|\right)$;

б) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+2n+1}{5^n}\cdot x^n$. б) $\frac{25\cdot(5+x)}{(5-x)^3}$.

4.7. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{18x^{3n+2}}{n+1}$; Ответ: а) $-\frac{6}{x}\ln\left|1-x^3\right|$;

б) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n^2-1)\cdot x^n}{3^n}$. б) $\frac{6x^2}{(3-x)^3}+\frac{x^2}{(3-x)^2}$.

4.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8x^{4n+1}}{4n^2+n}$; Ответ: а) $x^2\cdot(\ln\left|1-x^4\right|+2)-\ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|$;

б) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{nx^n}{2}$. б) $\frac{x}{2\cdot(1+x^2)}$.

4.9. а) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+3}}{n^2+n}$; Ответ: а) $\ln|1-x|\cdot(x^2-x^3)+x^3$;

б) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot(n^2+5n+6)x^{n+1}$. б) $2\cdot\left(1-\frac{1}{(1+x)^3}\right)$.

4.10. а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{n+3}}{n^2+4n+3}$; Ответ: а) $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln|1+x|-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}$;

б) $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\cdot nx^{n-1}$. б) $\frac{2}{(1-x)^3}$.

Задача 5. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0:

5.1. $f(x)=\frac{1}{7-6x-x^2}$, $x_0=-3$. Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n}}{2^{4n+4}}$.

5.2. $f(x)=\ln x$, $x_0=-1$. Ответ: $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$.

5.3. $f(x)=\sin x$, $x_0=\pi/2$. Ответ: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\left(x-\pi/2\right)^{2n}}{(2n)!}$.

5.4. $f(x)=\operatorname{ch} x$, $x_0=-1$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}1}{(2n)!}(x+1)^{2n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}1}{(2n+1)!}(x+1)^{2n+1}$.

5.5. $f(x)=\sin^2 x$, $x_0=\pi/4$. Ответ: $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}\left(x-\pi/4\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

5.6. $f(x)=\operatorname{sh} x$, $x_0=-2$.

Ответ: $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}2}{(2\mathrm{n})!}(x+2)^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}2}{(2n+1)!}(x+2)^{2n+1}$.

5.7. $f(x)=\ln(x^2+9x+8)$, $x_0=-7$. Ответ: $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n\cdot 6^n}{6^n\cdot n}(x+7)^n$.

5.8. $f(x)=\frac{2}{x^2-4x+3}$, $x_0=-5$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6^{n+1}}-\frac{1}{8^{n+1}}\right)(x+5)^n$.

5.9. $f(x)=\sqrt[3]{8-4x}$, $x_0=-4$.

Ответ: $\sqrt[3]{24}\left(1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot 6^n\cdot n!}\right)(x+4)^n$.

5.10. $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0=-2$. Ответ: $\frac{1}{4}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+2)^n}{2^{n+2}\cdot n}$.

Задача 6. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Маклорена:

6.1. $f(x)=\ln(7-6x-x^2)$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{7^n}-\frac{1}{n}\right)\cdot x^n+\ln 7$.

6.2. $f(x)=\frac{4}{3-2x-x^2}$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)\cdot x^n$.

6.3. $f(x)=\sqrt[4]{81-6x}$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(4n-5)}{4^n\cdot 3^{2n}\cdot n!}\cdot x^n$.

6.4. $f(x)=(3+e^x)^2$. Ответ: $6\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$.

6.5. $f(x)=\frac{\operatorname{arctg}3x}{x}$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}\cdot x^{2n}}{2n+1}$.

6.6. $f(x)=x\cdot\sqrt[3]{8-4x}$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{6^n\cdot n!}\cdot x^{n+1}$.

6.7. $f(x)=(x^2+5x+4)\cdot\cos 3x$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{9^n\cdot x^{2n+2}}{(2n)!}+5\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{9^n\cdot x^{2n+1}}{(2n)!}+4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{9^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}$.

6.8. $f(x)=2x^2\sin^2 2x$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{4^{2n}\cdot x^{2n+2}}{(2n)!}$.

6.9. $f(x)=(x+2)\cdot\mathrm{ch}3x$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n\cdot x^{2n+1}}{(2n)!}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}$.

6.10. $f(x)=(5+2x)\cdot\mathrm{sh}2x$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n\cdot}\cdot x^{2n}}{(2n-1)!}+5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Задача 7. Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с точностью до 10^{-3} следующие значения функции:

7.1. $\cos 18^0$. Ответ: 0,947.

7.2. $\sin 24^0$. Ответ: 0,406.

7.3. $e^{-1/2}$. Ответ: 0,609.

7.4. $\ln 1{,}5$. Ответ: 0,407.

7.5. $\sqrt[5]{26}$. Ответ: 1,939.

7.6. $\ln 0{,}8$. Ответ: – 0,222.

7.7. $\sqrt[7]{3}$. Ответ: 1,211.

7.8. $\sin 20^0$. Ответ: 0,342.

7.9. $\cos 12^0$. Ответ: 0,978.

7.10. $\ln 0{,}9$. Ответ: – 0,105.

Задача 8. Используя ряд Маклорена для функции $f(x)$, вычислить интеграл с точностью до 10^{-3}:

8.1. $\int\limits_0^{1/3}\dfrac{\sin x}{x}dx$. Ответ: 0,332.

8.2. $\int\limits_0^{3/4}e^{-x^2}dx.$ Ответ: 0,630.

8.3. $\int\limits_0^{0,25}\sqrt{x}\sin x dx.$ Ответ: 0,013.

8.4. $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$. Ответ: 0,927.

8.5. $\int\limits_0^1\cos x^2 dx.$ Ответ: 0,905.

8.6. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx.$ Ответ: 0,077.

8.7. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx.$ Ответ: 0,488.

8.8. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{x}dx.$ Ответ: 0,507.

8.9. $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$ Ответ: 0,337.

8.10. $\int\limits_0^{1/64} \sqrt[6]{x}\cos x dx.$ Ответ: 0,007.

Задача 9. Найти разложение в ряд Маклорена решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

9.1. $y' + y^2 = x^2, \quad y(0) = 0.$ Ответ: $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{(4n-3)\cdot(4n+3)\cdot 3^n} x^{4n+3}$.

9.2. $(1-x)y' - 1 - x + y = 0, \quad y(0) = 0.$ Ответ: $y = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} + x.$

9.3. $xy'' + y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$ Ответ: $y = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot x^n}{n((n-1)!)^2} + x.$

9.4. $y'' + xy' + y = 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Ответ: $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^n(2n+1)!} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$.

9.5. $y'' + xy' + y = x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$ Ответ: $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

9.6. $xy'' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Ответ: $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(3n)!} x^{3n}$.

9.7. $y'' - xy + y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$ Ответ: $y = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}.$

9.8. $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$ Ответ: $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$

9.9. $4xy'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$ Ответ: $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{(2n)!}.$

9.10. $x^2 y'' + 2xy' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Ответ: $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}.$

Глава 3. Ряд и интеграл Фурье

Задача 1. Найти скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1.1. $f(x) = 2x, \quad g(x) = \sin 2x, \quad x \in [0; \pi].$ Ответ: $-\pi.$

1.2. $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad x \in [0; \pi].$ Ответ: $0.$

1.3. $f(x) = x, \quad g(x) = \ln x, \quad x \in [1; 2].$ Ответ: $2\ln 2 - \dfrac{3}{4}.$

1.4. $f(x) = e^{3x}, \quad g(x) = \sin 5x, \quad x \in [0; \pi].$ Ответ: $\dfrac{5}{34}\left(e^{3\pi} + 1\right).$

1.5. $f(x) = e^{2x}, \quad g(x) = \cos 4x, \quad x \in [0; \pi].$ Ответ: $\dfrac{1}{10}\left(e^{2\pi} - 1\right).$

1.6. $f(x) = x^3, \quad g(x) = \ln x, \quad x \in [1; 3].$ Ответ: $\dfrac{81}{4}(\ln 3 - 5).$

1.7. $f(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right].$ Ответ: $\dfrac{\pi^2}{32} - \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{2}.$

1.8. $f(x) = x; \quad g(x) = \cos^2 x, \quad x \in [-\pi; \pi].$ Ответ: $0.$

1.9. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \ln x, \quad x \in [1; e].$ Ответ: $\dfrac{1}{9}\left(2e^3 + 1\right).$

1.10. $f(x) = x^2, \quad g(x) = 5^x, \quad x \in [-1; 0].$ Ответ: $\dfrac{8}{5\ln^9 5} - \dfrac{2}{5\ln^2 5}.$

Задача 2. Найти норму функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

2.1. $f(x) = x^3, \quad x \in [0; 1].$ Ответ: $\dfrac{\sqrt{7}}{7}.$

2.2. $f(x) = \cos 3x, \quad x \in [0; \pi].$ Ответ: $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.$

2.3. $f(x)=\sin 5x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$ Ответ: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2.4. $f(x)=tg2x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right].$ Ответ: $\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}.$

2.5. $f(x)=e^{x},\quad x\in[0;1].$ Ответ: $\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}.$

2.6. $f(x)=1-x,\quad x\in[0;1].$ Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

2.7. $f(x)=5^{x},\quad x\in[0;1].$ Ответ: $\sqrt{\frac{12}{\ln 5}}.$

2.8. $f(x)=\frac{\ln x}{x},\quad x\in[1;e].$ Ответ: $\sqrt{2-\frac{5}{e}}.$

2.9. $f(x)=\arcsin x,\quad x\in[-1;1].$ Ответ: $\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-4}.$

2.10. $f(x)=\ln x,\quad x\in[1;e].$ Ответ: $\sqrt{e-2}.$

Задача 3. Показать, что заданная система функций ортогональна на отрезке $[a;b]$. Нормировать эту систему и записать ряд Фурье для функции $f(x)$:

3.1. $\sin 2x, \sin 4x, \sin 6x, \ldots, \sin 2nx, \ldots;\quad x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];\quad f(x)=\sin x.$

Ответ: $\|\sin 2nx\|=\sqrt{\frac{\pi}{4}};\quad \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}\sin 2nx.$

3.2. $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \cos nx, \ldots;\quad x\in[0;\pi];\quad f(x)=e^{x}.$

Ответ: $\|\cos nx\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}};\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}e^{\pi}-1}{1+n^2}\cos nx.$

3.3. $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \sin nx, \ldots;\quad x\in[0;\pi];\quad f(x)=e^{x}.$

Ответ: $\|\sin nx\|=\sqrt{\frac{2}{\pi}};\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-(-1)^{n}e^{\pi})\,n}{1+n^2}\sin nx.$

3.4. $\sin x, \sin 3x, \sin 5x, \ldots, \sin(2n-1)x, \ldots;\quad x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];\quad f(x)=\cos x.$

Ответ: $\|\sin(2n-1)x\|=\frac{\sqrt{\pi}}{2};\quad \frac{2}{\pi}\sin x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2n+1}{n(n-1)}\sin(2n-1)x.$

3.5. $\sin\frac{3}{2}x, \sin\frac{5}{2}x, \sin\frac{7}{2}x, \ldots, \sin\frac{2n+1}{2}, \ldots;\quad x\in[0;\pi];\quad f(x)=\cos\frac{x}{2}.$

Ответ: $\left\|\sin\frac{2n+1}{2}x\right\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\quad \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+2n+1}{n(n+1)}\sin\frac{2n+1}{2}x.$

3.6. $\cos 2x, \cos 4x, \cos 6x, ..., \cos 2nx, ...;\quad x\in\left[0; \frac{\pi}{2}\right];\quad f(x)=\sin 2x.$

Ответ: $\|\cos 2nx\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}\cos 2nx.$

3.7. $\cos\frac{3x}{2}, \cos\frac{5x}{2}, \cos\frac{7x}{2}, ..., \cos\frac{2n+1}{2}, ...;\quad x\in[0; \pi];\quad f(x)=\sin\frac{x}{2}.$

Ответ: $\left\|\cos\frac{2n+1}{2}x\right\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\quad \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+2n+1}{n(n+1)}\cos\frac{2n+1}{2}x.$

3.8. $\cos x, \cos 3x, \cos 5x, ..., \cos(2n-1)x, ...;\quad x\in\left[0; \frac{\pi}{2}\right];\quad f(x)=\sin 2x.$

Ответ: $\|\cos(2n-1)x\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\quad \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(2n+1)(2n-3)}\cos(2n-1)x.$

3.9. $\varphi_n(x)=\frac{\cos(n\arccos x)}{\sqrt[4]{1-x^2}},\quad n=1, 2, ...;\quad x\in(-1; 1);\quad f(x)=\frac{\sin(\arccos x)}{\sqrt[4]{1-x^2}}.$

Ответ: $\|\varphi_n(x)\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cdot\frac{n\cdot\cos(\arccos x)}{\sqrt[4]{1-x^2}}.$

3.10. $\varphi_n(x)=\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt[4]{1-x^2}};\quad n=0, 1, 2, ...;\quad x\in(-1; 1);\quad f(x)=\frac{\cos(\arccos x)}{\sqrt[4]{1-x^2}}.$

Ответ: $\|\varphi_n(x)\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n(n+2)}\cdot\frac{(n+1)\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt[4]{1-x^2}}.$

Задача 4. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π **функцию** $f(x)$**, определенную на отрезке** $[-\pi; \pi]$**. Построить график функции и график суммы ряда Фурье**:

4.1. $f(x)=\begin{cases}5, & -\pi<x<0,\\ 3, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=\pm\pi; 0.\end{cases}$ Ответ: $4-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm\pi; 0,\\ 4, & x=\pm\pi; 0.\end{cases}$

4.2. $f(x)=\begin{cases}3, & -\pi<x<0,\\ -3, & 0<x<\pi,\\ 5, & x=\pm\pi;0.\end{cases}$ Ответ: $-\dfrac{12}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm\pi;0,\\ 0, & x=\pm\pi;0.\end{cases}$

4.3. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0<x<\pi,\\ 2, & x=\pm\pi;0.\end{cases}$ Ответ: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm\pi;0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=\pm\pi;0.\end{cases}$

4.4. $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & -\pi<x<0,\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0<x<\pi,\\ \pi, & x=\pm\pi;0.\end{cases}$ Ответ: $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm\pi;0,\\ 0, & x=\pm\pi;0.\end{cases}$

4.5. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0<x<\pi,\\ 2, & x=\pm\pi;0.\end{cases}$ Ответ: $\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm\pi;0,\\ 0, & x=\pm\pi;0.\end{cases}$

4.6. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0<x<\pi,\\ 1, & x=\pm\pi;0.\end{cases}$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-(-1)^k}{\pi k^2}\cos kx+(-1)^k\dfrac{\sin kx}{k}\right)=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm\pi;0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi.\end{cases}$

4.7. $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<\pi,\\ \pi, & x=\pm\pi.\end{cases}$ Ответ: $2\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm\pi,\\ 0, & x=\pm\pi.\end{cases}$

4.8. $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -\pi<x<\pi,\\ 1, & x=\pm\pi.\end{cases}$ Ответ: $1+4\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx=f(x).$

4.9. $f(x)=\begin{cases}-2x, & -\pi<x<0,\\ 3x, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=\pm\pi.\end{cases}$

Ответ: $\frac{5\pi}{4}-5\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}\cos kx+\frac{(-1)^k\sin kx}{k}\right)=\begin{cases} f(x), & x\neq\pm\pi,\\ \frac{5}{2}\pi, & x=\pm\pi.\end{cases}$

4.10. $f(x)=\begin{cases}|x|, & -\pi<x<\pi,\\ 1, & x=\pm\pi.\end{cases}$ Ответ: $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}=\begin{cases} f(x), & x\neq\pm\pi,\\ \pi, & x=\pm\pi.\end{cases}$

Задача 5. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $2l$ функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[-l;l]$. Построить график функции и график суммы ряда Фурье:

5.1. $f(x)=\begin{cases}5, & 0<x<2,\\ 3, & -2<x<0,\\ 0, & x=\pm2;0.\end{cases}$ Ответ: $4-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2k-1}{2})x\pi}{2k-1}=\begin{cases} f(x), & x\neq\pm2;0,\\ 4, & x=\pm2;0.\end{cases}$

5.2. $f(x)=\begin{cases}4, & -3<x<0,\\ 6, & 0<x<3,\\ 4, & x=\pm3;0.\end{cases}$

Ответ: $5+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{3}=\begin{cases} f(x), & x\neq\pm3;0,\\ 5, & x=\pm3;0.\end{cases}$

5.3. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<2,\\ 0, & -2<x<0,\\ 2, & x=\pm2;0.\end{cases}$ Ответ: $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2k-1}{2}\pi x}{2k-1}=\begin{cases} f(x), & x\neq\pm2;0,\\ \frac{1}{2}, & x=\pm2;0.\end{cases}$

5.4. $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0,\\ -2, & 0<x<1,\\ 1, & x=\pm1;0.\end{cases}$ Ответ: $-1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\pi x}{2k-1}=\begin{cases} f(x), & x\neq1;0,\\ -1, & x=\pm1;0.\end{cases}$

5.5 $f(x)=\begin{cases}-4, & -1<x<0,\\ -2, & 0<x<1,\\ -1, & x=\pm1;0.\end{cases}$ Ответ: $-3+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\pi x}{2k-1}=\begin{cases} f(x), & x\neq\pm1;0,\\ -3, & x=\pm1;0.\end{cases}$

5.6. $f(x)=\begin{cases}-x+4, & -3<x<3,\\ 5, & x=\pm3.\end{cases}$

Ответ: $4+\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{\pi kx}{3}=\begin{cases} f(x), & x\neq\pm1,\\ 4, & x=\pm1.\end{cases}$

5.7. $f(x)=\begin{cases}3x+2, & -1<x<1,\\ -2, & x=\pm1.\end{cases}$ Ответ: $2+\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\pi x=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm1,\\ 2, & x=\pm1.\end{cases}$

5.8. $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & -5<x<5,\\ 10, & x=\pm5.\end{cases}$

Ответ: $3+\dfrac{20}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}}{k}\sin\dfrac{\pi kx}{5}=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm5,\\ 3, & x=\pm5.\end{cases}$

5.9. $f(x)=\begin{cases}3-x, & -2<x<2,\\ 0, & x=\pm2.\end{cases}$ Ответ: $3+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}}{k}\sin\dfrac{\pi kx}{2}=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm2,\\ 3, & x=\pm2.\end{cases}$

5.10. $f(x)=\begin{cases}|x|, & -3<x<3,\\ 1, & x=\pm3.\end{cases}$

Ответ: $\dfrac{3}{2}-\dfrac{12}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{3}=\begin{cases}f(x), & x\neq\pm3,\\ 3, & x=\pm3.\end{cases}$

Задача 6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на указанном промежутке:

6.1. $f(x)=x-6,\quad 3\le x\le 9.$ Ответ: $\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\dfrac{k\pi x}{3}.$

6.2. $f(x)=x-4,\quad 2\le x\le 6.$ Ответ: $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\dfrac{k\pi x}{2}.$

6.3. $f(x)=x-10,\quad 5\le x\le 15.$ Ответ: $f(x)=\dfrac{10}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\dfrac{k\pi x}{5}.$

6.4. $f(x)=x+6,\quad -9\le x\le -3.$ Ответ: $f(x)=\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}}{k}\sin\dfrac{k\pi x}{3}.$

6.5. $f(x)=x+8,\quad -12\le x\le -4.$ Ответ: $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}}{k}\sin\dfrac{k\pi x}{4}.$

6.6. $f(x)=\sin\,(x-\pi),\quad \dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{3}{2}\pi.$ Ответ: $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}\cdot k}{4k^2-1}\sin 2kx.$

6.7. $f(x)=\sin\,(2x+\pi),\quad -\dfrac{3}{4}\pi\le x\le-\dfrac{\pi}{4}.$ Ответ: $f(x)=\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}\cdot k}{4k^2-1}\sin 4kx.$

6.8. $f(x)=\sin(3x-6),\quad 1\le x\le 3.$ Ответ: $f(x)=2\pi\sin 3\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}\cdot k}{9-\pi^2k^2}\sin k\pi x.$

6.9. $f(x)=\sin(2x+8), \quad -6\le x\le 2.$ Ответ: $f(x)=2\pi\sin 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot k}{\pi^2k^2-16}\sin\frac{k\pi x}{2}.$

6.10. $f(x)=\sin(4-x), \quad 2\le x\le 6.$ Ответ: $f(x)=2\pi\sin 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot k}{\pi^2k^2-4}\sin\frac{k\pi x}{2}.$

Задача 7

Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)$, заданную на указанном промежутке:

7.1. $f(x)=e^{2x}, \quad 0\le x\le 1.$ Ответ: $f(x)=\frac{e^2-1}{2}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^2-1}{k^2\pi^2+4}\cos k\pi x.$

7.2. $f(x)=e^{5x}, \quad 0\le x\le 2.$ Ответ: $f(x)=\frac{e^{10}-1}{10}+20\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{10}-1}{k^2\pi^2+100}\cos\frac{k\pi x}{2}.$

7.3. $f(x)=e^{-x}, \quad 0\le x\le 3.$ Ответ: $f(x)=\frac{1-e^{-3}}{3}-9\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-3}-1}{k^2\pi^2+9}\cos\frac{k\pi x}{3}.$

7.4. $f(x)=e^{-3x}, \quad 0\le x\le 1.$ Ответ: $f(x)=\frac{1-e^{-3}}{3}-3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^{-3}-1}{k^2\pi^2+9}\cos k\pi x.$

7.5. $f(x)=e^{4x}, \quad 0\le x\le 2.$ Ответ: $f(x)=\frac{e^8-1}{8}+16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k e^8-1}{k^2\pi^2+64}\cos\frac{k\pi x}{2}.$

Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)$, заданную на указанном промежутке:

7.6. $f(x)=e^{2x}, \quad 0\le x\le 1.$ Ответ: $f(x)=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^{k+1}e^2+1\right)\cdot k}{k^2\pi^2+4}\sin k\pi x.$

7.7. $f(x)=e^{5x}, \quad 0\le x\le 2.$ Ответ: $f(x)=2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^{k+1}e^{10}+1\right)}{k^2\pi^2+100}\sin\frac{k\pi x}{2}.$

7.8. $f(x)=e^{-x}, \quad 0\le x\le 3.$ Ответ: $f(x)=3\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^{k}e^{-3}+1\right)\cdot k}{k^2\pi^2+9}\sin\frac{k\pi x}{3}.$

7.9. $f(x)=e^{-3x}, \quad 0\le x\le 1.$ Ответ: $f(x)=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^{k+1}e^{-3}+1\right)}{k^2\pi^2+9}\sin k\pi x.$

7.10. $f(x)=e^{4x}, \quad 0\le x\le 2.$ Ответ: $f(x)=2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^{k+1}e^{8}+1\right)}{k^2\pi^2+64}\sin\frac{k\pi x}{2}.$

Задача 8. Записать ряд Фурье в комплексной форме для периодической с периодом $2l$ функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-l;l]$:

8.1. $f(x)=\begin{cases}5, & -\pi<x<0,\\ 3, & 0<x<\pi,\\ 4, & x=-\pi;\,0;\,\pi.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=4+\dfrac{i}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^k}{k}e^{ikx},\ k\neq 0.$

8.2. $f(x)=\begin{cases}3, & -\pi<x<0,\\ -3, & 0<x<\pi\\ 0, & x=-\pi;\,0;\,\pi.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{3i}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^k}{k}e^{ikx},\ k\neq 0.$

8.3. $f(x)=\begin{cases}4, & 3<x<0,\\ 6, & 0<x<3,\\ 5, & x=-3;\,0;\,3.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=5-\dfrac{i}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^k}{k}e^{ik\pi x/3},\ k\neq 0.$

8.4. $f(x)=\begin{cases}3, & -2<x<0,\\ 5, & 0<x<2,\\ 4, & x=-2;\,0;\,2.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=4+\dfrac{i}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-1}{k}e^{ik\pi x/2},\ k\neq 0.$

8.5. $f(x)=\begin{cases}-4, & -1<x<0,\\ -2, & 0<x<1,\\ -3, & x=-1;\,0;\,1.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=-3+\dfrac{i}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^k-1}{k}e^{ik\pi x},\ k\neq 0.$

8.6. $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -\pi<x<\pi,\\ 1, & x=-\pi;\,\pi.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=1+2i\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}e^{ikx},\ k\neq 0.$

8.7. $f(x)=\begin{cases}-x+4, & -3<x<3,\\ 4, & x=-3;\ 3.\end{cases}$

Ответ: $f(x)=4+\dfrac{3i}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}e^{ik\pi x/3},\ k\neq 0.$

8.8. $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<\pi,\\ 0, & x=-\pi;\,\pi.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=i\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}e^{ikx},\ k\neq 0.$

8.9. $f(x)=\begin{cases}3x+2, & -1<x<1,\\ 2, & x=-1;\,1.\end{cases}$

Ответ: $f(x)=2+\dfrac{3i}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k}e^{ik\pi x},\ k\neq 0.$

8.10. $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & -5<x<5,\\ 3, & x=-5;\,5.\end{cases}$

Ответ: $f(x)=3+\dfrac{10i}{\pi}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}e^{ik\pi x/5},\ k\neq 0.$

Задача 9. Найти амплитудный спектр функции $f(x),\ x\in[a;\,b]$, построить график спектра функции и указать частоту, при которой амплитуда колебаний будет наибольшей:

9.1. $f(x)=\operatorname{ch}2x,\quad x\in[-\pi;\,\pi]$. Ответ: $|c_n|=\dfrac{2\operatorname{sh}2\pi}{\pi}\cdot\dfrac{1}{4+n^2},\quad n_{\max}=0.$

9.2. $f(x)=\operatorname{ch}3x,\quad x\in[-\pi;\,\pi]$. Ответ: $|c_n|=\dfrac{3\operatorname{sh}3\pi}{\pi}\cdot\dfrac{1}{9+n^2},\quad n_{\max}=0.$

9.3. $f(x)=\operatorname{ch}4x,\quad x\in[-\pi;\,\pi]$. Ответ: $|c_n|=\dfrac{4\operatorname{sh}4\pi}{\pi}\cdot\dfrac{1}{16+n^2},\quad n_{\max}=0.$

9.4. $f(x)=\operatorname{ch}5x,\quad x\in[-\pi;\,\pi]$. Ответ: $|c_n|=\dfrac{5\operatorname{sh}5\pi}{\pi}\cdot\dfrac{1}{25+n^2},\quad n_{\max}=0.$

9.5. $f(x)=\operatorname{ch}6x,\quad x\in[-\pi;\,\pi]$. Ответ: $|c_n|=\dfrac{6\operatorname{sh}6\pi}{\pi}\cdot\dfrac{1}{36+n^2},\quad n_{\max}=0.$

9.6. $f(x)=\operatorname{sh}2x,\quad x\in[-\pi;\,\pi]$. Ответ: $|c_n|=\dfrac{\operatorname{sh}2\pi}{\pi}\cdot\dfrac{|n|}{4+n^2},\quad n_{\max}=2.$

9.7. $f(x)=\operatorname{sh}3x,\quad x\in[-\pi;\,\pi]$. Ответ: $|c_n|=\dfrac{\operatorname{sh}3\pi}{\pi}\cdot\dfrac{|n|}{9+n^2},\quad n_{\max}=3.$

9.8. $f(x)=\operatorname{sh}4x,\quad x\in[-\pi;\,\pi]$. Ответ: $|c_n|=\dfrac{\operatorname{sh}4\pi}{\pi}\cdot\dfrac{|n|}{16+n^2},\quad n_{\max}=4.$

9.9. $f(x)=\operatorname{sh}5x,\quad x\in[-\pi;\,\pi]$. Ответ: $|c_n|=\dfrac{\operatorname{sh}5\pi}{\pi}\cdot\dfrac{|n|}{25+n^2},\quad n_{\max}=5.$

9.10. $f(x)=\operatorname{sh}6x,\quad x\in[-\pi;\,\pi]$. Ответ: $|c_n|=\dfrac{\operatorname{sh}6\pi}{\pi}\cdot\dfrac{|n|}{36+n^2},\quad n_{\max}=6.$

Задача 10. Найти коэффициенты комплексного ряда Фурье для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;\,b]$:

10.1. $f(x)=e^{x},\quad x\in[-2;\,2]$. Ответ: $c_n=\dfrac{\operatorname{sh}2\cdot(-1)^n}{2-in\pi}.$

10.2. $f(x)=e^{2x},\quad x\in[-3;\,3]$. Ответ: $c_n=\dfrac{\operatorname{sh}6\cdot(-1)^n}{6-in\pi}.$

10.3. $f(x)=e^{3x},\quad x\in[-5;\,5]$. Ответ: $c_n=\dfrac{\operatorname{sh}15\cdot(-1)^n}{15-in\pi}.$

10.4. $f(x)=e^{4x},\quad x\in[-6;\,6]$. Ответ: $c_n=\dfrac{\operatorname{sh}24\cdot(-1)^n}{24-in\pi}.$

10.5. $f(x)=e^{5x}, \quad x\in[-0{,}2;\,0{,}2]$. Ответ: $c_n=\dfrac{\mathrm{sh}1\cdot(-1)^n}{1-in\pi}$.

10.6. $f(x)=e^{-x}, \quad x\in[-2;\,2]$. Ответ: $c_n=\dfrac{\mathrm{sh}2\cdot(-1)^n}{2+in\pi}$.

10.7. $f(x)=e^{-2x}, \quad x\in[-5;\,5]$. Ответ: $c_n=\dfrac{\mathrm{sh}10\cdot(-1)^n}{10+in\pi}$.

10.8. $f(x)=e^{-3x}, \quad x\in[-1;\,1]$. Ответ: $c_n=\dfrac{\mathrm{sh}3\cdot(-1)^n}{3+in\pi}$.

10.9. $f(x)=e^{-4x}, \quad x\in[-3;\,3]$. Ответ: $c_n=\dfrac{\mathrm{sh}12\cdot(-1)^n}{12+in\pi}$.

10.10. $f(x)=e^{-5x}, \quad x\in[-4;\,4]$. Ответ: $c_n=\dfrac{\mathrm{sh}20\cdot(-1)^n}{20+in\pi}$.

Задача 11. Найти коэффициенты комплексного ряда Фурье для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$:

11.1. $f(x)=xe^{x}, \quad x\in[-1;\,1]$. Ответ: $c_n=(-1)^n\left(\dfrac{\mathrm{ch}1}{1-in\pi}-\dfrac{\mathrm{sh}1}{(1-in\pi)^2}\right)$.

11.2. $f(x)=xe^{2x}, \quad x\in[-3;\,3]$. Ответ: $c_n=3\cdot(-1)^n\left(\dfrac{\mathrm{ch}6}{6-in\pi}-\dfrac{\mathrm{sh}6}{(6-in\pi)^2}\right)$.

11.3. $f(x)=xe^{3x}, \quad x\in[-5;\,5]$. Ответ: $c_n=5\cdot(-1)^n\left(\dfrac{\mathrm{ch}15}{15-in\pi}-\dfrac{\mathrm{sh}15}{(15-in\pi)^2}\right)$.

11.4. $f(x)=xe^{4x}, \quad x\in[-4;\,4]$. Ответ: $c_n=4\cdot(-1)^n\left(\dfrac{\mathrm{ch}16}{16-in\pi}-\dfrac{\mathrm{sh}16}{(16-in\pi)^2}\right)$.

11.5. $f(x)=xe^{5x}, \quad x\in[-6;\,6]$. Ответ: $c_n=6\cdot(-1)^n\left(\dfrac{\mathrm{ch}30}{30-in\pi}-\dfrac{\mathrm{sh}30}{(30-in\pi)^2}\right)$.

11.6. $f(x)=xe^{-x}, \quad x\in[-1;\,1]$. Ответ: $c_n=(-1)^n\left(\dfrac{-\mathrm{ch}1}{1+in\pi}+\dfrac{\mathrm{sh}1}{(1+in\pi)^2}\right)$.

11.7. $f(x)=xe^{-2x}, \quad x\in[-3;\,3]$. Ответ: $c_n=3\cdot(-1)^n\left(\dfrac{-\mathrm{ch}6}{6+in\pi}+\dfrac{\mathrm{sh}6}{(6+in\pi)^2}\right)$.

11.8. $f(x)=xe^{-3x}, \quad x\in[-3;\,3]$. Ответ: $c_n=3\cdot(-1)^n\left(\dfrac{-\mathrm{ch}9}{9+in\pi}+\dfrac{\mathrm{sh}9}{(9+in\pi)^2}\right)$.

11.9. $f(x) = xe^{-4x}, \quad x \in [-5; 5]$. Ответ: $c_n = 5 \cdot (-1)^n \left(\frac{-\mathrm{ch}20}{20 + in\pi} + \frac{\mathrm{sh}20}{(20 + in\pi)^2} \right)$.

11.10. $f(x) = xe^{-5x}, \quad x \in [-4; 4]$. Ответ: $c_n = 4 \cdot (-1)^n \left(\frac{-\mathrm{ch}20}{20 + in\pi} + \frac{\mathrm{sh}20}{(20 + in\pi)^2} \right)$.

Задача 12. Представить функцию $f(x)$ комплексной формой интеграла Фурье:

12.1. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 2], \\ 0, & x \notin [0; 2]. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} e^{iu(x-1)} du.$

12.2. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 4], \\ 0, & x \notin [0; 4]. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2u}{u} e^{iu(x-2)} du.$

12.3. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 6], \\ 0, & x \notin [0; 6]. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3u}{u} e^{iu(x-3)} du.$

12.4. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 8], \\ 0, & x \notin [0; 8]. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4u}{u} e^{iu(x-4)} du.$

12.5. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 10], \\ 0, & x \notin [0; 10]. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 5u}{u} e^{iu(x-5)} du.$

12.6. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 12], \\ 0, & x \notin [0; 12]. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 6u}{u} e^{iu(x-6)} du.$

12.7. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 14], \\ 0, & x \notin [0; 14]. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 7u}{u} e^{iu(x-7)} du.$

12.8. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 16], \\ 0, & x \notin [0; 16]. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 8u}{u} e^{iu(x-8)} du.$

12.9. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 18], \\ 0, & x \notin [0; 18]. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 9u}{u} e^{iu(x-9)} du.$

12.10. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 20], \\ 0, & x \notin [0; 20]. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 10u}{u} e^{iu(x-10)} du.$

Задача 13. Представить функцию $f(x)$ комплексной формой интеграла Фурье:

13.1. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} \cdot \sin x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ Ответ: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{(1 + iu)^2 + 1} du.$

13.2. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}\cdot\sin 2x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{iux}}{(1+iu)^2+4}du.$

13.3. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}\cdot\sin 3x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{3}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{iux}}{(1+iu)^2+9}du.$

13.4. $f(x)=\begin{cases} e^{-2x}\cdot\sin x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{iux}}{(2+iu)^2+1}du.$

13.5. $f(x)=\begin{cases} e^{-2x}\cdot\sin 2x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{iux}}{(2+iu)^2+4}du.$

13.6. $f(x)=\begin{cases} e^{-2x}\cdot\sin 3x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{3}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{iux}}{(2+iu)^2+9}du.$

13.7. $f(x)=\begin{cases} e^{-3x}\cdot\sin x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{iux}}{(3+iu)^2+1}du.$

13.8. $f(x)=\begin{cases} e^{-3x}\cdot\sin 2x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{iux}}{(3+iu)^2+4}du.$

13.9. $f(x)=\begin{cases} e^{-3x}\cdot\sin 3x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{3}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{iux}}{(3+iu)^2+9}du.$

13.10. $f(x)=\begin{cases} e^{-4x}\cdot\sin x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{iux}}{(4+iu)^2+1}du.$

Задача 14. Найти косинус-преобразование Фурье $F_c(u)=$ $=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)\cos\ uxdx$ **функции** $f(x)$**, заданной на промежутке** $x\in[0;+\infty]$:

14.1. $f(x)=e^{-x}\sin x.$ Ответ: $F_c(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{1+u}{1+(1+u)^2}+\dfrac{1-u}{1+(1-u)^2}\right).$

14.2. $f(x)=e^{-x}\sin 2x.$ Ответ: $F_c(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{2+u}{1+(2+u)^2}+\dfrac{2-u}{1+(2-u)^2}\right).$

14.3. $f(x)=e^{-x}\sin 3x.$ Ответ: $F_c(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{3+u}{1+(3+u)^2}+\dfrac{3-u}{1+(3-u)^2}\right).$

14.4. $f(x)=e^{-2x}\sin x.$ Ответ: $F_c(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{1+u}{4+(1+u)^2}+\dfrac{1-u}{4+(1-u)^2}\right).$

14.5. $f(x)=e^{-2x}\sin 2x.$ Ответ: $F_c(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2+u}{4+(2+u)^2}+\frac{2-u}{4+(2-u)^2}\right).$

14.6. $f(x)=e^{-2x}\sin 3x.$ Ответ: $F_c(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{3+u}{4+(3+u)^2}+\frac{3-u}{4+(3-u)^2}\right).$

14.7. $f(x)=e^{-3x}\sin x.$ Ответ: $F_c(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1+u}{9+(1+u)^2}+\frac{1-u}{9+(1-u)^2}\right).$

14.8. $f(x)=e^{-3x}\sin 2x.$ Ответ: $F_c(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2+u}{9+(2+u)^2}+\frac{2-u}{9+(2-u)^2}\right).$

14.9. $f(x)=e^{-3x}\sin 3x.$ Ответ: $F_c(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{3+u}{9+(3+u)^2}+\frac{3-u}{9+(3-u)^2}\right).$

14.10. $f(x)=e^{-4x}\sin x.$ Ответ: $F_c(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1+u}{16+(1+u)^2}+\frac{1-u}{16+(1-u)^2}\right).$

Задача 15. Найти синус-преобразование Фурье $F_s(u)=$ $=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(x)\sin\, uxdx$ **функции** $f(x)$**, заданной на промежутке** $x\in[0;+\infty)$:

15.1. $f(x)=e^{-x}\sin x.$ Ответ: $F_s(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+(1-u)^2}-\frac{1}{1+(1+u)^2}\right).$

15.2. $f(x)=e^{-x}\sin 2x.$ Ответ: $F_s(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+(2-u)^2}-\frac{1}{1+(2+u)^2}\right).$

15.3. $f(x)=e^{-x}\sin 3x.$ Ответ: $F_s(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+(3-u)^2}-\frac{1}{1+(3+u)^2}\right).$

15.4. $f(x)=e^{-2x}\sin x.$ Ответ: $F_s(u)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{4+(1-u)^2}-\frac{1}{4+(1+u)^2}\right).$

15.5. $f(x)=e^{-2x}\sin 2x.$ Ответ: $F_s(u)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{4+(2-u)^2}-\frac{1}{4+(2+u)^2}\right).$

15.6. $f(x)=e^{-2x}\sin 3x.$ Ответ: $F_s(u)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{4+(3-u)^2}-\frac{1}{4+(3+u)^2}\right).$

15.7. $f(x)=e^{-3x}\sin x.$ Ответ: $F_s(u)=\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{9+(1-u)^2}-\frac{1}{9+(1+u)^2}\right).$

15.8. $f(x)=e^{-3x}\sin 2x.$ Ответ: $F_s(u)=\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{9+(2-u)^2}-\frac{1}{9+(2+u)^2}\right).$

15.9. $f(x)=e^{-3x}\sin 3x.$ Ответ: $F_s(u)=\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{9+(3-u)^2}-\frac{1}{9+(3+u)^2}\right).$

15.10. $f(x)=e^{-4x}\sin x.$ Ответ: $F_s(u)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{16+(1-u)^2}-\frac{1}{16+(1+u)^2}\right).$

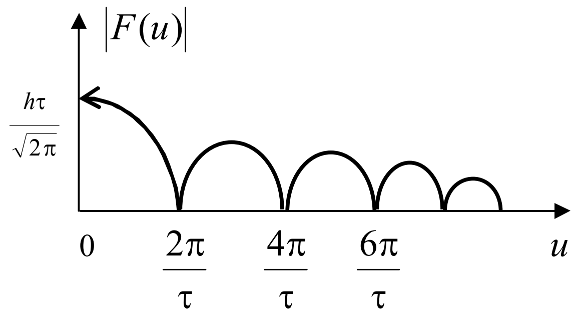
Дополнительные задачи

Задача 1. Найти спектральную характеристику $F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iux}dx$ **и построить график спектра функции** $f(x)$:

1.1. $f(x)=\begin{cases} h, & |x|<\frac{\tau}{2}, \\ 0, & |x|>\frac{\tau}{2}. \end{cases}$

Ответ: $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\frac{u\tau}{2}}{u}\cdot h,$

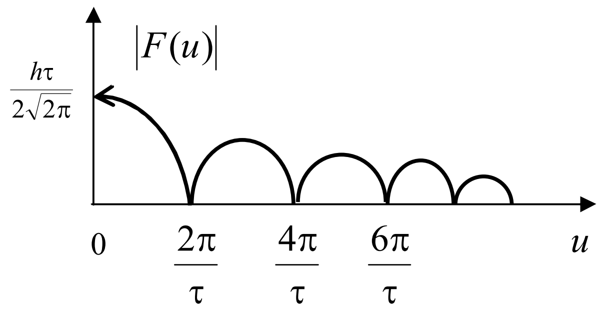
$$|F(u)|=\frac{h\tau}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\sin\frac{u\tau}{2}}{\frac{u\tau}{2}}\right|.$$



1.2. $f(x)=\begin{cases} h\left(1+\frac{2x}{\tau}\right), & -\frac{\tau}{2}\le x\le 0, \\ h\left(1-\frac{2x}{\tau}\right), & 0\le x\le\frac{\tau}{2}, \\ 0, & |x|>\frac{\tau}{2}. \end{cases}$

Ответ: $F(u)=\dfrac{4h}{\tau u^2}\left(1-\cos\dfrac{u\tau}{2}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}$,

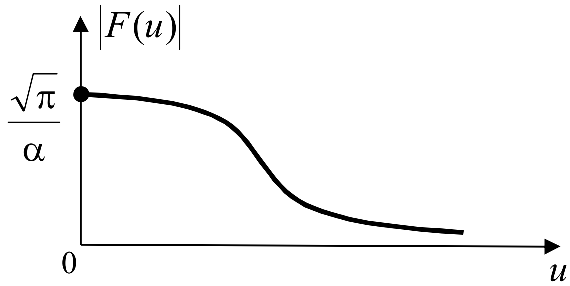
$$\left|F(u)\right|=\frac{h\tau}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\frac{u\tau}{2}}{\frac{u\tau}{2}}\right)^2.$$



1.3. $f(x)=e^{-\alpha^2x^2}$, $\alpha>0$, Указание: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$.

Ответ: $F(u)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{u^2}{4\alpha^2}}$,

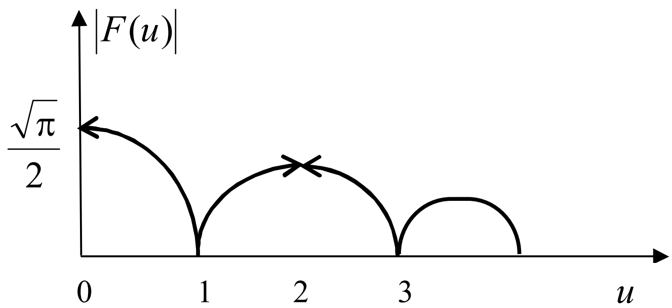
$$\left|F(u)\right|=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{u^2}{4\alpha^2}}.$$



1.4. $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & |x|<\pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

Ответ: $F(u)=\dfrac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{\sin u\pi}{u(4-u^2)}$,

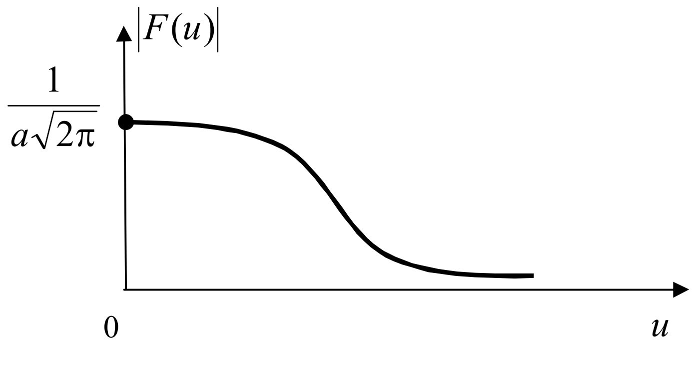
$$F(u)=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left|\frac{\sin u\pi}{u(4-u)^2}\right|.$$



1.5. $f(x)=\begin{cases}e^{-ax}, & x>0, (a>0),\\ 0, & x<0.\end{cases}$

Ответ: $F(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{1}{a+iu}$,

$$\left|F(u)\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}.$$



Задача 2. Методом преобразования Фурье решить задачу Коши:

2.1. $y' + y = e^{-2x}, \quad y(0) = 0, \quad x \geq 0.$ Ответ: $y = e^{-x} - e^{-2x}.$

2.2. $y' + y = e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad x \geq 0.$ Ответ: $y = 2e^{-x} - e^{-2x}.$

2.3. $y' + y = e^{-2x}, \quad y(0) = 2, \quad x \geq 0.$ Ответ: $y = 3e^{-x} - e^{-2x}.$

2.4. $y' + 2y = e^{-3x}, \quad y(0) = 1, \quad x \geq 0.$ Ответ: $y = 2e^{-2x} - e^{-3x}.$

2.5. $y' + 2y = e^{-3x}, \quad y(0) = 2, \quad x \geq 0.$ Ответ: $y = 3e^{-2x} - e^{-3x}.$

2.6. $y' + 3y = e^{-4x}, \quad y(0) = 1, \quad x \geq 0.$ Ответ: $y = 2e^{-3x} - e^{-4x}.$

2.7. $y' + 3y = e^{-4x}, \quad y(0) = 2, \quad x \geq 0.$ Ответ: $y = 3e^{-3x} - e^{-4x}.$

2.8. $y' + 4y = e^{-6x}, \quad y(0) = 1, \quad x \geq 0.$ Ответ: $y = \frac{3}{2}e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-6x}.$

2.9. $y' + 3y = e^{-7x}, \quad y(0) = 2, \quad x \geq 0.$ Ответ: $y = \frac{9}{4}e^{-3x} - \frac{1}{4}e^{-7x}.$

2.10. $y' + 5y = e^{-7x}, \quad y(0) = 3, \quad x \geq 0.$ Ответ: $y = \frac{7}{2}e^{-5x} - \frac{1}{2}e^{-7x}.$

Св. план 2011, поз. 62

Учебное издание

РЯДЫ. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Индивидуальные задания по курсу высшей математики
для студентов всех специальностей
дневной формы обучения

С о с т а в и т е л и:

Феденя Ольга Александровна
Щедрова Нина Сергеевна
Сафронова Марина Андреевна

Редактор А. В. Тюхай
Корректор Е. Н. Батурчик
Компьютерная верстка М. В. Гуртатовская

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Отпечатано на ризографе.	Усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 2,0.	Тираж 100 экз.	Заказ 660.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6