

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет доуниверситетской подготовки и профессиональной ориентации

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

В 2-х частях

Часть 2

Алгебра и начала анализа

Минск 2005

УДК 51(075.8)
ББК 22.1 я 73
С 23

Составители:
О.Ф. Борисенко, С.Ф. Данцевич, В.А. Липницкий,
М.А. Сафронова, В.В. Цегельник

С 23 Сборник задач по математике: В 2 ч. Ч.2: Алгебра и начала анализа /
Сост. О.Ф. Борисенко, С.Ф. Данцевич, В.А. Липницкий и др. – Мн.:
БГУИР, 2005. – 80 с.

ISBN 985-444-902-5 (ч.2)

Сборник задач составлен в соответствии с программой по математике для поступающих в вузы Республики Беларусь. Содержит систематически подобранные задачи по основным разделам курса алгебры и начал анализа средней школы. В сборник включен ряд задач, использовавшихся на приемных экзаменах в вузы Беларуси. В качестве приложения приводятся два варианта тестов по математике на вступительных испытаниях в БГУИР в 2004 г.

Предназначен для учащихся и преподавателей средних школ, слушателей подготовительных курсов, абитуриентов.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1 я 73

Сборник задач по математике: В 2 ч. Ч.1: Геометрия / Сост. О.Ф. Борисенко,
С.Ф. Данцевич, В.А. Липницкий. – Мн.: БГУИР, 2003. – 39 с.

ISBN 985-444-902-5 (ч.2)
ISBN 985-444-891-6

© Коллектив авторов,
составление, 2005
© БГУИР, 2005

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. ЧИСЛА И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ	
§ 1. Натуральные и целые числа	
§ 2. Рациональные числа	
§ 3. Действительные числа	
§ 4. Алгебраические выражения	
ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ	
§ 5. Рациональные уравнения	
§ 6. Уравнения с модулем	
§ 7. Иррациональные уравнения	
§ 8. Системы уравнений	
ГЛАВА 3. НЕРАВЕНСТВА	
§ 9. Рациональные неравенства	
§ 10. Иррациональные неравенства	
§ 11. Неравенства с параметром	
ГЛАВА 4. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ	
§ 12. Пропорции и проценты	
§ 13. Сплавы и смеси	
§ 14. Задачи на движение	
§ 15. Задачи о работе	
§ 16. Задачи о числах и другие	
ГЛАВА 5. ПРОГРЕССИИ	
§ 17. Арифметическая прогрессия	
§ 18. Геометрическая прогрессия	
§ 19. Задачи смешанного типа	
ГЛАВА 6. ТРИГОНОМЕТРИЯ	
§ 20. Тригонометрические преобразования	
§ 21. Тригонометрические уравнения	
§ 22. Тригонометрические уравнения с несколькими неизвестными	
§ 23. Тригонометрические уравнения с параметром	
§ 24. Системы тригонометрических уравнений	
§ 25. Тригонометрические неравенства	
ГЛАВА 7. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ	
§ 26. Показательные уравнения	
§ 27. Показательные неравенства	
§ 28. Логарифмы	

- § 29. Логарифмические уравнения
- § 30. Логарифмические неравенства
- § 31. Показательные и логарифмические задачи с параметром

ГЛАВА 8. ПРОИЗВОДНАЯ

- § 32. Производная и ее геометрический смысл
- § 33. Наибольшее и наименьшее значения функции
- § 34. Текстовые задачи с применением производной

ПРИЛОЖЕНИЕ. Тесты по математике на вступительных экзаменах
в БГУИР в 2004 г.

Библиотека БГУИР

ГЛАВА 1. ЧИСЛА И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 1. Натуральные и целые числа

1. Первое слагаемое уменьшили на 105. На сколько единиц надо увеличить второе слагаемое, чтобы их сумма уменьшилась на 15?

Ответ: 90.

2. При делении числа на 82 получился остаток, равный 45. Чему будет равен остаток от деления этого числа на 41?

Ответ: 4.

3. Разделите число 500 на три части пропорционально числам 2; 3; 5.

Ответ: 100; 150; 250.

4. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное следующих целых чисел a , b , c , где

а) $a = 36$, $b = 60$, $c = 84$;

б) $a = 216$, $b = 396$, $c = 720$.

Ответ: а) 12; 1260;

б) 36; 23760.

5. Найдите два натуральных числа, если их сумма равна 85, а их наименьшее общее кратное равно 102.

Ответ: 34; 51.

6. Докажите, что при любом целом n выражение $n^3 + 11n$ делится на 6.

7. Докажите, что число $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ является целым при любом четном n .

8. Докажите равенство

$$\underbrace{11\dots1}_{200 \text{ цифр}} - \underbrace{22\dots2}_{100 \text{ цифр}} = \left(\underbrace{33\dots3}_{100 \text{ цифр}} \right)^2$$

9. При каких натуральных n выражение $\frac{3n^2 - 16n + 21}{n - 3}$ является натуральным числом?

Ответ: $n \geq 4$.

10. Найдите сумму всех натуральных чисел k , для которых дробь $\frac{2k^2 + 5k + 3}{k + 3}$ является целым числом.

Ответ: 3.

11. Какой цифрой оканчивается число 2004^{2005} ?

Ответ: 4.

12. Вычислите:
2004 · 20052005 - 2005 · 20042004 .

Ответ: 0.

13. Сколькими нулями оканчивается произведение всех натуральных чисел от 17 до 183?

Ответ: 41.

14. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{n}{1+n^2} + \frac{m}{1+m^2}$, где $n \in N, m \in N$.

Ответ: 1.

§ 2. Рациональные числа

1. Вычислите $\frac{(5 : 8 + 2,708(3)) : 2,5}{(1,3 + 0,7(6) + 0, (36)) \cdot 110 : 401} \cdot 0,5$.

Ответ: 1.

2. Вычислите $2 : 3\frac{1}{5} + (3\frac{1}{4} : 13) : \frac{2}{3} + (2,2(7) - \frac{17}{36}) \cdot \frac{18}{25}$.

Ответ: 2,3.

3. Вычислите $(5 - 3 \cdot (\frac{4}{15})^0)^{-2}$.

Ответ: 0,25.

4. Вычислите $\frac{(\frac{1}{9})^{-4} \cdot 81^3 \cdot (3^{-6})^2 + 9^5 \cdot (\frac{1}{3})^5}{(-\frac{1}{81})^{-1} \cdot \sqrt{49}}$.

Ответ: -12.

5. Найдите x из соотношения $\frac{17,7 - 1,95}{14} = \frac{5 - x}{4}$.

Ответ: 0,5.

6. A составляет 20 % от C . Найдите процентное отношение $C-A$ к A .

Ответ: 400.

7. Найдите сумму $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$.

Ответ: 0,999.

8. Найдите сумму $\frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{2}{50 \cdot 61}$.

Ответ: $\frac{56}{305}$.

9. Докажите, что при любом натуральном $n \geq 2$ верно неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

10. Докажите, что для всякого натурального n справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < 2.$$

11. Последовательность (a_n) обладает свойством:

при любом натуральном n

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 3n^2 - n + 1.$$

Найдите сумму $a_4 + a_5$.

Ответ: 46.

§ 3. Действительные числа

1. Вычислите $\sqrt{28} - \sqrt{1,75} - \sqrt{15,75}$.

Ответ: 0.

2. Вычислите $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$.

Ответ: -10.

3. Вычислите $\left((4 + \sqrt{15})^{0,5} + (4 - \sqrt{15})^{0,5} - 2(3 - \sqrt{5})^{0,5} \right) / \sqrt{2}$.

Ответ: 1.

4. Докажите, что $(\sqrt[3]{9})^{\frac{5}{4}} > \sqrt{\frac{1}{3} \cdot 9^{\frac{2}{3}}}$.

5. Докажите неравенство $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100} < \frac{1}{12}$.

6. Докажите, что $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} > 10$.

7. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, где $a, b, c \in R$.

8. Докажите, что $ab(a+b) + bc(a+c) + ac(a+c) \geq 6abc$, где $a > 0, b > 0, c > 0$.

9. Докажите, что для положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_{10} с условием $a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ имеет место неравенство $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_{10}) \geq 2^{10}$.

10. Докажите, что если x, y, z – действительные числа, отличные от нуля, и

$x + y + z = xyz$, $x^2 = yz$, то $x^2 \geq 3$.

§ 4. Алгебраические выражения

Упростите выражения:

$$1. \left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}}, x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y.$$

Ответ: $\frac{1}{xy}$.

$$2. (4x-1) \left(\frac{1}{8x} \left((\sqrt{8x-1} + 4x)^{-1} - (\sqrt{8x-1} - 4x)^{-1} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ответ: -1, если $x \in \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4} \right)$; 1, если $x \in \left(\frac{1}{4}; +\infty \right)$.

$$3. \left(\frac{4}{5a^2 + a - 4} - \frac{a+1}{9(5a-4)} \right) \frac{15a-12}{a+7} - \frac{2}{a+1}, a \neq -1, a \neq \frac{4}{5}, a \neq -7.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

$$4. \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) \text{ при } x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2ab}}, b > a > 0.$$

Ответ: $\frac{b}{a}$.

$$5. \frac{(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})^2 + (\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)} : \frac{1}{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}} - 3\sqrt{mn}, m \neq n, m > 0, n > 0.$$

Ответ: $(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2$.

$$6. \left(\frac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}} + \frac{1 - \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab}}{1 + \sqrt[4]{a^3b^3}} - \frac{1 - \sqrt[4]{ab} - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}, ab > 0, ab \neq 1.$$

Ответ: 2.

$$7. \left(\frac{(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3})(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}, a > 0, b > 0, a \neq b.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

$$8. \left(\left(\frac{\sqrt[4]{bx^3} + \sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt[4]{bx} \right)^2 + bx + 3 \right) : (\sqrt{bx} + 3), a > 0, b > 0, x > 0.$$

Ответ: $\sqrt{bx} + 1$.

$$9. \left(\frac{a-5}{b-3a} + \frac{4(a+1)}{a^2+4a} \right) : \left(\frac{9a}{a^2-16} - \frac{a+4}{a^2-4a} \right), a > 4.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

$$10. \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}} \right) \cdot \frac{ab^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}, a \geq 0, b > 0, a \neq b, 64 a \neq b.$$

Ответ: $\frac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

$$11. \left(\frac{4(x+3)}{x^2-3x} + \frac{x}{9-x^2} \right) \frac{x+3}{x+6} - \frac{5}{x-3}.$$

Ответ: $-\frac{2}{x}$, где $x \neq 0, x \neq \pm 3, x \neq -6$.

$$12. \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{6}}} \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}} \right), a > 0, b > 0, a \neq b^2.$$

Ответ: 1.

$$13. \left(\frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{6x-18}{x^3+27} \right) : \frac{5x-15}{4x^3+108}.$$

Ответ: $0,8(x-3)$, где $x \neq \pm 3$.

$$14. \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y} \right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y}, \text{ если } x > 0, y > 0, x \neq y.$$

Ответ: 2.

$$15. \left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}, |a| > |b| > 0.$$

Ответ: 25 при $a < 0$; -25 при $a > 0$.

$$16. \frac{3^{1.5}}{3^{1.5}b^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{2}{3}}} + \frac{a^{\frac{5}{6}}+3^{1.5}a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{3}}+3\right)^2} \left(\frac{3a^{\frac{1}{3}}}{a-27} + \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}-3} \right).$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[6]{a}}$, где $a > 0, a \neq 27$.

$$17. \left(\frac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{x-2\sqrt{xy}+y} + \frac{\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{x-y} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2x-y}, x \neq y, x > 0, y > 0.$$

Ответ: $\frac{x+3y}{x-y}$.

$$18. \left(\frac{x^{-1} - x}{\left(\sqrt[3]{x + x^{\frac{1}{3}} + 1} \right) \left(\sqrt[3]{x + x^{\frac{1}{3}} - 1} \right)} + \sqrt[3]{x} \right)^{-3}, x > 0.$$

Ответ: x .

$$19. \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) \text{ при } x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}, b > a > 0.$$

Ответ: $\frac{b}{a}$.

$$20. \frac{bc^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}} - \frac{b}{b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} + c} : \left(\frac{b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}}{bc^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}c} - \frac{4}{b-c} \right), b > 0, c > 0, b \neq c.$$

Ответ: $-b$.

$$21. \frac{m+n}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} : \left(\frac{m+n}{\sqrt{mn}} + \frac{n}{m - \sqrt{mn}} - \frac{m}{\sqrt{mn} + n} \right) + \sqrt{(1 - \sqrt{n})^2}, \text{ если } m > 0, n > 1.$$

Ответ: $\sqrt{m} - 1$.

$$22. \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) : \frac{a-b-c}{abc}.$$

Ответ: $\frac{a(a-b-c)}{2}$.

$$23. \left(\frac{1}{t^2 + 3t + 2} + \frac{2t}{t^2 + 4t + 3} + \frac{1}{t^2 + 5t + 6} \right)^2 \frac{(t-3)^2 + 12t}{2}.$$

Ответ: 2.

$$24. \frac{(a-b)^2 + ab}{(a+b)^2 - ab} : \frac{a^5 + b^5 + a^2b^3 + a^3b^2}{(a^3 + b^3 + a^2b + ab^2)(a^3 - b^3)}.$$

Ответ: $a - b, a \neq \pm b$.

$$25. \frac{3a^2 + 2ax - x^2}{(3x+a)(a+x)} - 2 + 10 \frac{ax - 3x^2}{a^2 - 9x^2}.$$

Ответ: 1.

$$26. \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-3} + b^{-3}} : \frac{a^2b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \left(\frac{a^2 - b^2}{ab} \right)^{-1}$$

Ответ: $\frac{1}{4} - \frac{ab}{(a+b)^2}$.

$$27. \sqrt[3]{\frac{2x^2}{9 + 18x + 9x^2}} \cdot \sqrt{\frac{(1+x)\sqrt[3]{1-x}}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{1-x^2}}{2x\sqrt{x}}}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{1-x}{3x}}$.

$$28. \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2}}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$ при $x \in (-\infty; 0)$, $\frac{1}{2}$ при $x \in (0; +\infty)$.

$$29. \frac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2} \cdot m - 4\sqrt{m-4}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}} \cdot \frac{m-4\sqrt{m-4}}{2}$$

Ответ: $\frac{m-8}{2}$.

$$30. \frac{2(a+(a+1)+(a+2)+\dots+2a)}{a^2+3a+2} + \frac{6\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{(a-b)^{0.6}(a+2)} \cdot \left(\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)(a-b)^{\frac{2}{5}}\right)^{-1}$$

Ответ: 3.

$$31. \left(\frac{\left(1+a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1-a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}} \right)^{-2} \cdot \frac{a^{\frac{1}{12}}}{3\sqrt{a+\sqrt{a-1}}}$$

Ответ: $\frac{\sqrt[4]{a}}{6}$.

$$32. \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 2(2x + \sqrt{x^2-1})}}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}$.

$$33. \frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}}; x=2.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

$$34. \frac{\frac{|b-1|}{b} + b|b-1| + 2 - \frac{2}{b}}{\sqrt{b-2 + \frac{1}{b}}}$$

Ответ: $\frac{b^2-1}{\sqrt{b}}$ при $b \in (0; 1)$; $\frac{b^2+3}{\sqrt{b}}$ при $b \in (1; +\infty)$.

$$35. \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)^2 - 1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)^2 - 1} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}} - \sqrt{a}\right)}.$$

Ответ: 2 при $a \in (0;1)$; $\frac{2}{3}$ при $a \in (1;+\infty)$.

$$36. \frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x-4} + 2}{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} - 2}.$$

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{x-4}} - 1$ при $x \in (4;8)$; 1 при $x \in [8;+\infty)$.

$$37. ((2-a+b):(a-b)+(1+b)/b):(a-(a^2+b^2):(a+b)).$$

Ответ: 1.

$$38. \frac{\left(\sqrt[3]{7b^{1/3}} + a\right)^2 - 4\sqrt[3]{7} \cdot b^{1/3} \cdot a}{7^{1/3}b^{1/3} - a} - \sqrt[3]{7b}.$$

Ответ: $-a$.

$$39. \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 + 2a^2/\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab} - 3b}{a-b}, \text{ где } a > 0, b > 0, a \neq b.$$

Ответ: 3.

$$40. \left(\left(\left(2^{\frac{3}{2}} + 27a^{\frac{3}{5}} \right) / \left(\sqrt{2} + 3a^{\frac{1}{5}} \right) + 3(32a^2)^{\frac{1}{10}} - 2 \right) \cdot 3^{-2} \right)^5.$$

Ответ: a^2 .

$$41. \frac{\left(\frac{(8-m)/\left(m^{\frac{1}{3}} + 2\right)}{\left(2 + m^{\frac{2}{3}} / \left(m^{\frac{1}{3}} + 2\right)\right)} + \left(m^{\frac{1}{3}} + 2m^{\frac{1}{3}} / \left(m^{\frac{1}{3}} - 2\right) \right) \cdot \left(\left(m^{\frac{2}{3}} - 4 \right) / \left(m^{\frac{2}{3}} + 2m^{\frac{1}{3}} \right) \right) \right)}{\left(\frac{(8-m)/\left(m^{\frac{1}{3}} + 2\right)}{\left(2 + m^{\frac{2}{3}} / \left(m^{\frac{1}{3}} + 2\right)\right)} + \left(m^{\frac{1}{3}} + 2m^{\frac{1}{3}} / \left(m^{\frac{1}{3}} - 2\right) \right) \cdot \left(\left(m^{\frac{2}{3}} - 4 \right) / \left(m^{\frac{2}{3}} + 2m^{\frac{1}{3}} \right) \right) \right)}.$$

Ответ: 2.

ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ

§ 5. Рациональные уравнения

1–43. Решите уравнения.

$$1. \frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3.$$

Ответ: $-2\frac{5}{8}$.

$$2. \frac{x^2-1}{x} = x^2 - \frac{1}{x}.$$

Ответ: 1.

$$3. \frac{y+5}{y^2-5y} - \frac{y-5}{2y^2-10y} = \frac{y+25}{2y^2-50}.$$

Ответ: 15.

$$4. x^3 - 7 = x^3 - 7.$$

Ответ: $x \in R$.

$$5. \frac{5+2x}{4x-3} = \frac{3(x+1)}{7-x}.$$

Ответ: $-1\frac{4}{7}; 2$.

$$6. \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{10}{3} + \frac{36}{x^2-9}.$$

Ответ: решений нет.

$$7. \frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} - \frac{18x+7}{x^3-1} = 0.$$

Ответ: -4; 9.

$$8. \frac{x+2}{x+1} + \frac{x+6}{x+3} + \frac{x+10}{x+5} = 6.$$

Ответ: $0; -3 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$9. \left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2 = \left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2.$$

Ответ: ± 3 .

$$10. (x+3)^3 - (x+1)^3 = 56.$$

Ответ: 1; -5.

$$11. 8x^4 + x^3 + 64x + 8 = 0.$$

Ответ: $-1; \frac{1}{3}; 3$.

$$12. 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9.$$

Ответ: 0,5; 2.

$$13. \frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0.$$

Ответ: -5; 1; $-1 \pm \sqrt{6}$.

$$14. (x+1)(x^2+2) + (x+2)(x^2+1) = 2.$$

Ответ: -1.

$$15. \frac{x^2+1}{x+1} + \frac{x^2+2}{x-2} = -2.$$

Ответ: 1.

$$16. \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}.$$

Ответ: -3; 1.

$$17. 20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$; 3.

$$18. \frac{4}{9y^2-1} - \frac{4}{3y+1} = \frac{5}{1-3y}.$$

Ответ: $-4\frac{1}{3}$.

$$19. \frac{4}{x+3} + 1 = \frac{1}{x-3} + \frac{5}{3-x}.$$

Ответ: -9; 1.

$$20. \frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^3+1}.$$

Ответ: 2.

$$21. \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x^3+8} = \frac{4}{x^2-2x+4}.$$

Ответ: $\frac{5 \pm \sqrt{19}}{3}$.

$$22. \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Ответ: $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$.

$$23. \frac{3}{8x^3+1} - \frac{1}{2x+1} = \frac{x+3}{4x^2-2x+1}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}$.

$$24. \frac{32}{x^3-2x^2-x+2} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x+1}.$$

Ответ: $2 \pm \sqrt{35}$.

$$25. \frac{1}{3(x-4)} + \frac{1}{2(x^2+3)} = \frac{1}{12-3x+4x^2-x^3}.$$

Ответ: -1,5; 0.

$$26. 2x^4 - 9x^2 + 4 = 0.$$

Ответ: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \pm 2$.

$$27. (5x^2-4)^2 + 6(5x^2-4) - 7 = 0.$$

Ответ: ± 1 .

$$28. (x^2+2x)^2 - (x+1)^2 = 55.$$

Ответ: -4; 2.

29. $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$.

Ответ: -2; 0; $\frac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}$.

30. $\frac{1}{x^3 + 2} - \frac{1}{x^3 + 3} = \frac{1}{12}$.

Ответ: $-\sqrt[3]{6}$; 1.

31. При каком значении параметра a уравнение $2ax - 9 = a - 5x$ не имеет решений?

Ответ: -2,5.

32. Решите уравнение $(x + 2)(2x - 3) = 2(4x - 1)$.

Ответ: -0,5; 4.

33. Найдите наибольший корень уравнения $(x^2 - 2)^2 = x^2$.

Ответ: 2.

34. Сколько целых решений имеет уравнение $x^2 - y^2 = 65$?

Ответ: 8.

35. Найдите все значения a , при которых сумма корней уравнения равна сумме квадратов корней, если уравнение имеет вид $x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$.

Ответ: 0,5.

36. При каком q сумма кубов корней уравнения $x^2 - x + q = 0$ равна 19?

Ответ: -6.

37. При каких значениях параметра b уравнения $x^2 - (2b + 1)x + b + 1 = 0$ и $2x^2 - (4b - 1)x + 1 = 0$ имеют общий корень? Найдите соответствующие этим значениям параметра общие корни и в ответе запишите их сумму.

Ответ: 0,75.

38. Решите уравнение $3x^4 + x^3 - 12x^2 - 4x = 0$.

Ответ: -2; $-\frac{1}{3}$; 0,2.

39. Решите уравнение $8x^3 - 16x^2 = 25$.

Ответ: 2,5.

40. Найдите $x + y$, если $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13 = 0$.

Ответ: 5.

41. Найдите $x+y$, если $(x^2 + 2x + 4)(y^2 - 6y + 15) = 18$.

Ответ: 2.

42. Найдите все пары натуральных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $xy^2 - 3y^2 - x = 108$.

Ответ: (40; 2), (40; -2).

§ 6. Уравнения с модулем

1. Решите уравнение $|3-x| + x = 5$. Ответ: 4.

2. Решите уравнение $|x+1| + |3-x| = 2-2x$. Ответ: $(-\infty; -1]$.

3. Решите уравнение $x^2 - 3|x| + 2 = 0$. Ответ: -2; -1; 1; 2.

4. Решите уравнение $|x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2$.
Ответ: $[-3; 1]$.

5. Решите уравнение $|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0$.
Ответ: 2; 3.

6. Решите уравнение $|x+1| + |-x-3| - 6 = x$.
Ответ: -4; 2.

7. При каких значениях a уравнение $|x^2 - 4x - 1| = a$ имеет три корня?
Ответ: 5.

8. При каких положительных значениях a уравнение $|x^2 - 5ax + 12| = 4$ имеет ровно три корня?

Ответ: 1, 6.

9. Для всех значений a найти x из уравнения $|x-2| + a|x+3| = 5$

Ответ: при $|a| > 1, x = -3$;

при $a = -1, x \in (-\infty; -3]$;

при $|a| < 1, x_1 = \frac{7-3a}{a+1}, x_2 = -3$;

при $a = 1, x \in [-3; 2]$.

§ 7. Иррациональные уравнения

1–35. Решите уравнения.

1. $\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 - 2x = 0$.

Ответ: 3.

2. $\sqrt{2x - 3} = \sqrt{x - 2}$.

Ответ: нет решений.

3. $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x - 2} - \sqrt{x - 1} = 0$.

Ответ: 2.

4. $\sqrt[3]{5 - x} + \sqrt[3]{x + 5} = 1$.

Ответ: $\pm\sqrt{52}$.

5. $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$.

Ответ: -1; 0.

6. $\sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 1} = \sqrt{2x - 5}$.

Ответ: 3.

7. $\sqrt{x^2 + x - 5} + \sqrt{x^2 + 8x - 4} = 5$.

Ответ: 2.

8. $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$.

Ответ: $\frac{5}{3}; \frac{5}{4}$.

9. $2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 12$.

Ответ: -2; 3,5.

10. $\sqrt{x - 5} - \sqrt{2x - 1} = 3 + x^2$.

Ответ: нет решений.

11. $\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[6]{x^2 - 1}$.

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

12. $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x$.

Ответ: 7.

13. $\frac{\sqrt[3]{x^4 - 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^2 - 1} - \sqrt[3]{x + 1}} = 4$.

Ответ: 8.

14. $\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = 3$.

Ответ: 64.

15. $\sqrt[7]{\frac{5 - x}{x + 3}} + \sqrt[7]{\frac{x + 3}{5 - x}} = 2$.

Ответ: 1.

$$16. \sqrt[3]{(5+x)^2} + 4\sqrt[3]{(5-x)^2} = 5\sqrt[3]{25-x^2}.$$

ОТВЕТ: 0; $\frac{63}{13}$.

$$17. \sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0.$$

ОТВЕТ: 2.

$$18. \sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}.$$

ОТВЕТ: 12.

$$19. \sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4.$$

ОТВЕТ: 0.

$$20. \sqrt{x-2} + 2\sqrt[4]{x-2} = 15.$$

ОТВЕТ: 83.

$$21. \sqrt[3]{\frac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\frac{5x+2}{x+3}} = \frac{13}{6}.$$

ОТВЕТ: $-\frac{30}{127}$; 5.

$$22. \sqrt{x^5\sqrt{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56.$$

ОТВЕТ: 1024.

$$23. (x+1)\sqrt{x^2+x-2} = 2x+2.$$

ОТВЕТ: -3; 2.

$$24. \sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x.$$

ОТВЕТ: 4.

$$25. \sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2.$$

ОТВЕТ: 8.

$$26. \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0.$$

ОТВЕТ: -2.

$$27. (16-x^2)\sqrt{3-x} = 0.$$

ОТВЕТ: -4; 3.

$$28. \sqrt{x+8} + \sqrt[4]{x+8} = 6.$$

ОТВЕТ: 8.

$$29. \sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2.$$

ОТВЕТ: 1.

$$30. \sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}.$$

ОТВЕТ: 4.

$$31. x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0.$$

ОТВЕТ: -5; 2.

$$32. \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5.$$

Ответ: $[-3; 2]$.

$$33. \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Ответ: $[5; 10]$.

$$34. \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1-x} = 2.$$

Ответ: $-1; 7$.

$$35. 2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}.$$

Ответ: $-\frac{65}{63}$.

§ 8. Системы уравнений

1–38. Решить системы уравнений.

$$1. \begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Ответ: $(5; 1)$.

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Ответ: $(4; 3); (3; 4); (-3; -4); (-4; -3)$.

$$3. \begin{cases} \frac{10}{2x+3y} + \frac{15}{4x-y} = 8, \\ \frac{15}{2x+3y} - \frac{9}{4x-y} = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}\right)$.

$$4. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ x + y - \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$$

Ответ: $(4; 1); (1; 4)$.

$$5. \begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 3); (3; 2)$.

$$6. \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 3); (3; 2)$.

$$7. \begin{cases} \frac{4x}{3} + \frac{3y}{4} = 18, \\ \frac{7x}{3} - \frac{5y}{8} = 16. \end{cases}$$

Ответ: (9; 8).

$$8. \begin{cases} \frac{x+y}{3} = 2y-5, \\ 3y - \frac{y-x}{5} = 16. \end{cases}$$

Ответ: (10; 5).

$$9. \begin{cases} \frac{1-3y}{3} - \frac{1-2x}{2} = \frac{5}{6}, \\ \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 4. \end{cases}$$

Ответ: (4; 3).

$$10. \begin{cases} \frac{y-1}{4} - 2 = \frac{x+1}{3}, \\ \frac{x+3}{4} + 4 = \frac{y+1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: (5; 17).

$$11. \begin{cases} 3(x-5) - 1 = 6 - 2x, \\ 3(x-y) - 7y + 4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: (4,4; 1,72).

$$12. \begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Ответ: (-4; -3); (-4; 3); (4; -3); (4; 3).

$$13. \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 228, \\ 3x^2 - 2y^2 = 172. \end{cases}$$

Ответ: (-10; 8), (10; -8); (-10; -8); (10; 8).

$$14. \begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{9}{2x+y} = 2, \\ \frac{4}{x+y} - \frac{12}{2x+y} = -1. \end{cases}$$

Ответ: (2; 2).

$$15. \begin{cases} \frac{1}{x+y-1} + \frac{2}{3x+2y-3} = 2, \\ \frac{3}{x+y-1} + \frac{4}{3x+2y-3} = 5. \end{cases}$$

Ответ: (1; 1).

$$16. \begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x(y+6) = 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ: (0; -10); (0; 10); (-8; -6); (8; -6).

$$17. \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

ОТВЕТ: (-3; -2); (3; 1).

$$18. \begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$$

ОТВЕТ: (-3; -2); (3; 2).

$$19. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$$

ОТВЕТ: (4; 1); $(-9; \frac{9}{4})$.

$$20. \begin{cases} x + 4y + 2\sqrt{xy} = 12, \\ x + 4y - 2\sqrt{xy} = 4. \end{cases}$$

ОТВЕТ: (4; 1).

$$21. \begin{cases} xy - \sqrt{x^2 + y^2} = 7, \\ xy + \sqrt{x^2 + y^2} = 17. \end{cases}$$

ОТВЕТ: (3; 4); (-3; -4); (4; 3); (-4; -3).

$$22. \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3. \end{cases}$$

ОТВЕТ: (2; 2).

$$23. \begin{cases} x + y + xy = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

ОТВЕТ: (5; 1); (1; 5); (2; 3); (3; 2).

$$24. \begin{cases} (x+y)2^{y-2x} = 6,25, \\ (x+y)\frac{1}{2^{x-y}} = 5. \end{cases}$$

ОТВЕТ: (9; 16).

$$25. \begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ xy = 15. \end{cases}$$

ОТВЕТ: (10; 1,5); (0,2; 75); (15; 1).

$$26. \begin{cases} (x^2 + y)2^{y-x^2} = 1, \\ 9(x^2 + y) = 6^{x^2-y}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(\sqrt{3}; 1); (-\sqrt{3}; 1)$.

$$27. \begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^3y - xy^3 = 6. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(2; 1); (-2; -1)$.

$$28. \begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5, \\ x^{-2} + y^{-2} = 13. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

$$29. \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(2; 3); (3; 2)$.

$$30. \begin{cases} \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{x-y} = 4, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(41; 40)$.

$$31. \begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt[3]{y}\sqrt{x} = 12, \\ xy = 64. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(1; 8); (8; 1)$.

$$32. \begin{cases} \sqrt{\frac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\frac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(5; 4)$.

$$33. \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(-2; -1); (2; 1)$.

$$34. \begin{cases} \frac{15}{x} - \frac{7}{y} = 9, \\ \frac{4}{x} + \frac{9}{y} = 35. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $0,5; \frac{1}{3}$.

$$35. \begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 14. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}); (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$.

$$36. \begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = x + 5y. \end{cases}$$

Ответ: (0; 0); (2; -2); (-2; 2).

$$37. \begin{cases} |x| + 4|y| = 3, \\ x + 3y = 0,5. \end{cases}$$

Ответ: $(-1; \frac{1}{2})$; $(\frac{11}{7}; -\frac{5}{14})$.

38. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Ответ: 1.

39. При каких a система уравнений $\begin{cases} x - y = 1 + xy, \\ (y - a)x + (2a - 3)y = a \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: 1; 2; $1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.

40. При каких b система уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x + (a - 2)y = 2 + b \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение для всякого a ?

Ответ: 7.

ГЛАВА 3. НЕРАВЕНСТВА

§ 9. Рациональные неравенства

1–14. Решите неравенства.

$$1. \frac{(x+3)(5-x)}{2x-5} > 0.$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (2,5; 5)$.

$$2. \frac{x^2(2x-9)(x-1)^3}{(x+y)^5(2x-6)^4} \leq 0.$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup [1; 3) \cup (3; 4,5] \cup 0$.

$$3. \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1.$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 0]$.

$$4. \frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + 2x + 1} < 0.$$

Ответ: $(-2; -1) \cup (-1; 2)$.

$$5. \frac{x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 8}{x^2} < 0.$$

Ответ: $(-2; 0) \cup (0; 1)$.

$$6. (x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 < 0. \quad \text{Ответ: } (-3; -1).$$

7. $(x-2)^3(x+1)(x-1)^2(x^2+2x+5) < 0$. Ответ: $(-1; 1) \cup (1; 2)$.

8. $\frac{(x-3)^2(x-2)x}{(x+1)^4(x+5)} > 0$. Ответ: $(-5; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

9. $\frac{7x-12-x^2}{2x^2-x-3} < 0$. Ответ: $(-\infty; -1) \cup (\frac{3}{2}; 3) \cup (4; +\infty)$.

10. $\frac{x-2}{x+2} > \frac{2x-3}{4x-1}$. Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0,25; 1] \cup [4; +\infty)$.

11. $\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \geq 2$. Ответ: $[2; 2,75) \cup [4; +\infty)$.

12. $(x^2+1)(x^2+x+1)(x+5)^3 > 0$. Ответ: $(-5; +\infty)$.

13. $(x+4)^2(x+5)^2(x-6)(x+3) \leq 0$. Ответ: $[-3; -6], x = -5, x = -4$.

14. $\frac{x^6+3x^4-x^2-3}{64-x^3} \geq 0$. Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; +4)$.

15. При каком наименьшем целом x график функции $y = \frac{1}{5x+3}$ лежит выше оси Ox ? Ответ: 0.

16. Найдите произведение целых x из ОДЗ функции $y = \sqrt{-2x-6} + \frac{1}{\sqrt{x+6}}$.
Ответ: -60.

17. Найдите середину отрезка, на котором выполняется неравенство $x^2 + 2(\sqrt{x})^2 - 3 \leq 0$.
Ответ: 0,5.

18. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{(x^2+x+2)(2-x)^2}{(3-x)(x-6)} \geq 0$.
Ответ: 11.

19. Решите неравенство $x < \frac{2}{x+1}$.
Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1)$.

20. Укажите наименьшее целое решения неравенства $|4-x| < |x+6|$.
Ответ: 0.

§ 10. Иррациональные неравенства

1–16. Решите неравенства.

1. $\sqrt{x-1} > 3-x$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

2. $\sqrt{x^2-3x-10} > x-2$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (14; +\infty)$.

3. $\sqrt{2x+1} < \frac{2x+2}{2-x}$.

Ответ: $[-\frac{1}{2}; \frac{11-\sqrt{153}}{4}) \cup (0; 2)$.

4. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} \geq \sqrt{5-x}$.

Ответ: 5.

5. $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1$.

Ответ: $[-\frac{1}{2\sqrt{2}}; 0) \cup (0; \frac{1}{3})$.

6. $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5} > 7$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

7. $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$.

Ответ: $(-\infty; -0,75) \cup (4; 7)$.

8. $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2} > 0$.

Ответ: $[0; 2) \cup (9; +\infty)$.

9. $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$.

Ответ: $[0; 3]$.

10. $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$.

Ответ: $(-\infty; 2\sqrt{5}-4)$.

11. $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$.

Ответ: $(\frac{2\sqrt{21}}{3}; +\infty)$.

12. $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$.

Ответ: $(-\infty; -\frac{5}{6}] \cup [3; +\infty)$.

13. $9-\sqrt{81-7x^3} \geq \frac{x^3}{2}$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [2; 3\sqrt[3]{\frac{3}{7}}]$.

14. $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

Ответ: $(3; 5]$.

15. $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}$.

Ответ: $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; 1]$.

16. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0$.

Ответ: $(-3; 1)$.

17. Решите неравенство $\frac{\sqrt{3x+22}}{x+4} < 1$. Ответ: $[-\frac{22}{3}; 4) \cup (1; +\infty)$.

18. Решите неравенство $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} < 7$. Ответ: $[\frac{2}{3}; 6)$.

19. Решите неравенство $\sqrt{2x^2 - 5x + 12} + 2x^2 \geq 5x$.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [1,5; +\infty)$.

20. Решите неравенство $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} \leq 1$.

Ответ: $\{1\} \cup [2; 10]$.

21. Решите неравенство $(8x^2 - 6x + 1)\sqrt{15x - 2 - 25x^2} \geq 0$.

Ответ: $[\frac{1}{5}; \frac{1}{4}] \cup \{\frac{2}{5}\}$.

§ 11. Неравенства с параметром

1. Найдите сумму всех целых решений n , при которых система

$$\begin{cases} nx - y = 5, \\ 2x + 3ny = 7 \end{cases} \text{ имеет решения } x > 0, y < 0.$$

Ответ: 1.

2. Найдите наибольшее целое значение a , при котором уравнение $3x^2 - 5ax + 12 = 0$ не имеет корней.

Ответ: 2.

3. Найдите все значения параметра a , при которых всякое решение неравенства $1 \leq x \leq 2$ является решением неравенства $x^2 - ax + 1 < 0$.

Ответ: $(2,5; +\infty)$.

4. При каких значениях m корни квадратного уравнения $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ лежат на отрезке $[-1; 2]$.

Ответ: $[3; +\infty)$.

5. Найдите все k , при которых уравнение $x^2 - (k+1)x + k^2 + k - 8 = 0$ имеет корни, один из которых больше 2, а другой меньше 2?

Ответ: $(-2; 3)$.

6. Найдите сумму всех целочисленных значений a , для которых существует хотя бы одно положительное значение x , удовлетворяющее неравенству $|2x + a| < 2 - x$.

Ответ: -5.

7. Решите неравенство $|1 + x| \leq ax$ для различных значений параметра a .

Ответ: при $a \in (-\infty; -1]$ $x \in (-\infty; \frac{1}{a-1}]$;

при $a \in (-1; 0]$ $x \in [-\frac{1}{a+1}; \frac{1}{a-1}]$;

при $a=0$ $x=-1$;

при $a \in (0; 1]$ решений нет;

при $a \in (1; +\infty)$ $x \in [\frac{1}{a-1}; +\infty)$.

ГЛАВА 4. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 12. Пропорции и проценты

1. Рабочий увеличил выработку деталей на 27 штук и стал производить 297 деталей в день. На сколько процентов увеличил рабочий производительность труда?

Ответ: на 10 %.

2. Некоторый материал снижает свою прочность ежегодно на 20 %. Каков общий процент снижения прочности за 2 года?

Ответ: 36 %.

3. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках зарплата выросла на 5 %?

Ответ: 20 %.

4. Вкладчик взял из банка сначала $\frac{1}{4}$ своих денег, потом $\frac{4}{9}$ остатка и еще 64 евро. После этого у него на счету осталось $\frac{3}{20}$ всех денег. Определите раз-

меры исходного вклада.

Ответ: 240 евро.

5. Из молока, жирность которого составляет 5 %, изготавливают творог жирностью 15,5 %. При этом остается сыворотка жирностью 0,5 %. Сколько творога получится из одной тонны молока?

Ответ: 300 кг.

6. Тракторист вспахал три участка земли. Площадь первого равна $\frac{2}{5}$ площади всех трех участков, а площадь второго относится к площади третьего как $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$. Сколько гектаров было во всех трех участках, если в третьем было на 16 га меньше, чем в первом?

Ответ: 136 га.

7. Двое рабочих за смену вместе изготовили 72 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15 %, а второй – на 25 %, вместе за смену они стали изготавливать 86 деталей. Сколько деталей изготавливает каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

Ответ: 46 и 40 деталей.

8. В первый день спортивных соревнований не выполнили зачетные нормы и выбыли из дальнейшей борьбы $\frac{1}{6}$ состава команды юношей и $\frac{1}{7}$ команды девушек. В течение остального периода соревнований из обеих команд выбыло из-за невыполнения норм одинаковое количество спортсменов. Всего к концу испытаний не выполнили зачетные нормы 48 человек из команды юношей и 50 человек из команды девушек, но из общего количества спортсменов, выполнивших зачетные нормы, девушек оказалось вдвое больше, чем юношей. Какова была первоначальная численность команд?

Ответ: 72 юноши и 98 девушек.

9. Одна из трех бочек заполнена водой, а остальные пустые. Если вторую

бочку наполнить водой из первой, то в первой останется $\frac{1}{4}$ бывшей в ней воды.

Если затем наполнить третью бочку из второй, то во второй останется $\frac{2}{9}$ количества содержащейся в ней воды. Если, наконец, из третьей бочки вылить воду в пустую первую, то для ее наполнения потребуется еще 50 ведер. Определить вместимость каждой бочки.

Ответ: 120, 90 и 70 ведер.

10. Цену товара сперва снизили на 20 %, затем новую цену снизили еще на 15 %, и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10 %. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Ответ: на 38,8 %.

11. В январе завод выполнил 105 % месячного плана выпуска готовой продукции, а в феврале дал продукции на 4 % больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

Ответ: на 7,1 %.

12. Первое из неизвестных чисел составляет 140 % второго, а отношение первого к третьему составляет $\frac{14}{11}$. Найти эти числа, если разность между третьим и вторым на 40 единиц меньше числа, составляющего 12,5 % суммы первого и второго чисел.

Ответ: 280; 200; 220.

13. На полях, выделенных агролабораторией для опытов, с двух земельных участков собрали 14,7 ц зерна. На следующий год после применения новых методов агротехники урожай на первом участке повысили на 80 %, а на втором – на 24 %, благодаря чему с этих же участков было собрано 21,42 ц зерна. Сколько центнеров зерна собирают с каждого участка после применения новых методов агротехники?

Ответ: 10,26 и 11,16 ц.

§ 13. Сплавы и смеси

1. В каком количестве воды надо растворить 300 г соли, чтобы получить 15 %-й раствор?

Ответ: 1700 г.

2. После смешивания 30 %-го и 10 %-го растворов кислоты получено 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Ответ: 150 г; 450 г.

3. К раствору, содержащему 40 г соли, добавлено 200 г воды, после чего концентрация уменьшилась на 10 %. Сколько воды содержал раствор?

Ответ: 160 г.

4. Имеется два раствора кислоты: 40 %-й и 60 %-й. Их смешали и затем добавили 5 кг чистой воды. В результате получился 20 %-й раствор. Если бы вместо этого добавили 5 кг 80 %-го раствора кислоты, то получился бы 70 %-й раствор. Сколько килограммов было 40 %-го раствора?

Ответ: 1 кг.

5. От двух сплавов массой 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Кусок, отрезанный от первого сплава, сплавил с остатком второго сплава и наоборот. Определите массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым содержанием магния.

Ответ: 2,1 кг.

6. Предприниматель Вася купил партию винограда. По коммерческим соображениям он воздержался от немедленной ее продажи. Через неделю выяснилось, что виноград потерял влажность на 1 %. На сколько процентов уменьшилась масса винограда, если свежий виноград имеет влажность 99 %?

Ответ: 6,5 %.

7. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

Ответ: 1,5 кг.

8. Имелось два сплава меди с разным процентным содержанием меди в каждом. Число, выражающее в процентах содержание меди в первом сплаве, на 40 меньше числа, выражающего в процентах содержание меди во втором сплаве. Затем оба эти сплава сплавляли вместе, после чего содержание меди составило 36 %. Определить процентное содержание меди в первом и во втором сплавах, если известно, что в первом сплаве меди было 6 кг, а во втором – 12 кг.

Ответ: 20 и 60 %.

9. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60 % меди?

Ответ: 13,5 кг.

10. Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 и 40 %. Сколько нужно взять металла каждого из сортов, чтобы получить 140 т стали с содержанием 30 % никеля?

Ответ: 40 и 100 т.

11. Из бака, наполненного спиртом, отлили часть спирта и долили до прежнего объема водой, затем из бака отлили столько же литров смеси, сколько в первый раз отлили спирта, после чего в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта отлили из бака в первый и во второй раз, если в баке содержалось 64 л?

Ответ: 8 л; 7 л.

12. Сосуд объемом 8 л наполнили воздухом, содержащим 16 % кислорода. Из сосуда откачали x литров воздуха и добавили такое же количество азота. Затем откачали x литров смеси и опять добавили такое же количество азота. В итоге в сосуде оказалось лишь 9 % кислорода. Определить x .

Ответ: 2 л.

13. В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-й раствор кислоты?

Ответ: 6 л.

14. Из сосуда, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили водой; потом опять вылили столько же литров смеси, тогда в сосуде осталось 24 л чистой кислоты. Емкость сосуда 54 л. Сколько кислоты вылили в первый и второй раз?

Ответ: 18 и 12 л.

15. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85 % воды, чтобы получить массу с содержанием 75 % воды?

Ответ: 200 кг.

§ 14. Задачи на движение

1. Лыжнику необходимо пробежать расстояние в 30 км. Начав бег на 3 мин позже назначенного срока, лыжник бежал со скоростью, больше предполагавшейся на 1 км/ч, и прибежал вовремя. Определите скорость, с которой бежал лыжник.

Ответ: 25 км/ч.

2. Два велосипедиста выехали из пунктов А и Б навстречу друг другу. Через 4 ч после встречи велосипедист, выехавший из А, прибыл в Б, а через 9 ч после встречи второй прибыл в А. Сколько часов в пути был каждый велосипедист?

Ответ: 10 и 15 ч.

3. Расстояние от пункта А до пункта Б равно 15 км. Из А в Б выехал велосипедист. Через 15 мин в том же направлении выехал автомобиль. Через 10 мин после выхода он догнал велосипедиста, доехал до Б и, повернув обратно, встретил велосипедиста через 50 мин после выхода из А. Определите скорости велосипедиста и автомобиля.

Ответ: 8 км/ч; 20 км/ч.

4. Пассажир, сидящий в поезде, который идет со скоростью 40 км/ч, заметил, что мимо окна в противоположном направлении прошел встречный поезд, длина которого 75 м. Какова скорость встречного поезда?

Ответ: 50 км/ч.

5. Сколько раз в сутки совпадают часовая и минутная стрелки? Чему равно

время между двумя последовательными совпадениями?

Ответ: $22\frac{12}{11}$ ч.

6. Моторная лодка, скорость движения которой 20 км/ч, прошла по реке расстояние в 60 км между двумя пунктами туда и обратно за 6 ч 15 мин. Определите скорость течения реки.

Ответ: 4 км/ч.

7. На путь из пункта А в Б теплоход затратил 3 ч, а на обратный путь 4 ч. Сколько времени будет плыть плот из А в Б?

Ответ: 24 ч.

8. Самолет летит из Минска в Киев и возвращается обратно. В какую погоду этот рейс будет совершен быстрее: в безветренную погоду или при ветре, дующем в направлении Киев – Минск?

Ответ: при ветре.

9. Старший брат на мотоцикле, а младший на велосипеде совершили двухчасовую безостановочную поездку в лес и обратно. При этом мотоциклист проезжал каждый километр на 4 мин быстрее, чем велосипедист. Сколько километров проехал каждый из братьев за 2 ч, если известно, что путь, проделанный старшим братом за это время, на 40 км больше?

Ответ: 20 км; 60 км.

10. Турист ехал на автомобиле $\frac{5}{8}$ всего пути, а остальную часть на катере. Скорость катера на 20 км/ч меньше скорости автомобиля. На автомобиле турист ехал на 15 мин дольше, чем на катере. Чему равны скорость автомобиля и скорость катера, если весь путь туриста равен 160 км?

Ответ: скорость автомобиля 100 или 80 км/ч; скорость катера 80 или 60 км/ч.

11. Расстояние между станциями А и Б равно 103 км. Из А в Б вышел поезд и, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а потому оставшийся путь до Б проходил со скоростью на 4 км/ч больше прежней. Найти первоначальную ско-

рость поезда, если известно, что оставшийся путь до Б был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше, чем на прохождение пути до задержки.

Ответ: 80 км/ч.

12. Два тела движутся навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми 390 м. Первое тело прошло в первую секунду 6 м, а в каждую следующую проходило на 6 м больше, чем в предыдущую. Второе тело двигалось равномерно со скоростью 12 м/с и начало движение спустя 5 с после первого. Через сколько секунд после того, как начало двигаться первое тело, они встретятся?

Ответ: через 10 с.

13. В 9 ч самоходная баржа вышла из пункта А вверх по реке и прибыла в пункт Б; 2 ч спустя после прибытия в Б эта баржа отправилась в обратный путь и прибыла в А в 19 ч 20 мин того же дня. Предполагая, что средняя скорость течения реки 3 км/ч и собственная скорость баржи во время движения постоянна, определить, в котором часу баржа прибыла в пункт Б. Расстояние между А и Б равно 60 км.

Ответ: в 14 ч.

14. По окружности длиной 60 м равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 с скорее другой. При этом совпадения точек происходят каждый раз через 1 мин. Определить скорости точек.

Ответ: 4 м/с; 3 м/с.

15. Пешеход, идущий из дома на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что он опоздает к отходу поезда на 40 мин, если будет идти с той же скоростью. Поэтому остальной путь он прошел со скоростью 4 км/ч и прибыл на станцию за 15 мин до отхода поезда. Чему равно расстояние от дома до станции и с какой постоянной скоростью пешеход пришел бы на станцию точно к отходу поезда?

Ответ: 14 км; 3,5 км/ч.

16. Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Спустя 4 ч после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

Ответ: 56 км.

17. Мотоциклист отправился из пункта А в пункт Б, отстоящий от А на 120 км. Обрато он выехал с той же скоростью, но через час после выезда должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжал путь до А, увеличив скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь от А до Б?

Ответ: 48 км/ч.

§ 15. Задачи о работе

1. При одновременном включении двух труб бассейн наполняется за 6 ч. Первая труба наполняет его на 5 ч быстрее, чем вторая. За какое время вторая труба может отдельно наполнить бассейн?

Ответ: 15 ч.

2. При постройке здания требуется вынуть 8000 м^3 земли в определенный срок. Работа была закончена на 8 дней раньше срока, т.к. бригада землекопов ежедневно перевыполняла норму на 50 м^3 . Определите срок выполнения работы по плану и найдите ежедневный процент перевыполнения плана.

Ответ: 40 дней; 25 %.

3. Трое рабочих выполняют работу за 10 дней, причем третий из них работал только первые три дня. За сколько дней выполнил бы работу первый рабочий, если известно, что за первые 3 дня он выполнил 37 % всей работы, а за 5 дней первый рабочий сделал столько же, сколько второй за 4 дня?

Ответ: 25; 20; 30.

4. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, выполняют всю работу за 7,5 ч; первый, третий и пятый – за 5 ч, первый, третий и четвертый – за 6 ч, четвертый, второй и пятый – за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят всю работу все пять человек, работая вместе?

Ответ: 3 ч.

5. Малыш может съесть пачку печенья за 20 мин и выпить пакет молока за 15 мин, а Карлсон – соответственно за 10 и 5 мин. За какое время они вместе могут покончить с пачкой печенья и пакетом молока?

Ответ: 11 мин.

§ 16. Задачи о числах и другие

1. Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите это число.

Ответ: 24.

2. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4, а в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3, а в остатке 5. Найдите это число.

Ответ: 23.

3. У кассира набралось 10 рублей пятьюдесятью монетами по 20 и 15 копеек. Сколько монет разного достоинства было у него?

Ответ: 30 по 20 к., 20 по 15 к.

4. Известно, что 9 итальянских лир стоили 11 рублей с копейками, а 13 итальянских лир – 15 рублей с копейками. Какова была точная цена одной итальянской лиры?

Ответ: 1,23 р.

5. Кооператив купил кусок ткани за 200 рублей. Часть этого куска была продана за 190 рублей, после чего осталось 15 метров. На каждом проданном метре было получено 1,5 рубля прибыли. Сколько метров ткани было в куске?

Ответ: 25.

6. На станцию привезли несколько полных контейнеров с телевизорами. Телевизоры перегрузили в вагоны одинаковой емкости. Получилось 7 полных вагонов и еще осталось 5 телевизоров. Через неделю привезли другое количество таких же контейнеров. При перегрузке получилось 11 полных вагонов, а в 12-м не хватило одного телевизора для комплектности. Сколько телевизоров вмещает контейнер (известно, что это число больше единицы)?

Ответ: 67.

7. В некотором механизме три шестеренки разных диаметров связаны между собой так, что большая из них касается обеих меньших, причем все три шестеренки вместе имеют 60 зубцов. Когда большая шестеренка не доходит на 20 зубцов до полных четырех оборотов, вторая и третья делают соответственно 5 и 10 полных оборотов. Сколько зубцов имеет каждая шестеренка в отдельности?

Ответ: 30, 20 и 10 зубцов.

8. Мяч катится перпендикулярно боковой линии футбольного поля. Предположим, что, двигаясь равномерно замедленно, мяч прокатился в первую секунду 4 м, а в следующую секунду на 0,75 м меньше. Футболист, находящийся первоначально в 10 м от мяча, побежал в направлении движения мяча, чтобы догнать его. Двигаясь равномерно ускоренно, футболист пробежал в первую секунду 3,5 м, а в следующую секунду на 0,5 м больше. За какое время футболист догонит мяч и успеет ли он сделать это до выхода мяча за боковую линию, если к линии поля футболисту надо пробежать 23 м?

Ответ: через 5 с; успеет догнать мяч за 0,5 м до линии поля.

9. В магазин привезли яблоки первого сорта на сумму 228 рублей и яблоки второго сорта на сумму 180 рублей. При разгрузке привезенные яблоки случайно перемешались. Подсчет показал, что если теперь продавать все яблоки по одной цене – на 90 копеек ниже цены килограмма яблок первого сорта, то будет выручена намеченная сумма. Сколько килограммов яблок было привезено, если

известно, что яблок второго сорта было на 5 кг больше, чем яблок первого сорта?

Ответ: 85 кг.

10. Красный карандаш стоит 27 к., синий – 23 к. На покупку карандашей можно затратить не более 9 р. 40 к. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей. При этом красных карандашей нужно закупить как можно меньше, но число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более чем на 10. Сколько красных и синих карандашей следует закупить при указанных условиях?

Ответ: 14 красных и 24 синих карандаша.

11. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найти исходное число.

Ответ: 202.

12. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 7 и из полученного нового числа вычли квадрат задуманного числа. Остаток уменьшили на 75 % этого остатка и еще вычли задуманное число. В окончательном результате получили нуль. Какое число задумано?

Ответ: 7.

13. Задумано целое положительное число. К его цифровой записи приписали справа какую-то цифру. Из получившегося нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность оказалась в 8 раз больше задуманного числа. Какое число задумано и какая цифра была приписана?

Ответ: задумано число 2, 3 или 4; приписана соответственно цифра 0, 3 или 8.

14. Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

Ответ: 285714.

15. Произведение цифр двузначного числа в 3 раза меньше самого числа. Если к некоторому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

Ответ: 24.

16. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели соответственно пропорциональны числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{200}{441}$. Найти эти дроби.

Ответ: $\frac{4}{7}, \frac{8}{21}, \frac{20}{49}$.

ГЛАВА 5. ПРОГРЕССИИ

§ 17. Арифметическая прогрессия

1. В арифметической прогрессии третий член равен 11, а шестой равен 23. Найдите первый член.

Ответ: 3.

2. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых одиннадцати членов этой прогрессии.

Ответ: 44.

3. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, в которой $a_2 + a_5 - a_3 = 1$, $a_1 + a_6 = 17$.

Ответ: $a_1 = 46$; $d = -15$.

4. Восьмой член арифметической прогрессии составляет 40 % от четвертого, а их сумма равна 2,8. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы их сумма была равна 14,3?

Ответ: 13.

5. Найдите сумму трехзначных четных чисел, делящихся на 3.

Ответ: 82350.

6. Найдите сумму всех натуральных трехзначных чисел, которые при делении на 79 дают в остатке 51.

Ответ: 6774.

7. Найдите натуральное число x из уравнения $3 + 6 + 9 + \dots + x = 234$.

Ответ: 36.

8. Найдите натуральное число n из уравнения $\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 3$.

Ответ: 7.

9. Вычислите $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Ответ: 5050.

10. Если при любом n сумма членов арифметической прогрессии $S_n = 3n^2 - 2n$, то найдите сумму $a_4 + a_5$.

Ответ: 44.

11. Найдите значения синуса меньшего острого угла прямоугольного треугольника, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

12. Найдите сумму восемнадцати первых членов арифметической прогрессии, если $a_3 + a_7 + a_{12} + a_{16} = 126$.

Ответ: 567.

13. Последовательность 2, 3, 6, 11, 18, ... обладает тем свойством, что разности соседних чисел составляют арифметическую прогрессию. Найдите ее член под номером 40.

Ответ: 1523.

§ 18. Геометрическая прогрессия

1. Найдите число членов конечной геометрической прогрессии, если известно, что ее первый, второй и последний члены равны 3; 12 и 3072.

Ответ: 6.

2. В геометрической прогрессии четвертый член равен 3. Найдите произведение семи членов этой прогрессии.

Ответ: 2187.

3. Найдите четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, зная, что сумма крайних членов равна 140, а сумма средних членов равна 60.

Ответ: 5; 15; 45; 135 или 135; 45; 15; 5.

4. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Ответ: $b_1 = 6$; $q = \frac{1}{3}$.

5. Три положительных числа, составляющие арифметическую прогрессию, дают в сумме 15. Если к ним прибавить соответственно 1; 4 и 19, то получатся три числа, составляющие геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

Ответ: 2; 5; 8.

6. Число членов геометрической прогрессии четное. Сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов с нечетными номерами. Найдите знаменатель прогрессии.

Ответ: 2.

7. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если для суммы ее n первых членов выполняется неравенство: $\log_5(S_n + 1) = n$.

Ответ: 5.

8. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если каждый ее член в 4 раза больше суммы всех следующих за ним членов.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

9. В геометрической прогрессии $S_4 = 20$ и $b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 40$. Найдите знаменатель прогрессии.

Ответ: 2.

10. Бактерия, помещенная в колбу, за секунду делится на две бактерии, каждая из которых тоже через секунду делится на две и т.д. Через 1 мин колба заполняется бактериями полностью. Сколько секунд потребуется для заполнения колбы, если сразу в нее поместить четыре бактерии?

Ответ: 58 с.

§ 19. Задачи смешанного типа

1. Сумма первых n членов числовой последовательности при любом n выражается формулой $S_n = n^2 + n$. Найдите 1999-й член этой последовательности. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

Ответ: 3398.

2. Найдите меньший острый угол прямоугольного треугольника, стороны которого составляют геометрическую прогрессию.

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. Найдите сумму $S = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + 100 \cdot 3^{99}$.

Ответ: $0,25(199 \cdot 3^{100} + 1)$.

4. При каких α три числа $1 + \sin \alpha$, $\sin^2 \alpha$, $1 + \sin^2 \alpha$ составляют арифметическую прогрессию?

Ответ: $\frac{\pi}{2} + k\pi; (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi, k, n \in Z$.

5. Сколько одинаковых чисел, кратных 11, имеется в двух арифметических прогрессиях $5, 8, \dots$ и $3, 7, \dots$, если в каждой из них по 1993 члена?

Ответ: 46.

ГЛАВА 6. ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 20. Тригонометрические преобразования

1. Вычислите

$$\sin 495^\circ + \cos(-585^\circ) + \operatorname{tg} 1395^\circ.$$

Ответ: -1 .

2. Вычислите

$$\sin 77^\circ \cdot \sin 88^\circ + \cos 77^\circ \cdot \cos 88^\circ - \cos 11^\circ.$$

Ответ: 0 .

3. Упростите выражение $\frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{4} \sin^2(2\pi - \alpha)$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

4. Упростите выражение

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(\pi - \alpha)} - \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cdot \cos(\pi + \alpha) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^2 \alpha.$$

Ответ: 0 .

5. Вычислите $\cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$.

Ответ: $0,25$.

6. Вычислите $\sin 40^\circ + \cos 70^\circ - \cos 10^\circ$.

Ответ: 0 .

7. Вычислите $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3)$.

Ответ: -1 .

8. Вычислите $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right) - \sqrt{5} \cos(\operatorname{arctg} 2) + \cos\left(2 \cdot \arcsin \frac{3}{5}\right)$.

Ответ: $\frac{2}{25}$.

9. Что больше: $\operatorname{tg} 1$ или $\operatorname{arcctg} 1$?

Ответ: $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{arcctg} 1$.

10.

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = 0,4$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

11.

Найдите $70 \sin \alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$,

$$135^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

Ответ: $17,5$.

12.

Найдите $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{23}{32}$.

13.

Верно ли тождество

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)?$$

Ответ: верно.

14.

Преобразуйте в произведение:

$$\cos 2\alpha - \sin 4\alpha - \cos 6\alpha.$$

Ответ: $\sin 4\alpha(2\sin 2\alpha - 1)$.

15.

Вычислите: $\frac{\cos 70^\circ + \sin 70^\circ}{\sqrt{2} \cos 25^\circ}$.

Ответ: 1.

16.

Вычислите:

$$\operatorname{ctg} 80^\circ \cdot \operatorname{ctg} 70^\circ + \operatorname{ctg} 70^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{ctg} 80^\circ.$$

Ответ: 1.

17.

Вычислите:

$$\frac{\cos 6^\circ + \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 42^\circ}{\sin 87^\circ \cos 15^\circ \cos 24^\circ}.$$

Ответ: 4.

18.

Найдите $\operatorname{ctg} \beta$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, если

$$\operatorname{tg} \beta = -2, \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right).$$

Ответ: $-\frac{1}{2}; -\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}$.

19.

Найдите $\operatorname{tg} \beta$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, если

$$\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{2}, \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right).$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

20.

Вычислите:

а) $\operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 5^\circ \dots \operatorname{ctg} 89^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 86^\circ \cdot \operatorname{tg} 84^\circ \dots \operatorname{tg} 2^\circ$.

Ответ: а) 1; б) 1.

21.

Вычислите:

а) $\sin \alpha + \cos \alpha$, если $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$;

б) $\sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,6$.

Ответ: а) $\pm \sqrt{\frac{3}{2}}$; б) $-0,32$.

22.

Докажите тождество

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha}{2} \cos 4\alpha.$$

23.

Докажите тождество

$$\sin^{-1} \alpha + \operatorname{tg}^{-1} \alpha = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

24.

Докажите тождество

$$1 + \operatorname{ctg} \left(2\alpha - \frac{3\pi}{2} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha.$$

25.

Докажите тождество

$$\frac{\sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right).$$

26.

Докажите тождество

$$\sin^2 \left(\frac{7}{8} \pi - 2\alpha \right) - \sin^2 \left(\frac{9}{8} \pi - 2\alpha \right) = \frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

27.

Докажите тождество

$$\cos^2 (45^\circ - \alpha) - \cos^2 (60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \sin (75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha.$$

28.

Вычислите

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{24} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{24} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}; \\ \text{б) } & \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{24} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24} - 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{24} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{24}}. \end{aligned}$$

Ответ: а) $\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{3}$.

29.

Вычислите

$$\frac{1 + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}, \text{ если } \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}.$$

Ответ: $-0,8$.

30.

Вычислите $\frac{3 \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 1}{4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2}$, если

$$\operatorname{tg} \alpha = 3.$$

Ответ: $1\frac{2}{33}$.

31.

Упростите выражение

$$\sin^2 \alpha (1 + \sin^{-1} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) (1 - \sin^{-1} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha).$$

Ответ: $\sin 2\alpha$.

32.

Упростите выражение

$$1 - \frac{1}{1 - \sin^{-1} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)}.$$

Ответ: $\frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.

Библиотека БГУИР

33. Упростите выражение

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sin^2 \alpha$$

Ответ: 1,5.

34. Упростите выражение

$$\cos(\alpha - \beta)(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1) + (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) \cos(\alpha + \beta).$$

Ответ: 0.

35. Вычислите $\left(\frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}\right)^2$.

Ответ: 3.

36. Вычислите $16 \sin^2 70^\circ \cdot \sin^2 50^\circ \cdot \sin^2 10^\circ$.

Ответ: 0,25.

37. Вычислите $\sin \frac{7\pi}{18} \cdot \sin \frac{5\pi}{18} \cdot \sin \frac{\pi}{18}$.

Ответ: 0,125.

38. Вычислите $\frac{\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 100^\circ}{\sqrt{1 - \cos 260^\circ}}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

39. Выясните, какие из указанных функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными

а) $y = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{|x|}$. Ответ: нечетная.

б) $y = \sin^3 x + \operatorname{ctg}^5 x$. Ответ: нечетная.

в) $y = \frac{|x|}{\sin x \cdot \cos x}$. Ответ: нечетная.

г) $y = \sin^4 x + x^2 + 1$. Ответ: четная

д) $y = \frac{1 - \sin x}{1 + 5 \sin x}$. Ответ: ни четная, ни нечетная.

е) $y = \frac{\cos x^3}{4 - x^2}$. Ответ: четная.

40. Расположите числа в порядке возрастания:

а) $\sin 1,2$; $\sin(-1,2)$; $\sin(0,8)$;

б) $\operatorname{tg} 0,5$; $\operatorname{tg} 1,4$; $\operatorname{tg}(-0,3)$;

в) $\cos \frac{25\pi}{9}$; $\sin \frac{4\pi}{5}$; $\cos \frac{4\pi}{5}$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{9\pi}{10}$; $\operatorname{ctg} \frac{12\pi}{5}$; $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{5}$; $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{15}$.

41. Найдите множество значений функции

$y = (\sin x + \cos x)^2$. Ответ: $[0; 2]$.

42. Найдите множество значений функции

$y = \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}$. Ответ: $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

43. Найдите множество значений функции

$y = 5 \sin x - 12 \cos x$. Ответ: $[-13; 13]$

44. Вычислите

$\sin(3\pi - \arccos \sqrt{0,75})$ Ответ: 0,5.

45. Вычислите

$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ответ: 1.

46. Вычислите $\arcsin(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)))$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$.

47. Вычислите $\operatorname{tg}(0,5 \arccos 0,6 - 3 \operatorname{arctg}(-2))$.

Ответ: $\frac{11}{2}$.

48. Вычислите $\operatorname{tg}(0,5 \arccos 0,6 - 2 \operatorname{arctg}(-2))$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

49. Найдите сумму наименьшего и наибольшего значений функции

$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Ответ: $\frac{5}{4}$.

50. Найдите наибольшее значение функции

$f(x) = \sin 2x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

При каких x оно достигается?

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}$ при $x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

51. Найдите наибольшее значение функции

$f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x - \sin^3 x \cdot \cos x$.

Ответ: $\frac{1}{4}$ при $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

52. Найдите все значения x , при которых функция $f(x) = \sin x - \cos^2 x - 1$ принимает наименьшее значение.

Ответ: $-\frac{9}{4}$ при $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{N}$.

§ 21. Тригонометрические уравнения

1. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{6n+1}{12} \pi, n \in \mathbb{Z}$.

2. Решите уравнение $\cos 5x \cdot \cos 20^\circ + \sin 5x \cdot \sin 20^\circ - 1 = 0$.

Ответ: $4^\circ + 90^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$.

3. Решите уравнение $\cos 2x = \cos 5x$.

Ответ: $\frac{2\pi n}{3}, \frac{2\pi k}{7}; n, k \in \mathbb{Z}$.

4. Решите уравнение $\cos 9x + \cos 7x = \cos 3x + \cos x$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi m}{5}, k, n, m \in \mathbb{Z}$.

5. Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos 5x = \sin 3x \cdot \cos 5x$.

Ответ: $\frac{\pi k}{3}, \frac{2\pi n}{9}, k, n \in \mathbb{Z}$.

6. Решите уравнение $\sin 4x = \cos x$.

В ответ запишите наименьшее положительное решение в градусах.

Ответ: 18° .

7. Решите уравнение $\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \sin 3x$.

Ответ: $\frac{2\pi n}{3}, -\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}; n, k, m \in \mathbb{Z}$.

8. Решите уравнение $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$.

Ответ: $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$.

9. Решите уравнение $(1 + \sin 2x) \cdot \sin 2x = \cos^2 2x$.

Ответ: $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, -\frac{\pi}{4} + \pi n; k, n \in \mathbb{Z}$.

10. Решите уравнение $\sin 2x - 5\sin x + 5\cos x + 5 = 0$.

В ответ запишите наименьшее положительное решение в градусах.

Ответ: 90° .

11. Решите уравнение $4\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - 8\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 3 = 0$.

ОТВЕТ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

12. Решите уравнение $9\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 6$.

ОТВЕТ: $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \pm\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; k, n \in Z$.

13. Решите уравнение $3 - 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2x + \frac{3}{2}\pi\right)$.

ОТВЕТ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

14. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{2}\sin x \cos x$.

ОТВЕТ: $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

15. Решите уравнение $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$.

ОТВЕТ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z$.

16. Решите уравнение $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 3$.

В ответ запишите наибольшее отрицательное решение в градусах.

ОТВЕТ: -45° .

17. Решите уравнение $\sin 2x = 1 - 4\cos^2 x$.

ОТВЕТ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \arctg 3 + \pi k, n, k \in Z$.

18. Решите уравнение $2\operatorname{ctg} x - \cos 2x = 2$.

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

19. Решите уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

В ответ запишите наибольшее положительное решение в градусах.

ОТВЕТ: 90°

20. Решите уравнение $\sin 2x \cdot \sin 4x = 1$.

ОТВЕТ: нет решений.

21. Решите уравнение $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; n, k \in Z$.

22. Решите уравнение $\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} - \sin x \cdot \sin 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0$.

ОТВЕТ: $\frac{(2k+1)\pi}{9}; k \in Z$.

23. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin^2 3x + \frac{1}{6}\cos 6x = 1$.

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{6}}{4} + \pi m;$$

$$\pm \frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right) + \pi k, n, m, k \in Z.$$

24. Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi \cos x) = \operatorname{ctg}(\pi \cos 2x)$.

$$\text{Ответ: } \pm \arccos \frac{-1 + \sqrt{8n + 13}}{4} + 2\pi k;$$

$$n = -1, 0, 1; k \in Z;$$

$$\pm \arccos \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + 2\pi m; m \in Z.$$

25. Решите уравнение $2 \arcsin 2x = \arccos 7x$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{8}.$$

26. Решите уравнение $\frac{\pi}{\sin 2x} = \left| x - \frac{\pi}{2} \right| - \left| x + \frac{\pi}{2} \right|$.

$$\text{Ответ: } (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z, n < 0;$$

$$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in Z, k > 0.$$

27. Найдите наименьшее положительное решение уравнения в градусах:
 $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.

$$\text{Ответ: } 15^\circ.$$

28. Найдите наибольшее отрицательное решение уравнения в градусах:
 $3 \cos x + 2 \sin^2 x = 0$.

$$\text{Ответ: } -120^\circ.$$

29. Найдите наименьшее положительное решение уравнения в градусах:

$$2 \cos \frac{x}{4} - \cos \frac{x}{2} = 1.$$

$$\text{Ответ: } 360^\circ.$$

30. Решите уравнение $\sin \left(\frac{\pi}{2} + 2x \right) \operatorname{ctg} 3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2} \cos 5x = 0$.

В ответ запишите наибольший корень на $[0; 180]$ в градусах.

$$\text{Ответ: } 165^\circ.$$

31. Решите уравнение $5 \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \sin x - 5 \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + k\pi; \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \pi n; k, n \in Z.$$

32. Решите уравнение $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$.

Ответ: $4\pi n, n \in Z$.

33. Решите уравнение $\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$.

Ответ: $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; n \in Z$.

34. Найдите наименьшее решение в градусах на $[-360^\circ; 0^\circ)$ уравнения $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.

Ответ: -300° .

35. Решите уравнение $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 x} = 0$.

В ответ запишите сумму решений на $[-\pi; \pi]$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

36. Найдите наибольшее отрицательное решение уравнения в градусах.

$$\operatorname{tg}^2 3x - 2\sin^2 3x = 0.$$

Ответ: -15° .

37. Найдите все целые значения k , при которых уравнение

$$\cos kx = 1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$
 имеет решения.

Ответ: при $k = 4m, m \in Z, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

38. Решите уравнение

$$\sqrt{25x^2 + 1 + \frac{10x(1 - \sin 88^\circ)(\cos 44^\circ + \sin 44^\circ)^2}{1 - \sin 88^\circ}} = 1 + 5x.$$

В ответ запишите наименьший корень.

Ответ: $-\frac{1}{5}$.

§ 22. Тригонометрические уравнения с несколькими неизвестными

1–5. Найдите пары чисел (x, y) , удовлетворяющие следующим уравнениям.

1. $\sin^2 x + \cos^2 y + 2\sin x + 1 = 0$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right); k, n \in Z$.

2. $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos y = 3 + \cos 2y$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; 2\pi m\right); n, m \in Z$;

$\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \pi + 2\pi l\right); l, k \in Z$.

3. $\sin^4 x + \cos^4 y + 2 = 4 \sin x \cos y$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi n\right); k, n \in \mathbb{Z};$
 $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \pi + 2\pi m\right); l, m \in \mathbb{Z}.$

4. $\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = y^2 - 4y + 5$.

Ответ: $(\pi + 2\pi n; 2); n \in \mathbb{Z}.$

5. $1 - 2x - x^2 = \operatorname{tg}^2(x + y) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2(x + y)}$.

Ответ: $\left(-1; 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right); k \in \mathbb{Z}.$

6. Найдите все тройки чисел (x, y, z) , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 1 - 2x \sin \pi y + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = (41 - yz)(\cos 2\pi y + \cos \pi z)^2.$$

Ответ: $\left(1; \frac{513}{2}; 128\right); \left(-1; -\frac{513}{2}; -128\right).$

§ 23. Тригонометрические уравнения с параметром

1. Сколько существует целых значений a , при которых уравнение $a \sin x + 1 = a^2 - \sin x$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: 4.

2. Решите уравнение в зависимости от значения параметра b :

$$\sin 2x - 2\sqrt{2}b(\sin x + \cos x) + 1 - 6b^2 = 0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin(3b) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ при $|b| \leq \frac{1}{3}$.

3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\cos 2x + a \sin x = 2a - 7$ имеет решение?

Ответ: $[2; 6]$.

4. Сколько решений имеет уравнение $a \operatorname{ctg} x - 1 = \cos 2x$ на отрезке $[0; 2\pi]$?

Ответ: 2 при $a = 0$ и при $|a| > 1$;
4 при $|a| = 1$; 6 при $0 < |a| < 1$.

5. Решите уравнение $\sin(a + x) + \sin x = \cos \frac{a}{2}$.

Ответ: $-\frac{a}{2} + \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ при $a \neq 2\pi n + \pi$;
 $x \in \mathbb{R}$ при $a = \pi + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}.$

§ 24. Системы тригонометрических уравнений

1. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) = 0, \\ |x| + |y| = 2. \end{cases}$$

Ответ: 8.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0,25, \\ \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \right); k, n \in Z.$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 1,5. \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \right); k, n \in Z.$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy = -1, \\ \arcsin x + \arccos y = \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(-1, 1).$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2, \\ x^2 + y^2 = \sin^2 x. \end{cases}$$

Ответ: $(0, 0).$

§ 25. Тригонометрические неравенства

1. Решите неравенство $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: $\left(-\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; \frac{5}{6}\pi + 2\pi n \right), n \in Z.$

2. Решите неравенство $|\sin x| < \frac{1}{3}.$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n \right), n \in Z.$

3. Решите неравенство $\sin x \leq -1.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n.$

4. Решите неравенство $\sin x \cdot \sin 7x \geq \sin 3x \cdot \sin 5x.$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3}{4}\pi + \pi n \right], \pi k; n, k \in Z.$

5. Решите неравенство $3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x < 0,5.$

В ответ запишите наибольшее целое решение в градусах на $(45^\circ; 150^\circ)$.

Ответ: 129° .

6. Решите неравенство $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg} 2x - 4 \operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi n}{8}; \frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{8}\right), n \in Z$.

7. Решите неравенство $\arcsin(x-1) < -\frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\left[0; \frac{1}{2}\right)$.

8. Решите неравенство $\arccos \frac{1}{x} \geq \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

9. Решите неравенство $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 \geq 0$.

В ответ запишите наибольшее отрицательное решение в градусах.

Ответ: -120° .

10. Решите неравенство $\operatorname{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < 0$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in Z$.

11. Решите неравенство $1 - \sin x + \cos x < 0$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right), n \in Z$.

12. Решите неравенство $2 \cos^2 x - \sin x + \sin 3x \leq 1$.

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi m; -\frac{\pi}{6} + 2\pi m\right];$
 $\left[-\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; -\frac{3}{4}\pi + 2\pi n\right];$
 $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3}{4}\pi + 2\pi k\right]; n, m, k \in Z$.

13. Решите неравенство $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \cos 3x \cdot \sin^3 x < \frac{3}{8}$.

Ответ: $\left(-\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}\right), k \in Z$.

14. Решите неравенство $\cos x - y^2 - \sqrt{y-1-x^2} \geq 0$.

Ответ: $x = 0, y = 1$.

15. Решите неравенство $\operatorname{arctg} \sqrt{x} < \arccos(1-x)$.

Ответ: $(0; 1]$.

ГЛАВА 7. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 26. Показательные уравнения

1 – 53. Решите уравнения.

1. $3^{x^2 - \frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{9}$.

Ответ: $-\frac{2}{7}; 1$.

2. $3^{2x+2} + 3^{2x} = 30$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

3. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^3 - 9x} = 1$.

Ответ: $-3; 0; 3$.

4. $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.

Ответ: $0; 1$.

5. $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$.

Ответ: $\frac{17}{13}$.

6. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

Ответ: $0; 0,5$.

7. $2,56^{\sqrt{x}-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{4\sqrt{x}+1}$.

Ответ: $\frac{1}{36}$.

8. $4^{x+1,5} + 2^{x+2} = 4$.

Ответ: -1 .

9. $3^{3x+1} - 4 \cdot 27^{x-1} + 9^{1,5x-1} = 80$.

Ответ: 1 .

10. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

Ответ: $1,5$.

11. $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$.

Ответ: 4 .

12. $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$.

Ответ: 2 .

13. $\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9} = 0$.

Ответ: нет корней.

14. $\frac{4}{\sqrt[3]{x+2}} + \frac{\sqrt[3]{x+2}}{5} = 2$.

Ответ: $8; 27$.

15. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$.

Ответ: -2 .

16. $(x+3)^{x^2-3} = (x+3)^{2x}$.

Ответ: $-2; 1; 3$.

17. $(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1$.

Ответ: $-1; 1; 2$.

18. $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$.

Ответ: $0; 1$.

19. $2^{x^2+x-2} = 1$.

Ответ: $-2; 1$.

20. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^6-9x^3+8} = 1$.

Ответ: $1; 2$.

21. $5^{2\sin 3x} = 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}k, k \in Z$.

22. $\left(\frac{1}{5}\right)^{8\sin x - 7\cos x} = 1$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{7}{8} + \pi k; k \in Z$.

23. $2^{|x-1|-3} = 1$. Ответ: -2; 4.
24. $4^{\frac{2x+1}{3-x} - \frac{4-x}{x+1}} = 1$. Ответ: -11; 1.
25. $\left(\frac{1}{8}\right)^{|2x-3|-x-1} = 1$. Ответ: $\frac{2}{3}$; 4.
26. $7^{2 \arccos x - 6,3} = 1$. Ответ: нет решений.
27. $\left(\frac{1}{12}\right)^{x^4 + (x-4)^4 - 82} = 1$. Ответ: 1; 3.
28. $7^{\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} - 7} = 1$. Ответ: 4.
29. $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^x$. Ответ: $\frac{18}{13}$.
30. $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$. Ответ: $\frac{17}{13}$.
31. $(\sqrt[6]{5})^{(3\sqrt[6]{6})^x} = 5$. Ответ: 36.
32. $\frac{81^{\arcsin^2 x}}{9^{7 \arcsin x}} = \frac{1}{729}$. Ответ: $\sin \frac{1}{2}$.
33. $\sqrt[3]{3^{5\sqrt{x}}} = 3^{\sqrt{x-4}}$. Ответ: 25.
34. $\frac{2^{x+1} + 1}{2^x} + \frac{2^{x+2}}{2^{x+1} + 1} = 5$. Ответ: -1.
35. $3^{3x} \cdot 7^{x+2} = 5^{x+1}$. Ответ: $\frac{\log_3 \frac{5}{49}}{3 + \log_3 \frac{7}{5}}$.
36. $3 \cdot 16^{\frac{1}{x-1}} + 2 \cdot 81^{\frac{1}{x-1}} = 5 \cdot 36^{\frac{1}{x-1}}$. Ответ: 3.
37. $\left(\sqrt[3]{3 - \sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{8}}\right)^x = 2,5$. Ответ: $3 \log_{3+\sqrt{8}} 2$; $3 \log_{3+\sqrt{8}} \frac{1}{2}$.
38. $(x+2)^{x^2} = (x+2)^{x+1}$. Ответ: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; -1.
39. $(\sqrt{5} + 2)^{2-8x} = 1$. Ответ: 0,25.
40. $\left(\frac{4}{9}\right)^{\sqrt{x}} = (2,25)^{\sqrt{x-4}}$. Ответ: 4.
41. $0,01 \cdot 2^x \cdot 5^x = (0,01)^2 \cdot 10^{3x}$. Ответ: 1.
42. $2^x - 2^{x-2} = 3$. Ответ: 2.

43. $2^{3\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{3\sqrt{x}-1} = 20.$

Ответ: 1.

44. $(0,4)^x \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{8}{125}\right)^3.$

Ответ: -2,5; 3.

45. $\sqrt[3]{x-1}\sqrt{3^{10x+5}} = 2x-5\sqrt{27^{3x-7}}.$

Ответ: $4; \frac{22}{7}.$

46. $5^{2x} - 24 \cdot 5^x = 25.$

Ответ: 1.

47. $3^{4x+8} - 4 \cdot 3^{2x+5} + 27 = 0.$

Ответ: -1; -1,5.

48. $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15.$

Ответ: 2.

49. $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4.$

Ответ: 2; -2.

50. $3 \cdot \sqrt[3]{81} - 10 \cdot \sqrt[3]{9} = -5^{\log_{25} 9}.$

Ответ: 2.

51. $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}.$

Ответ: 4.

52. $9^x + 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}.$

Ответ: 1,5.

53. $5 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x - 2 \cdot 25^x = 0.$

Ответ: 0.

54. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}, \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{14}; \frac{1}{14}\right).$

55. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{y^2-7y+10} = 1, \\ x + y = 8. \end{cases}$$

Ответ: (1; 7); (3; 5); (6; 2).

56. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 8^{x+y} = 5, \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; -1).

21. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|2x+3|}{|3x-2|}} < \frac{1}{3}$. Ответ: $\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 5\right)$.
22. $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}} > 1$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; 7)$.
23. $4^{\lg 2x} - 8^{\lg x} \leq 0$. Ответ: $\pi k - \frac{\pi}{4} < x \leq \pi k; \pi k + \frac{\pi}{4} < x < \pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
24. $8^{\frac{1}{x+1}} \cdot 128^{\frac{1}{x+2}} < 64^{\frac{1}{x-1}}$. Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{5}{4}; 1\right) \cup (1; 5)$.
25. $0,02^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+(-1)^n \frac{1}{2^n}+\dots} < \sqrt[3]{0,002^{3x^2+5x}} < 1$.
 Ответ: $\left(-2; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$.
26. $\frac{1}{2^x+1} + \frac{2}{2^x+3} < \frac{3}{2^x+2}$. Ответ: $(0; +\infty)$.
27. $\frac{1}{5-3^{x+1}} + \frac{2}{1+3^{x+1}} \leq 1$. Ответ: $[-1 + \log_3 2; 0] \cup [-1 + \log_3 5; +\infty)$.
28. $3 \cdot 5^{8x-3} - 26 \cdot 5^{3-8x} + 37 \leq 0$. Ответ: $\left[-\infty; \frac{1}{8} \left(3 + \log_5 \frac{2}{3}\right)\right]$.
29. $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3} - 16\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{27} + 15\sqrt[3]{81} > 0$.
 Ответ: $\{x | x \geq 2, x \in \mathbb{N}\}$.
30. $(5-x)^{\frac{3x-5}{5-x}} < 1$. Ответ: $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (4; 5)$.
31. $|x-3|^{2x^2-7} > 1$. Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{2}}; 2\right) \cup (4; +\infty)$.
32. $(x+2)^{x^2} > (x+2)^x$. Ответ: $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
33. Решите неравенство $(0,5)^{x-2} > 4$.
 Ответ: $(-\infty; 0)$.
34. Решите неравенство $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45} > 0,81^x$.
 Ответ: $(-\infty; -9) \cup (5; +\infty)$.
35. Решите неравенство $7^{x+3} + 7^{x+2} + 7^x > 393$.
 Ответ: $(0; +\infty)$.

36. Решите неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > 3$.

Ответ: $(-\infty; -1)$.

37. Решите неравенство $\frac{4^x + 2x - 4}{x - 1} \leq 2$.

Ответ: $[0,5; 1)$.

38. Решите неравенство $\frac{6 - 3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x - 1}$.

Ответ: $(0; 0,5)$.

39. Решите неравенство $3^{\frac{2}{x}} + 2x \cdot 3^{\frac{1}{x}} - 18x - 81 < 0$.

В ответ запишите наименьшее натуральное x .

Ответ: 1.

§ 28. Логарифмы

1. Вычислите $\lg 4 + \lg 25$.

Ответ: 2.

2. Вычислите $3^{2+\log_3 5}$.

Ответ: 45.

3. Вычислите $4^{\log_2 \sqrt{3}}$.

Ответ: 3.

4. Вычислите $49^{\log_7 2 - \frac{1}{2} \log_{49} 64}$.

Ответ: 0,5.

5. Вычислите $39 \cdot \log_{25} \sqrt[13]{625}$.

Ответ: 6.

6. Вычислите $\frac{\log_2 24}{6 + \log_2 9}$.

Ответ: 0,5.

7. Вычислите $(0,5)^{\frac{-2}{\log_{25} 16}}$.

Ответ: 5.

8. Вычислите $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$.

Ответ: -3.

9. Вычислите $(\sqrt[3]{5})^{\log_5 64}$.

Ответ: 2.

10. Найдите сумму $\lg(2 \operatorname{tg} 1^\circ) + \lg(2^3 \operatorname{tg} 3^\circ) + \dots + \lg(2^{89} \operatorname{tg} 89^\circ)$.

Ответ: $2025 \lg 2$.

§ 29. Логарифмические уравнения

Решите уравнения.

1. $\log_3(x^2 - 4x - 5) = \log_3(7 - 3x)$.

Ответ: -3.

2. $\lg(x - 6) - 0,5 \lg 2 = \lg 3 + \lg \sqrt{x - 10}$.

Ответ: 12; 18.

3. $\log_x 5\sqrt{5} - 1,25 = \log_x^2 \sqrt{5}$.

Ответ: $5; \sqrt[5]{5}$.

4. $\log_5|x + 1| + \log_5|2x + 3| = 1$.

Ответ: нет корней.

5. $\log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0$. Ответ: 0,2; 125.
6. $x^{\log_2 x - 2} = 8$. Ответ: 0,5; 8.
7. $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1$. Ответ: 100; 10^8 .
8. $\lg(x+6) - 0,5\lg(2x-3) = 2 - \lg 25$. Ответ: 6; 14.
9. $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$. Ответ: 1; 2.
10. $\lg \frac{x+6}{\sqrt{2x+3}} = \lg 4$. Ответ: 6; 14.
11. $\log_2(3x-1) - \log_2(4-x) = 4 - \log_2(x-1)$.
Ответ: 3.
12. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$. Ответ: $\frac{1}{9}$; 9.
13. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$. Ответ: $\frac{1}{6}$; 6.
14. $\log_{0,2}(4x) + \log_5(x^2 + 75) = 1$. Ответ: 5; 15.
15. $\log_2 x + \frac{4}{\log_x 2} = 5$. Ответ: 2.
16. $\sqrt{\lg x} = \lg \sqrt{x}$. Ответ: 1; 10^4 .
17. $\lg(x^{\lg x}) = 1$. Ответ: 0,1; 10.
18. $2\lg \lg x = \lg(7 - 2\lg x) - \lg 5$. Ответ: 10.
19. $(0,4)^{\lg x^2 + 1} = (6,25)^{2 - \lg x^3}$. Ответ: 10; 10^5 .
20. $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$. Ответ: 5; 5^{-4} .
21. $\log_8(x+2)^3 \cdot \log_{2x} 2 = 1$. Ответ: 2.
22. $\log_2(x-1) = 3$. Ответ: 9.
23. $\log_3(\log_2 x) = 1$. Ответ: 8.
24. $\frac{\lg(x+24)}{\lg(x^2 - 3x - 53)} = 1$. Ответ: -7; 11.
25. $\log_3 \log_4 \log_3^2(x-3) = 0$. Ответ: $\frac{28}{9}$; 12.
26. $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = \log_4 2$. Ответ: 5.
27. $\lg \sqrt{1+x} + 3\lg \sqrt{1-x} - 2 = \lg \sqrt{1-x^2}$. Ответ: нет решений.
28. $2\log_{0,25}^2 x + \log_{0,25} x = 1$. Ответ: 0,5; 4.
29. $2\lg^2(100x) - 21\lg x = 15$. Ответ: $10^{-0,5}$; 10^7 .

30. $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$. Ответ: $\frac{1}{27}; 9$.
31. $2\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$. Ответ: -100 .
32. $\log_3(x+2) \cdot \log_3(x-2) + 1 = \log_3(x^2 - 4)$. Ответ: 5 .
33. $x^{\log_2 x} = \sqrt[4]{x}$. Ответ: $2^{-0,5}; 1; 2^{0,5}$.
34. $25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}$. Ответ: 10 .
35. $64^{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} - 392 \cdot 8^{\sin 2x} + 16 = 0$. Ответ: $\frac{1}{2} \cdot (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2}; k \in Z$.

§ 30. Логарифмические неравенства

1 – 37. Решите логарифмические неравенства.

1. $\log_5 4 > \log_5 x$.
Ответ: $(0; 4)$.
2. $\log_{0,3}(2 - 0,5x) > \log_{0,3} 4$.
Ответ: $(-4; 4)$.
3. $\log_4(\sqrt{x} + 1) + \log_2(\sqrt{x} - 1)^{0,5} < \log_{\sqrt{5}} 5$.
Ответ: $(1; 17)$.
4. $(5x - 2)\log_2 x > 0$.
Ответ: $(0; 0,4) \cup (1; +\infty)$.
5. $\log_{(5-x)} 8,4 < 1$.
Ответ: $(-\infty; -3,4) \cup (4; 5)$.
6. $\log_{\operatorname{tg} x}^2 3 \leq \log_{\operatorname{tg} x}(3 \cdot \operatorname{tg}^2 x)$.
Ответ: $\left(\pi n; \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right); n \in Z$.
7. $\log_2(2 - 3x) > 4x + 1$.
Ответ: $(-\infty; 0)$.
8. $\log_{0,5} \frac{5x - 3}{x + 2} > 1$.
Ответ: $\left(\frac{3}{5}; \frac{8}{9}\right)$.
9. $\log_{20} x + \log_{20}(x + 1) \leq \log_{20}(2x + 6)$. Ответ: $(0; 3]$.
10. $\log_{6,7} \frac{x}{x + 3} > 0$.
Ответ: $(-\infty; -3)$.
11. $\log_{0,4} \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} < 0$.
Ответ: $(-\infty; -1)$.

12. $\frac{\log_3(x-1)}{2x-1} < 0$. Ответ: (1; 2).
13. $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2^{x+1} - 2) < 2$. Ответ: $\left(\log_2 \frac{5}{4}; \log_2 3\right)$.
14. $\log_{0,3} \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} < 0$. Ответ: $(-4; -3) \cup (8; +\infty)$.
15. $\log_5(x^2 - 4x - 3) < 0$. Ответ: $(2 + \sqrt{7}; 2 + \sqrt{8}) \cup (2 - \sqrt{8}; 2 - \sqrt{7})$.
16. $\log_{0,5} \log_8 \frac{x^2 + 8x}{x - 3} < 0$. Ответ: $(3; +\infty)$.
17. $\log_{x^2}(3 - 2x) > 1$. Ответ: $(-3; -1)$.
18. $\log_{2x+3} x^2 < 1$. Ответ: $(-1, 5; 3)$, $x \neq -1$, $x \neq 0$.
19. $\log_{\frac{1}{7}} |x^2 + 2x| < 0$. Ответ: $(-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}; +\infty)$.
20. $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) > -1$. Ответ: $(1; 2) \cup (3; 4)$.
21. $\log_{\frac{1}{3}}(2^{x+2} - 4^x) \geq -2$. Ответ: $(-\infty; 2)$.
22. $\log_{0,5} \sqrt{\frac{x-4}{x+3}} < \log_{0,5} 2$. Ответ: $\left(-\frac{16}{3}; -3\right)$.
23. $\log_2 \log_4 \frac{x+3}{2-x} > -1$. Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$.
24. $2\log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$. Ответ: $(3; 4) \cup (4; +\infty)$.
25. $\log_{\sqrt{2}} \frac{7-3x}{x+2} - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x+2) > \log_{\frac{1}{2}} 4$. Ответ: $\left(-2; \frac{13}{6}\right)$.
26. $\log_{\sqrt{2}}(5x-1) \log_{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} > 2$. Ответ: $(\log_5(1 + \sqrt{2}); \log_5 3)$.
27. $\log_5(x-3) + \frac{1}{2} \log_5 3 < \frac{1}{2} \log_5(2x^2 - 6x + 7)$. Ответ: (3; 10).
28. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0,3 > 0$. Ответ: $(1; +\infty)$.
29. $\log_{\frac{x^2+3}{4x-1}} 2 > 0$. Ответ: $\left(\frac{1}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.
30. $\log_x \frac{3x-1}{x^2+x} > 0$. Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

31. $\log_{x-\sqrt{2}} \frac{x+7}{x-2} \leq \log_{x-\sqrt{2}} 2x$. Ответ: $(2; \sqrt{2} + 1) \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

32. $\log_{\frac{x+6}{3}} \log_2 \frac{x-1}{x+2} > 0$. Ответ: $(-6; -5) \cup (-3; -2)$.

33. $\log_x 2 \log_{2x} 2 \log_2(16x) \geq 1$. Ответ: $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 4]$.

34. $2 \log_4 x - \frac{1}{2} \log_2(x^2 - 3x + 2) \leq \cos \frac{4\pi}{3}$. Ответ: $\left(0; \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right]$.

35. $\frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}$. Ответ: $(1; 2) \cup (3; +\infty)$.

36. $\log_3 \log_4 \frac{4x-1}{x+1} - \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{4x-1} < 0$. Ответ: $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

37. $\log_4 x + \log_2(\sqrt{x}-1) < \log_2 \log_{\sqrt{5}} 5$. Ответ: $(1; 4)$.

§ 31. Показательные и логарифмические задачи с параметром

1. Для каждого действительного a решите уравнение

$$9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0.$$

Ответ: $2 \pm \log_2(2 - \sqrt{4+a})$ при $-3 \leq a < 0$, для остальных значений a решений нет.

2. При каких значениях a уравнение $\log(9^x + 3a^3) = x$ имеет два решения?

Ответ: $\left(0; 36^{-\frac{1}{2}}\right)$.

3. Решите неравенство $\log_a(x-1) + \log_a x > 2$.

Ответ: нет решений при $a \leq 0$ и $a = 1$;

$$x \in \left(1; 0,5 \left(1 + \sqrt{1 + 4a^2}\right)\right) \text{ при } a \in (0, 1);$$

$$x \in \left(0,5 \left(1 + \sqrt{1 + 4a^2}\right); +\infty\right) \text{ при } a \in (1; +\infty).$$

4. Для каждого действительного a найти все x из интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие неравенству $x^{\sin x - a} > 1$.

Ответ: $x \in \left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ при $a \leq 0$;

$$x \in (0; 1) \cup \left(\arcsin a; \frac{\pi}{2} \right) \text{ при } a \in (\sin 1; 1);$$

$$x \in (0; \arcsin a) \cup \left(1; \frac{\pi}{2} \right) \text{ при } a \in (0; \sin 1);$$

$$x \in (0; 1) \text{ при } a \geq 1.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = 1, \\ b^{\log_{\sqrt{b}} \sqrt{y}} + x^2 = 2a. \end{cases}$$

Ответ: $x = a^{\frac{2}{3}}, y = 2a - a^{\frac{4}{3}}$ при $a \in (0; 1) \cup (1; 8)$ и $b \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$; при других значениях a и b решений нет.

ГЛАВА 8. ПРОИЗВОДНАЯ

§ 32. Производная и ее геометрический смысл

1. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $M(0; 3)$, касающейся графика функции $y = \sqrt{x} + 1$. В ответ запишите ординату точки прямой при $x = 8$.

Ответ: 4.

2. Под каким углом синусоида $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

3. В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует угол 135° с осью Ox ? В ответ запишите сумму ординат этих точек.

Ответ: 2.

4. Найдите все значения x , при которых касательные к графикам функций $f(x) = 2 - 14 \sin 3x$ и $g(x) = 6 \sin 7x$, проведенные в точке с абсциссой x , параллельны.

Ответ: $\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; n, k \in Z$.

5. Найдите коэффициенты b и c в уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$, касающейся прямой $y = x$ в точке $M(1; 1)$. В ответ запишите число $b - c$.

Ответ: -2.

6. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^3 - 2x + 4$ в точке пересечения ее с кривой $y = x^3$.

Ответ: 10.

7. При каком значении аргумента x касательная к графику функции $y = x^3 - x - 1$ параллельна оси Ox ?

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ или $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. При каких значениях x касательная к графику функции $y = x^3 - 5x^2 - 9x$ образует с осью Ox угол 135° ?

Ответ: $-\frac{2}{3}$ или 4.

9. В какой точке нужно провести к графику функции $y = 2 - x^2$ касательную, чтобы угол ее наклона к оси Oy был равен 135° ? Найдите уравнение этой касательной.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$; $y = x + \frac{9}{4}$.

10. Найдите экстремальные значения функции $y = (x - 3)^2(x - 2)$.

Ответ: $y_{\max} = y\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{4}{27}$, $y_{\min} = y(3) = 0$.

11. В какой точке касательная к линии $y = \sqrt[3]{x}$ наклонена к оси абсцисс под углом 30° ?

Ответ: $\left(3^{-\frac{3}{4}}; 3^{\frac{1}{4}}\right)$.

12. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \cos x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Ответ: $y = 2$.

13. Решите неравенство $f'(x) + \varphi'(x) \leq 0$, если $f(x) = 2x^3 + 12x^2$ и $\varphi(x) = 9x^2 + 72x$.

Ответ: $[-4; -3]$.

14. Решите неравенство $q'(x) < f'(x)$, если $q(x) = 4x - 5$ и $f(x) = x(1 + x^2)$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

15. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \cos^2 x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Ответ: } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \frac{1}{4}.$$

16. Найдите интервалы возрастания и убывания и точки максимума и минимума функции $y = \frac{2x-1}{(2-4x)^2}$.

Ответ: точек экстремума нет, функция убывает на $(-\infty; 0,5)$ и на $(0,5; +\infty)$.

17. Найдите экстремальные значения функции $y = (x-2)^2(x-3)^2$.

Ответ: $y_{\min} = y(2) = 0$; $y_{\max} = y(2,5) = 0,0625$; $y_{\min} = y(3) = 0$.

18. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

$$\text{Ответ: } y = 4x + 1 - \frac{\pi}{2}.$$

19. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{3}{2}\pi$.

$$\text{Ответ: } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi + \sqrt{2}.$$

20. Исследуйте на монотонность и найдите экстремумы функции $y = \frac{(x-5)(3+x)}{(x+2)^2}$.

Ответ: $x = -\frac{13}{3}$ — точка максимума,

$y_{\max} = y\left(-\frac{13}{3}\right) = \frac{16}{7}$. В точке $x = -2$

функция не определена и терпит

разрыв. Возрастает на $\left(-\infty; -\frac{13}{3}\right]$

и на $(-2; \infty)$, убывает на $\left[-\frac{13}{3}; -2\right)$.

21. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Ответ: } y = \frac{5}{2}x\sqrt{3} - \frac{5}{6}\pi\sqrt{3} + \frac{3}{2}.$$

22. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2\cos\frac{x}{2}$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{3}{2}\pi$.

Ответ: $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi - \sqrt{2}$.

23. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x \cdot \cos^2 x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $y = 0$.

24. Найдите экстремумы функции $f(x) = -\frac{1}{2}x + \cos x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Ответ: $f_{\max} = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

25. Найдите промежутки возрастания и убывания и экстремумы функции $f(x) = x^4 e^{-x}$.

Ответ: возрастает на $[0; 4]$, убывает на $(-\infty; 0]$ и на $[4; +\infty)$;

$$f_{\min} = f(0) = 0; f_{\max} = f(4) = \left(\frac{4}{e}\right)^4.$$

26. Найдите экстремумы функции $y = x^2 - \ln(1 + 2x)$.

Ответ: $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln 2$.

27. На графике функции $y = x(x - 4)^3$ найдите точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

Ответ: $(1; -27)$; $(4; 0)$.

28. В каких точках касательные к кривой $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$?

Ответ: $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$; $(3; -2)$.

29. Найдите промежуток возрастания функции $y(x) = \frac{x}{\ln|x|}$, после чего установите, что больше: e^π или π^e .

Ответ: $[e; +\infty)$; $\pi^e < e^\pi$.

30. Найдите $f'(0)$, если $f(x) = \frac{2^{2x}}{\sqrt{2 - 2^{2x}}}$.

Ответ: $\ln 8$.

31. Найдите $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $y = \frac{x-2}{\sin^2 x}$.

Ответ: 1.

32. Решите уравнение $f'(x) = \frac{2}{x}f(x)$, если $f(x) = x^3 \ln x$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{e}\right\}$.

33. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам: $S_1(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$, $S_2 = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$ (время измеряется в секундах, пройденный путь – в метрах).

Найдите ускорения материальных точек в тот момент, когда скорости их равны.

Ответ: 14 м/с^2 ; 18 м/с^2 .

34. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам: $S_1(t) = 25t^2 - 6t + 1$, $S_2 = 0,5t^2 + 2t - 3$ (время измеряется в секундах, пройденный путь – в метрах).

В какой момент времени скорость первой точки будет в 3 раза больше скорости второй?

Ответ: 6 с.

35. Составьте уравнение касательной, параллельной оси Ox , к графику функции $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Ответ: $y = 1$.

36. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$ в точке пересечения его с осью абсцисс.

Ответ: $y = x + 1$.

37. Найдите экстремумы функции $f(x) = 2^x - x \cdot 2^{\frac{1}{\ln 2}} \cdot \ln 2$ и докажите, что уравнение $2^x - x \cdot 2^{\frac{1}{\ln 2}} \cdot \ln 2 = 0$ имеет один корень $x = \frac{1}{\ln 2}$.

Ответ: $f_{\min} = f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = 0$.

38. Из всех прямоугольников с площадью 100 м^2 найдите тот, у которого периметр наименьший.

Ответ: квадрат со стороной 10 м .

§ 33. Наибольшее и наименьшее значения функции

1. Найдите наименьшее значение функции $y = -5x^3 + x \cdot |x - 1|$ на отрезке $[-4; 4]$.

Ответ: -308 .

2. Найдите наименьшее целое x из области убывания функции $y = \ln(7x - x^2)$.

Ответ: 4 .

3. При каких m и n функция $y = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x + 5}, & x \leq 1, \\ mx + n, & x > 1, \end{cases}$ имеет одну критическую точку. В ответ запишите $12m + 6n$.

Ответ: 23 .

4. При каком значении x выражение $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: 0 .

5. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + (21 \ln 2)x$.

Ответ: возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

6. Найдите наибольший член последовательности $a_n = \frac{n+1}{n^2+40}$. В ответ запишите его номер.

Ответ: 5 .

7. Найдите все значения параметра $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, при каждом из которых максимум функции $f(x) = x^4 - 2x^2 \sin^2 \alpha - 2(1 + \cos \alpha)^3$ на отрезке $-(1 + \cos \alpha) \leq x \leq 1 + \cos \alpha$ принимает минимальное значение.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

§ 34. Текстовые задачи с применением производной

1. Какое положительное число, будучи сложением с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

Ответ: 1.

2. Определите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Ответ: $4 \times 4 \times 2$.

3. Найдите расстояние от точки $M(0;4)$ до прямой, заданной уравнением $y = \frac{3}{4}x + 2$.

Ответ: 1,6.

4. Найдите кратчайшее расстояние между кривой $y = x^2 + x + 1$ и прямой $y = 3x - 20$.

Ответ: 40.

5. Найдите значение a , при котором уравнение $x^3 + \sqrt[3]{a} \cdot x^2 + 2 = 0$ имеет три корня, причем два из них – совпадающие.

Ответ: -13,5.

Библиотека БГУИР

Тесты по математике
на вступительных испытаниях в БГУИР
в 2004 г.

Тест 1

На выполнение теста отводится 135 минут. В тесте 25 заданий.

Часть А

К каждому заданию части А даны пять ответов, только один из которых является верным.

A1. Найти значение производной функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 1$ в точке максимума	1) -2 ; 2) 0; 3) 1; 4) 2; 5) 3
A2. Вычислить $\frac{11\sqrt{98}}{\sqrt{98} + \sqrt{32}}$	1) 1,5 ; 2) 11; 3) 3; 4) 6 ; 5) 22
A3. Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots является арифметической прогрессией. Найти $a_3 + a_{12}$, если $a_6 + a_9 = 21$	1) 7; 2) 12 ; 3) 14; 4) 21; 5) 42
A4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 4, \\ x + y = 10. \end{cases}$ В ответ записать $2x - 3y$	1) 9; 2) 5; 3) 15; 4) 6; 5) 3
A5. Отрезок длиной 12 см разделили на равные части тремя внутренними точками. Найти длину одной такой части	1) 1,5; 2) 6; 3) 2; 4) 3; 5) 4
A6. При каком наименьшем целом значении x выражение $\sqrt{\frac{6+x^2}{4-x^2}}$ имеет смысл?	1) -1; 2) -2; 3) 1; 4) 2; 5) 3
A7. При каком значении x функция $y = \frac{11}{5 + 4x + 12 }$ принимает наибольшее значение?	1) -3 ; 2) -1,5; 3) 0; 4) 3; 5) 5
A8. Найти наименьшее решение неравенства $0,5^x \leq 2^{x-28}$	1) 14; 2) 16; 3) -12; 4) 28; 5) -18
A9. Вычислить $2 \log_2 \frac{a+b}{2} - \log_2(6ab)$, если $a^2 + b^2 = 4ab$	1) -1; 2) -2; 3) 1; 4) 12; 5) 2
A10. При каком положительном значении p отношение корней уравнения $x^2 - px + 9 = 0$ равно 9?	1) -10 ; 2) -9; 3) 1; 4) 9; 5) 10
A11. Решить неравенство $\log_7(x - 11) < 2$. В ответ записать наибольшее целое x , удовлетворяющее ему	1) 37; 2) 38; 3) 59; 4) 60; 5) 67
A12. Вычислить $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$	1) 0,6; 2) -0,5; 3) 0,75; 4) -0,6; 5) 0,5
A13. Найти сумму корней уравнения $\lg(x^2 - 6x + 9) = \lg 3 + \lg(x + 3)$	1) 6 ; 2) 9; 3) 12; 4) -2 ; 5) -3

A14. После двух уценок товар стал стоить на 38 % меньше, чем до первой уценки. На сколько процентов был уценен товар во второй раз, если в первый раз его цена уменьшилась на 20 %?	1) 18; 2) 20; 3) 22,5; 4) 25; 5) 27,5
A15. Найти сумму корней уравнения $8^{x^3+2x-3} = 13^{\lg 1}$	1) -3; 2) -2; 3) 0; 4) 1; 5) 3

Часть В

B1. Влажность свежескошенной травы 60 %, а сена 20 %. Сколько килограммов сена получится из одной тонны свежескошенной травы?
B2. Числа b_1, b_2, b_3, b_4 являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $b_1 + b_4 = 7$, а $b_1 \cdot b_4 = 10$. Найдите $b_2^3 + b_3^3$
B3. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{13}$ вокруг гипотенузы. Считать $\pi = 3,14$
B4. Упростить $\frac{\cos(5\pi/2 - \alpha) \cdot \sin(\pi/2 + \alpha/2) \cdot \cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2) \cdot \cos^2(\pi/4 - \alpha/4) \cdot (2 \sin(\pi/2 - \alpha/2) + \cos(3\pi/2 - \alpha))}$
B5. Решить уравнение $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$
B6. Найдите множество значений функции $y = 4 \sin 2x - 2\sqrt{5} \cos 2x$. В ответ запишите наименьшее целое значение функции
B7. Решить неравенство $\log_{12} \log_3 \frac{x-9}{x-7} < \log_{\frac{1}{12}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-7}{x-9}$. В ответ записать наибольшее целое решение
B8. Вычислить $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$
B9. Найдите коэффициенты b и c уравнения параболы $y = x^2 + bx + c$, касающейся прямой $y = x$ в точке $M(1,1)$. В ответ запишите значение $b - c$
B10. При каких значениях параметра a множества решений уравнений $\sqrt{(x+1)(x+3)+1} = x+2$ и $2^{x+3} - 2^{x+2} + 0,2a = 2^{x+2} + 1$ совпадают?

Тест 2

На выполнение теста отводится 135 минут. В тесте 25 заданий.

Часть А

К каждому заданию части А даны пять ответов, только один из которых является верным.

A1. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$. Чему равен $\cos \angle B$?	1) AC/BC ; 2) AB/AC ; 3) BC/AB ; 4) AC/AB ; 5) BC/AC
A2. Вычислить $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 5 \cdot 2^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right) : (3^0 + 2^{-2})$	1) 1; 2) 4; 3) 6; 4) -2; 5) 8
A3. Упростить выражение $\sqrt{(3 - \sqrt{17})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{17})^2}$	1) $4 - 2\sqrt{17}$; 2) $2\sqrt{17} - 4$; 3) 4; 4) -2; 5) 2
A4. Найти положительное a , при котором уравнение $x^2 + 2(5 - a)x + 36 = 0$ имеет равные корни	1) 6; 2) 13; 3) -1; 4) 11; 5) 2
A5. Вычислить $1/4 + 3/16 + 9/64 + 27/256 + \dots$	1) 0,75; 2) 1; 3) 1,25; 4) 2; 5) 1,75
A6. Решить уравнение $(x^2 - 12x + 32)\sqrt{x - 7} = 0$. В ответ записать сумму корней	1) 15; 2) 12; 3) 19; 4) 11; 5) 13
A7. Вычислить $\frac{2\sqrt{2}}{\sin 15^\circ - \sin 75^\circ}$	1) 2; 2) -2; 3) 4; 4) -4; 5) 8
A8. Вычислить $3^x + 3^{-x}$, если $9^x + 9^{-x} = 62$	1) 8; 2) $\sqrt{62}$; 3) 6; 4) 9; 5) $2\sqrt{15}$
A9. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2/y - 5/x = 1, \\ 15/x - 4/y = -1. \end{cases}$ В ответ записать $x - y$	1) 0,25 2) 2 3) 4 4) -4 5) 1
A10. Решить уравнение $ x - 2 - 3 = 3$. Если корней несколько, то в ответе указать их сумму	1) 2; 2) -2; 3) 10; 4) 4; 5) 6
A11. Произведение двух последовательных натуральных чисел равно 1122. Найти меньшее из этих чисел	1) 23; 2) 33; 3) 24; 4) 34; 5) 43
A12. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{ax}{x^2 + 49} < 1,5$ справедливо при любых действительных x ? В ответ запишите наименьшее целое значение a	1) 20; 2) 21; 3) -20; 4) -21; 5) -19
A13. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 4/x + 6\sqrt{x} - 2$ в точке $x_0 = 1$	1) -1; 2) -3; 3) 7; 4) 5; 5) 3
A14. Есть ли тупой угол у треугольника со сторонами $\sqrt{6}$ см, $2\sqrt{2}$ см, $\sqrt{26}$ см? Если есть, то найти величину этого угла в градусах	1) 95; 2) 120; 3) 135; 4) 150; 5) нет
A15. Длина диагонали куба равна $2\sqrt{6}$ см. Найти длину диагонали его грани	1) 2; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{2}$; 4) 4; 5) 6

Часть В

В1. Решить неравенство $\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3} < 0$. В ответ записать наибольшее целое решение
В2. Решить уравнение $(x^2 - x + 2) \cdot (x^2 - x + 1) = 12$. В ответ записать сумму корней
В3. В арифметической прогрессии известно, что $a_n = 37,7 - 0,3n$. Определить, при каком количестве членов прогрессии (начиная с первого) их сумма будет наибольшей
В4. Решить неравенство $\sqrt{5x+2} > x-9$. В ответ записать наибольшее целое решение
В5. Найти целые решения системы $\begin{cases} 4x^2y + 5x^3 = 25, \\ \cos \frac{x+y}{2} < 0. \end{cases}$ В ответ записать $x+y$
В6. Решить неравенство $(x-6,3)^{2x-40} > 1$. В ответ записать наименьшее целое решение
В7. Найти произведение корней уравнения $\cos^2 \pi x - x^2 - 6x + 5 = 1$
В8. Определите, какие из чисел $-3, -1, 1, 3$ являются решением неравенства $ 3/5 - \log_7 3 \cdot x \geq 3/5 - \log_7 3$. В ответ запишите меньшее из них
В9. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система уравнений $\begin{cases} (b+1)x + y = ac^2, \\ (b+1)x + (b-1)y = 2c - 2 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение? В ответ запишите наибольшее a
В10. Решить уравнение $\log_{30x-25x^2-5} (5x-1) = \log_{15-15x} (5x-1)$. В ответ записать сумму корней

Тест 3

На выполнение теста отводится 135 минут. В тесте 25 заданий.

Часть А

К каждому заданию части А даны пять ответов, только один из которых является верным.

A1. Чему равен $\operatorname{ctg}45^\circ$?	1) $\sqrt{2}/2$; 2) 1; 3) $\sqrt{3}/3$; 4) $\sqrt{3}$ 5) 0
A2. Вычислить $\left(\frac{2}{25} - 1,08\right) : \frac{4}{7} : \left(\left(3\frac{1}{4} - 6\frac{5}{9}\right) \cdot 2\frac{2}{17}\right)$	1) -0,25; 2) 4; 3) 0,232; 4) -4; 5) 0,25
A3. Упростить выражение $\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} \sqrt{a}$	1) $\sqrt[5]{a^4}$; 2) $\sqrt[15]{a^{11}}$; 3) a ; 4) $\sqrt[30]{a^{23}}$; 5) $\sqrt[6]{a^5}$
A4. Сумма двух чисел равна $\sqrt{33}$, а их разность равна $\sqrt{21}$. Найти произведение этих чисел	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5
A5. Вычислить $\log_{\sqrt{ab}} \sqrt[4]{a/b}$, если $\log_a b = 4$	1) -0,6; 2) 1; 3) 0,8; 4) -1,2; 5) 1,4
A6. Углы шестиугольника находятся в отношении 3 : 3 : 4 : 4 : 5 : 5. Найти его больший угол (в градусах)	1) 225; 2) 150; 3) 300; 4) 75; 5) 112,5
A7. Найти абсциссу точки пересечения графиков функций $f(x) = 7 - 2x$ и $g(x) = 2^{x-3}$	1) 3; 2) 1; 3) 2; 4) 4; 5) 0
A8. Решить неравенство $\frac{2x-1}{3-x} \geq \frac{1}{x+1}$. В ответ записать сумму целых решений	1) 3; 2) 4; 3) 2; 4) -2; 5) 1
A9. Вычислить $3\operatorname{ctg} \arcsin(-0,6)$	1) 4; 2) 3; 3) -4; 4) -2; 5) -1,2
A10. Решить неравенство $\sqrt{9-x} \leq -6$	1) $(-\infty; 9]$; 2) $[-27; 9]$; 3) $[-27; +\infty)$; 4) \emptyset ; 5) $(-\infty; 27]$
A11. Решить уравнение $3 \cdot 2^{x+3} - 7 \cdot 2^{x+1} - 5 \cdot 2^{x-1} = 30$	1) -1; 2) 1; 3) 2; 4) -1,5; 5) 2,25
A12. Найти промежутки убывания функции $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 72x + 11$	1) $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-4; 2)$; 3) $(-2; 4)$; 4) $(-4; +\infty)$; 5) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$
A13. Периметр ромба равен 30 см, диагональ – 9 см. Найти вторую диагональ	1) 10; 2) 6; 3) 15; 4) 8; 5) 12
A14. Через конец радиуса шара под углом 60° к этому радиусу проведена секущая шар плоскость. Во сколько раз площадь поверхности шара больше площади полученного сечения?	1) 16; 2) 12; 3) 8; 4) 4; 5) 2
A15. Смешали 60%-й раствор соляной кислоты с 25 %-м и получили 30 %-й раствор. Во сколько раз больше взяли 25%-го чем 60 %-го раствора?	1) 2,4; 2) 3,6; 3) 4,8; 4) 6; 5) 8

Часть В

В1. Найти x из пропорции $3,5 : 0,3(8) = x : 3,41(6)$
В2. В круге дана точка на расстоянии 10 см от центра. Через эту точку проведена хорда, которая делится точкой на отрезки длиной 14 и 5 см. Найти квадрат радиуса круга
В3. Решить уравнение $\log_{14} x + \log_{14} x^2 + \dots + \log_{14} x^{14} = 7,5$. В ответ записать x^{14}
В4. Решить уравнение $\sqrt{ x/2 + 4 } = x - 2$. В ответ записать его корень, если их несколько, то записать их сумму
В5. Решить неравенство $(\sqrt{24} + 5)^{x-5} \geq (5 - \sqrt{24})^{\frac{x-5}{x-3}}$. В ответ записать наименьшее решение
В6. Решить уравнение $(\cos^2 x + 6(\sin x - 1))\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0$. В ответ записать наименьшее положительное решение в градусах
В7. Найти значение функции $f(x) = 2x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 9x + \frac{1}{2}$ в точке локального минимума
В8. Решить систему $\begin{cases} x^2/9 = 2x - y/3 - 3 , \\ y^2 = xy - 81. \end{cases}$ В ответ записать $x - y$
В9. Найти все значения параметра a , при которых неравенство $x^2 - 38x - 2a x - 19 + a^2 \leq 0$ имеет не более одного решения. В ответ записать наибольшее a
В10. Найдите наибольшее значение функции $y = -2 x^3 x - 16(x+1)^3 x+1 + 3$. В ответ запишите значение x , при котором оно достигается

Тест 4

На выполнение теста отводится 135 минут. В тесте 25 заданий.

Часть А

К каждому заданию части А даны пять ответов, только один из которых является верным.

A1. Какая фигура задается уравнением $2y - 3x = 7$ на плоскости?	1) Прямая; 2) парабола ; 3) окружность; 4) гипербола ; 5) точка
A2. Вычислить $\left(\left(6^{\frac{3}{8}} \cdot 36^{\frac{2}{3}} \right) \cdot \left(6^{\frac{5}{4}} \cdot 36^{\frac{1}{16}} \right)^{-1} \right)^6$	1) 6; 2) $6\sqrt[4]{6}$; 3) 216; 4) 36 ; 5) $36\sqrt{6}$
A3. Упростить $ x + 3 + x + 7$, если $x < -3$	1) 4 ; 2) $2x + 4$; 3) 10; 4) $2x + 10$; 5) -4
A4. На сколько процентов увеличится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 30 %, а другое – на 20 %?	1) 40; 2) 50; 3) 38 ; 4) 44 ; 5) 56
A5. Найти пятый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех ее членов равна 625, а знаменатель прогрессии равен 0,2	1) 0,16; 2) 0,4; 3) 0,8; 4) 0,64; 5) 0,032
A6. Найти наименьшее целое положительное решение неравенства $\frac{x-2}{x-1} - \frac{x}{x-2} < 2$	1) 4; 2) 2; 3) 3; 4) 0; 5) 1
A7. Найти наименьшее x из области определения функции $y = \sqrt{15x + 5x/3 + 3}$	1) -0,16; 2) -0,1125; 3) -0,15; 4) -0,18; 5) -0,125
A8. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Найти $\sin \angle B$	1) 0,6; 2) 0,75; 3) 0,5; 4) $1\frac{1}{3}$; 5) 0,8
A9. Вычислить $10^{\lg 0,6 + \lg 5}$	1) 5,6; 2) 1000; 3) 2,8 ; 4) 3; 5) 100
A10. Найти сумму целых решений неравенства $\frac{2400}{7^{x+2} - 1} \geq 1$	1) 0; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) -1
A11. Найти абсциссу точки пересечения графиков функций $y = \log_7 x$ и $y = 4,5 - 0,5x$	1) 1; 2) 0; 3) -1; 4) $1/7$; 5) 7
A12. Упростить $4(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 \sin^2 2\alpha$	1) 8; 2) 4; 3) 64; 4) 2; 5) 16
A13. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, сторона которого равна 5 см, а острый угол между сторонами – 30° . Найти площадь полной поверхности параллелепипеда, если его высота равна 4 см	1) 80; 2) 65; 3) 105; 4) 70; 5) 92,5
A14. Найти сумму корней уравнения $ \sqrt{2x-1} - 4 = 1$	1) 13; 2) 18; 3) 8; 4) 5; 5) 26
A15. Радиус шара, перпендикулярный плоскости сечения, делится этой плоскостью в отношении 2:1 (считая от центра шара). Площадь сечения равна 3 см^2 . Найти площадь поверхности шара	1) 14,4; 2) 16,2; 3) 32,4; 4) 21, 6; 5) 27

Часть В

*Выполните задание. В бланке ответов рядом с номером задания (В – В10) запишите полученный вами ответ. Единицы измерения не пишете. Ответ может быть в виде целого числа или конечной десятичной дроби со своим знаком, если решение существует. Если же решения не существует, то в ответе напишите слово **НЕТ**.*

В1. В трехзначном числе единиц на 4 больше, чем десятков, и на 5 больше, чем сотен. Сумма искомого числа и его цифр равна 249. Найти это число
В2. Решить уравнение $\frac{8x^3 + 27}{4x + 6} = 5x + 21$. В ответ записать сумму корней
В3. Решить уравнение $\log_5(x^2 + 6x - 7) = \log_5 \frac{x-1}{x+7}$
В4. Найти число целых решений неравенства $\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6}\right)^{x^2+5x-6} > \left(\cos^2 \frac{\pi}{4}\right)^{x^2+5x-6}$
В5. Решить уравнение $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0$. В ответ записать сумму решений в градусах на отрезке $[0; 360^\circ]$
В6. Найти два числа, если их среднее арифметическое на 12 меньше большего из этих чисел, а среднее геометрическое на 8 больше меньшего из них. В ответ записать большее число
В7. Решить неравенство $\arcsin(x - 1,5) \geq \frac{\pi}{6}$. В ответ записать наименьшее решение
В8. Около окружности описана равнобокая трапеция периметра 24 см и острым углом 30° . Найти высоту этой трапеции
В9. Найти наименьшее значение функции $y = (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 2x - 8)$. В ответ записать произведение значений x , при которых оно достигается
В10. Найти все значения параметра a , при которых выражение $\sqrt{(a+7)x^2 - 2(a-7)x + 5a - 35}$ имеет смысл для любых действительных x . В ответ записать наименьшее целое значение a

Ответы

	Тест 1	Тест 2	Тест 3	Тест 4
A1	2	3	2	1
A2	3	2	5	4
A3	4	4	4	1
A4	2	4	3	5
A5	4	2	1	3
A6	1	1	2	3
A7	1	4	1	4
A8	1	1	5	1
A9	2	3	3	3
A10	5	5	4	2
A11	3	2	3	5
A12	4	3	2	5
A13	2	1	5	3
A14	3	4	1	2
A15	4	4	4	4
B1	500	-3	30,75	237
B2	70	1	170	5,5
B3	10,205	125	14	-8
B4	2	18	4,5	6
B5	-1	6	2	720
B6	-6	7	180	32
B7	5	5	-40	2
B8	4	1	9	3
B9	-2	0,5	-19	-5
B10	-5	1,2	-2	7

Учебное издание

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ
В 2-х частях**

Часть 2

Алгебра и начала анализа

Составители: **Борисенко Олег Федорович,**
Данцевич Светлана Федоровна,
Липницкий Валерий Антонович,
Сафронова Марина Андреевна,

Цегельник Владимир Владимирович

Редактор Т.А. Лейко
Корректор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 4,0.

Формат 60x84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 200 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л.
Заказ 647.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0131518 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6