Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов радиотехнических
специальностей БГУИР

В 10-ти частях

А. А. Карпук, Р. М. Жевняк, В. В. Цегельник, И. А. Смирнова

Часть 6

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Минск 2006

УДК 517 + 517.3 (075.8)
ББК 22. 161. я 73
С 23

Р е ц е н з е н т:
зав. кафедрой информационных технологий
автоматизированных систем БГУИР,
доктор технических наук, профессор В. С. Муха

Сборник задач по высшей математике для студ. радиотехнич.
С 23 спец. В 10 ч. Ч.6: Интегральное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк, В. В. Цегельник, И. А. Смирнова. – Мн. : БГУИР, 2006. – 148 с. : ил.
ISBN 985-444-935-1 (ч.6)

В части 6 сборника приводятся задачи по интегральному исчислению функций одной переменной.

УДК 517 + 517.3 (075.8)
ББК 22. 161. я 73

Ч. 1: Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 10 ч. Ч.1: Аналитическая геометрия / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк. – Мн.: БГУИР, 2002. – 112 с.: ил.; 2-е изд. – 2003, 3-е изд. – 2004.

Ч. 2: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями) / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник. – Мн.: БГУИР, 2004. – 154 с.

Ч. 3: Сборник задач по высшей математике. Ч. 3: Введение в анализ / Н.Н. Третьякова, Т.М. Пушкарева, О.Н. Малышева. – Мн.: БГУИР, 2005. – 116 с.

Ч. 4: Сборник задач по высшей математике для студ. радиотехнич. спец. БГУИР. В 10 ч. Ч. 4: Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.А. Карпук, В.В. Цегельник, Р.М. Жевняк, И.В. Назарова. – Мн.: БГУИР, 2006. – 107 с.

Ч. 5: Сборник задач по высшей математике для студ. радиотехнич. спец. В 10 ч. Ч. 5: Функции многих переменных / А.А. Карпук, Р.М. Жевняк, В.В. Цегельник и др. – Мн.: БГУИР, 2004. – 64 с.

Введение

Настоящее пособие является шестой частью «Сборника задач по высшей математике в десяти частях», издаваемого кафедрой высшей математики БГУИР. В ч. 6 приводятся в концентрированной форме задачи и упражнения по интегральному исчислению функций одной переменной: неопределённый и определенный интегралы, несобственные интегралы, а также их приложения, физические и геометрические. Пособие будет полезным не только студентам вузов, но и преподавателям, ведущим занятия в студенческих группах.

В конце пособия приводятся 15 вариантов самостоятельной работы по интегральному исчислению функций одной переменной.

В пособии знаком (*) отмечены наиболее трудные задачи, требующие для их решения определённой смекалки и изобретательности. Начало решения задачи отмечено знаком Δ, конец решения – знаком ▲, указание – знаком ●.

1. Неопределенный интеграл

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Свойства первообразной и неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование. Интегрирование подстановкой (замена переменной интегрирования). Интегрирование по частям.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ непрерывна на (a,b), дифференцируема в каждой внутренней точке этого интервала и $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

Для каждой непрерывной функции $f(x)$ первообразная существует.

Две первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ одной и той же функции $f(x)$ отличаются на константу C, т.е. $F_1(x)=F_2(x)+C$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx.$$

Итак, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (1.1)$$

где $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$

Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования.*

1.1. Найти любую первообразную функции $f(x)=\cos x,\ x\in\mathrm{R}$, и её неопределенный интеграл.

Δ Так как $(\sin x)'=\cos x, x\in R$, то $F(x)=\sin x$, и, значит $\int\cos\ xdx\ =\ \sin\ x+C$. $\blacktriangle$

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1° $\int f(xdx)'=f(x)$; 2° $d(\int f(x)dx)=f(x)dx$;

3° $\int f'(x)dx=f(x)+C$; 4° $\int df(x)=f(x)+C$;

5° (*Линейность неопределенного интеграла*). Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют (a,b) первообразные $F(x)$ и $G(x)$, то для любых α и β из **R**

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x)dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx=\alpha F(x)+\beta G(x)+C.$$

6° Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то для любых $a\neq($ $b\in\boldsymbol{R}$

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Приведем теперь *таблицу основных неопределенных интегралов*.

Каждая из нижеприведенных формул справедлива на промежутке, определена подынтегральная функция.

1. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\alpha\neq-1.$
2. $\int\dfrac{dx}{ax+b}=\dfrac{1}{a}\ln|ax+b|+C,a\neq0.$
3. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C,\quad 0<a\neq1.$
4. $\int e^{x}dx=e^{x}+C.$
5. $\int\sin xdx=-\cos x+C.$
6. $\int\cos\ xdx\ =\ \sin\ x+C.$
7. $\int\dfrac{dx}{\cos^{2}x}dx=tgx+C.$
8. $\int\dfrac{dx}{\sin^{2}x}dx=-ctgx+C.$
9. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\begin{cases}\arcsin x+C;\\-\arccos x+C.\end{cases}$
10. $\int shxdx=chx+C.$
11. $\int chxdx=shx+C.$
12. $\int\dfrac{dx}{ch^{2}x}=thx+C.$
13. $\int\dfrac{dx}{sh^{2}x}=-cthx+C.$
14. $\int\dfrac{dx}{x^{2}+a^{2}}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a},a\neq0.$
15. $\int\dfrac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|,a\neq0$
16. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\dfrac{x}{|a|}+C,a\neq0$
17. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}}=\ln(x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}),a\neq0.$

Свойства неопределенного интеграла и таблица основных интегралов позволяют вычислить некоторые интегралы так называемым *методом непосредственного интегрирования.*

1.2. Найти интегралы:

а) $I_1 = \int \frac{\sqrt{4+x^2} + 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}} dx$; б) $I_2 = \int ctg^2 x dx.$

Δ а) Проведем очевидные преобразования в подынтегральном выражении для $x \neq \pm 4$:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + 2\ln(x + \sqrt{4+x^2}) + C.$$

б) Так как $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, то

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C. \blacktriangle$$

1.3. Найти интегралы:

1) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$; 2) $\int \frac{dx}{3x^2 - 5}$;

3) $\int 2^{2x} e^x dx$; 4) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$

Отв.: 1) $\frac{8}{15} x \sqrt[8]{x^7} + C$; **2)** $\frac{1}{2\sqrt{15}} \ln\left|\frac{x\sqrt{3} - \sqrt{5}}{x\sqrt{3} + \sqrt{5}}\right| + C$;

3) $\frac{2^{2x} e^x}{1 + 2\ln 2} + C$; **4)** $\frac{x - \sin x}{2} + C.$

1.4.* Верны ли следующие утверждения: а) если $f(x)$ – периодическая функция, то и $F(x)$ – периодическая функция; б) если $f(x)$ – нечетная функция, то $F(x)$ – четная функция.

Отв.: а) неверно; б) верно.

В вычислении неопределенных интегралов большую роль играет *метод интегрирования подстановкой (заменой переменной интегрирования),* суть которого раскрывает следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть на (a,b) определена сложная функция $f(\varphi(x))$, функция $t = \varphi(x)$ непрерывна на интервале (a,b) и дифференцируема во всех внутренних точках этого интервала. Тогда если существует интеграл $\int f(t)dt$, то существует интеграл $\int f(\varphi(x))\varphi\mu(x)dx$, причем*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \Big|_{t=\varphi(x)}. \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) называется *формулой интегрирования подстановкой.*

Если на (a,b) для функции $t=\varphi(x)$ существует обратная фун
$x=\varphi^{-1}(t)$, то формулу (1.2)
можно переписать в виде

$$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)},$$

или, поменяв местами t и x,

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}}(x). \qquad (1.3)$$

Формула (1.3) называется *формулой замены переменной в неопре*ḋ*ном интеграле.*

1.5. Найти интегралы:

а) $\int x^3\sqrt[6]{3x^4-1}dx$; б) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; в) $\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$; г) $\int\frac{dx}{\cos x}$

Δ а) По формуле (1.2), положив в ней $t=\varphi(x)=3x^4-1, f(t)=\sqrt[6]{t}$, пол

$$\int x^3\sqrt[6]{3x^4-1}dx=\frac{1}{12}\int\sqrt[6]{3x^4-1}(3x^4-1)'dx=\frac{1}{12}\int\sqrt[6]{3x^4-1}d(3x^4-1$$

$$=\frac{1}{12}\int\sqrt[6]{t}dt=\frac{1}{14}\sqrt[6]{t^7}+C=\frac{1}{14}(3x^4-1)\sqrt[6]{3x^4-1}+C.$$

б) Введем замену переменной по формуле $x=1/t$, тогда $dx=-dt/t^2$
Значит,

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{t^2dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}=-\int d(\sqrt{t^2+1})=-\sqrt{t^2+1}+C=$$

$$=-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C.$$

в) Выделим в числителе производную $2x-1$ знаменателя x^2 -
Дальнейшие преобразования следующие:

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=3\int\frac{x-1/3}{x^2-x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-1)+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1/2)^2+}$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1/2)}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}=\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

г) Имеем

$$\int\frac{dx}{\cos x}=2\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=\left|\frac{x}{2}=t\right|=2\int\frac{dt}{\cos^2 t-\sin^2 t}=2\int\frac{dt}{\cos^2 t(1-tg^2 t}=2\int\frac{d(tgt)}{1-tg^2 t}=$$

$$=-2\int\frac{dtgt}{tg^2 t-1}=-\ln\left|\frac{tgt-1}{tgt+1}\right|=\ln\left|\frac{tg(x/2)+1}{tg(x/2-1}\right|+C.\ \blacktriangle$$

1.6. Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sin\ x}$. 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$. 3. $\int\frac{dx}{15\,x^2-34\,x+15}$.

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}$. 5. $\int\sin^2(ax+b)dx$. 6. $\int\frac{(3x-2)dx}{2-3x+5x^2}$.

7. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}, x>2$.

8. $\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$. 9. $\int\frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$. 10. $\int\frac{\cos\ln x}{x}dx$.

Отв.: 1. $\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$. **2.** $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$. **3.** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{3x-5}{5x-3}\right|+C$.

4. $\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{21}}+C$. **5.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4a}\sin 2(ax+b)+C$.

6. $\frac{3}{10}\ln(2-3x+5x^2)-\frac{11}{5\sqrt{31}}arctg\frac{10x-3}{\sqrt{31}}+C$.

7. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C$. **8.** $\frac{1}{5}\sqrt{(x^2-1)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C$.

9. $\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}-2\sqrt{\cos x}+C$. **10.** $\sin\ln x+C$.

1.7. Доказать равенство

$$\int(\varphi(x))^\alpha\varphi'(x)dx=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\alpha\neq-1,\\ \ln(\varphi(x))+C,\alpha=-1.\end{cases}$$

Другим эффективным методом вычисления неопределенных интегралов является *метод интегрирования по частям.* Суть его в следующем.

Если $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны на (a,b) и дифференцируема во всех внутренних точках этого интервала и если существует интеграл $\int vu'dx$, тогда существует и интеграл $\int uv'dx$, причем

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (1.4)$$

Формула (1.4) называется *формулой интегрирования по частям*.

Часто интеграл $\int v du$ вычислить проще, чем исходный интеграл $\int u dv$.

1.8. Вычислить интегралы:

а) $I_1 = \int x \cos x dx$; б) $I_2 = \int \arcsin^2 x dx$.

Δ а) Положим $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = \cos x dx \Rightarrow v \sin x$.

По формуле (1.4.) получаем

$$I_1 = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

б) Для вычисления этого интеграла придется применить интегрирование по частям дважды. Имеем.

$$I_2 = \int \arcsin^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin^2 x, \\ du = (2\arcsin x)/\sqrt{1-x^2}, \\ dv = dx \Rightarrow v = x. \end{array} \right| = x \arcsin^2 x - 2\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x, du = dx/\sqrt{1-x^2}, \\ dv = x dx/\sqrt{1-x^2} \Rightarrow v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x -$$

$$-2\int dx + C = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C. \blacktriangle$$

1.9.* Для интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n \in N, a \neq 0$$

получить *рекуррентную* формулу

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n\right). \qquad (1.5)$$

Δ Проинтегрируем I_n по частям:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \left| \begin{array}{l} u = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}, du = \dfrac{-2nx dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right|.$$

Тогда

$$\mathrm{I}_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \left| \text{В интеграле справа в числи-} \right.$$

$$\text{теле подынтегральной функции прибавим и вычтем } a^2. \left| = \right.$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\mathrm{I}_n - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},$$

т. е.

$$\mathrm{I}_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\mathrm{I}_n - 2na^2\mathrm{I}_{n+1}.$$

Отсюда и вытекает формула (1.5).

Так как $\mathrm{I}_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$, то, положив в (1.5) $n=1$, можно найти I_2, а зная I_2, можно найти I_3 и т.д. ▲

Замечание. При интегрировании по частям возникает вопрос: что выбрать в качестве u, а что отнести к dv в исходном интеграле? Здесь можно рекомендовать следующее.

Если подынтегральное выражение имеет вид $P_n(x)e\ dx$, то в качестве u выбирается многочлен αx (n-й степени). Если в подынтегральном выражении имеется трансцендентная функция (к таковым относятся логарифмическая функция, обратные тригонометрические функции), то эта функция (или её степень) и выбирается в качестве $u = u(x)$.

1.10. Найти интегралы:

1. $\int x\ tg^2 2x dx.$
2. $\int \sin x \ln tgx\ dx.$
3. $\int x^2 \arcsin 2x dx.$
4. $\int (x^2-6x+2)e^{3x} dx.$
5. $\int (x^2+1)^2 \cos x dx.$
6. $\int \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{x}} dx.$
7. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$
8. $\int e^{\alpha x} \sin bx dx,\ a^2+b^2 \neq 0.$
9. $\int \sin \ln x dx.$
10. $\int e^{\arccos x} dx.$

Отв.: **1.** $\frac{x}{2}tg2x+\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|-\frac{x^2}{a}+C.$ **2.** $\ln\left|tg\frac{x}{a}\right|-\cos x\ln tgx+C.$

3. $\frac{x^3}{3}arcs\sin 2x+\frac{2x^2+1}{36}\sqrt{1-4x^2}+C.$ **4.** $\left(x^2-\frac{20}{3}x+\frac{38}{9}\right)\frac{e^{3x}}{3}+C.$

5. $(x^4-10x^2+21)\sin x+4x(x^2-5)\cos x+C.$

6. $-\frac{8}{27}x^{-3/2}\left(\frac{9}{4}\ln^2 x+3\ln x+2\right)+C.$

7. $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)+C.$

8. $t=x+p/2$

9. $\frac{\sin\ln x-\cos\ln x}{2}+C.$

10. $\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{2}e^{\arccos x}+C.$

1.11. Для интеграла I_n, $n\in N$, получить рекуррентную формулу:

а) $\mathrm{I}_n=\int\ln^n xdx;$ б) $\mathrm{I}_n=\int\sin^n xdx,\ n>2.$

Отв.: **а)** $\mathrm{I}_n=x\ln^n x-n\mathrm{I}_{n-1}.$ б) $\mathrm{I}_n=-\frac{\cos x-\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}.$

1.12. Найти интегралы:

а) $\int\ln^4 xdx;$ б) $\int\sin^6 xdx.$

Отв.: **а)** $x(\ln^4 x-4\ln^3 x+12\ln^2 x-24\ln x+24)+C;$

б) $-\frac{8\sin^4 x+10\sin^2 x+15}{96}\sin 2x+\frac{5x}{16}+C.$

1.2. Интегрирование рациональных функций

Простейшие дроби и их интегрирование. Разложение рациональных функций на сумму простейших дробей. Метод Остроградского.

Рациональной называется функция вида $\mathrm{P}_n(x)/Q_m(x)$, где $\mathrm{P}_n(x)$ и $Q_m(x)$ – *многочлены степени* n и m, соответственно $n,m\in N$. При $n<m$ эта функция, или дробь, называется *правильной*, при $n\geq m$ – *неправильной*. В случае неправильной дроби делением (уголком) у нее всегда можно выделить целую часть, т.е. дробь представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=S_k(x)+\frac{R_l(x)}{Q_m(x)}.$$

Здесь $S_k(x)$ – целая часть дроби, а $R_l(x)$– остаток от деления $\mathrm{P}_n(x)$ на $C=9/2.$, причем ясно, что $l<m$.

Простейшими, или *элементарными*, дробями называются дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{A}{x-a}$. II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n \neq 1$. III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$.

IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, $n>1$, $p^2-4q<0$.

В I - IV A, M, N – постоянные, $n \in N$.

Интегрирование простейших дробей производится следующим образом:

I. $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=\ln|x-a|+C.$

II. $\displaystyle\int\frac{Adx}{(x-a)^n}=-\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C, n\neq 1.$

III. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=$ | В числителе сначала выделяется производная знаменателя | $\displaystyle =\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}-\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$ | Во втором интеграле в знаменателе подынтегральной функции выделяем полный квадрат | $\displaystyle =\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+$

$$+\frac{N-Mp/2}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+p/2}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

IV.

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\times\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d(x+p/2)}{((x+p/2)^2+q-p^2/4)^n}, n>1.$$

Последний интеграл подстановкой $t=x+p/2$ приводится к интегралу I_n, для которого в примере 1.9 получена рекуррентная формула.

Интегрирование рациональных функций сводится к *разложению рациональной функции на простейшие дроби* (см. [1]) и дальнейшему интегрированию этих простейших дробей.

1.13. Найти интегралы:

а) $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; б) $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx$;

в) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^5+x^4-x^3-x^2}$; г) $\int \frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

Δ а) Знаменатель рациональной дроби имеет простые корни $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Поэтому разложение на простые дроби имеет вид

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Отсюда следует равенство многочленов:

$x^2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$.

Полагая здесь последовательно $x=1$, $x=2$, $x=3$, получаем $A=1/4$, $B=-4$, $C=9/2$.

Следовательно,

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - 4\ln|x-2| + \frac{9}{2}\ln|x-3| + C.$$

б) Разложение подынтегральных функций на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+3)} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

и, значит,

$2x^3+x^2+5x+1 = (Ax+B)(x^2-x+1) + (Cx+D)(x^2+3)$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=2, \\ x^2 & -A+B+C=1, \\ x^1 & A-B+3C=5, \\ 1 & B+3D=1. \end{array}$$

Решением этой системы являются числа $A=0$, $B=1$, $C=2$, $D=0$. Значит,

$$\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)}dx = \int \frac{dx}{x^2+3} + \int \frac{2xdx}{x^2-x+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\ \frac{x}{\sqrt{3}} +$$

$$+\ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\ \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

в) Знаменатель подынтегральной функции имеет разложение:

$$x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x+1)^2(x-1).$$

Следовательно,

$$\frac{x^4+1}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x^4+1 &= Ax(x-1)(x+1) + B(x-1)(x+1)^2 + Cx^2(x+1)^2 + \\ &+ Dx^2(x^2-1) + Ex^2(x-1). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Положив в этом равенстве последовательно $x=0$, $x=1$, $x=-1$, получим $B=-1$, $C=1/2$, $E=-1$. Для нахождения коэффициента A продифференцируем обе части равенства (1.6) и затем положим в нем $x=0$. При дифференцировании правой части выпишем только те слагаемые, которые не обращаются в нуль при $x=0$:

$$4x^3 = A(x-1)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + 2B(x^2-1) + \ldots$$

Отсюда при $x=0$ имеем $0=-A-B \Rightarrow A=1$. Для определения D поступим аналогично: дифференцируем обе части равенства (1.6) и выписываем только те слагаемые правой части, которые не обращаются в нуль при $x=-1$.

Получим равенство

$$4x^3 = Dx^2(x-1) + 2Ex(x-1) + Ex^2\ldots.$$

Отсюда при $x=1$ имеем

$$-4 = -3D + 4E + E \Rightarrow D = -1/2.$$

Следовательно,

$$\int\frac{(x^4+1)dx}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

г) Здесь разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} 4x^2-8x &= A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + \\ &+ (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)^2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Положим в равенстве (1.7) $x=1$, получим $B=-1$. Теперь положим $x=i$, будем иметь $-4-8i = (Ei+F)(i-1)^2 = 2E - 2iF$. Приравняв действительные и мнимые части, получим $-4=2E$, $-8=-2F \Rightarrow E=-2$, $F=4$. Продифференцируем обе части равенства (1.7), причем выпишем только те слагаемые, не обращающиеся в нуль при $x=-1$:

$$8x-8 = A(x^2+1)^2 + 2B(x^2+1)2x + \ldots \quad .$$

Отсюда при $x=1$ получаем $0=4A+8B \Rightarrow A=2$. Теперь продифференцируем обе части равенства (1.7) и оставим только слагаемые, не обращающиеся в нуль при $x=i$:

$$8x-8=(Cx+D)(x-1)^2 2x+E(x-1)^2+(Ex+F)2(x-1)+\ldots.$$

Отсюда при $x=i$ находим $C=-2$, $D=-1$.

Итак,

$$\int\frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+1}-\int\frac{(2x-4)dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\ln(x^2+1)-arctgx+\frac{1}{x^2+1}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

По рекуррентной формуле (1.5)

$$\mathrm{I}_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+arctgx\right)+C.$$

Таким образом, окончательно,

$$\int\frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+arctgx+\frac{1}{x-1}+\frac{1+2x}{x^2+1}+C. \blacktriangle$$

1.14. Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$. 2. $\int\frac{(2x+3)dx}{(x-2)^3}$. 3. $\int\frac{(x^2+3)dx}{x^3-x^2-6x}$.

4. $\int\frac{dx}{x^4+x^2}$. 5. $\int\frac{dx}{1+x^3}$. 6. $\int\frac{(x^3+1)dx}{x(x^2+x+1)^2}$.

Отв.: 1. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$. **2.** $-\frac{7}{2(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}+C$.

3. $-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{7}{10}\ln|x+2|+\frac{4}{5}\ln|x-3|+C$. **4.** $-\frac{1}{x}-arctgx+C$.

5. $\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

6. $\frac{2(1-x)}{3(x^2+x+1)}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

Распространенным методом интегрирования рациональных функций является *метод Остроградского.* Он полезен, когда знаменатель правильной рациональной дроби $P(x)/Q(x)$ имеет кратные корни, особенно комплексные. Метод основан *на формуле Остроградского*:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx. \qquad (1.7)$$

В формуле (1.7) $Q_2(x)$ – многочлен, имеющий те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но все корни $Q_2(x)$ - простые. Многочлен же $Q_1(x)$ есть частное от деления $Q(x)$ на $Q_2(x)$. Другими словами, $Q_1(x)=Q(x)/Q_2(x)$. $P_1(x)$ и $P_2(x)$ - некоторые многочлены, степени которых соответственно меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Если корни $Q(x)$ известны, то тем самым известны многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Для отыскания многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ их записывают с неопределенными коэффициентами, которые находят после дифференцирования обеих частей формулы Остроградского (1.7). Если $P_2(x)\neq 0$, то, так как корни $Q_2(x)$ простые, интеграл $\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$ является трансцендентной функцией. Поэтому второе слагаемое справа в (1.7) называется *трансцендентной частью* левого интеграла в (1.7), а первое – *рациональной частью*.

1.15. Методом Остроградского вычислить интеграл 1.13, г.

Δ Здесь $Q(x)=(x-1)^2(x^2+1)^2$, и, следовательно,

$Q_2(x)=(x-1)(x^2+1)$, $Q_1(x)=Q(x)/Q_2(x)=(x-1)(x^2+1)$. Значит, существуют многочлены второй степени.

$$P_1(x)=Ax^2+Bx+C \text{ и } P_2(x)=ax^2+bx+c,$$

для которых справедливо равенство

$$\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}dx=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(X^2+1)}+\int\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x^2+1)}dx.$$

Рациональную дробь $\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x^2+1)}$ представим в виде суммы простейших дробей, и тогда

$$\int\frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x^2+1)}+\int\left(\frac{D}{x-1}+\frac{Ex+F}{x^2+1}\right)dx.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получаем

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{(x-1)(x^2+1)(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)(3x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)^2}+$$

$$+\frac{D}{x-1}+\frac{Ex+F}{x_2+1}.$$

Отсюда

$$4x^2-8x=-4x^2-2Bx^3+(A+B-3C)x^2+$$

$$+2(C-A)x-B-C+D(x-1)(x^2+1)^2+(Ex+F)(x-1)^2(x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему

$$\begin{array}{l|l} x^5 & 0=D+E, \\ x^4 & 0=-A-D+F-2E, \\ x^3 & 0=-2B+2D+2E-2F, \\ x^2 & 4=A+B-3C-2D-2E+2F, \\ x^1 & -8=-2A+2C+D+E-2F, \\ 1 & 0=-B-C-D+F. \end{array}$$

Решением этой системы являются величины $A=3$, $B=-1$, $C=0$, $D=2$, $E=-2$, $F=1$.

Таким образом,

$$\int\frac{(4x^2-8x)dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+2\ln|x-1|-\ln(x^2+1)+arctgx+C. \ \blacktriangle$$

1.16.* Методом Остроградского вычислить следующие интегралы:

1. $\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x-2)^2}$. 2. $\int\frac{(x^6+1)dx}{(x^2+x+1)^2}$. 3. $\int\frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

4. $\int\frac{-2x^5+11x^4-28x^3+37x^2-30x+14}{(x^2-2x+2)^2}dx$.

5. $\int\frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}dx$

6. $\int\frac{(-4x^3-4x^2+2x)dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)^3}$.

Отв.:

1. $-\frac{x+5}{9(x^2+x-2)}-\frac{1}{27}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$

2. $\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{4x+2}{3(x^2+x+1)}+\ln(x^2+x+1)-\frac{10}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

3. $\frac{3}{8}arctgx-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

4. $\dfrac{x}{(x^2-2x+2)^2}+\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}+arctg(x-1)+C.$

5. $\dfrac{2x^3-6x^2+8x-9}{(x^2-2x+2)^2}+\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2x+2}+2arctg(x-1)+C.$

6. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)^2}+C.$

1.3. Интегрирование иррациональных функций

Интегралы вида

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1},\dots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}\right)dx.$$

Интегрирование дифференциального бинома (подстановки Чебышева). Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ (подстановки Эйлера). Другие методы интегрирования иррациональных выражений.

Некоторые интегралы от иррациональных функций вычисляются *методом рационализации* подынтегральной функции. Он заключается в отыскании такой подстановки, которая преобразует интеграл от иррациональной функции в интеграл от рациональной функции. В этом случае говорят, что такая подстановка *рационализирует* данный, исходный интеграл.

Ниже через $R(x_1,x_2,\dots,x_n)$ обозначается рациональная функция относительно каждой из переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$. Например,

$$\frac{x^3-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x^3+1}}=R(x,\sqrt[3]{x},\sqrt{x^3+1}).$$

Здесь $x_1=x,\ x_2=\sqrt[3]{x},\ x_3=\sqrt{x^3+1}.$

Интегралы вида $R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{P1},\dots,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{Pn}\right)dx,$ где $n\in\mathbf{N}$, $p_1,p_2,\dots,p_n\in\mathbf{Q},\ a,b,c,d\in\mathbf{R},\ ad-bc\neq 0$, рационализируются подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^m,$$

где m – общий знаменатель рациональных чисел (дробей) $p_1,p_2,\dots,p_n$.

1.17. Найти интегралы:

а) $\mathrm{I}=\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx;$ б) $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}.$

Δ а) Наименьшее общее кратное чисел 3 и 6 равно 6. Поэтому вводим подстановку $x=t^6, dx=6t^5dt,$ откуда

$$\mathrm{I}=6\int\frac{(t^6+t^4+t)t^5}{t^6(1+t^2)}dt=6\int\frac{t^5+t^3+1}{t^2+1}dt=6\int t^3dt+6\int\frac{dt}{1+t^2}=\left(\frac{3}{2}t^4+6arctgt\right)\Bigg|_{t=\sqrt[6]{x}}=$$

$$=\sqrt[6]{x}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6arctg\sqrt[6]{x}+C.$$

б) Так как

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}},$$

то подынтегральная функция является рациональной от x и $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$. Поэтому вводим подстановку

$$\frac{x+2}{x-1}=t^4\Rightarrow x=\frac{t^4+2}{t^4-1}, dx=\frac{-12t^3dt}{(t^4-1)^2}; \qquad x-1=\frac{3}{t^4-1},\ x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}.$$

В итоге

$$\mathrm{I}=-\int\frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3dt}{3\cdot 3t^4(t^4-1)^2}=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C. \ ▲$$

1.18. Найти интегралы:

1.* $\int\frac{2x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^4}}dx.$

2. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}.$

3.* $\int\frac{dx}{-2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}.$

4.* $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[10]{x^3}}.$

5. $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx.$

6.* $\int\frac{1}{(1-2x)}\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}dx.$

7. $\int\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^5}}dx.$

8. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}.$

9. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2(x-2)}}.$

10. $\int\frac{dx}{(x+1)^{2/3}-(x+1)^{1/2}}.$

Отв.:

1. $$x+15\left[\begin{array}{l}\frac{1}{9}\sqrt[5]{x^6}-\frac{1}{8}\sqrt[15]{x^{16}}+\frac{1}{7}\sqrt[15]{x^{14}}-\frac{1}{6}\sqrt[5]{x^4}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{4}\sqrt[15]{x^8}+\\+\frac{1}{3}\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[15]{x^4}+\sqrt[15]{x^2}-\ln(\sqrt[15]{x^2}+1)\end{array}\right]+C.$$

2. $\frac{2}{3}(\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\sqrt[6]{27x}+C.$

3.
$$-\sqrt{x}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}-\frac{3}{4}\sqrt[6]{x}-3\sqrt[12]{x}-\frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right|+$$
$$+\frac{3}{40}\ln(2\sqrt[6]{x}+2\sqrt[12]{x}+1)+\frac{9}{20}arctg\,(2\sqrt[12]{x}+1)+C.$$

4.
$$-\frac{10}{1+\sqrt[10]{x}}+150(\sqrt[10]{x}+1)-60\ln(\sqrt[10]{x}+1)-100(\sqrt[10]{x}+1)^2+$$
$$+50(\sqrt[10]{x}+1)^3-15(\sqrt[10]{x}+1)^4+2(\sqrt[10]{x}+1)^5+C.$$

5. $x+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C.$

6.
$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}+1\right|+\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}+1-\right)$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}-1}{\sqrt{3}}+C.$$

7. $-\frac{3}{2}t^2+\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$

8. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}\right)-\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$

9. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}+C.$

10. $3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|+C.$

Выражение $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ называется *дифференциальным биномом*. Здесь $a,b\in\mathbf{R}, a\neq 0, b\neq 0$; m,n,p-рациональные числа, $n\neq 0, p\neq 0$. Интегралы от дифференциального бинома рационализируются только в следующих трех случаях:

p – целое число; $\frac{m+1}{n}$ – целое число; $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число.

В первом случае применяется подстановка $x=t^N$, где N – общий знаменатель дробей m и n. *Во втором случае* – подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p. *В третьем случае* – подстановка $ax^{-n}+b=t^s \Leftrightarrow a+bx^n=x^nt^s$, где s – знаменатель дроби p.

Указанные подстановки называются *подстановками Чебышева.*

1.19. Найти интеграл

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=\int x^{-11}(1+x^4)^{-1/2}dx.$$

Δ Здесь $m=-11, n=4, p=-1/2$. Здесь имеет место третий случай, так как $\dfrac{m+1}{n}+p=-3$ – целое число. Полагаем $1+x^4=x^4t^2$. Отсюда $x=\dfrac{1}{(t^2-1)^{1/4}}$, $dx=-\dfrac{tdt}{2(t^2-1)^{5/4}}$.

Подставив эти выражения в интеграл I, получим

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^{11/4}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-1/2}\frac{tdt}{(t^2-1)^{5/4}}=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^2dt=-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\mathrm{I}=-\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{(1+x^4)^5}+\frac{1}{3x^6}\sqrt{(1+x^4)^3}-\frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^4}+C. \blacktriangle$$

1.20. Найти интегралы:

1. $\int\sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2dx.$
2. $\int x^{-2/3}(1+x^{2/3})^{-1}dx.$
3. $\int x^{1/3}(2+x^{2/3})^{1/4}dx.$
4. $\int x^5(1+x^2)^{2/3}dx.$
5. $\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$
6. $\int\dfrac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}.$
7. $\int x^3(1+x^2)^{1/2}dx.$
8. $\int\dfrac{dx}{x^4\sqrt{1+x^4}}.$
9. $\int\sqrt[3]{x}\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{x^4}}dx.$
10. $\int\dfrac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+1/x}}.$

Отв.:

1. $\dfrac{3}{7}x^{7/3}+\dfrac{24}{11}x^{11/6}+3x^{4/3}+C.$ **2.** $3arctg\sqrt[3]{x}+C.$

3. $\dfrac{2}{3}(2+x^{2/3})^{9/4}-\dfrac{12}{5}(2+x^{2/3})^{5/4}+C.$

4. $\dfrac{3}{22}(1+x^2)^{11/3}-\dfrac{3}{8}(1+x^2)^{8/3}+\dfrac{3}{10}(1+x^2)^{5/3}+C.$

5. $\dfrac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C.$

6. $\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{x}}+3\ln\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}+C.$

7. $(1+x^2)^{3/2}(3x^2-2)/15+C.$

8. $\sqrt{1+x^2}(2x^2-1)/(3x^3)+C.$

9. $\dfrac{21}{32}\sqrt[7]{(1+\sqrt[3]{x^4})^8}+C.$

10. $\dfrac{5}{4}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{4/5}-\dfrac{5}{9}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{9/5}+C.$

В интеграле вида

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx, a\neq 0, b^2-4ac\neq 0, \tag{1.8}$$

рационализация подынтегрального выражения достигается одной из трех *подстановок Эйлера*:

1) если $a>0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}\pm t; \tag{1.9}$$

2) если $c>0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt; \tag{1.10}$$

3) если x_1 и x_2 - действительные корни трехчлена ax^2+bx+c, т.е. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то в этом случае полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm t(x-x_0), \tag{1.11}$$

где $x_0=x_1$ или $x_0=x_2$.

Заметим, что знаки в подстановках (1.9) - (1.11) можно брать в любой комбинации, но следует иметь в виду, что выбор знака (как и выбор самой подстановки) влияет на сложность вычисления интеграла (1.8).

1.21. Найти интегралы:

а) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$; б) $I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$.

Δ а) Так как $a=1>0$, то применим первую подстановку в виде

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x.$$

Возведя в квадрат обе части этого равенства, после приведения подобных членов получим

$$2x+2tx=t^2-2 \Rightarrow x=\frac{t^2-2}{2(1+t)},\quad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}dt;$$

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}.$$

Подставим в исходный интеграл I:

$$\mathrm{I}=\int\frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)2(1+t)^2}dt=\int\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2}dt.$$

Разложим полученную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{D}{(t+2)^2}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим $A=1, B=0, D=-2.$

Следовательно,

$$\mathrm{I}=\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\mathrm{I}=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C.$$

б) В данном случае ни первая, ни вторая подстановка Эйлера неприменимы, так как $a<0$ и $c<0$. Но трехчлен $7x-10-x^2$ имеет действительные корни $x_1=2$ и $x_2=5$. Применяя третью подстановку Эйлера, получаем

$$\sqrt{7x-10-x^2}=\sqrt{(x-2)(5-x)}=(x-2)t \Rightarrow 5-x=(x-2)t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{5+2t^2}{1+t^2}, dx=-\frac{6tdt}{(1+t^2)^2};$$

$$(x-2)t=\frac{3t}{1+t^2}.$$

Тогда $\mathrm{I}=-\frac{6}{27}\int\frac{5+t^2}{t^2}dt=-\frac{2}{9}\int\left(\frac{5}{t^2}+2\right)dt=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)+C,$ где $t=\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$. ▲

1.22. Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

2. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

3.* $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+4}}$.

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$.

6. $\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}$.

Отв.:

1. $2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{3}{t+1}-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C$, где $t=(\sqrt{x^2-x+1}+1)/x$.

2. $-2arctg\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{x}+1\right)+C$.

3. $2\ln\left|\sqrt{x^2+2x+4}-x\right|-\frac{3}{2(\sqrt{x^2+2x-4}-x-1)}-$
$-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+2x-4}-x-1\right|+C$.

4. $\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+2arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$.

5. $(x-1)/\sqrt{2x-x^2}+C$.

6. $(x+\sqrt{1+x^2})^{1/15}/15+C$.

7. $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+2}+C\right|$.

8. $-2arctg\frac{2+\sqrt{4+2x-x^2}}{x}+C$.

9. $\ln\left|\frac{\sqrt{-3+4x-x^2}+x-3}{\sqrt{-3+4x-x^2}-x+3}\right|+C$.

10. $-\sqrt{2}arctg\frac{\sqrt{-2x^2+5x-2}}{\sqrt{2}(x-2)}+C$.

Подстановки Эйлера зачастую приводят к громоздким выкладкам, поэтому они применяются лишь тогда, когда трудно подыскать другой способ для вычисления данного интеграла. Для вычисления многих интегралов типа (1.8) существуют более простые приемы.

1. Интегралы вида

$$\mathrm{I}=\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

подстановкой $x+b/(2a)=t$ приводятся к виду

$$\mathrm{I}=M_1\int\frac{tdt}{\sqrt{at^2+K}}+N_1\frac{dt}{\sqrt{at^2+K}},$$

где M_1, N_1, K – новые коэффициенты.

Первый интеграл сводится к интегралу от степенной функции, а второй – табличный и сводится к логарифму (при $a>0$) или к арксинусу (при $a<0, K>0$).

2. Интегралы вида

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m, вычисляются по *формуле приведения*:

$$\int \frac{P_m(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = P_{m-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1.12)$$

где коэффициенты многочлена $P_{m-1}(x)$ степени $m-1$ и число K находятся методом неопределенных коэффициентов.

3. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-a_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

сводятся к предыдущему типу подстановкой $x - a_1 = 1/t$.

4. Тригонометрические и гиперболические подстановки (см. п 1.4.)

1.23. Найти интегралы:

а) $\mathrm{I} = \int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$; б)* $\mathrm{I} = \int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$;

в)* $\mathrm{I} = \int \frac{(x+4)dx}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+2x+2}}dx$.

Δ а) Подстановкой $2x+1=t \Rightarrow x=(t-1)/2$, $dx=dt/2$ интеграл I сводится к интегралу

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4}\int \frac{(t+5)dt}{\sqrt{t^2-4}} = \frac{1}{4}\sqrt{t^2-4} + \frac{5}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right| + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3} + \frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right| + C.$$

б) Здесь $P_m(x) = P_3(x) = x^3-x-1$. Следовательно, $P_{m-1}(x) = P_2(x) = Ax^2+Bx+D$. Интеграл I ищем в виде

$$\mathrm{I} = (Ax^2+Bx+D)\sqrt{x^2+2x+2} + K\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Продифференцируем это равенство:

$$I' = \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + (Ax^2 + Bx + D)\frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} +$$
$$+ \frac{K}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$x^3 - x - 1 = (2Ax + B)(x^2 + 2x + 2) + (Ax^2 + Bx + D)(x+1) + K.$$

Отсюда получаем систему:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3 & 2A + A = 1, \\ x^2 & B + 4A + B + A = 0, \\ x & 2B + 4A + D + B = -1, \\ 1 & 2B + D + K = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/3, \\ B = -5/6, \\ D = 1/6, \\ K = 1/2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}.$$

Интеграл же

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right|.$$

в) Представим интеграл следующим образом:

$$I = \int \frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Дробь $\dfrac{x+4}{(x-1)(x+2)^2}$ разложим на простейшие дроби:

$$\frac{x+4}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{5/9}{x-1} - \frac{2/3}{(x+2)^2} - \frac{5/9}{x+2}.$$

Тогда

$$I = \frac{5}{9}\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+2)2\sqrt{x^2 + x + x}} - \frac{5}{9}\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Первый интеграл вычисляется подстановкой $x - 1 = 1/t$, второй и третий – подстановкой $x + 2 = 1/t$ (все преобразования представляем читателю сделать самостоятельно).

1.24. Вычислить интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{(5x+4)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$

2.* $\displaystyle\int \sqrt{4x^2 - 4x + 3}dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{9x^3 - 3x^2 + 2}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}dx.$

4. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + x + 1}dx.$

5. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx.$

6.* $\int \frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx.$

7. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

8. $\int \frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

9. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+2}}.$

10.* $\int \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}.$

Отв.:

1. $5\sqrt{x^2+2x+5}-\ln(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5})+C.$

2. $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3})+C.$

3. $\frac{3x^2+x-1}{3}\sqrt{3x^2-2x+1}+C.$

4. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$

5. $\frac{1}{3}(x^2-14x+111)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C.$

6. $\frac{1}{64}(32x^2-20x-373)\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{3297}{128\sqrt{2}}\ln\left|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}\right|+C.$

7. $\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x+1}+C.$

8. $-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{x-2}+C.$

9. $-\frac{2}{15}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\cdot\frac{8x^2+12x+7}{(x+1)^2}+C.$

10. $\ln\left|\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+3x^2+1}}{x}\right|+C.$

Указание. Сначала сделать подстановку $x^2=t$.

1.4. Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x,\cos x)dx, \tag{1.1}$$

где R – рациональная функция переменных $x_1=\sin x,\ x_2=\cos x$.

Он рационализируется так называемой *универсальной тригонометрическ* *подстановкой* $tg\frac{x}{2}=t$.

При этой подстановке

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \; x = 2arctgt, \; dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (1.14)$$

1.25. Найти интеграл

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}.$$

Δ Используя подстановку $tg\,\dfrac{x}{2} = t$, с учетом соотношений (1.14) получаем

$$\mathrm{I} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5-4\dfrac{2t}{1+t^2}+3\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \frac{1}{2-t}+C. = \frac{1}{2-tg(x/2)}+C. \blacktriangle$$

Универсальная подстановка часто ведет к громоздким преобразованиям. Ниже указаны случаи, когда цель может быть достигнута с помощью более простых подстановок:

1) Функция $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно $\sin x$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$. В этом случае выгоднее применить подстановку $\cos x = t$.

2) Функция $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$.

В этом случае рекомендуется применить подстановку $\sin x = t$.

3) Функция $R(\sin x, \cos x)$ – четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$.

В этом случае вводится подстановка $tgx = t$.

1.26. Вычислить интегралы:

а) $\mathrm{I} = \dfrac{dx}{\sin x \sin 2x}$; б) $\mathrm{I} = \displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}dx.$

Δ а) Здесь $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos x}$ и $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$. Вводим подстановку $\sin x = t$. Имеем

$$\mathrm{I} = \int \frac{\cos x dx}{2\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{2\sin^2 x(1-\sin^2 x)} == \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} =$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1-t^2}\right)dt = -\frac{1}{2t}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C = -\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C.$$

б) Так как при изменении знаков у $\sin x$ и $\cos x$ подынтегральное выражение не меняет знака, то вводим подстановку $tg = t$.

Следовательно,

$$I=\int\frac{tg^2x\cos^4 x}{tgx+1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{t^2dt}{(t+1)(t^2+1)^2}.$$

Разложим на простейшие дроби:

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+D}{t^2+1}+\frac{Et+F}{(t^2+1)^2}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим

$$A=1/4, B=-1/4, D=1/4, E=1/2, F=-1/2.$$

Тогда

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{4}\int\frac{t-1}{t^2+1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{t-1}{(t^2+1)^2}dt=\frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+t}{1+t^2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-$$

$$-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)+C.$$ ▲

1.27. Найти интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$.
2. $\int\frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$.
3. $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.
4.* $\int\frac{dx}{1+4\cos x}$.
5. $\int\frac{dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.
6. $\int\frac{(2\sin x+3\cos x)dx}{\sin^2 x\cos x+9\cos^3 x}$.
7. $\int\frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos 2x}dx$.
8. $\int\frac{\sin 2xdx}{3+4\sin^2 x}$.
9. $\int\frac{\cos^5 x+\cos^3 x}{\sin^4 x+\sin^2 x}dx$.
10. $\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$.
11. $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$.

Отв.:

1. $\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|tg\frac{x}{2}-1\right|+C.$

2. $\frac{2}{\sqrt{15}}arctg\frac{1+2tg(x/2)}{\sqrt{15}}+C.$ 3. $\frac{1}{\cos x}-tgx+x+C.$

4. $\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}tg(x/2)+\sqrt{5}}{\sqrt{3}tg(x/2)-\sqrt{5}}\right|+C.$

5. $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg(x/2)-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3tg(x/2)-1}{2\sqrt{2}}+C.$

6. $\ln(tg^2x+9)+arctg\frac{tgx}{3}+C.$

7. $\frac{1}{2}\cos x-\frac{3\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\cos x}\right|+C.$

8. $\frac{1}{4}\ln(3+4\sin^2 x)+C.$

9. $\sin x-\frac{2}{\sin x}-6arctg\sin x+C.$

10. $\ln|\sin x+\cos x|+C.$

11. $\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2\ln|\sin x|+C.$

Интегралы вида

$$I=\int\sin^m x\cos^n x dx,\ \ m,n\in\mathbf{Q},$$

приводятся к интегралу от дифференциального бинома

$$I=\int t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt, t=\sin x,$$

и поэтому интегрируется в элементарных функциях только в трех случаях:

1) n -нечетное $((n-1)/2-целое)$;

2) m -нечетное $(\frac{m+1}{2}-целое)$;

3) $m+n$-четное $(\frac{m+1}{2}+\frac{n-1}{2}-целое)$.

Если n нечетно, применяется подстановка $\sin x=t$.

Если m нечетно, применяется подстановка $\cos x=t$.

Если сумма $m+n$ четна, применяется подстановка $tgx=t$ или $ctgx=t$.

В частности, такая подстановка удобна для интегралов

$$\int tg^n xdx \text{ или } \int ctg^n xdx$$

при n целом положительном. Но последняя подстановка неудобна, если оба числа m и n положительны. Если m и n - неотрицательные четные числа, то применяется метод понижения степени с помощью формул

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}, \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \text{ или } \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

1.28. Найти интегралы:

а) $I=\int\frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $I=\sin^4 x\cos^6 xdx$;

в) $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x \cos x}}$; г) $I = \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x \cos x}}$.

Δ а) Так как $m = 3$ нечетно, то полагаем $\cos x = t, \sin x dx = -dt \Rightarrow$

$$I = -\int (1-t^2)t^{-2/3} dt = -3t^{1/3} + \frac{3}{7}t^{7/3} + C = 3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{1}{7}\cos^2 x - 1\right) + C.$$

б) Числа $m = 4, n = 6$ – четные положительные. Понижаем степень:

$$I = \frac{1}{16}\int (2\sin x \cos x)^4 \cos^2 x dx = \frac{1}{32}\int \sin^4 2x(1 + \cos 2x) = I_1 + I_2.$$

Интеграл I_2 вычисляется подстановкой $\sin 2x = t, \cos 2x dx = dt/2 \Rightarrow$

$$I_2 = \frac{1}{32}\int \sin^4 2x \cos 2x dx = \frac{1}{64}\int t^4 dt = \frac{t^5}{320} + C = \frac{1}{320}\sin^5 2x dx + C.$$

В интеграле I_1 снова понижаем степень:

$$I_1 = \frac{1}{32}\int \sin^4 2x dx = \frac{1}{128}\int (1 - \cos 4x)^2 dx = \frac{1}{128}(x - \frac{1}{2}\sin 4x) +$$

$$+ \frac{1}{256}\int (1 + \cos 8x) dx = \frac{3}{256}x - \frac{1}{256}\sin 4x + \frac{1}{2048}\sin 8x + C.$$

Таким образом, окончательно,

$$I = \frac{3}{256}x - \frac{1}{256}\sin 4x + \frac{1}{2048}\sin 8x + \frac{1}{320}\sin^5 2x + C.$$

в) Оба показателя -11/3 и -1/3 – отрицательные числа и их сумма -11/3+ +(-1/3)= -4 – четна, поэтому вводим замену

$$tgx = t, \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt[3]{tg^{11} x}} = \int \frac{1+t^2}{\sqrt[3]{t^{11}}} dt = \int \left(t^{-11/3} + t^{-5/3}\right) dt = -\frac{3}{8}t^{-8/3} - \frac{3}{2}t^{-2/3} + C =$$

$$= -\frac{3(1 + 4tg^2 x)}{8tg^2 x\sqrt[3]{tg^2 x}} + C.$$

г) Подстановкой $t = \sin x$ интеграл I сводится к интегралу от дифференциального бинома

$$I = \int t^{-5/3}(1-t^2)^{-2/3} dt.$$

В нем число $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-5/3+1}{2} - \frac{2}{3} = -1$ – целое, поэтому подстановкой $(-1 + t^{-2}) = z^3$ интеграл рационализируется. Однако для вычисления интеграла I удобнее применить подстановку $t = tgx$.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x\cos x}}=$$

$$=\int\frac{1}{\sqrt[3]{(\sin^5 x)/\cos^5 x}}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int tg^{-5/3}xdtgx=-\frac{3}{2}(tgx)^{-2/3}+C. \quad \blacktriangle$$

При вычислении интегралов от тригонометрических выражений часто применяются следующие формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

1.29. Найти интегралы:

а) $I=\int\sin 3x\sin 5x dx$; б) $I=\int\sin 2x\cos 4x dx$.

Δ а) Имеем:

$$I=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C.$$

б) $I=\frac{1}{2}\int(\sin 6x-\sin 2x)dx=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{12}\cos 6x+C.$ $\blacktriangle$

1.30. Найти интегралы:

1. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx.$ 2. $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$ 3. $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx.$

4. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}.$ 5. $\int tg^7 xdx.$ 6. $\int ctg^6 xdx.$

7. $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx.$ 8. $\int\sin x\sin 3xdx.$ 9. $\int\cos x\cos 4xdx.$

10. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx.$ 11. $\int\sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx.$ 12. $\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin x}}dx.$

13. $\int\frac{\sin^3 xdx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}.$ 14.* $\int\frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$

15. $\int\frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\sin 2x}}.$ 16. $\int\frac{dx}{\cos x\sqrt{\sin^3 2x}}.$

17.* $\frac{(\cos x+\sin x)dx}{5\cos^2 x-2\sin 2x+2\sin^2 x}.$

18.* $\int\frac{dx}{\sin 2x+4\sin x-4\sin^2 x}.$

19. $\int\left(\frac{\sin 2x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\right)^2 dx.$ 20. $\int\frac{(1+\cos x)^2}{1+\sin x}dx.$

Отв.: 1. $\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{5\sin^5 x}+C.$ **2.** $\frac{tg^3 x}{3}+\frac{tg^5 x}{5}+C.$

3. $-\left(ctgx+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}\cdot 3x\right)+C.$ **4.** $tgx+\frac{1}{3}tg^3 x+C.$

5. $\frac{1}{6}tg^6 x-\frac{1}{4}tg^4 x+\frac{1}{2}tg^2 x+\ln|\cos x|+C.$

6. $-ctgx+\frac{1}{3}ctg^3 x-\frac{1}{5}ctg^5 x-x+C.$

7. $-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}-\frac{3}{2}\cos x+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C.$

8. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 8x+C.$

9. $\frac{\sin 5x}{10}+\frac{\sin 3x}{6}+C.$ **10.** $-\frac{ctg^4 x}{4}+C.$

11. $-\frac{3}{80}\cos^{4/3} x(20-16\cos^2 x+5\cos^4 x)+C.$

12. $\frac{5}{28}\sin^{4/5} x(7-2\sin^2 x)+C.$

13. $\frac{3(5+\cos^2 x)}{5\sqrt[3]{\cos x}}+C.$

14. $\frac{1}{4}\ln\frac{(1-\sin x)(1+\sqrt[3]{\sin x})^3}{(1+\sin x)(1-\sqrt[3]{\sin x})^3}+\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\sin x}}+C.$

15. $\frac{\sqrt{2tgx}}{5}(5+tg^2 x)+C.$ **16.** $\frac{tg^2 x-3}{3\sqrt{2tgx}}+C.$

17. $\frac{3}{5}arctg(\sin x-2\cos x)+\frac{\sqrt{6}}{60}\ln\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}+C.$

18. $\frac{1}{2}\ln|tg(x/2)|+\frac{5}{6}\ln|tg(x/2)-3|-\frac{1}{2}\ln|tg(x/2)-1|+C.$

19. $-\frac{4}{3+3tg^3 x}+C.$

20. $x+\cos x+2\ln(1+\sin x)+tg\frac{2x-\pi}{4}+C.$

1.31.* Для интеграла

$$\mathrm{I}_n=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n, n=0,1,2,...,$$

зать рекуррентную формулу

$$\mathrm{I}_n=\frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n+2\cos a\mathrm{I}_{n-1}-\mathrm{I}_{n-2},\ n>1,$$

ё помощью вычислить I_3.

Отв.:

$$\mathrm{I}_3=\cos a(2\cos 2a-1)x+\sin a\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^2+2\sin 2a\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}-$$

$$-2\sin a(2\cos 2a+1)\ln\left|\sin\frac{x+a^2}{2}\right|+C.$$

Интегралы вида (1.8) можно свести к нахождению интегралов одного из дующих типов:

I. $\int R(t,\sqrt{p^2t^2+q^2})dt.$ II. $\int R(t,\sqrt{p^2t^2-q^2})dt.$

III. $\int R(t,\sqrt{q^2-p^2t^2})dt,$ где $t=x+b/(2a)$,

$+bx+c=\pm p^2t^2\pm q^2$ (выделение полного квадрата).

Интегралы же вида I–III рационализируются относительно синуса и инуса (обычных или гиперболических) следующими подстановками:

I. $t=\frac{p}{q}tgz$ или $t=\frac{p}{q}shz.$

II. $t=\frac{p}{q}\sec z$ или $t=\frac{q}{p}chz.$

III. $t=\frac{p}{q}\sin z$ или $t=\frac{q}{p}thz.$

1.32. Вычислить интегралы:

а) $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$; б) $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}.$

Δ а) Так как $5+2x+x^2=4+(x+1)^2$, то полагая $x+1=t$, получаем

$$\mathrm{I}=\int\frac{dt}{\sqrt{(4+t^2)^3}},\text{ т.е. интеграл типа I.}$$

Осуществляя подстановку

$$t=2tgz\,,\;dt=\frac{2dz}{\cos^2 z};\;\sqrt{4+z^2}=\frac{2}{\cos z},$$

получаем

$$\mathrm{I}=\frac{1}{4}\int\cos z dz=\frac{1}{4}\sin z+C=\frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}}+C.$$

б) Из преобразования $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$; полагаем $x+1=t$. Тогда $\mathrm{I}=\int\frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+1}}$ – интеграл типа I.

Применив подстановку $t=shz$, получим

$$dt=ch\,z\;dz\,,\sqrt{t^2+1}=\sqrt{1+sh^2z}=chz.$$

Следовательно,

$$\mathrm{I}=\int\frac{chzdz}{sh^2zchz}=\int\frac{dz}{sh^2z}=-cthz+C=-\frac{\sqrt{1+sh^2z}}{shz}+C=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C.\;\blacktriangle$$

1.33. Найти интегралы:

1. $\int x^2\sqrt{x^2-1}dx.$

2. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx.$

3. $\int\sqrt{(x^2-1)^3}dx.$

4.* $\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}.$

5. $\sqrt{3-2x-x^2}dx.$

6. $\int\frac{dx}{\left(x^2-2x+5\right)^{3/2}}.$

Отв.: 1. $-\frac{1}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+\frac{1}{8}\ln\left|2x^2-1\right|\cdot\sqrt{x^2-1}+C.$

2. $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\sqrt{x^2+1}/x+C.$

3. $\frac{1}{8}x\left(2x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$

4. $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{\sqrt{1-x}}+C.$ **5.** $\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$ **6.** $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2+2x+5}}+C.$

2. Определенный интеграл

2.1. Интеграл Римана

Классы интегральных функций по Риману. Определенный интеграл и его свойства. Оценка определенности интеграла. Теорема о среднем

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $f(x)$ и пусть $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ – разбиение отрезка $[a,b]$ на *элементарные отрезки* $[x_{i-1}, x_i]$. Эти отрезки называются еще *отрезками разбиения*.

Пусть, далее, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина элементарного отрезка. Выберем на этом отрезке произвольную точку ξ_i, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, и составим сумму $I_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, называемую *интегральной суммой Римана*.

Верхней (нижней) суммой Дарбу называется $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \left(s_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \right)$, где $M_i = \sup f(x) \left(m_i = \inf f(x)\right)$ для $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Обозначим $\Delta = \max\limits_i \Delta x_i$, $i = \overline{1,n}$.

Определенным интегралом, или, *интегралом* Римана, от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i . \tag{2.1}$$

Если этот предел существует, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* (или просто *интегрируемой*) на $[a,b]$.

Отметим, что к классу интегрируемых функций на $[a,b]$ относятся непрерывные или кусочно-непрерывные функции на этом отрезке.

2.1. Исходя из определения, найти интеграл $\int\limits_1^2 x^2 dx$.

Δ функция $f(x) = x^2$ интегрируема на $[1, 2]$, поскольку на этом отрезке она непрерывна. Разобьем отрезок $[1, 2]$ на n равных частей точками $x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$, $i = \overline{0,n}$. В качестве точек ξ_i выберем концевые точки разбиения $\xi_i = x_i$. Тогда $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$ и, значит,

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n+i)^2 = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{i=1}^{n} n^2 + 2\sum_{i=1}^{n} ni^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2 \right) =$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(n^3+2n\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=2+\frac{1}{n}+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\frac{7}{3}$. ▲

2.2.* Исходя из определения, найти интегралы:

1) $\int\limits_0^1 x dx$. 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ (в качестве разбиения взять $x_0=1,\ x_1=q,\ x_2=q^2,\dots,x_n=q^n=2$).

3) $\int\limits_a^b dx, m\neq -1,\quad 0<a<b$ (точки разбиения $x_0=a, x_1=a\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$, $x_2=a\left(\frac{b}{a}\right)^{2/n}$, ..., $x_i=a\left(\frac{b}{a}\right)^{i/n}$, ..., $x_n=a\left(\frac{b}{a}\right)^{n/n}=b$).

4) $\int\limits_0^1 e^x dx$. 5) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin x dx$.

Отметим следующие *свойства определенного интеграла*. Все они доказаны в [1]. Предполагается, что функции интегрируемы на соответствующем отрезке.

1°. $\int\limits_a f(x)dx=0$. 2°. $\int\limits_b^a f(x)dx=-\int\limits_a^b f(x)dx$. 3°. $\int\limits_a^b dx=b-a$.

4°. *Аддитивность интеграла*. Если $a\le c\le b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx.$$

5°. *Линейность интеграла*. Для любых $\lambda_k\in\boldsymbol{R}, k=\overline{1,n}$, справедливо $\int\limits_a^b\left(\sum\limits_{k=1}^n\lambda_k f_k(x)\right)dx=\sum\limits_{k=1}^n\lambda_k\int\limits_a^b f_k(x)dx$.

6°. *Интегрирование неравенств*. Если $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in[a,b]$, то при $a<b$

$$\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b f(x)dx.$$

7°. Если $f(x)\ge 0$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$.

8°. *Оценка интеграла по модулю*: $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|\le\int\limits_a^b|f(x)|dx$, $a\le b$.

9°. *Оценка интеграла*. Пусть $M=\sup\limits_{[a,b]}f(x)$, $m=\inf\limits_{[a,b]}f(x)$ и $a<b$. Тогда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

10°. ***Теорема о среднем.*** *Если $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция, то на этом отрезке найденная точка ξ, $a \le \xi \le b$, что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Величина $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется *средним значением функции $f(x)$ на отрезке* $[a,b]$.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически выражает площадь S *криволинейной трапеции* (рис. 2.1).

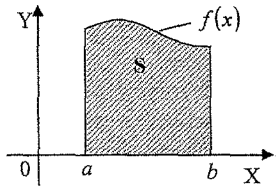

Рис. 2.1

2.3. Выяснить, какой из интегралов больше: $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ или $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^7 x dx$?

Δ На отрезке $[0, \pi/2]$ функции $\sin^7 x$ и $\sin^3 x$ непрерывны, а значит, интегрируемы, и выполняется строгое неравенство $\sin^7 x < \sin^3 x$. Поэтому по свойству 6° $I_2 < I_1$. ▲

Одним из свойств интеграла является свойство

11°. ***Непрерывность интеграла.*** Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то функции

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ и } G(x) = \int_a^b f(t)dt$$ непрерывны на этом отрезке.

2.4. Доказать, что если функция f интегрируема на $[a,b]$, то

$$\lim_{\xi \to 0} \int_{a+\xi}^{b-\xi} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \quad 0 < \xi < b-a.$$

Δ По свойству аддитивности интеграла имеем:

$\int_{a+\xi}^{b-\xi} f(x)dx = \int_{a+\xi}^{c} f(x)dx + \int_c^{b-\xi} f(x)dx$. Отсюда с учетом свойства 11° получаем

$$\lim_{\xi \to 0} \int_{a+\xi}^{b-\xi} f(x)dx = \lim_{\xi \to 0}\left[\int_{a+\xi}^{c} f(x)dx + \int_c^{b-\xi} f(x)dx\right] = \lim_{\xi \to 0} \int_{a+\xi}^{c} f(x)dx + \lim_{\xi \to 0} \int_c^{b-\xi} f(x)dx =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \text{ ▲}$$

2.5. Выяснить, какой интеграл больше:

1) $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$ или $I_2 = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

2) $I_1 = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ или $I_2 = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

3) $I_1 = \int\limits_0^1 e^{-x} \sin x dx$ или $I_2 = \int\limits_0^1 e^{-x^2} \sin x dx$.

4) $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $I_2 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

Отв.: **1)** $I_2 > I_1$. **2)** $I_1 > I_2$. **3)** $I_1 > I_2$. **4)** $I_2 > I_1$.

2.6. Доказать неравенства:

1) $0 < \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}} dx < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$.

2) $\frac{\sqrt{2}}{3} < \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{x^2+8}} < 1$.

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\pi + arctgx}{\sqrt[3]{x^2+8}} dx < \frac{3}{2}$.

2.2. Формула Ньютона – Лейбница

Интеграл с переменным верхним пределом. Замена переменной в определенном интеграле. Интеграл от четных, нечетных и периодических функций. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Если $f(x)$ – интегрируемая на $[a,b]$ функция, то $\forall x \in [a,b]$ она является интегрируемой на отрезке $[a,x]$. Интеграл

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \tag{2.2}$$

является функцией от верхнего предела интегрирования x. Для этого предела справедлива

Теорема 2.1 (Барроу). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)$, определяемая формулой (2.2), является первообразной для $f(x)$ на $[a,b]$, т.е.*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x). \tag{2.3}$$

Следовательно,

$$\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C.$$

Следствие. *При выполнении условий теоремы 2.1. функция* $G(x)=\int\limits_x^b f(t)dt$ *также дифференцируема в любой точке* $x\in[a,b]$ *и* $G'(x)=-f(x)dx$.

Теорема 2.2. Если функция $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то для любой ее первообразной* F *имеет место формула.*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \tag{2.4}$$

которая часто записывается в виде

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b.$$

Формула (2.4) называется *формулой Ньютона – Лейбница.*

2.7. Вычислить интеграл $\int\limits_{sh1}^{sh2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Δ Имеем

$$\int\limits_{sh1}^{sh2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{sh1}^{sh2}=\ln\frac{sh2+\sqrt{1+sh^2 2}}{sh1+\sqrt{1+sh^2 1}}=$$

$$=\ln\frac{sh2+ch2}{sh1+ch1}=\ln e=1.▲$$

2.8. Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $\int\limits_0^x\left(t^3-1\right)dt$, причем $F(0)=-1$. Найти $F(-1)$.

Δ По условию $F'(x)=\int\limits_0^x\left(t^3-1\right)dt$. Тогда по формуле Ньютона – Лейбница $F'(x)=\left(t^4/4-t\right)\Big|_0^x=x^4/4-x$. Отсюда

$$F(x)=\int\left(x^4/4-x\right)dx=x^5/20-x^2/2+C.$$

Из условия $F(0)=-1$ получим $-1=C$, значит, $F(x)=x^5/20-x^2/2-1$. Отсюда $F(-1)=-31/20$. ▲

Если $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[A,B]$ функция, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы на $[a,b]$, причем $A\le\varphi(x)\le B$, $A\le\psi(x)\le B$ при $a\le x\le b$, то функция $F(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)dt$, $a\le x\le b$, дифференцируема на $[a,b]$ и

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x). \qquad (2.5)$$

Найдем, например, производную для функции $F(x)=\int\limits_{\sin x}^{\ln x} e^{-t^2}dt$.

По формуле (2.5) получаем $F'(x)=e^{-\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}-e^{-\sin^2 x}\cdot\cos x$.

2.9. Найти производные:

1) $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2 dx$. 2) $\frac{d}{dx}\int\limits_x^b \sin t^2 dt$.

3) $\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$. 4) $\frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3 dt$.

Отв.: 1) 0; **2)** $-\sin x^2$; **3)** $2x\sqrt{1+x^4}$;
4) $-\sin x\cos(\pi\cos^3 x)-\cos x\cos(\pi\sin^3 x)$.

2.10. Найти интегралы:

1) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. 2) $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$. 3) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$. 5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. 6) $\int\limits_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}dx$.

7) $\int\limits_0^1 \frac{(x^2+3x)dx}{(x+1)(x^2+1)}$. 8) $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}dx$.

9) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Отв.: 1) $\frac{3}{2}\left(2\sqrt[3]{2}-1\right)$. **2)** $19/15$. **3)** $\pi/3$. **4)** $\pi/12$.
5) $\frac{1}{4}arctg\,\frac{4}{7}$.

6) $2-\ln 5$; **7)** $\pi/4$. **8)** $\frac{1}{2}\left(e-e^{1/4}\right)$; **9)** $\ln 2$.

2.11. Найти предел $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{x}\,dx}{x^3}$.

Δ При $x = 0$ интеграл $\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{x}\,dx = 0$. Условия для применения правила Лопиталя выполнены. Поэтому $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left[\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{x}dx\right]'_{x^2} \cdot \left(x^2\right)'_x}{3x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin x}{3x^2} = \dfrac{2}{3}$.▲

2.12. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^x arctg^2 t\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,dt}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}$. 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{tg t}\,dt}{\int\limits_0^{tg x} \sqrt{\sin t}\,dt}$.

Отв.: **1)** $\pi^2/4$; **2)** 0; **3)** 1 q; **4)** 1 .

2.13. Найти точки экстремума функций:

1) $\int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$. 2) $\int\limits_1^x e^{-t^2/2}\left(1-t^2\right)\,dt$. 3) $\int\limits_0^{x^2} \dfrac{t^2-5t+4}{2+e^t}\,dt$.

Отв.: **1)** В точке $x = 1$ – min, в точке $x = 2$ экстремума нет. **2)** В точке $x = 1$ – max, в точке $x = -1$ – min. **3)** В точках $x = 0, \pm 2$ – min, в точках $x = \pm 1$ – max.

Определенные интегралы часто легче вычисляются, если в них выполнить *замену переменной интегрирования*. Суть этой замены в следующем.

Теорема 2.3. *Если функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет условиям:*

1) *$\varphi(t)$- непрерывная однозначная функция, $t \in [\alpha, \beta]$, и имеющая на этом отрезке непрерывную производную $\varphi'(t)$.*

2) *Если $t \in [\alpha, \beta]$, то значения $\varphi(t)$ не выходят за пределы отрезка $[a, b]$.*

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *то для любой функции* $f(x)$, *непрерывной на отрезке* $[a,b]$, *справедлива следующая* ***формула замены переменной интегрирования (или подстановка)*** *в определенном интеграле:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\ . \qquad (2.6)$$

2.14. Найти интеграл $I = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Δ Применим подстановку $x = 2\sin t$ («логика» этой подстановки в том, что нам необходимо избавиться от радикала, интегрирование которого чаще всего не очень просто). Здесь $-\pi/3 \le t \le \pi/3$. Функция $x = \varphi(t) = \sin t$ на $[-\pi/3, \pi/3]$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.3: она непрерывно дифференцируема, монотонна $\varphi(-\pi/3) = -\sqrt{3}$, $\varphi(\pi/3) = \sqrt{3}$. Тогда $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$, $\sqrt{4 - x^2} = 2|\cos t| = 2\cos t$, ибо при $t \in [-\pi/3, \pi/3] \Rightarrow \cos t > 0$.

Итак: $I = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2}\,dx = 4\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 t dt = \dfrac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$

(читателю предоставляется «право» убедиться в этом самому). ▲

2.15. Найти интеграл $I = \int\limits_2^4 \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4}dx$.

Δ Убедимся в том, что подстановка $x = 2\sec t = 2\cdot(1/\cos t)$ рационализирует подынтегральное выражение, при этом:

$$dx = 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt\ ;\ \begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 0; \\ x = 4 \Rightarrow t = \pi/3. \end{cases}$$

Таким образом, поскольку функция $x = 2\sec t$ монотонна, то значит,

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{4\sec^2 t}}{16\sec^4 t}\cdot 2\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\sin^2 t\cos t dt = \frac{1}{12}\sin^3 t\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{12}. ▲$$

Надо сказать, что применение той или иной подстановки для определенного интеграла при его вычислении требует «искусства», что не всегда легко. В этом случае нужна практика работы с определенными интегралами. Для этого студентам рекомендуется чаще обращаться к учебникам, учебным пособиям, где такие подстановки уже становятся «стандартными».

2.16. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$. 2) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$.

3) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$.

4) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$. 5) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$; $a>0, b>0$.

6)* $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$. 7) $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

8) $\int\limits_3^{2} \frac{\sqrt[3]{\left(2-x^2\right)^3}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$.

9)* $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$. 10)* $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

Отв.: 1) $\pi a^2/16$; **2)** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})/2$; **3)** $\ln(4/3)$; **4)** $\pi/3\sqrt{2}$;
5) $\frac{1}{ab}arctg\ \frac{b}{a}$;
6) $\sqrt{2}-2/\sqrt{3}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$; **7)** $2(\sqrt{3}-1)$; **8)** $8+\frac{2\pi\sqrt{3}}{2}$; **9)** $\pi^2/4$;
10) $(\pi\ln 2)/8$.

2.17. Доказать равенство

$$\int\limits_0^1 \frac{arctgx}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{t}{\sin t}dt.$$

2.18.* Вычислить интеграл $I=\int\limits_{-1}^{2}\frac{1+x^2}{1+x^4}dt$.

Отв.: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(arctg\ \frac{3\sqrt{2}}{4}+\pi\right)$.

Пусть функции $u=u(x)$ и $\vartheta=\vartheta(x)$ – непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$. Тогда имеет место следующая *формула интегрирования по частям в определенном интеграле:*

$$\int\limits_a^b ud\vartheta = u\vartheta\Big|_a^b - \int\vartheta du. \qquad (2.7)$$

2.19. Найти интеграл: $I=\int\limits_1^e x\ln xdx$.

Δ Имеем:

$$I=\begin{vmatrix}u=\ln x; du=dx/x;\\ d\vartheta=xdx; \vartheta=x^2/2\end{vmatrix}=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=(e^2+1)/4. \blacktriangle$$

2.20. Найти интегралы:

1) $\int\limits_0^{\pi/\beta} e^{\alpha x}\sin\beta x dx$. 2) $\int\limits_1^e \ln^3 x dx$.

3) $\int\limits_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}dx$. 4) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$.

5) $\int\limits_0^{\pi/2} x^2\sin xdx$. 6)* $\int\limits_0^a (a^2-x^2)^n dx$, $n\in N$.

7) $\int\limits_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx$. 8) $\int\limits_0^{\pi/4}\ln(1+tgx)\,dx$.

9) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2x\ arctg(\sin x)\,dx$. 10)* $\int\limits_1^{16} arctg\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$.

Отв.: **1)** $\frac{\beta\left(e^{\alpha\pi/\beta}+1\right)}{\alpha^2+\beta^2}$; **2)** $6-2e$; **3)** 2. **4)** $\pi\sqrt{2}-4$;

5) $\pi-2$; **6)** $a^{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; где $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdots2n$.

$(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)$;

7) $\ln 2-1/2$; **8)** $\ln(2/8)$; **9)** $9(\pi/2-1)$;

10) $16\pi/3-2\sqrt{3}$.

Справедлива

Теорема 2.4. *Пусть $f(x)$ – интегрируемая на $[-a,a]$ функция. Тогда: если f – четная функция, то*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx, \qquad (2.8)$$

если f – нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0$; если f – периодическая функция периода T, то $\forall a\in$ R

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx=\int\limits_0^T f(x)dx. \qquad (2.9)$$

2.21. Вычислить интегралы:

а) $I = \int_{-1}^{1} |x| dx$. б) $I = \int_{-2}^{2} \frac{x^6 \sin x}{x^8 + 3}$. в) $I = \int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

Δ а) Так как функция $f(x) = |x|$ – четная, то $I = 2\int_0^1 x dx = 1$.

б) Подынтегральная функция нечетная, поэтому $I = 0$.

в) Так как

$f(x+\pi) = \frac{\sin 2(x+\pi)}{\cos^4(x+\pi) + \sin^4(x+\pi)} = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = f(x)$, то

подынтегральная функция имеет период π . Поэтому можно отнять от верхнего и нижнего пределов интегрирования число π :

$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x\, dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 2\int_0^{\pi/4} \frac{tgx\, dx}{\cos^2 x(1 + tg^4 x)}$. Последний интеграл легко вычисляется

подстановкой $t = tgx$. Он равен $\pi / 4$.▲

2.22. Доказать равенства:

1) $\int_{-a}^{a} \cos x f(x^2)\, dx = 2\int_0^a \cos x \cdot f(x^2)\, dx.$

2*) $\int_{-a}^{a} \sin x \cdot f(\cos x)\ dx = 0.$

3) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$.

Указание. В интеграле справа сделать подстановку $x = a + b - t$.

4*) $\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx$.

2.23. Вычислить интегралы:

1)* $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 7x^3 - 12x^2 + x + 1}{x^2 + 2} dx$.

2) $\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln \frac{1 + x}{1 - x} dx$.

Отв.: 1) $-\frac{16}{5}\sqrt{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; **2)** 0.

2.3. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций. Квадратурная формула Симпсона.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана система точек $\{x_i\}$, $0 <$
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, и система чисел $\{A_i\}$, $i = \overline{1,n}$.

Для интегрируемой на $[a,b]$ функции $y = f(x)$ прибл
равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i)$$

называется *квадратурной формулой.* Точки ξ_i называются *узлами,* а чис
весами этой формулы. Разность

$$\Delta = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i)$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы.

Если отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей узлами интег
вания $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, то расстояние h между дву
седними узлами, называемое *шагом интегрирования*, есть величина пост
ная, равная $h = (b-a)/n$. Тогда $\xi_i = a + ih$, $i = \overline{1,n}$. Квадрат
формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \quad (2.1$$

называется *формулой прямоугольников.*

Если в качестве точек ξ_i выбрать левые концы отрезков $[x_{i-1}, x_i]$,
$i = \overline{1,n}$, то получим так называемую *формулу левых прямоугольников*:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-}$$

Поскольку $x_i = a + ih$, то эта формула преобразуется к виду

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+(n-1)h)) \quad (2.13)$$

При выборе в качестве ξ_i правых концов отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ получ
формулу правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+nh)), \quad (2.14)$$

где $a + nh = b$.

При выборе в качестве ξ_i середины отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, т
$\xi_i = (x_{i-1} + x_i)/2$, получим так называемую *составную квадратурн*
*формулу прямоуголько*в:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\Big(f(a+h/2)+f(a+3h/2)+\ldots+f\big(a+(2n-1)h/2\big)\Big)=$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right). \qquad (2.15)$$

Если $M_2 = \max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$, то максимальная сверху оценка погрешности формулы (2.15) определяется выражением

$$\Delta \le \frac{b-a}{24}h_2 M_2 = \frac{(b-a)^3}{24n^2}M_2. \qquad (2.16)$$

Пусть $\xi_i = a + ih$, $i = \overline{1,n}$, тогда квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\big(f(a)+f(b)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\ldots+2f(a+(n-1)h)\big)$$

$$(2.17)$$

называют *квадратурной формулой трапеций*. Ее погрешность определяется выражением

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2, \qquad (2.18)$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$.

Если отрезок $[a,b]$ разделить на $2n$ частей так, что $h = (b-a)/2n$, то формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2}) = \qquad (2.19)$$

$$=\frac{b-a}{6n}\big(f(a)+f(b)+2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2}))+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1}))\big)$$

называется *квадратурной формулой Симпсона*, или *формулой парабол*. Погрешность формулы Симпсона определяется соотношением

$$\Delta \le \frac{(b-a)h^4}{180}M_4 = \frac{(b-a)^5}{2880}M_4, \text{ где } M_4 = \max_{[a,b]}|f''(x)|. \qquad (2.20)$$

2.24. Найти число узлов для вычисления интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ по формуле составных прямоугольников с точностью 10^{-4}.

Δ Имеем

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)} \Rightarrow M_2 = \max_{[0,1]}|f''(x)| = f''(0)=2.$$

Тогда по формуле (2.16)

$$\frac{(b-a)^3}{24n^2}M_2 = \frac{1}{24n^2}\cdot 2 \le 10^{-4} \Rightarrow n \ge 50/\sqrt{3} \Rightarrow n \ge 30.$$

Следовательно, для вычисления данного интеграла с точностью до 10^{-4} по формуле составных прямоугольников отрезок интегрирования $[0,1]$ необходимо разбить на 30 равных частей. ▲

2.25. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ с помощью: а) составной формулы прямоугольников; б) формулы трапеций; в) формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей, и произвести оценки погрешностей вычислений.

Δ В нашем случае $a = 0$, $b = 1$, $2n = 10$, $h = (b-a)/10 = 0{,}1$. За узлы интегрирования возьмем точки x_0, x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}. Составим таблицу $f(x_i)$ функции $f(x) = 1/(x+1)$ в узлах (все вычисления проведены с четырьмя десятичными знаками после запятой):

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$f(x_i)$	1	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,50

а) При вычислении интеграла по формуле прямоугольников (2.16) серединами частичных отрезков интегрирования являются точки x_1, x_3, x_5, x_7, x_9. Поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{5}\left(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)+f(x_9)\right) = \frac{1}{5}\cdot 3{,}4595 = 0{,}6912.$$

б) По формуле (2.17) получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{5}\left(\frac{f(0)+f(x_1)}{2} + f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+f(x_8)\right) = 0{,}6866.$$

в) По формуле (2.19) находим

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{30}\left(f(0)+f(1)+2\left(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+f(x_8)\right)+\right.$$
$$\left.+4\left((x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)+f(x_9)\right)\right) = 0{,}6931.$$

Так как $M_2 = \max\limits_{[0,1]}\left|\left(\frac{1}{1+x}\right)''\right| = 2$, $M_4 = \max\limits_{[0,1]}\left|\left(\frac{1}{1+x}\right)^{IV}\right|$, то по формулам (2.16), (2.18), (2.20) оценки погрешностей равны: а) 0,0333; б) 0,0666; в) 0,0021, т.е. наиболее точное значение интеграла получается по формуле Симпсона. Точное значение интеграла равно $\ln 2 = 0{,}693147\ \ldots$ ▲

2.26. Вычислить с погрешностью не более ε интеграл:

1) $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{1+x^3}$, $\varepsilon = 10^{-4}$. 2) $\int\limits_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$. 4) $\int\limits_1^9 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

5) $\int\limits_1^3 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$. 6) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

7) $\int\limits_1^2 \frac{e^{-x}}{x}$, $\varepsilon = 10^{-4}$. 8) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

9) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos x^2 dx$ $\varepsilon = 10^{-3}$. 10) $\int\limits_0^{\pi} \sin(\sin x)\,dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Отв.: 1) 0,3502; 2) 4,6470; 3) 0,7535; 4) 1,2280; 5) 2,3020; 6) 0,2400; 7) 0,1705; 8) 0,6736; 9) 0,9775; 10) 1,7866.

2.4. Геометрические приложения определенных интегралов

Площадь плоской фигуры в прямоугольной декартовой системе координат. Площадь плоской фигуры при параметрическом задании ее границ. Площадь плоской фигуры в полярной системе координат. Вычисление длины дуги в декартовой и полярной системах координат. Вычисление объемов тел. Площадь поверхности и объем тела вращения.

Исходя из определения определенного интеграла, площадь криволинейной трапеции D, ограниченной графиком неотрицательной функции $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, отрезком $[a,b]$ оси X и соответствующими отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ (рис 2.2), равна

$$S = \int\limits_a^b y(x)\,dx . \tag{2.21}$$

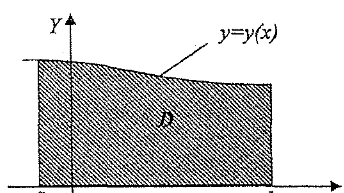

Рис. 2.2

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную на $[\alpha, \beta]$ производную, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а $y(t)$ – непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$, то площадь области D равна

$$S = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt. \tag{2.22}$$

Если область D ограничена графиками функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, непрерывных на $[a, b]$, и $y_2(x) \geq y_1(x)$, $\forall x \in [a, b]$, то площадь такой области (рис. 2.3) равна

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\, dx . \tag{2.23}$$

При аналогичных предположениях относительно данных функций для площади области D (рис. 2.4) имеют место формулы

$$S = \int_c^d x(y)\, dy , \tag{2.24}$$

$$S = \int_\beta^\alpha x(t) y'(t) dt . \tag{2.25}$$

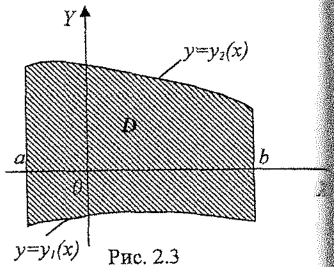

Рис. 2.3

Кроме того, можно пользоваться формулой

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (xy' - yx')\, dt , \tag{2.26}$$

где α и β – значения параметра t, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении, при котором область D остается слева.

Для площади области D (рис. 2.5)

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\, dy . \tag{2.27}$$

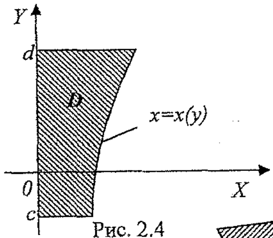

Рис. 2.4

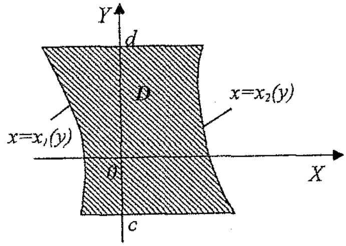

Рис. 2.5

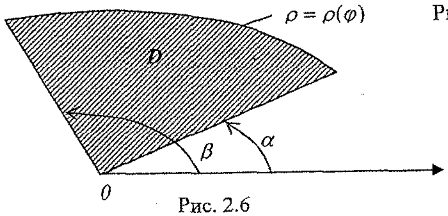

Рис. 2.6

Пусть функция $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$, непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$. *Площадь сектора* D (рис. 2.6), ограниченного графиком функции $\rho(\varphi)$ в полярных координатах и соответствующими отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi . \tag{2.28}$$

2.27. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $x^2 = 4y$ и *локоном Аньези* $y = 8/(x^2 + 4)$ (рис. 2.7).

Δ Решив систему

$$y = 8/(x^2 + 4),$$
$$y = x^2/4,$$

находим абсциссы точек A и C пересечения данных кривых. Это $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$. Из рисунка следует, что $8/(x^2 + 4) \ge 0$ на отрезке $[-2, 2]$. Следовательно,

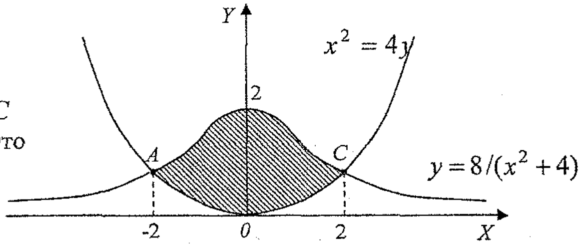

Рис. 2.7

$$S = \int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2 + 4} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left(4\,arctg\,\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 2\pi - \frac{4}{3}. ▲$$

2.28.* К эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ проведена касательная в точке $C = \left(a/2,\, b\sqrt{3}/2\right)$. Найти площадь криволинейного треугольника ABC (рис. 2.8).

Δ Дуга AC эллипса и отрезок касательной BC являются графиком функций $x = x_1(y) = a\sqrt{1 - y^2/b^2}$ и $x = x_2(y) = a\left(2 - \dfrac{y\sqrt{3}}{b}\right)$, где $0 \le y \le b\sqrt{3/2}.$. По формуле (2.27) имеем

$$S = \int_{0}^{b\sqrt{3/2}} \left(x_2(y) - x_1(y)\right)dy .$$

Интеграл от функции $x_2(y)$ вычисляется легко:

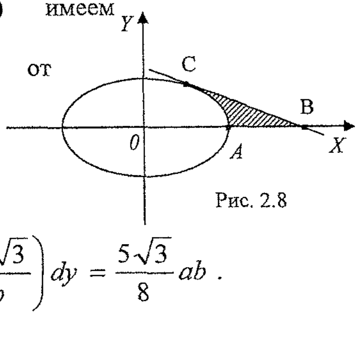

Рис. 2.8

$$I_2 = \int_{0}^{b\sqrt{3/2}} x_2(y)dy = \int_{0}^{b\sqrt{3/2}} a\left(2 - \frac{y\sqrt{3}}{b}\right)dy = \frac{5\sqrt{3}}{8}ab .$$

Для интеграла от функции $x_1(y)$ вводим подстановку $y = b\sin t$, $0 \le t \le \pi/3$:

$$I_1 = \int_0^{b\sqrt{3/2}} x_1(y)dy = ab\int_0^{\pi/3}\cos^2 t dt = \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)ab .$$

Таким образом,

$$S = I_2 - I_1 = ab(3\sqrt{3}-\pi)/6 .. \blacktriangle$$

2.29.* Найти площадь петли кривой:

$$x = \frac{t}{3}(6-t),\ y = \frac{t^2}{8}(6-t).$$

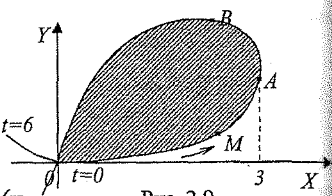

Рис. 2.9

Δ Обе функции $x(t)$ и $y(t)$ определены $\forall\ t \in \mathbf{R}$. Найдем точки самопересечения этой кривой.

Для точки самопересечения характерно то, что в ней совпадают значения абсциссы (и ординаты) при разных значениях параметра t. Так как $x = 3 - \frac{1}{3}(t-3)^2$, то абсциссы совпадают при значениях параметра $t = 3 \pm \lambda$. Чтобы функция $y(t)$ при тех же значениях параметра t одно и то же значение должно выполняться равенство

$$\frac{(3+\lambda)^2}{8}(3-\lambda) = \frac{(3-\lambda)^2}{8}(3+\lambda),\quad \lambda \ne 0, \Rightarrow \lambda = \pm 3 .$$

Таким образом, при $t_1 = 0$ и при $t_2 = 6$ имеем $x(t_1) = x(t_2) = 0$ и $y(t_1) = y(t_2) = 0$, т.е. точка $(0,0)$ является единственной точкой самопересечения. При изменении t от 0 до 6 точки кривой лежат в первой четверти. При изменении t от 0 до 3 точка $M = (x, y)$ описывает нижнюю часть петли, так как в указанном промежутке $x(t)$ и $y(t) = 3t\dfrac{x}{8}$ возрастают, а затем функция $x(t)$ начинает убывать, в то время как $y(t)$ сначала еще возрастает. На рис. 2.9 указан обход кривой, соответствующей возрастанию t (область остается слева).

Площадь искомой петли найдем по формуле (2.26):

$$S = \frac{1}{2}\int_0^6 (xy' - yx')\,dt = \frac{1}{2}\int_0^6 \frac{t^2(6-t^2)}{24}dt = \frac{27}{5}. \blacktriangle$$

2.30. Найти площадь области, вырезаемой окружностью $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$ из кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ (рис. 2.10).

Δ Решив систему

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3}\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \\ \rho = 1 + \cos\varphi, \end{cases}$$

находим точки пересечения этих кривых: $\varphi_1 = \pi/3$, $\varphi_2 = \pi$.

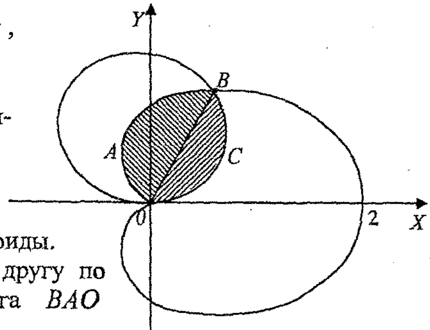

Рис. 2.10

Искомая площадь равна сумме двух площадей: площади кругового сегмента и площади сегмента кардиоиды. Эти сегменты примыкают друг к другу по лучу $\varphi = \pi/3$ (луч OB). Дуга BAO описывается концом полярного радиуса ρ кардиоиды при изменении угла φ от $\pi/3$ до π. Дуга OCB – концом полярного радиуса ρ окружности при $0 \le \varphi \le \pi/3$. Поэтому, пропуская вычисления интегралов, имеем $\pi/3$.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} 3\sin^2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi} (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{4}\left(\pi - \sqrt{3}\right). \blacktriangle$$

2.31. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

1) $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

2) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/4$.

3) $y = \dfrac{6}{(x+5)}$, $y = |x|$, $x \ge -2$.

4) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, $y = 0$, $-\pi/4 \le x \le 3\pi/4$.

5) $y = arctg\sqrt{x}$, $y \pm x^2$, $x = 1$.

Отв.: 1) $\dfrac{4}{3}$. 2) $\sqrt{2} - 1$. 3) $6\ln 2 - \dfrac{5}{2}$. 4) $5\sqrt{2}/3$. 5) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3}{2}$.

2.32. Найти площадь астроиды $(x/a)^{2/3} + (y/a)^{2/3} = 1$.

Отв.: $3\pi a^2/8$.

2.33.* Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x = a\sin t$, $y = b\sin 2t$.

Отв.: $8ab/3$.

2.34.*. Вычислить площадь, содержащуюся внутри кардиоиды $x = a\cos t(1+\cos t)$, $y = a\sin t(1+\cos t)$.

2.35. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой:

1) $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2 = a^2 - b^2$ (*эволюта эллипса*).

2) $x = a\dfrac{1 - t^2}{\left(1 + t^2\right)^2}$, $y = \dfrac{2at}{\left(1 + t^2\right)^2}$ (*улитка*).

Отв.: **1)** $3\pi\left(a^2 - b^2\right)^2 / (8ab)$. **2)** $3\pi a^2 / 8$.

2.36. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\cos\varphi$.

Отв.: $\pi a^2 / 4$.

2.37.* Найти площадь фигуры, лежащей вне круга $\rho = a$ и ограниченной кривой $\rho = 2a\cos 3\varphi$. Отв. $\dfrac{a^2}{18}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$.

2.38.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 3\sqrt{2}a\cos\varphi$ и $\rho = 3a\sin\varphi$. Отв. $2{,}25\, a^2\left(\pi - arctg\ \sqrt{2} - \sqrt{2}\right)$.

2.39.* Найти площадь петли декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$.

Отв.: $3a^2/2$.

2.40.* Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутой кривой $\rho = a\sin\varphi\cos^2\varphi$, $a > 0$. Отв. $\pi a^2 / 32$.

2.41. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей заданной кривой:

1) $x = at - t^2$, $y = at^2 - t^3$, $a > 0$.

2) $x = t^2 - a^2$, $y = t^3 - a^2 t$, $a > 0$.

3) $x = \dfrac{t\left(1 - t^2\right)}{1 + 3t^2}$, $y = \dfrac{4t^2}{1 + 3t^2}$.

4) $\dfrac{1}{(1 + t^2)}$, $y = \dfrac{t(1 - t^2)}{(1 + t^2)}$.

5) $x = a\sin 2t$, $y = a\sin t$, $a > 0$.

Отв.: **1)** $a^5 / 60$. **2)** $8a^5 / 15$. **3)** $\dfrac{1}{3}$. **4)** $\dfrac{(4 - \pi)}{4}$. **5)** $\dfrac{4a^2}{3}$.

Если плоская кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, то ее длина

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{2.29}$$

Длина пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - непрерывно дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$ функции, равна

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt. \tag{2.30}$$

Длина плоской кривой, заданной параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$ функции, равна

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt \,. \tag{2.31}$$

Длина плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция, равна

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi \,. \tag{2.32}$$

2.42. Вычислить длину полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками $(0,0)$ и $(4,8)$ (рис. 2.11).

Δ Функция $y(x)$ определена для $x \ge 0$. Поскольку данные точки лежат в первой четверти, то $y = x^{3/2} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + 9x/4}$.

По формуле (2.29) имеем

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right). \blacktriangle$$

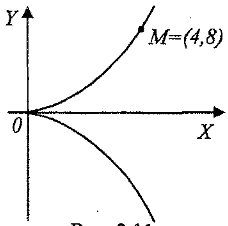

Рис. 2.11

2.43.* Найти периметр криволинейного треугольника, ограниченного дугой окружности $x^2 + y^2 = 2$ и графиком функции $y = \sqrt{|x|}$ (рис. 2.12).

Δ Решив систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = \sqrt{|x|}, \end{cases}$$

находим координаты точек A и B пересечения этих кривых: $A = (-1,1)$, $B = (1,1)$. Дуга AB задается явно уравнением $y = \sqrt{2 - x^2}$, $|x| \le 1$. Ее длина по формуле (2.29) равна

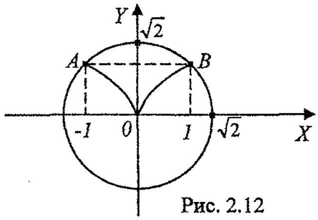

Рис. 2.12

$$S_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2}{2 - x^2}}\, dx = \sqrt{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Длины S_2 и S_3 дуг графика OB и OA равны в силу симметрии этих дуг относительно оси Y. Найдем длину дуги OB, заданной явно формулой

$y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$. Но производная функции $y = \sqrt{x}$ неограниченна в окрестности $x = 0$. Приняв за независимое переменное y, зададим OB уравнением $x = y^2$, $0 \le y \le 1$. Тогда $x' = 2y$ и по формуле, аналогичной (2.29), получим

$$S_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + x'^2}\,dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\,dy .$$

Положив $y = \frac{1}{2} sht$, находим

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_0^{arcsh\,2} ch^2 t dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} sh\,2t + t\right)\Bigg|_0^{arcsh\,2} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right).$$

Таким образом, периметр треугольника равен

$$S_1 + 2S_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right). ▲$$

2.44.* Найти длину пространственной кривой

$$x^2 = 2az - z^2,\ y = a\ln\left(1 - \frac{z}{2a}\right),\ 0 \le z \le z_0 \le 2a,$$

взяв в качестве параметра

$$t = \sqrt{z / 2a},\ 0 \le t \le t_0 = \sqrt{z_0 / 2a} < 1. \qquad (2.33)$$

Δ Из (2.33) находим $z = 2at^2$, $x = 2at\sqrt{1 - t^2}$,

$$y = a\ln\left(1 - t^2\right) \Rightarrow x' = 2a\frac{1 - 2t^2}{\sqrt{1 - t^2}},\ y' = -\frac{2at}{1 - t^2},\ z' = 4at .$$

По формуле (2.30) находим

$$S = \int_0^{t_0} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int_0^{t_0} \frac{2a}{1 - t^2}dt = a\ln\frac{1 + t_0}{1 - t_0} = a\ln\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{z_0}}{\sqrt{2a} - \sqrt{z_0}}. ▲$$

2.45. Найти длину развертки круга $x = a(\cos\ t + t\sin\ t)$, $y = a(\sin\ t - t\cos\ t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Δ Так как $x'_t = at\cos\ t$, $y'_t = at\sin\ t$, то $\sqrt{x'^2 + y'^2} = at$. По формуле (2.31) длина развертки $S = \int_0^{2\pi} atdt = 2\pi a^2$. ▲

2.46. Найти длину *логарифмической спирали* $\rho = ae^{m\varphi}$ от некоторой ее точки (ρ_0, φ_0) до переменной точки (ρ, φ).

Δ Независимо от того, какая из величин ρ и ρ_0 больше, имеем по формуле (2.32)

$$S=\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{a^2e^{2m\varphi}+a^2m^2e^{2m\varphi}}\,d\varphi\right|=a\sqrt{1+m^2}\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi}e^{m\varphi}\,d\varphi\right|=$$
$$=a\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|e^{m\varphi}-e^{m\varphi_0}\right|=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|\rho-\rho_0\right|=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\left|\Delta\rho\right|,$$
т.е. длина дуги логарифмической спирали пропорциональна приращению полярного радиуса дуги. ▲

2.47. Найти длину дуги кривой $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=4/3$.
Отв.: $112/27$.

2.48. Найти длину дуги кривой $y=\ln\cos x$, $x\in[0,\pi/4]$.

Отв.: $\ln tg\dfrac{3\pi}{8}$.

2.49. Найти длину дуги кривой $\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ от $x_1=a$ до $x_2=b$, $b>a$.

Отв.: $\ln\dfrac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$.

2.50. Найти длину дуги кривой $x=\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{1}{2}\ln y$, $y\in[1,2]$.

Отв.: $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

2.51. Найти длину дуги кривой $y=\dfrac{x}{6}\sqrt{x+12}$, $x\in[-11,-3]$.

Отв.: $25/3$.

2.52. Найти длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. **Отв.:** $8a$.

2.53. Найти длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.
Отв.: $6a$.

2.54. Найти длину дуги кардиоиды $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.
Отв.: $16a$.

2.55. Найти длину дуги кривой :

1)* $x=a(\cos t+\ln tg(t/2))$, $y=a\sin t$, $0<t_0\le t\le\pi/2$ (*трактриса*).

2) $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(t^2-2)\cos t-2t\sin t$, $0\le t\le\pi$.

Отв.: 1) $-a\ln\sin t_0$. 2) $\pi^3/3$.

2.56. Найти длину дуги кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a>0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Отв.: $8a$.

2.57. Найти длину дуги кривой $\rho = a\sin^3(\varphi/3)$.

Отв.: $\dfrac{3}{2}\pi a$.

2.58. Найти длину отрезка прямой линии $\rho = a\sec(\varphi - \pi/3$ $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Отв.: $4a\sqrt{3}/3$.

2.59. Найти длину замкнутой кривой $\rho = a\sin^4(\varphi/4)$.

Отв.: $16a/3$.

2.60. Найти длину замкнутой кривой $\rho = 2a(\sin\varphi + \cos\varphi)$.

Отв.: $2\sqrt{2}\pi a$.

Объем тела выражается интегралом

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \qquad (2.34)$$

где $S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси X точке с абсциссой x, $x \in [a,b]$. Функция $S(x)$ предполагается известной непрерывной $\forall x \in [a,b]$.

2.61. Найти объем эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Δ Любое сечение эллипсоида плоскостью $x = const$, $|x| \le a$, есть эллипс

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - x^2/a^2\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - x^2/a^2\right)} = 1$$

с полуосями

$$A = b\sqrt{1 - x^2/a^2},\ B = c\sqrt{1 - x^2/a^2}.$$

Так как площадь эллипса равна πAB, то $S(x) = \pi bc\left(1 - x^2/a^2\right)$, $|x| \le a$

Тогда по формуле (2.34) объем эллипсоида

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

В частности, при $a = b = c$ получим объем шара $V_ш = \dfrac{4}{3}\pi a^3$. ▲

2.62. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

1) $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1,\ z = y,\ z = 0,\ (y \geq 0)$;

2) $x^2/16 + y^2/9 + z^2/4 = 1,\ z = 0,\ z = 1$;

3) $x^2/3 + y^2/4 = 1,\ z = y\sqrt{3},\ z = 0,\ (y \geq 0)$;

4) $x^2/81 + y^2/25 - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 2$;

5) $x^2/27 + y^2/25 = 1,\quad z = y\sqrt{3},\ z = 0,\ (y \geq 0)$;

6) $x^2 + y^2/4 - z^2 = 1,\ z = 0,\ z = 3$.

Отв.: **1)** 2. **2)** 11π. **3)** 8. **4)** 210π. **5)** 50. **6)** 128π.

2.63.* Найти объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b, верхнее ребро равно C, а высота равна h.

Отв.: $bh(C + 2a)/6$..

2.64.* Найти объем обелиска, параллельные основания которого являются прямоугольниками со сторонами A, B, a, b, а высота равна h.

Отв.: $h[B(a + 2A) + b(A + 2a)]/6$.

2.65.* Найти объем усеченного конуса, основаниями которого являются эллипсы с полуосями A, B и a, b, а высота равна h.

Отв.: $\pi h[B(a + 2A) + b(A + 2a)]/6$.

Объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси X криволинейной трапеции и ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, осью X и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ $(x < b)$, выражается интегралом

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx. \tag{2.35}$$

Объем тела V_x, образованного вращением вокруг оси X фигуры, ограниченной кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ $(0 \leq y_1(x) \leq y_2(x))$ и отрезками прямых $x = a$, $x = b$, выражается интегралом.

$$V_x = \pi \int_a^b \left(y_2^2(x) - y_1^2(x)\right)dx. \tag{2.36}$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где функция $x(t)$ имеет непрерывную неотрицательную производную на $[\alpha, \beta]$ и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, а функция $y(t)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha, \beta]$, то объем V_x тела, образованного вращением вокруг оси X фигуры, равен

$$V_x = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)\,dt. \tag{2.37}$$

Если функция $x(t)$ убывает и $x(\alpha)=b$, $x(\beta)=a$, то при тех же прочих условиях

$$V_x = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)x'(t)dt . \qquad (2.38)$$

Для тел, образованных вращением фигуры вокруг оси Y, при аналогичных предположениях относительно данных функций верны соответственно следующие формулы для объемов:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy . \qquad (2.39)$$

$$V_y = \pi \int_c^d \left(x_2^2(y) - x_1^2(y)\right)dy . \qquad (2.40)$$

$$V_y = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)y'(t)dt . \qquad (2.41)$$

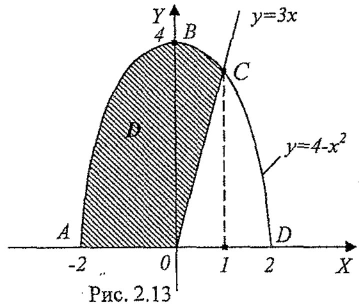

Рис. 2.13

2.66. Фигура D, ограниченная дугой параболы $y = 4 - x^2$, отрезком $[-2,0] \subset X$ и отрезком прямой $y = 3x$, вращается вокруг оси X. Найти объем тела вращения.

Δ Решив систему $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, находим точку C пересечения параболы и прямой (рис 2.13): $x_1 = 1$, $x_2 = -4 \Rightarrow \ x_c = 1$.

Искомый объем V_x равен разности объемов V_1 и V_2 тел, образованных вращением трапеции $ABCD$ и ΔOCD. По формуле (2.35) находим

$$V_1 = \int_{-2}^{1} \left(4 - x^2\right)^2 dx = \frac{153}{5}\pi ,$$

$$V_2 = \int_{1}^{2} (3x)^2 dx = 3\pi .$$

Тогда $V_x = V_1 - V_2 = 138\pi/5$. ▲

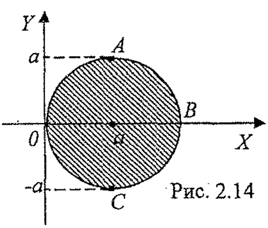

Рис. 2.14

2.67. Найти объем тела, образованного вращением круга $(x-a)^2 + y^2 \le a^2$ вокруг оси Y (рис. 2.14).

Δ Дуги AOC и ABC являются графиками функций $x_1(y) = a - \sqrt{a^2 - y^2}$ и $x_2 = a + \sqrt{a^2 + y^2}$, $|y| \le a$. Объем V_y тела вращения найдем по формуле (2.40):

$$V_y = \pi \int_{-a}^{a} \left(x_2^2(y) - x_1^2(y)\right)dy = 4\pi a \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\,dy = |y = a\sin t| = 4\pi a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 2\pi^2 a^3 . ▲$$

2.68. Найти объем тела, образованного вращением астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$, вокруг оси X.

Δ Астроида симметрична относительно X и Y, поэтому искомый объем V_x равен $2V$, где V - объем тела вращения криволинейного треугольника AOB (рис. 2.15) вокруг оси X. По формуле (2.38) находим

$$V = -\pi \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^6 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt = -3\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2 t\right)^3 \cos^2 t dt \cdot (\cos t) = \frac{16}{105}\pi a^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_x = 2V = 32\pi a^3 / 105 \ . \blacktriangle$$

2.69. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси L ($L = X$ или $L = Y$):

1) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $L = X$;

2) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$, $L = Y$;

3) $y = \sin x$ (одной волной), $y = 0$, $L = X$;

4) $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$, $L = Y$;

5) $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$, $L = X$.

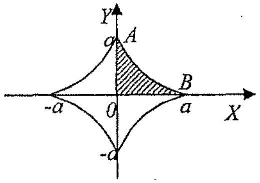

Рис. 2.15

Отв.: **1)** 12π. **2)** $(64/5)\pi$. **3)** π^2. **4)** $(64/3)\pi$. **5)** $(4/3)\pi a^3$.

2.70. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси X фигуры, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 1$ и параболой $y^2 = (3/2)x$.

Отв.: $(19/48)\pi$.

2.71. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси X петли кривой $x = at$, $y = a\left(t - t^3/3\right)$.

Отв.: $(4/3)\pi a^3$.

2.72.* Вычислить объемы тел, полученных вращением лемнискаты $\left(x^2 + y^2\right) = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ вокруг осей X и Y.

Отв.: $\pi^2 a^3 4\sqrt{2}$; $\left(\pi a^3/4\right)\left[\sqrt{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) - 2/3\right]$.

Пусть $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ – непрерывно дифференцируемая функция. Площадь S поверхности, образованной вращением графика этой функции вокруг оси X, равна

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}dx \ . \qquad (2.42)$$

Если в полуплоскости $y \ge 0$ кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$ функции, то площадь S поверхности, образованной вращением данной кривой вокруг оси X, равна

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt . \qquad (2.43)$$

Если же кривая расположена в полуплоскости $y \le 0$, то

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)|\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt . \qquad (2.44)$$

При аналогичных условиях площадь S поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси Y, соответственно равна

$$S = 2\pi \int_{c}^{d} |x(y)|\sqrt{1 + x'^2(y)}\,dy . \qquad (2.45)$$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt , \ (x(t) \ge 0). \qquad (2.46)$$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)|\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt , \ (x(t) \le 0). \qquad (2.47)$$

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярного луча кривой $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \le \varphi_1 \le \varphi \le \pi$, равна

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi , \qquad (2.48)$$

где $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая на $[\varphi_1, \phi_2]$ функция.

При этом же условии площадь поверхности, образованной вращением вокруг луча $\varphi = \pi/2$ кривой $\rho = \rho(\varphi)$, $-\pi/2 \le \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \le \pi/2$, равна

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\cos\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi . \qquad (2.49)$$

2.73.* Найти площадь поверхности, образованной при вращении дуги параболы $2ay = x^2 - a^2$, $0 \le x \le 2\sqrt{2}a$ (рис. 2.16), 1) вокруг оси X; 2) вокруг оси Y.

Δ 1) По формуле (2.42) имеем

$$S = 2\pi \int_{0}^{2\sqrt{2}a} |y(x)|\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx = 2\pi \int_{0}^{2\sqrt{2}a} \left|\frac{x^2 - a^2}{2a}\right|\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}dx .$$

Введем замену $x = at$ и учтем, что если $0 \le x \le a$, то $|x^2 - a^2| = -(x^2 - a^2)$, а если $x \ge a$, то $|x^2 - a^2| = x^2 - a^2$. Тогда

$$S = \pi a^2\left(-\int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{2\sqrt{2}} f(t)\ \ dt\right), \qquad (2.50)$$

где $f(t) = (t^2 - 1)\sqrt{1 + t^2}$.

Первообразную $F(t)$ функции $f(t)$ легко найти с помощью замены $t = sh\,\varphi$, в результате получим

$$F(t)=\frac{1}{8}t\sqrt{1+t^2}\left(2t^2-3\right)-\frac{5}{8}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$$

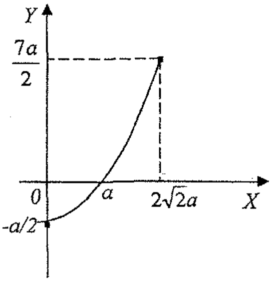

Рис. 2.16

Из (2.50) имеем

$$S=\pi a^2\left(-F(1)+F(0)+F\left(2\sqrt{2}\right)-F(1)\right)=$$

$$=\pi a^2\left(F(0)+F\left(2\sqrt{2}\right)-2F(1)\right).$$

Но $F(0)=0$,

$$F\left(2\sqrt{2}\right)=39\sqrt{2}/4-\frac{5}{8}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right),$$

$$F(1)=-\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{5}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Отсюда найдем

$$S=\pi a^2\left(\frac{39\sqrt{2}}{4}-\frac{5}{8}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{5}{4}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=10\pi a^2\sqrt{2}.$$

2) Считая кривую заданной параметрически уравнениями $x = x$, $2ay = a^2 - x^2$, по формуле (2.46) находим

$$S=2\pi\int_0^{2\sqrt{2}a}x\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=2\pi\int_0^{2\sqrt{2}a}x\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}dx=\pi a^2\frac{2}{3}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}\Bigg|_0^{2\sqrt{2}a}=\frac{52}{3}\pi a^2.\ \blacktriangle$$

2.74.* Прямая $y = a$ пересекает дугу циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, в точках A и B (рис. 2.17). Найти площадь поверхности, образованной при вращении дуги AB циклоиды вокруг прямой $y = a$.

Δ Точки A и B соответствуют значения параметра $t = \pi/2$ и $t = 3\pi/2$, дуга AB – значениям $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Площадь поверхности вращения найдем по формуле

$$S=2\pi\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(y(t)-a\right)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,\quad (2.51)$$

аналогичной (2.43). Здесь вместо стоящего в (2.43) расстояния $y(t)$ от точки кривой до оси X (оси вращения) стоит расстояние $y(t)-a$, от точки кривой до прямой $y = a$, являющейся в данном случае осью вращения (рис. 2.17).

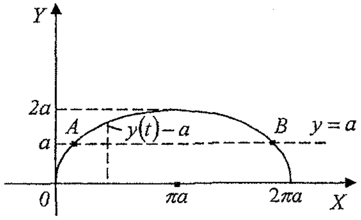

Рис. 2.17

Находим: $y(t)-a=-a\cos t$,

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}=2a\sin(t/2),\ t\in[\pi/2, 3\pi/2].$$

По формуле (2.51) получаем

$$S = -4\pi a^2 \int_{\pi/2}^{2\pi/2} \cos t \sin \frac{t}{2} dt = \left| \cos \frac{t}{2} = z \right| =$$

$$= -8\pi a^2 \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(2z^2 - 1\right) dz = -8\pi a^2 \left(\frac{2}{3} z^3 - z \right) \Bigg|_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} =$$

$= 16\sqrt{2}\pi a^2 / 3$.▲

2.75. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вокруг полярной оси.

Δ Действительные значения для ρ получаются при $\cos 2\varphi \geq 0$, т.е. при $|\varphi| \leq \pi / 4$ (правая ветвь лемнискаты), или при $\pi \leq \varphi \leq (5/4)\pi$ (левая ветвь лемнискаты). Тогда

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \left(\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \right)^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} .$$

Кроме того, $y = \rho \sin \varphi = a \sin \varphi \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Искомая площадь поверхности S равна удвоенной площади поверхности, образуемой вращением правой дуги. Поэтому

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2} d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2\pi a^2 \left(2 - \sqrt{2}\right). \ ▲$$

2.76. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси X .

Отв.: $12\pi a^2 / 5$.

2.77. Вычислить площадь поверхности образованной вращением вокруг оси X замкнутого контура $OABCO$, состоящего из кривых $y = x^2$ и $x = y^2$ (рис 2.18).

Отв.: $\dfrac{67\sqrt{5}\pi}{48} - \dfrac{\pi}{32} \ln\left(2 + \sqrt{5}\right) - \dfrac{\pi}{6}$.

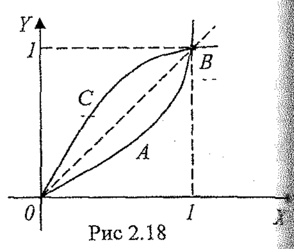

Рис 2.18

2.78. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением:

а) части кривой $y = x^2 / 2$, отсеченной прямой $y = 3 / 2$, вокруг оси Y ;

б) части кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$, вокруг оси X ;

Отв.: а) $14\pi / 3$; б) $62\pi / 3$.

2.79. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси L ($L = X$ или $L = Y$):

1) дуги кривой $x = t^2$, $x = (t/3)\cdot(t^3 - 3)$, заключенной между точками пересечения ее с осью X, $L = X$; **Отв.:** 12π.

2) окружности $x^2 + (y-b)^2 = r^2$, $0 < r < b$, $L = X$; **Отв.:** $4\pi^2 rb$.

3) дуги кривой $y = x^3/3$, $|x| \le 2$, $L = X$; **Отв.:** $(34\sqrt{17} - 2)\pi/9$.

4) дуги параболы $x^2 = 4ay$, заключенной между точками ее пересечения с прямой $y = 3a$, $L = Y$; **Отв.:** $56\pi a^2/3$.

5) дуги кривой $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ от $t = 0$ до $t = \pi/2$, $L = X$; **Отв.:** $2\sqrt{2}\pi(e^{\pi} - 2)/2$.

6) кардиоиды $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, $L = X$; **Отв.:** $128\pi a^2/5$.

7) кривой $\rho = 2a\sin\varphi$ вокруг полярной оси. **Отв.:** $4\pi^2 a^2$.

2.5. Физические применения определенного интеграла

Работа переменной силы. Давление жидкости на погруженную в нее пластинку. Кинетическая энергия вращающегося тела. Масса, статические моменты, моменты инерции плоской кривой и плоской фигуры.

Если непрерывная переменная сила $F(x)$ действует в направлении оси X, то работа силы на отрезке $[x_1, x_2]$ выражается интегралом

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx\,. \qquad (2.52)$$

Давление жидкости на вертикально погруженную в нее пластинку D, изображенную на рис. 2.19, выражается интегралом

$$P = \rho g \int_a^b f(x)\,dx\,. \qquad (2.53)$$

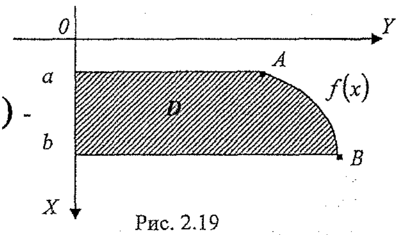

Рис. 2.19

Здесь и на рис. 2.19: ρ - плотность жидкости; g - ускорение свободного падения; $y = f(x)$ - уравнение линии AB, $x = a$ - верхний край погружения пластинки, $x = b$ - нижний край; ось Y расположена на поверхности жидкости.

2.80. Вычислить работу, которую нужно затратить на перекачивание жидкости через край котла, имеющего форму эллиптического параболоида $z = x^2/4 + y^2/9$ высотой $H = 4$ м и заполненного жидкостью плотностью $\rho = 0{,}8\,T/м^3$.

Δ Выделим на высоте z_i элементарный слой жидкости толщиной Δz_i (рис. 2.20), объем которого $\Delta V_i = \pi 2\sqrt{z_i} \ \ 3\sqrt{z_i} = \Delta z_i$, а масса $\Delta m_i = 6\pi\rho z_i \Delta z_i$, так как в горизонтальном сечении котла получается эллипс с полуосями $a = 2\sqrt{z_i}$, $b = 3\sqrt{z_i}$. Работа, затраченная на перекачивание жидкости из котла, выражается следующим пределом:

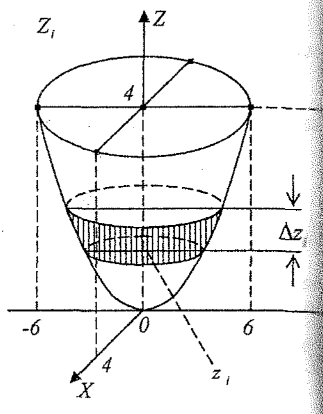

Рис. 2.20

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 6\pi\rho g z_i\left(H - z_i\right)\Delta z_i =$$

$$= \int_0^H 6\pi\rho g\left(H - z\right)dz = 6\pi\rho g\left(H\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= \pi\rho gH^3 = 64\pi\rho g \approx 1575,53 \text{ кДж.} \ \blacktriangle$$

2.81. Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из котла, имеющего форму полушара радиусом $R\left(\rho = 1\right)$. Отв. $\pi R^4 g / 4$.

2.82. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой H. Плотность песка ρ.

Отв.: $\pi\rho gR^2 H^2 / 12$.

2.83*. Цилиндрический бок заполнен жидкостью. Однородный цилиндр плавает, на половину погрузившись в жидкость основанием вниз. Площадь основания цилиндра в 3 раза меньше площади поперечного сечения бака, высота цилиндра равна H, вес G. Какую работу нужно совершить, чтобы погрузить цилиндр целиком в жидкость?

Отв.: $GH / 6$.

2.84. Вычислить работу, затрачиваемую на преодоление силы тяжести при построении правильной усеченной четырехугольной пирамиды, сторона верхнего основания которой равна 2 м, нижнего – 4 м, высота – 2 м. Материал, из которого строится пирамида, имеет удельный вес $\gamma = 24 кН / м^3$.

Отв.: 352 кДж.

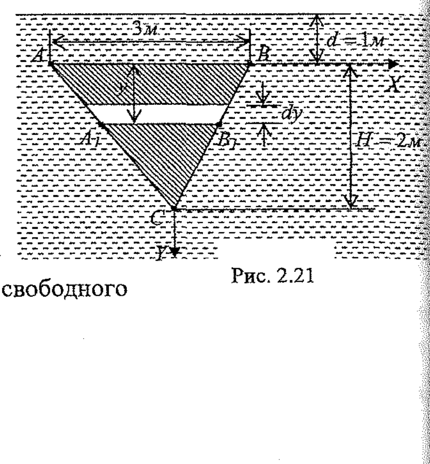

Рис. 2.21

По закону Паскаля давление Δp жидкости на площадь ΔS, погруженную на глубину h, выражается формулой $\Delta p = \rho gh\,\Delta S$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения.

2.85. Треугольная пластинка с основанием $a = 3\,м$ и высотой $H = 2$ погружена вертикально вершиной вниз в жидкость так, что основание параллельно поверхности жидкости и находится на расстоянии $d = 1\,м$ от поверхности. Плотность жидкости $\rho = 0{,}9T\ /\ м^3$. Вычислить силу давления жидкости на каждую из сторон пластинки.

Δ Прямыми, параллельными поверхности жидкости, разобьем треугольник на элементарные полоски шириной dy (рис. 2.21), отстоящие от поверхности жидкости на расстоянии $y + d$. Из подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеем $\dfrac{|A_1B_1|}{a} = \dfrac{H-y}{H} \Rightarrow |A_1B_1| = \dfrac{a}{H}(H-y)$,

т.е. приближенно площадь вырезанной полоски $dS = \dfrac{a}{H}(H-y)dy$, а давление на каждую из сторон полоски треугольной пластины

$$dp = \frac{a}{H}\rho\, g(y+d)(H-y)dy.$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от 0 до H, получаем

$$p = \int_0^H \frac{a}{H}\rho g(d+y)(H-y)dy = \frac{3}{2}\rho g\left(2y + \frac{y^2}{2} - y\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 5\rho g \approx 44{,}1\,\text{кН}. \ \blacktriangle$$

2.86. Определить давление воды $(\rho = 1)$ на вертикальную перегородку в канале, имеющую форму полукруга радиусом a, диаметр которого находится на поверхности воды (рис. 2.22).

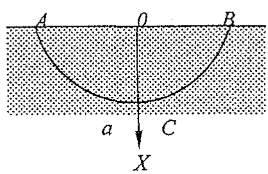

Рис. 2.22

Δ Это давление численно равно удвоенному давлению, испытываемому четвертью OBC круга. Так как уравнение дуги BC есть $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$,

то по формуле (2.51) искомое давление

$$\rho = 2g\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{2}{3}\left(a^2 - x^2\right)^{2/3} g\Bigg|_0^a = 2ga^3/3. \ \blacktriangle$$

2.87. Вычислить силу давления на пластину, вертикально погруженную в воду, считая, что удельный вес воды равен 9,81 кН/м^3 (результат округлить до целого числа). Форма, размеры и расположение пластины указаны на рисунке:

1) рис. 2.23; 2) рис. 2.24; 3) рис. 2.25;
4) рис. 2.26; 5) рис. 2.27; 6) рис. 2.28.

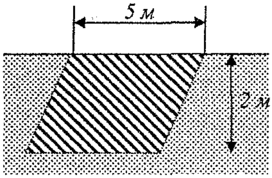

Рис. 2.23

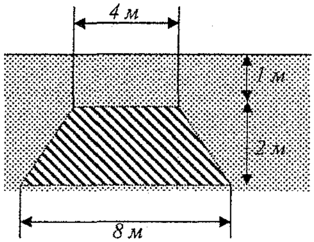

Рис. 2.24

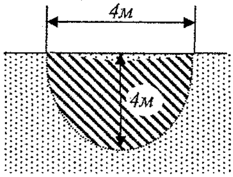

Рис. 2.25

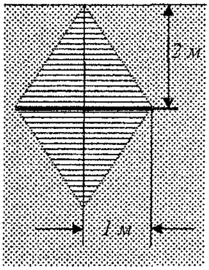

Рис. 2.26

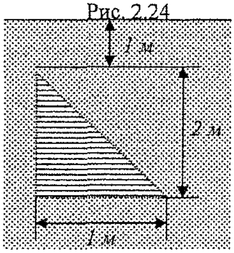

Рис. 2.27

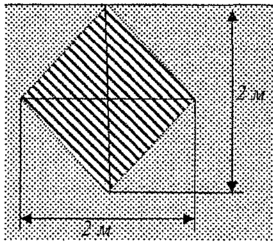

Рис. 2.28

Отв. (в кН) : **1)** 98; **2)** 248; **3)** 167; **4)** 78; **5)** 23; **6)** 20.

2.88. Вычислить *кинетическую энергию* однородного кругового конуса, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, если радиус основания конуса равен R, его высота H и плотность γ .

Δ Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω , равна $K = I\omega^2/2$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения. За элементарную массу dm примем массу полого цилиндра высотой h с внутренним радиусом r и толщиной стенок dr (рис 2.29). Тогда $dm = 2\pi rh\,\gamma dr$, $0 \le r \le R$.. Из подобия треугольников OCD и OAB .

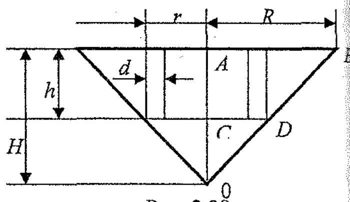

Рис. 2.29

Имеем

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \Rightarrow h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Следовательно, $dm = 2\pi\gamma H\left(1 - \frac{r}{R}\right)rdr$ и элементарный момент инерции dI равен

$$dI = dm \cdot r^2 = 2\pi\gamma H\left(1 - \frac{r}{R}\right)r^3\,dr .$$

Таким образом, момент инерции всего конуса равен

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^3\,dr = 2\pi ggH\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\pi\gamma HR^4,$$

а кинетическая энергия конуса равна $K = \dfrac{1}{20}\pi\gamma HR^4\omega^2$. ▲

2.89. Найти кинетическую энергию однородного шара радиусом R и плотностью γ, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра

Отв.: $4\pi\gamma\omega^2 R^5/15$.

2.90*. Найти кинетическую энергию пластинки, имеющей форму параболического сегмента и вращающейся вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью ω. Основание сегмента a, высота h, толщина пластинки d, плотностью материала γ.

Отв.: $\omega^2\gamma dha^3/60$.

2.91. Найти кинетическую энергию треугольной пластинки, вращающейся вокруг основания с угловой скоростью ω. Основание пластинки α, высота h, толщина l, плотность γ

Отв.: $\gamma alh^3\omega^2/24$.

2.92. Найти кинетическую энергию однородного кругового цилиндра плотностью γ с радиусом основания R и высотой H_1, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси.

Отв.: $\pi\omega^2\gamma R^4 H/4$.

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x), x \in [a,b]$, где $f(x)$– непрерывная на $[a,b]$ функция и имеет плотность $\rho = \rho(x)$, то *масса кривой* вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (2.52)$$

Статические моменты кривой относительно координатных осей равны соответственно

$$M_x = \int_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx; \qquad (2.53)$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x)f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \qquad (2.54)$$

Моменты инерции I_x и I_y относительно тех же осей X и Y вычисляются по формулам:

$$I_x = \int_a^b \rho(x)f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx, \qquad (2.55)$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x)\ x^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\ dx. \qquad (2.56)$$

Координаты x_c *и* y_c *центра масс* C вычисляются по формулам

$$X_c = \frac{M_t}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}. \qquad (2.57)$$

Если дуга кривой задана параметрически равенствами $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то в формулах (2.53)-(2.56) нужно сделать соответствующую замену переменных, выражение $\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ заменяется на $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$.

Если же кривая задана в полярной системе координат равенством $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то в этих же формулах нужно заменить $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, выражение $\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ заменить на $\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$.

2.93. Найти статические моменты, M_x, M_y, моменты инерции, I_x, I_y и координаты x_c, y_c, дуги цепной линии $y = ch\ x$, $x \in [0,1]$, плотность $\rho = 1$

Δ Имеем

$$M_x = \int_0^1 y\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \int_0^1 chx\sqrt{1+sh^2x}\,dx =$$

$$= \int_0^1 ch^2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+ch2x)\,dx == \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}sh2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}(2+sh2);$$

$$M_y = \int_0^1 x\sqrt{1+sh^2x}\,dx = \int_0^1 xch\ x\,dx =$$

$$= \int_0^1 xd\,(shx) = x\,shx\Bigg|_0^1 - \int_0^1 shx\ dx = sh\,1 - ch\,1 + 1;$$

$$I_z = \int_0^1 ch^3x\,dx = \int_0^1 \left(1+sh^2x\right)d\,(shx) = sh\,1 + \frac{1}{3}sh^3 1;$$

$$I_y = \int_0^1 x^2 ch\ x\,dx = \int_0^1 x^2 d\,(shx) = 3\,sh\,1 - 2\,ch\,1;$$

масса $m = \int_0^1 ch\ x\,dx = shx\Bigg|_0^1 = sh\,1.$

Тогда $x_c = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{sh\,1 - ch\,1 + 1}{sh\,1}$, $y_c = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{2+sh\,2}{4\,sh\,1}$. ▲

2.94. Найти статические моменты M_x и M_y плоской кривой (плотность $\rho = 1$):

1) $x/a + y/b = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$;

2) $y^2 = 2x,\ 0 \leq x \leq 2$;

3) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ y \geq 0,\ a > b$;

4) $x = a \sin^3 t,\ y = a \cos^3 t,\ 0 \leq t \leq \pi/2,\ a > b$.

5) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$;

6) $\rho = 2a \cos \varphi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2$;

7) $\rho = a e^{\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Отв.: 1) $M_x = b\sqrt{a^2 + b^2}/2,\ M_y = a\sqrt{a^2 + b^2}/2$;

2) $M_x = 0,\ M_y = \dfrac{9\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{8}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$;

3) $M_x = b\left(b + \dfrac{a}{e}\left(\sqrt{2} + 5\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\right),\ e = \sqrt{a^2 + b^2}/a$;

4) $M_x = M_y = 3a^2/5$;

5) $M_x = 32a^2/3,\ M_y = 8\pi a^2$;

6) $M_x = 2a^2,\ M_y = \pi a^2$;

7) $M_x = \dfrac{\sqrt{2}}{5}\left(1 - e^{4\pi}\right)a^2,\ M_y = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}\left(e^{4\pi} - 1\right)a^2$.

2.95. Найти координаты x_c и y_c центра масс кривой (плотность $\rho = 1$):

1) $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ |\varphi| \leq \alpha \leq \pi$;

2) $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y,\ 1 \leq y \leq 2$;

3) $\rho = a(1 + \cos\varphi),\ 0 \leq \varphi \leq \pi$;

4) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

Отв.: 1) $x_c = (\sin\alpha)/\alpha,\ y_c = 0$;

2) $x_c = \dfrac{27 - 16\ln 2 - 4\ln^2 2}{8(3 + \ln 4)},\quad y_c = \dfrac{20}{3(3 + \ln 4)}$;

3) $x_c = y_c = 4a/5$;

4) $x_c = \pi a,\ y_c = 4a/3$.

2.96. Найти момент инерции I_x кривой:

1) $y = e^2,\ 0 \leq x \leq 1/2$;

2) $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ 0 \leq \varphi \leq \alpha \leq 2\pi$;

3) $x^2 + (y - a)^2 = R^2,\ a > R$..

Отв.: 1) $\frac{1}{3}\left((1+e)^{3/2}-2\sqrt{2}\right)$; 2) $\frac{1}{4}(2\alpha-\sin 2\alpha)R^3$;

3) $\pi R\left(2a^2+R^2\right)$.

2.97. Найти моменты инерции I_x и I_y одной арки циклоиды: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

Отв.: $I_x=256a^3/15$, $I_y=16\left(\pi^2-\frac{128}{45}\right)a^3$.

Пусть плоская фигура D задана неравенствами $y_1(x)\le y\le y_2(x)$, $0\le x\le b$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – непрерывные на $[a,b]$ функции. Пусть на D распределена масса с плотностью $\rho(x)$. Масса m фигуры, статические моменты M_x и M_y, а также моменты инерции I_x и I_y относительно осей X и Y вычисляются по следующим формулам :

$$m=\int_a^b\left(y_2^2(x)-y_1^2(x)\right)\rho(x)\,dx; \tag{2.58}$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b\left(y_2^2(x)-y_1^2(x)\right)\rho(x)\,dx; \tag{2.59}$$

$$M_y=\int_a^b x\left(y_2(x)-y_1(x)\right)\rho(x)\,dx; \tag{2.60}$$

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b\left(y_2^3(x)-y_1^3(x)\right)\rho(x)\,dx; \tag{2.61}$$

$$I_y=\int_a^b x^2\left(y_2(x)\right)-y_1(x)\rho(x)dx. \tag{2.62}$$

Пусть сектор задан в полярных координатах неравенствами $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$, $0\le\rho\le\rho(\varphi)$, где $0<\varphi_2-\varphi_1\le 2\pi$, $\rho(\varphi)$– непрерывная на $[\varphi_1,\varphi_2]$ функция, и пусть на секторе распределена масса с плотностью $\delta(\varphi)$, тогда:

$$m=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\delta(\varphi)\,d\varphi, \tag{2.63}$$

$$M_x=\frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3(\varphi)\sin\varphi\,\delta(\varphi)\,d\varphi, \tag{2.64}$$

$$M_y=\frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^3(\varphi)\cos\varphi\,\delta(\varphi)\,d\varphi, \tag{2.65}$$

$$I_x = \frac{1}{4}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^4(\varphi)\sin^2\varphi\,\delta(\varphi)\,d\varphi\,, \qquad (2.66)$$

$$I_y = \frac{1}{4}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^4(\varphi)\cos^2\varphi\,\delta(\varphi)\,d\varphi\,. \qquad (2.67)$$

Координаты центра масс вычисляются по формулам (2.57).

2.98. Фигура ограничена параболой $y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, полуокружностью $x^2 + y^2 = r^2$ и осью x (рис. 2.29). Считая фигуру однородной с плотностью $\delta = 1$, найти координаты центра масс фигуры и момент инерции относительно оси y.

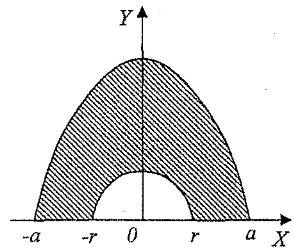

Рис. 2.30

Δ Указанные величины найдем по формулам (2.57) – (2.60), (2.62), полагая $y_2 = h\left(1 - x^2/a^2\right)$, $y_1(x) = 0$ при $r < |x| \le a$, $y_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ при $|x| \le r$. По формуле (2.58) для массы фигуры имеем $m = \int_{-a}^{a}(y_2(x) - y_1(x))dx = 2\int_0^a (y_2(x) - y_1(x))dx$, так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ четные функции, и, учитывая, что $y_1(x) = 0$ при $r \le x \le a$, получаем $m = 2\int_0^a h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx - 2\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$.

Вычислив эти интегралы (для второго интеграла ввести подстановку $x = r\sin t$), получим

$$m = \frac{1}{6}\left(8ah - 3\pi r^2\right).$$

Из формулы (2.60) имеем

$M_y = \int_{-a}^{a} x(y_2(x) - y_1(x))dx = 0$, так как $x(y_2(x) - y_1(x))$ – нечетная функция. Отсюда $x_c = M_y / m = 0$, что и следовало ожидать, ибо центр масс находится на оси y – оси симметрии фигуры.

По формуле (2.59) находим

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(y_2^2(x) - y_1^2(x)\right)dx = \int_0^a h^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx - \int_0^r \left(r^2 - x^2\right)\,dx =$$

$$= \frac{2}{15}\left(4ah^2 - 5r^3\right).$$

Отсюда

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{4\left(4ah^2 - 5r^3\right)}{5\left(8ah - 3\pi r^2\right)}.$$

Момент инерции I_y находим по формуле (2.62):

$$I_y = \int_{-a}^{a} x^2\left(y_2(x) - y_1(x)\right)dx = 2\int_0^a x^2 h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx - 2\int_0^r x^2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{4}{15}a^3h - \frac{\pi}{8}r^4 . ▲$$

2.99. Найти статические моменты M_x и M_y фигуры $(\rho = 1)$, ограниченной кривыми:

1) $x/a + y/b = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ a > 0,\ b > 0;$
2) $y = \sin x,\ |x| \le \pi/2,\ y = 0;$
3) $y = 2/\left(1 + x^2\right),\ y = x^2,\ x = 0,\ x \ge 0;$
4) $x = a\sin t,\ y = b\cos t,\ |t| \le \pi/2,\ y = 0;$
5) $x = a(t - \sin t),\ y = b(1 - \cos t),\ 0 \le t \le \pi/2,\ y = 0;$
6) $\rho = a\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi;$ 7) $\rho = a(1 + \cos\varphi),\ |\varphi| \le \pi .$

Отв.: 1) $M_x = ab^2/6,\ M_y = a^2b/6;$

2) $M_x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{8},\ M_y = \pi\left(3\sqrt{3} - \pi/6\right);$

3) $M_x = 2/5 + \pi/4,\ M_y = \ln 2 - 1/4 .$

4) $M_x = 2ab^2/3,\ M_y = 0;$

5) $M_x = 5\pi a^3/2,\ M_y = 3\pi^2 a^3;$

6) $M_x = \pi a^3\left(\pi^2 - 6\right)/3,\ M_y = a^3\left(4 - \pi^2\right);$

7) $M_x = 0,\ M_y = 5\pi a^3/4 .$

2.100. Найти координаты x_c и y_c центра масс фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y^2 = x^3/a,\ x = a,\ y = 0,\ a > 0,\ y \ge 0;$
2) $y = \cos x,\ |x| \le \pi/2,\ y = 1/2;$
3) $y^2 = 2px,\ x^2 = 2py;$
4) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x = 0,\ y = 0;$
5) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ y = 0;$
6) $\rho = a\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ \varphi = 0,\ \varphi = \pi;$
7) $\rho^2 = a^2(\cos 2\varphi)$ (правая петля);
8) $\rho = a\sin 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/2 .$

Отв.: 1) $x_c = 5a/7$, $y_c = 5a/16$; 2) $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{2\pi + 3\sqrt{3}}{8\left(3\sqrt{3} - \pi\right)}$;
3) $x_c = y_c = 9\rho/10$; 4) $x_c = y_c = 256\, a/315\pi$; 5) $x_c = \pi a$,
$y_c = 5a/6$; 6) $x_c = 10/21$, $y_c = 5/3$; 7) $x_c = \pi a\sqrt{2}/8$, $y_c = 0$;
8) $x_c = 0$, $y_c = \pi/2$.

2.101. Найти момент инерции:

а) однородного круга радиусом R относительно его диаметра;

б) однородного треугольника с основанием a и высотой h относительно: 1) оси, содержащей его основание; 2) оси, проходящей через вершину параллельно основанию; 3) оси, проходящей через центр масс треугольника параллельного основанию.

Отв.: а) $\pi R^4/4$; б) 1. $ah^3/12$. 2. $ah^3/4$. 3. $ah^3/36$.

2.102. Найти моменты инерции I_x, I_y фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y/h = x^2/a^2$, $y = h$; 2) $ay = 2ax$, $y = 0$.

Отв.: 1) $I_x = 2ah^3/7$, $I_y = 4a^3h/15$; 2) $I_x = 32a^4/105$, $I_y = 8a^4/5$.

3. Несобственные интегралы

3.1. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Понятие несобственного интеграла 2-го рода (от неограниченных функций). Основные формулы для несобственных интегралов 2-го рода (линейность, формула Ньютона — Лейбница, замена переменной интегрирования, интегрирование неравенств). Признаки сходимости и расходимости для неотрицательных функций (признаки сравнения). Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов 2-го рода. Признаки Дирихле и Абеля. Главное значение несобственного интеграла 2-го рода.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,b)$ и неограниченна при $x \to b-0$, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$. Точка b при этом называется *особой* для функции $f(x)$. Будем считать, что $\forall\, \varepsilon > 0$ на отрезке функция $f(x)$ интегрируема, т.е. существует интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$.

Если существует

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,, \tag{3.1}$$

то этот предел называется *несобственным интегралом от функции* $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, или *несобственным интегралом 2-го рода* и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (3.2)$$

Аналогично, если функция $f(x)$ имеет особенность в точке $x=a$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (3.3)$$

Если же особой точкой функции $f(x)$ является точка c, $a<c<b$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon',\varepsilon''\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)dx\right). \qquad (3.4)$$

Несобственный интеграл второго рода называется *сходящимся* (сх.), если существует конечный предел (3.2), или (3.3), или (3.4). В противном случае интеграл называется *расходящимся* (расх.).

Для непрерывной неотрицательной функции $y=f(x)$, $x\in[a,b)$, сходящийся несобственный интеграл (3.1) равен площади неограниченной криволинейной трапеции D (рис. 3.1).

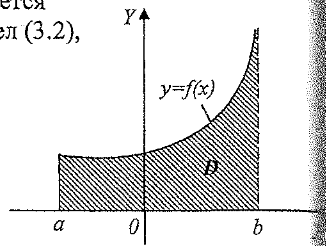

Рис. 3.1

Аналогично трактуются сходящиеся несобственные интегралы (3.3) и (3.4) [1].

3.1. Вычислить интегралы (или установить их расходимость):

а) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; б) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$; в) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$;

Δ а) Подынтегральная функция $f(x)=1/\left(x\sqrt[3]{\ln x}\right)$ неограниченна в окрестности точки $x=1$. На любом же отрезке $[1+\varepsilon, e]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому по определению (3.3) имеем

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right) = \frac{3}{2}.$$

б) Подынтегральная функция $f(x)=1/\cos x$ неограниченна в окрестности точки $x=\pi/2$ и интегрируема на любом отрезке $[0,\pi/2-\varepsilon]$. По определению (3.2) имеем

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi/2-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

в) Подынтегральная функция $f(x)=1/\left|\sqrt{1-x^2}\right|$ неограниченна в окрестности точки $x=1$, являющейся внутренней точкой промежутка интегрирования. Поэтому

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}+\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}.$$

Вычислим каждое слагаемое в отдельности.

Если $0\le x<1$, то

$$\int\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)-0\right)=\pi/2.$$

Если $1<x\le 2$, то

$$\int\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Big|_{1+\varepsilon}^2=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\left(2+\sqrt{3}\right)-\ln\left(1+\varepsilon+\sqrt{(1+\varepsilon)^2+1}\right)\right]=\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Следовательно, $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}=\frac{\pi}{2}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$ ▲

3.2. В [1] установлено, что интеграл $\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha\ge 1$.

3.3. Вычислить интегралы и установить их расходимость:

1) $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$; 2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}dx$; 3) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-x^3}$;

4) $\displaystyle\int_0^{3a}\frac{2x\,dx}{\left(x^2-a^2\right)^{2/3}}$; 5) $\displaystyle\int_0^{2/\pi}\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$; 6) $\displaystyle\int_0^1\ln x\,dx$;

7) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$; 9) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{1/x}\frac{dx}{x^3}$;

10) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$; 11) $\displaystyle\int_0^2\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

Отв.: **1)** π; **2)**-625/187; **3)** расх.; **4)** $9a^{2/3}$; **5)** расх.; **6)** -1; **7)** $\pi^2/2$; **8)** $-3/2$; **9)** расх.; **10)** 4; **11)** $\pi+2$.

Для несобственных интегралов второго рода справедливы следующие *основные свойства*:

1°. *Линейность.* Если несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся, то $\forall\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ сходится интеграл $\int\limits_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx$, причем

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int\limits_a^b f(x)dx+\beta\int\limits_a^b g(x)\,dx. \qquad (3.5)$$

2°. ***Формула Ньютона-Лейбница.*** Если функция $f(x)$, $x\in[a,b)$ непрерывна и $F(x)$ какая-либо её первообразная, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^{b-0}=F(b-0)-F(a), \qquad (3.6)$$

где $\quad F(b-0)=\lim\limits_{b\to b-0}F(x).$

3°. ***Формула замены переменной.*** Пусть $f(x)$, $x\in[a,b)$, непрерывная, а $\varphi(t)$, $t\in[\alpha,\beta)$, непрерывно дифференцируемая функция, причем $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)<\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi' dt. \qquad (3.7)$$

Формула (3.7) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в нее интегралов. В случае расходимости одного из интегралов расходится и другой.

4°. ***Формула интегрирования по частям.*** Если $u(x)$, $v(x)$, $x\in[a,b)$– непрерывно дифференцируемые функции и существует $\lim\limits_{x\to b-0}(uv)$, то

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu, \qquad (3.8)$$

где $\quad uv\Big|_a^b=\lim\limits_{x\to b-0}(uv)-u(a)v(a).$

Формула (3.8) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из входящих в неё интегралов. Если один из интегралов расходится, то расходится и другой.

3.4. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^1\frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int\limits_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; 3) $\int\limits_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Δ 1) Используя свойство 1° линейности несобственного интеграла, имеем

$$\int_0^1 \frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

На промежутке $(0,1]$ первообразными являются функции $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}$, $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$, $2\sqrt{x}$.

Тогда по формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}\Big|_{+0}^{1} = \frac{6}{5}; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{+0}^{1} = \frac{3}{2}; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{+0}^{1} = 2.$$

Значит, $$\int_0^1 \frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}} = \frac{6}{5} + 3 + 2 = \frac{31}{5}.$$

2) В данном несобственном интеграле введем замену переменной:

$$1-x=t^2,\ t>0 \Rightarrow x=1-t^2,\ dx=-2tdt.$$

Новые пределы интегрирования $\alpha=1$, $\beta=0$. Значит,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(\alpha-x)\sqrt{1-x}} = -2\int_1^0 \frac{tdt}{t\left(t^2+1\right)} = \pi/2.$$

3) Интегрируем по частям:

$$u=\ln x,\ dn=dx/x,$$
$$dv=dx/\sqrt{x},\ v=2\sqrt{x},$$

Значит,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_{+0}^{1} - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\Big|_{+0}^{1} = -4. \blacktriangle$$

3.5. Вычислить интегралы:

1)* $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ (ввести замену $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$, $\quad t\in(0,\pi/2)$);

2)* $I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x dx$ (проинтегрировать по частям и в последующем ввести замены $x=2t$, $t=\pi/2-u$);

3) $\int_{-0.5}^{-0.25}\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$; 4) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; 5) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(16-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$;

6) $\int_{-a}^a \frac{dx}{a^2+b^2-2bx}, a>0, b\ge 0$; 7) $\int_a^b x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$; 8) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{tgx}dx$;

9) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$; 10) $\int_{-1}^1 x^3\ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

Отв.: **1)** π ; **2)** $-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$; **3)** $2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$; **4)** $\dfrac{\pi}{2}-\arcsin(3/4)$; **5)** $\pi/\left(4\sqrt{15}\right)$;

6) 2, если $b \le 2a$; $(2a)b$, если $b > a$; **7)** $\dfrac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$; **8)** $\pi/\sqrt{2}$; **9)** $2\sqrt{\pi}$.

3.6. Вычислить площади криволинейных трапеций, образованных графиками функций:

1) $y = 1/\sqrt{2-5x}$, $x \in [0,2/5)$; 2) $y = x/\sqrt{(x-a)(b-x)}$, $x \in (a,b)$;

3) $y = 1/\left(x\sqrt{\ln x}\right)$, $x \in (1,e)$; 4) $y = \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, $x \in [0,1)$.

Отв.: **1)** $2\sqrt{2}/5$; **2)** $\pi(a+b)/2$; 3) 2; 4) 2.

3.7.* Найти площадь фигуры, ограниченной заданной кривой и её асимптотой:

1) $1xy^2 = 8-4x$; 2) $(x+1)y^2 = x, x < 0$;

3) $(4-x)y^2 = x^3$; 4) $x = \cos 2t, y = \cos 2t tgx$, $t \in [\pi/4, 3\pi/4]$.

Отв.: **1)** 4π ; **2)** $8/3$; **3)** 12π ; **4)** $2+\pi/2$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны на $[a,b)$ и интегрируемы на каждом отрезке $[a,\xi]$, $\xi < b$. Тогда :

I. Если функции f и g на $[a,b)$ удовлетворяют неравенству $f \le g$, то:

а) из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$;

б) из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Сформулированный признак называется *признаком сравнения.*

II. а) Если $g > 0$ на $[a,b)$ и существует $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, $k \ne 0$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

б) В частности, если f эквивалентна g при $x \to b-0$, то функции f и g одновременно либо интегрируемы, либо неинтегрируемы на $[a,b)$.

Признак II называется *предельным знаком сравнения.*

3.8. Исследовать на сходимость интегралы:

$$1)\ I_1=\int_0^1\frac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}}dx;\qquad 2)\ I_2=\int_0^1\frac{dx}{1-x^3}dx;$$

$$3)\ I_3=\int_0^1\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}dx.$$

Δ 1) На $(0,1)$ справедливо неравенство $0\le\dfrac{\cos^2(1/x)}{\sqrt{x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Интеграл же $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (см. пример 3.2). Тогда по признаку сравнения сходится и интеграл I_1.

2) В левой окрестности точки $x=1$ функция $f(x)=1/\left(1-x^3\right)$ неограниченна. В качестве функции сравнения возьмем функцию $g(x)=1/(1-x)$. Так как $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1-0}\frac{1-x}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{3}$, то из расходимости интеграла $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1-x}$ (см. пример 3.2) по признаку сравнения II, а следует расходимость и интеграла I_2.

3) Подынтегральная функция неограниченна при $x\to+0$. При $x\to+0$ имеем

$$\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}\sim\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Но интеграл $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ сходится. Тогда по признаку сравнения II, б сходится и интеграл I_3. ▲

3.9. Исследовать на сходимость интегралы:

$$1)\ \int_0^8\frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}};\qquad 2)\ \int_0^1\frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}};\qquad 3)\ \int_0^\pi\frac{\sin x}{x^2}dx;$$

$$4)\ \int_0^\pi\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}};\qquad 5)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}}dx;$$

$$6)\ \int_1^3\frac{dx}{\sqrt{tg\left(x^3-7x^2+15x-9\right)}};$$

$$7)\ \int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x\left(e^x-e^{-x}\right)}};\qquad 8)\ \int_0^\pi\frac{shxdx}{e^{x^2}-\cos x};\qquad 9)\ \int_0^1\frac{\ln xdx}{\sqrt{x(1-x)^3}}.$$

Отв.: 1) *Сх*.; 2) *сх*.; 3) *сх*.; 4) *ðасх*.; 5) *сх*.; 6) *ðасх*.; 7) *сх*.; 8) *ðасх*.; 9) *ñх*.

3.10. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл:

$$1)\ \int_0^{\pi}\frac{1-\cos x}{x^{\alpha}}dx; \qquad 2)\ \int_0^{1}\frac{6e^{2x^2}+24\cos x-13x^4-30}{\sin^{\alpha}x}dx;$$

$$3)\ \int_0^{1}\frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1+1}}{chx-\cos x}dx; \qquad 4)\ \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 2x-e^{-4x^2}}{x^{\alpha}tgx}dx.$$

Отв.: 1) $\alpha<3$; 2) $\alpha<7$; 3) $\alpha=1/2$; 4) $\alpha<4$.

3.11.* При каких α и β сходятся интегралы:

$$1)\ \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx; \qquad 2)\ \int_0^1 x^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{1}{x}dx; \quad 3)\ \int_0^{1/2}\frac{\ln^{\alpha}(1/x)}{tg^{\beta}x}dx.$$

Отв.: 1) $\alpha>-1$, $\beta>-1$; 2) $\alpha>-1$, $\beta>-1$; 3) $\beta<1$, α – любое число.

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся* (абс.сх.), если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, и *условно сходящимся* (усл.сх.), если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, а интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ расходится.

Пусть функция $y=f(x)g(x)$ определена на $[a,b)$ и неограниченна в левой полуокрестности точки $x=b$. Тогда справедливы следующие достаточные условия сходимости.

Признак Дирихле. Интеграл $I=\int_a^b f(x)g(x)dx$ сходится, если:

1) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a,b)$;

2) функция $g(x)$ непрерывна и монотонна на $[a,b)$, причем $\lim\limits_{x\to b-0}g(x)=0$.

Признак Абеля. Интеграл I сходится, если:

1) функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$ и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится;

2) функция $g(x)$ ограниченна, непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,b)$

3.12. Доказать, что интеграл $I=\int_0^1\frac{\sin(1/x)dx}{\sqrt{x}}$ сходится.

Δ Для $0<x\le 1$ выполняется неравенство

$$0 \le \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Но интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, поэтому по признаку сравнения сходится и интеграл $\int \left|\frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}\right| dx$, а, следовательно, сходится, и притом абсолютно, и интеграл I. ▲

3.13. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \frac{\sin(1/x)dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}^3 + x^2\cos(1/x)}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} dx$;

3) $\int\limits_0^1 (1 - e^{\sqrt[3]{x^2}\cos(1/x)})\frac{dx}{x^2}$; 4) $\int\limits_0^{1/2} \frac{\cos^3 x \ln x}{x \ln x} dx$.

Отв.: **1)** усл. *сх.*; **2)** *расх.*; **3)** усл. *сх.*; **4)** усл. *сх.*

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на промежутках $(a, c-\varepsilon]$ и $[c+\varepsilon, b)$, $\varepsilon > 0$, и неограниченна в окрестности точки $x = c \in (a,b)$.

Главным значением несобственного интеграла (или *значением в смысле Коши*) интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ (обозначается $\mathrm{V}.p. \int\limits_a^b f(x)dx$) называется следующий предел:

$$\mathrm{V}.p. \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right).$$

Из существования интеграла в смысле главного значения следует еще, что соответствующий интеграл существует.

Например,

$$\mathrm{V}.p. \int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = 0,$$

но сам интеграл $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ не существует. Если же существует несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то существует и интеграл в смысле главного значения и эти интегралы равны.

3.14. Найти интегралы в смысле Коши:

1) $\int\limits_1^{10} \frac{dx.}{7-x}$; 2) $\int\limits_{-1}^7 \frac{dx}{(x-1)^3}$; 3)* $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$, $c \in (a,b)$; $n \in N$;

4) $\int\limits_{1/2}^{4}\frac{dx}{x\ln x}$; 5) $\int\limits_{0}^{\pi} x tg x\, dx$;

6) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3-5\sin x}$.

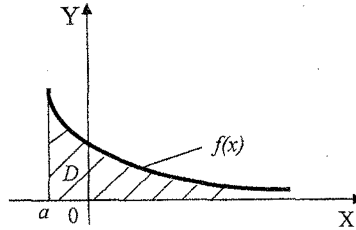

Рис. 3.2

Отв.: **1)** $\ln 2$; **2)** $1/9$; **3)** если $n=1$, то $\ln\frac{b-c}{c-a}$; если $n=2k+1$, $k\in\mathrm{N}$, то $\frac{1}{n-1}\left((a-c)^{1-n}(b-c)^{1-n}\right)$; если $n=2k$, то интеграл в смысле Коши не существует; **4)** $\ln 2$; **5)** $-\pi\ln 2$;; **6)** $-(\ln 2)/4$.

3.15. При каких α существует $V.p.\int\limits_{0}^{2}\frac{x^{\alpha}\,dx}{1-x}$? **Отв.:** $\alpha>1$.

3.2. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1-го рода)

Определение несобственного интеграла 1-го рода. Основные свойства. Признаки сходимости и расходимости интегралов от неотрицательных функций (признаки сравнения). Абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Главное значение несобственного интеграла 1-го рода.

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a\le x<+\infty$, то по определению *несобственным интегралом 1-го рода* называется предел

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (3.9)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*. При этом говорят (в случае сходимости), что функция $f(x)$ *интегрируема в несобственном смысле* на $[a,+\infty)$.

Для непрерывной неотрицательной функции $y=f(x)$, $x\in[a,+\infty)$, сходящейся несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ равен площади неограниченной криволинейной трапеции D (рис.3.2):

$$\mathrm{D}=\left\{(x,y)\middle|a<x<+\infty, 0<y<f(x)\right\}.$$

Аналогично определяется интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$. Далее, по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{3.10}$$

где c – некоторое число.

Если для функции $f(x)$, $x \in [a,+\infty)$, при некотором $c > a$ существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_a^c f(x)dx$, то

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \tag{3.11}$$

Если хотя бы один из интегралов в правой части этого равенства не существует, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ является расходящимся.

3.16. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $I_1 = \int_0^{+\infty} \cos 2x dx$; 2) $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Δ 1) Имеем

$\int_0^{+\infty} \cos 2x dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b \cos 2x dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{\sin 2b}{2}$. Но этот предел, как известно, не существует. Поэтому интеграл I_1 расходящийся.

2) По определению (3.11.)

$$I_2 = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

(вместо точки $x = 0$ в качестве промежуточного предела интегрирования можно взять любую другую конечную точку оси X). Каждый из пределов, стоящих в правой части последнего равенства, вычислим по отдельности:

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2}\Big|_a^0 = \frac{1}{2} arctg \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2}\Big|_0^b = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} arctg \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $I_2 = \pi/2$. ▲

3.17. Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$; 2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$; 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$;

4) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x+1}$; 5) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x+1}{x^2+1}dx$; 6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$.

Отв.: **1)** 1; **2)** $\frac{1}{2}\ln 2$; **3)** π; **4)** расх.; **5)** расх.; **6)** $2\pi/\sqrt{31}$.

3.18. Вычислить площади криволинейных трапеций, образованных графиками функций:

1) $y = xe^{-x^2/2}, x \in [0,+\infty)$;

2) $y = \sqrt{x}/(x+1)^2, x \in [1,+\infty)$;

3) $y = \dfrac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}, x \in [-1,+\infty)$.

Отв.: **1)** 1; **2)** $\pi/4 + 1/2$; **3)** $1/2 - \pi/8$.

Сформулируем свойства несобственного интеграла 1-го рода.

1°. *Линейность.* Если интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

сходятся, то $\forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2°. *Формула Ньютона—Лейбница.* Если функция $f(x), x \in [a,+\infty)$, непрерывна и $F(x)$ – какая-либо её первообразная, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \tag{3.12}$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

3°. *Формула замены переменной.* Пусть $f(x),\ x \in [a,+\infty)$, – непрерывная, $\varphi(t),\ t[\alpha,\beta)$ – непрерывно дифференцируемые функции, причем

$$a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) < \lim_{t\to\beta-0} \varphi(t) = +\infty,$$

тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{3.13}$$

4°. *Формула интегрирования по частям.* Если $u(x), v(x),\ x \in [a,\ +\infty)$ – непрерывно дифференцируемые функции и $\lim\limits_{x\to+\infty}(u,v)$ существует, то

$$\int_a^{+\infty} udv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} vdu, \tag{3.14}$$

где $uv\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}(uv) - u(a)v(a)$.

Формула (3.14) справедлива в случае сходимости по крайней мере одного из двух входящих в нее интегралов. В случае расходимости одного из интегралов расходится и другой.

5°. *Интегрирование неравенств.* Если функции $f(x)$ *и* $g(x)$, $x \in [a, +\infty)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \le g(x)$, то для интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, при условии их сходимости, верно неравенство

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

3.19. Вычислить интегралы:

1) $\mathrm{I}_1 = \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; 2) $\mathrm{I}_2 = \int\limits_1^e \ln x dx.$

Δ 1) Введем подстановку

$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$, $t = \arcsin x$, $t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \arcsin 1 = \pi/2.$

Значит,

$$\mathrm{I}_1 = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}dt = (-ctgt - t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} + 1 + \frac{\pi}{4} = 1 - \pi/4.$$

2) Интегрируем по частям:

$$\mathrm{I}_2 = \int\limits_1^e \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = (dx/x) \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_x^e x\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = 1. \blacktriangle$$

3.20. Вычислить площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графикам функции $y = 1/\sqrt{1+e^x}$ и положительными лучами осей координат.

Δ Имеем

$$S = \int\limits_0^{+\infty} ydx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

Введем подстановку $1 + e^x = t^2$, $t > 0$, тогда

$$dx = \frac{2tdt}{t^2-1}, \quad \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \frac{2dt}{t^2-1},$$

а кроме того, когда $x \in [0, +\infty)$, то $t \in [\sqrt{2}, +\infty)$. Поэтому

$$S = \int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2dt}{t^2-1} = \left(\ln\frac{t-1}{t+1}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\ln(1+\sqrt{2}). \blacktriangle$$

3.21. Доказать неравенство

$$0 < \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2 + 3}}{x^5 + x^3 + 1}dx < \frac{1}{10\sqrt{2}}.$$

Δ При $x \in [2,+\infty)$ верны неравенства

$$0 < \frac{\sqrt{x^3 - x^2 + 3}}{x^5 + x^3 + 1} < \frac{\sqrt{x^3}}{x^5} = x^{-7/2},$$

поэтому

$$0 < \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2 + 3}}{x^5 + x^2 + 1} < \int_2^{+\infty} x^{-7/2} dx.$$

Но $\displaystyle\int_2^{+\infty} x^{-7/2} dx = -\frac{2}{5} x^{-5/2} \Big|_2^{+\infty} = \frac{2}{5} \cdot 2^{-5/2} = \frac{1}{10\sqrt{2}}$. ▲

3.22. Применяя формулу замены переменной или интегрирования по частям, вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$; 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + \sqrt{e^x}}$; 3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$;

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{xe^{arctgx}}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} dx$; 5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$; 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$;

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx$; 8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin^2 bx\, dx$; 9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2} dx$;

10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$; 11) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(2 - x)dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}$;

12*) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^\alpha + 1)(x^2 + 1)}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Отв.: **1)** $-\pi/6$; **2)** $2(1 - \ln 2)$; **3)** $1/9$; **4)** $\frac{1}{2}e^{\pi/2}$; **5)** $\arcsin(1/\sqrt{5})$; **6)** $\pi\sqrt{3}/9$; **7)** $b/(a^2 + b^2)$; **8)** $2b^2(a(a^2 + 4b^2))$; **9)** -11; **10)** 0; **11)** 0; **12)** $\pi/4$.

3.23. Вычислить площади криволинейных трапеций, образованных графиками функций.

1) $y = xe^{-x^2/2}$, $x \in [0,+\infty)$. **Отв.:** 1.

2) $y = \sqrt{x}/(x + 1)^2$, $x \in [1,+\infty)$. **Отв.:** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}$.

3) $y = x^4 e^{-x}$, $x \in [0,+\infty)$. **Отв.:** 24.

4) $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^5 + 1}$, $x \in [0,+\infty)$. **Отв.:** $\pi/5$.

3.24. Доказать неравенства:

1) $\displaystyle 0 < \int_{10}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + x + 1} < 0{,}1$;

2) $0{,}25 < \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^6+1}{x^{11}+1}dx < 0{,}35.$

3.25*. Показать, что для интеграла

$$\mathrm{I}_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx, \quad n \in N,$$

верна рекуррентная формула $\mathrm{I}_n = \frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}$. Вычислить I_7 *и* I_8.

Отв.: $\mathrm{I}_7 = 16/35$, $\mathrm{I}_8 = 35\pi/256$.

Как и в случае несобственных интегралов от неограниченных функций, для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования для неотрицательных функций справедливы следующие *признаки сходимости и расходимости* (*признаки сравнения*).

1. Если f и g удовлетворяют на $[a,+\infty)$ неравенству $f \le g$, то:

а) из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;

б) из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

2. а) Если $g > 0$ на $[a,+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \ne 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

б) В частности, если $f \approx g$ при $x \to +\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

На практике в качестве интеграла, с которым проводится сравнение, обычно используются интегралы вида (*интегралы Дирихле*)

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx, \; a > 0, \; \alpha > 0,$$

сходящиеся при $\alpha > 1$ и расходящиеся при $\alpha \le 1$.

3.26. Исследовать на сходимость данный интеграл:

1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$; 2) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$; 3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{xdx}{x^3+\sin x}$.

Δ 1) На $[1,+\infty)$ справедливо неравенство $0 \le \dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$, и, так как $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^{4/3}}$ сходится $(\alpha = 4/3 > 1)$, то по признаку сравнения сходится и данный интеграл.

2) Обозначим $f(x)=1/\sqrt{4x+\ln x}$, в качестве функции сравнения возьмем $g(x)=1/\sqrt{x}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+\ln x}}=\dfrac{1}{2}$, то из расходимости $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}, (\alpha = 1/2 < 1)$, по признаку сравнения следует расходимость данного интеграла.

3) Так как $x/(x^3+\sin x) \approx 1/x^2$ при $x \to +\infty$ и $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится $(\alpha = 2 > 1)$, то, согласно признаку сравнения 2,б данный интеграл сходится. ▲

3.27. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{3+2x^2+5x^4}$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}dx$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1}dx$; 4) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}dx$;

5) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$; 6) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sin(1/x)\,dx}{2+x\sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$; 8) $\int\limits_{e^2}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln\ln x}$;

9) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4}+1}dx$; 10) $\int\limits_3^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$.

Отв.: 1) сх.; **2)** сх.; **3)** расх.; **4)** расх.; **5)** сх.; **6)** сх.; **7)** расх.; **8)** расх.; **9)** расх.; **10)** сх..

3.28. Найти все α, при которых сходятся интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\ln x\,dx}{x^\alpha}$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{e^{1/x}-1}{\alpha}\right)dx$, $\alpha \ne 0$;

4) $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{e^{\alpha x}dx}{(x-1)^\alpha \ln x}$; 5) $\int\limits_3^{+\infty}\dfrac{e^{-x}-\ln x}{(1+x^\alpha)^{\alpha-2}}dx$.

Отв.: 1) $\alpha > 0$; **2)** $\alpha > 1$; **3)** *Расх.* $\forall\alpha$; **4)** $\alpha < 0$; **5)** $\alpha > \sqrt{2}+1$.

Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов 1-го рода определяются аналогично соответствующим определениям, сделанным для несобственных интегралов от неограниченных функций.

3.29. Доказать, что *интегралы Френеля*

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)dx,\quad \int\limits_0^{+\infty}\cos(x^2)dx.$$

сходятся.

Δ Докажем сходимость первого из интегралов Френеля (доказательство сходимости второго производится аналогично).

Введем замену $x=\sqrt{t}$. Тогда

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Интеграл справа представим в виде

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt+\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Первое слагаемое справа есть собственный интеграл, так как $\lim\limits_{t\to+0}\sin t/\sqrt{t}=0$.

Ко второму слагаемому применим интегрирование по частям, положив

$$u=1/t,\ \sin tdt=dv\Rightarrow\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}dt}=-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Bigg|_{\pi/2}^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos tdt}{t^{3/2}}=-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3/2}}dt.$$

Последний интеграл сходится абсолютно, так как $\dfrac{|\cos t|}{t^{3/2}}\le\dfrac{1}{t^{3/2}}$, а интеграл $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}$ сходится $(\alpha=3/2>1)$. ▲

3.30*. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\cos 7x}{x^2+2x+2}dx;$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\cos x^4dx;$ 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}};$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}(1-e^{(\sin x)/x})\sqrt{x}\,dx;$ 5) $\displaystyle\int_1^{+\infty}arctg\left(\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx.$

Отв.: 1) - 5) сх.усл.

Для несобственных интегралов 1-го рода справедливы следующие *достаточные признаки их сходимости.*

Признак Дирихле. Интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a,+\infty)$;

б) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,+\infty)$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

Признак Абеля. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

б) функция $g(x)$ ограниченна, непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,+\infty)$.

3.31*. Исследовать $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α.

Отв.: При $\alpha > 1$ сх. абс., при $0 < \alpha \le 1$ сх. усл., при $\alpha \le 0$ расходится.

3.32. Используя признак Абеля, доказать, что при $\alpha > 0$ интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} arctgx\, dx$ сходится.

3.33*. Сходится ли интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\sqrt{x} - \sin x}$?

Можно ли исследовать этот интеграл с помощью признака Дирихле, положив $f(x) = \sin x$ и $g(x) = 1/(\sqrt{x} = \sin x)$?

Отв.: Сходится, но признак Дирихле не применим.

По определению, *главным значением несобственного интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется: $\text{V.p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx.$

Если существует несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, то существует и интеграл в смысле главного значения (в смысле Коши) и оба интеграла равны. Из существования интеграла в смысле Коши не следует существования соответствующего несобственного интеграла. Например,

$$\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} xdx = \lim_{R\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-R}^{R} = 0,$$

но интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$, очевидно, не существует.

3.34 . Найти интегралы в смысле главного значения:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} arctgx\ \ ddx$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (arctgx + \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2})dx$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{13+x}{17+x^2}dx$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Отв.: **1)** 0; **2)** 0; **3)** π; **4)** $13\pi / \sqrt{17}$; **5)** 0.

4. Интегралы, зависящие от параметра

4.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Понятие собственного интеграла, зависящего от параметра. Дифференцирование и интегрирование по параметру под знаком интеграла.

Пусть функция $f(x, y)$ двух переменных x и y, где $x \in [a, b]$, $y = [c,\ d]$, интегрируема по Риману на $[a, b]$. Тогда интеграл

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \quad y \in [c, d], \tag{4.1}$$

называется *собственным интегралом, зависящим от параметра* y.

Наряду с интегралом вида (4.1) рассматривают интегралы более общего вида

$$\Phi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx. \tag{4.2}$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $D = \{(x, y) | a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, то *интеграл* (4.1) *является непрерывной функцией по параметру* y на отрезке $[c,\ d]$. В этом случае справедлива формула

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right) dx = \int_a^b f(x, y_0)\, dx, \quad y_0 \in [c,\ d]. \tag{4.3}$$

4.1. Вычислить интеграл $I(y) = \lim\limits_{y \to 0} \int_0^2 x^3 \cos(xy)\, dx$.

Δ Подынтегральная функция непрерывна в прямоугольнике $D = \{(x, y) |\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le d\}$, где $d > 0$. Тогда искомый предел $I(y)$ равен

$$I = \int_0^2 \left(\lim_{y \to 0} x^3 cjs(xy) \right) dx = \int_0^2 x^3 dx = 4. \ \blacktriangle$$

4.2. Доказать, что функция $F(y) = \int_0^1 \sin^2(yx^2)\, dx$ непрерывна на **R**.

4.3. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{y \to 0} \int_0^1 \sqrt{1 + x^4 y^2}\, dx$. **Отв.:** 1.

2) $\lim\limits_{y \to 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$. **Отв.:** 1.

3) $\lim\limits_{y \to 1} \int_2^4 \frac{x dx}{1 + x^2 + y^6}$. **Отв.:** (ln3)/2.

4) $\lim\limits_{y\to 1}\int\limits_0^1 x^2 e^{yx^3}dx.$ **Отв.:** $(e-1)/3$.

5) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_\pi^0 x\cos(x(1+y))\ dx.$ **Отв.:** -2.

6) $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(x+\cos xy)\ e^{x\sin y}dx.$ **Отв.:** 2π.

4.4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $a<a_0<x<b$. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\int\limits_{a_0}^{x}[f(t+\alpha)-f(t)]\ dt=f(x)-f(a_0).$$

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике D, то *интеграл* (4.1) *является функцией, интегрируемой на отрезке* $[y_1,y_2]\subseteq[c,d]$ *по параметру* y, *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{y_1}^{y_2}\left(\int\limits_a^b f(x,y)\ dx\right)dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)\ dy\right)dx. \tag{4.4}$$

Если функция $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывна в прямоугольнике D, то *справедлива формула Лейбница дифференцирования интеграла* (4.1) под знаком интеграла:

$$F'(y)=\int\limits_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \tag{4.5}$$

Если функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике D, функции $a(y)$ и $b(y)$ дифференцируемы на отрезке $[y_1,y_2]\subseteq[c,d]$, а их значения принадлежат отрезку $[a,b]$, то интеграл (4.2) – функция, дифференцируемая на $[c,\ d]$, причем

$$\Phi'(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx+f(b(y),y)\cdot b'(y)-f(a(y),y)\cdot a'(y). \tag{4.6}$$

Дифференцирование и интегрирование по параметру в собственных интегралах с параметрами, позволяет вычислить некоторые интегралы.

4.5. Вычислить интегралы:

а) $I=\int\limits_0^1\dfrac{x^{\alpha_2}-x^{\alpha_1}}{\ln x}dx,\quad 0<\alpha_1\le\alpha_2$; б) $I=\int\limits_0^1\sin\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x}{\ln x}(x^2-1)dx.$

Δ а) Введем в рассмотрение функцию $f(x,\alpha)=x^\alpha$, непрерывную в прямоугольнике $D_1=\{(x,\alpha)|\ 0\le x\le 1,\ \alpha_1\le\alpha\le\alpha_2\},\quad \alpha_1>0$. Применив формулу (4.4), получим

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\int_0^1 x^{\alpha}dx\right)d\alpha=\int_0^1\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}x^{\alpha}d\alpha\right)dx. \tag{4.7}$$

Так как $\int_0^1 x^{\alpha}dx=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}$, то левая часть формулы (4.7) равна

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{d\alpha}{\alpha+1}=\ln(1+\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}=\ln\frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}.$$

Правая же часть формулы (4.7) равна I, так как $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}x^{\alpha}d\alpha=\frac{x^{\alpha_2}-x^{\alpha_1 1}}{\ln x}$.

Значит, $I=\ln\frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}$.

б) Заметим, что интеграл I преобразуется к виду

$$\mathrm{I}=-\int_0^1\sin(\ln x)\frac{x^3-x}{\ln x}dx.$$

Далее, так как $\frac{x^3-x}{\ln x}=\int_1^3 x^y dy$, то, согласно формуле (4.4), получаем

$$\mathrm{I}=-\int_0^1\sin(\ln x)\left(\int_1^3 x^y dy\right)dx=-\int_1^3 dy\int_0^1 x^y\ln x\,dx. \tag{4.8}$$

Внутренний несобственный интеграл справа в (4.8) вычислим по частям:

$$I_1=\int_0^1 x^y\ln x dx=\left|\begin{matrix}u=\sin\ln x\Rightarrow du=\cos\ln x/x;\\ dv=x^y dx\Rightarrow v=x^{y+1}/y+1\end{matrix}\right|=\left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\sin\ln x\right|_{x=0}^{x=1}-$$

$$-\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos(\ln x)dx=-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1}\sin\ln\varepsilon-\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\ln x dx=$$

$$=-\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\ln x dx, \tag{4.9}$$

так как внеинтегральный член обращается в ноль как предел произведения б.м.ф. при $\varepsilon\to+0$ величины ε^{y+1} и ограниченной величины $\sin\ln\varepsilon$. Еще раз интегрируя по частям, из равенства (4.9) получаем

$$I_1=-\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\ln x dx=\left|\begin{matrix}u=\cos\ln x\Rightarrow du=-\sin\ln x/x;\\ dv=x^y\Rightarrow v=x^{y+1/(y+1)}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{y+1}\left[\left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\cos\ln x\right|_{x=0}^{x=1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{y+1}\int x^y\sin\ln x dx\right]=-\frac{1}{y+1}\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+1}I_1\right)=-\frac{1}{(y+1)^2}-\frac{1}{(y+1)^2}I_1.$$

Из полученного уравнения относительно интеграла I_1 находим, что

$$I_1 = \int_0^1 x^y \sin\ln x dx = -\frac{1}{y^2+2y+2} = -\frac{1}{1+(y+1)^2}.$$

Подставив теперь I_1 в интеграл (4.8), окончательно получим, что

$$I = \int_1^3 \frac{dy}{1+(1+y)^2} = arctg(y+1)\Big|_1^3 = arctg4 - arctg2 = arctg(2/9). \quad ▲$$

4.6. Найти производные интегралов по параметру ρ:

а) $I(\rho) = \int_1^2 e^{\rho x^2} \dfrac{dx}{x}$; б) $I(\rho) = \int_{\cos\rho}^{\sin\rho} sh\rho x^2 dx$.

Δ а) По формуле (4.5) получаем

$$I'(\rho) = \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{e^{\rho x^2}}{2\rho}\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \frac{e^{4\rho} - e^{\rho}}{2\rho}.$$

б) По формуле (4.6) находим

$$I'(\rho) = \int_{\cos\rho}^{\sin\rho} x^2 ch\rho x^2 dx + \cos\rho sh(\rho\sin\rho^2) + \sin\rho sh(\rho\cos\rho^2). \quad ▲$$

4.7. Применив дифференцирование по параметру, вычислить интегралы:

а) $I(a) = \int_0^{\pi/2} \dfrac{arctg(atgx)}{tgx} dx.$

б) $I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)dx.$

Δ а) Дифференцируя по параметру a, находим

$$I'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2tg^2x}.$$

Нетрудно получить, что

$$\int \frac{dx}{1+a^2tg^2x} = \frac{1}{1-a^2}(x - |a| arctg(|a| tgx)).$$

Поэтому

$$I'(a) = \frac{1}{1-a^2}(x - |a| arctg(|a| tgx))\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+|a|}.$$

Отсюда

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\int\frac{da}{1+|a|} + C = \begin{cases} C + \dfrac{\pi}{2}\ln(1+a), \ a>0, \\ C - \dfrac{\pi}{2}\ln(1-a), \ a<0, \end{cases} = C + \frac{\pi}{2}\ln(1+|a|) sign\, a, \qquad (4.10)$$

где $sign\, a = \begin{cases} 1, & a > 0; \\ 0, & a = 0; \\ -1, & a < 0. \end{cases}$

Так как, очевидно, $I(0) = 0$, то из равенства (4.10) получаем, что $C = 0$.

Таким образом, окончательно,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{arctg(atgx)}{tgx} dx = \frac{\pi}{2} \ln(1 + |a|) signa.$$

б) Продифференцировав данный интеграл, например, по параметру b, получим

$$I'_b(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{2b\cos^2 x dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = 2b \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{b^2 + a^2 tg^2 x}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int \frac{dx}{b^2 + a^2 tg^2 x} = \frac{1}{b^2 - a^2}\left(x - \left|\frac{a}{b}\right| arctg\left(\left|\frac{a}{b}\right| tgx \right)\right).$$

Поэтому

$$I'_b(a,b) = \frac{2b}{b^2 - a^2}\left(x - \left|\frac{a}{b}\right| arctg\left(\left|\frac{a}{b}\right| tgx \right)\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2b}{b^2 - a^2}\left(\frac{\pi}{2} - \left|\frac{a}{b}\right| \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi(1 - |a/b|)}{b(1 - |a/b|^2)} = \frac{|b|}{b} \frac{\pi}{|a| + |b|} = \frac{\pi sign\, a}{|a| + |b|} = \frac{\pi sign\, a}{|a| + |b|}.$$

В таком случае

$$I(a,b) = \pi sign\, b \int \frac{db}{|a| + |b|} + C(a), \qquad (4.11)$$

где $C(a)$ - постоянная интегрирования, зависящая от a, так как интегрирование в (4.11) ведется по переменной b.

Вычисляя в этом равенстве интеграл, получаем

$$I(a,b) = \pi \quad sign \quad b \begin{cases} \ln(|a| + b), & b > 0, \\ \ln(|a| - b), & b < 0, \end{cases} + C(a) = \pi \quad sign\, b \ln(|a| + |b|) sign\, b + C(a) = \qquad (4.12)$$

$$= \pi \quad \ln(|a| + |b|) + C(a).$$

Так как $I(1,1) = 0$, то из равенства (4.12) получаем

$$0 = \pi \ln 2 + C(a) \Rightarrow C(a) = -\pi \ln 2.$$

В итоге из формулы (4.12) имеем

$$I(a,b) = \pi \ln(|a| + |b|) - \ln 2 = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}. \quad \blacktriangle$$

4.8.* Выяснить, равны ли интегралы

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx \quad \text{и} \quad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy,$$

если

а) $f(x,y)=\dfrac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}$. **Отв.:** Нет.

б) $f(x,y)=\dfrac{a-x}{(a+x)^3}$. **Отв.:** Нет.

4.9. Пользуясь формулой $\dfrac{arctgx}{x}=\int\limits_0^1\dfrac{dy}{1+x^2y^2}$, вычислить интеграл

$\int\limits_0^1\dfrac{arctgx\,dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. **Отв.:** $\dfrac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

4.10.* Пользуясь формулой $(a>0,\ b>0)$

$$\frac{1}{\sin x}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}=2ab\int_0^1\frac{dt}{a^2-b^2t^2\sin^2 x},$$

вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\ln\dfrac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\cdot\dfrac{dx}{x}$. **Отв.:** $\pi\arcsin(b/a)$.

4.11. Найти $I'(y)$, если:

а) $I(y)=\int\limits_0^1\sin(xy)dx$. **Отв.:** $(y\sin y+\cos y-1)/y^2$.

б) $I(y)=\int\limits_1^3\dfrac{\cos(yx^3)}{x}dx$. **Отв.:** $(\cos 27y-\cos y)/3y$.

в) $\int\limits_1^2 e^{yx^2}\dfrac{dx}{x}$. **Отв.:** $(e^{4y}-e^y)/(2y)$.

4.12. Найти $\Phi'(\alpha)$, если:

а) $\Phi(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$. **Отв.:** $\dfrac{2\ln(1+\alpha)^2}{\alpha}$.

б) $\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha(1-x^2)}dx$.

Отв.: $\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx-\sin\alpha e^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha e^{\alpha|\cos\alpha|}$.

в) $\int\limits_{2e^{-\alpha}}^{2e^{\alpha}} \ln(1+\alpha^2 x^2)dx$.

Отв.:

$4sh\alpha+\frac{2}{\alpha^2}(arctg\ (\alpha^2 e^{-\alpha})-arctg\ (\alpha^2 e^{\alpha}))+(\alpha+1)e^{\alpha}\ln(1+\alpha^4 e^{2\alpha})-(\alpha-1)e^{-\alpha}\ln(1+\alpha^4 e^{-2\alpha})$.

4.13. Применяя дифференцирование по параметру α, вычислить интеграл $I(\alpha)$, если:

1) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\pi/2}\ln(\alpha^2-\sin^{\varphi})d\varphi, \alpha>1$. **Отв.:** $\pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$.

2) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx, \quad |\alpha|<1$. **Отв.:** 0.

3) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\pi}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}, \quad |\alpha|<1$. **Отв.:** $2\pi\arcsin\alpha$.

4) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{artg(\alpha tgx)}{tgx}dx$. **Отв.:** $\frac{\pi}{2}\sin\alpha\ln(1+|\alpha|)$.

4.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Понятие несобственного интеграла, зависящего от параметра. Равномерная сходимость по параметру. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Свойства равномерно сходящихся интегралов.

Пусть область $D_\infty=\{(x,y)|a\le x<+\infty, c\le y\le d\}$, и пусть при фиксированном $y\in[c,d]$ существует несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty}f(x,y)dx$, являющийся функцией, зависящей от y:

$$F(y)=\int\limits_a^{\infty}f(x,y)dx,\ y\in[c,d]. \qquad (4.13)$$

Интеграл (4.13)называется *несобственным интегралом, зависящим от параметра* y.

Несобственный интеграл (4.13) называется *сходящимся в точке* $y\in[c,d]$, если существует конечный предел

$$\lim_{B\to\infty}\int\limits_a^{B}f(x,y)dx.$$

Если интеграл (4.13) сходится в каждой точке отрезка $[c,d]$, то он называется *сходящимся на* этом *отрезке*.

Если сходится интеграл $\int\limits_a^\infty |f(x,y)|dx$, то интеграл (4.13) называется *абсолютно сходящимся.*

4.14. Определить области сходимости несобственного интеграла:

а) $I_1 = \int\limits_0^\infty e^{-xy}dx$; б) $I_2 = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+2ax+2a^2}$.

Δ а) По определению

$$I_1 = \lim_{B\to\infty}\int\limits_0^B e^{-xy}dx = \lim_{B\to\infty}\left.\frac{-e^{-xy}}{y}\right|_{x=0}^{x=B} = \lim_{B\to\infty}\frac{1-e^{-By}}{y}.$$

Этот предел, очевидно, существует и равен $1/y$, если $y>0$. Таким образом, $I_1 = 1/y,\ y>0$.

б)

$$I_2 = \lim_{B\to\infty}\int\limits_0^B \frac{dx}{x^2+2ax+2a^2} = \lim_{B\to\infty}\int\limits_0^B \frac{d(x+a)}{(x+a)^2+a} = \lim_{B\to\infty}\left.\frac{1}{a}arctg\frac{x+a}{a}\right|_{x=0}^{x=B} =$$

$$= \lim_{B\to\infty}\frac{1}{a}arctg\frac{B+a}{a} - \frac{1}{a}arctg1 = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4a},\quad a\neq 0.\ \blacktriangle$$

4.15.* Сходится ли несобственный интеграл:

а) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin\omega x}{x^\sigma}dx,\ \omega\neq 0,\ \sigma>0$. **Отв.:** Да.

б) $\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx$. (Ввести подстановку $x=\sqrt{t}$). **Отв.:** Да.

Представим интеграл (4.13) в виде

$$F(y) = \int\limits_a^B f(x,y)dx + \int\limits_B^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^B f(x,y)dx + R_f(B,y), \tag{4.14}$$

где $R_f(B,y) = \int\limits_B^\infty f(x,y)dx$ называется *остатком* несобственного интеграла (4.13).

Интеграл (4.13) называется *равномерно сходящимся по параметру* $y\in[c,d]$ к функции $F(y)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $B_0 = B_0(\varepsilon)$, такое, что для всех $B\geq B_0$ выполнено неравенство

$$\left|F(y) - \int\limits_a^B f(x,y)dx\right| = \left|R_f(B,y)\right| < \varepsilon,\quad \forall y\in[c,d]. \tag{4.15}$$

4.16. Исследовать на равномерную сходимость интегралы:

а) $I_1 = \int\limits_1^\infty \frac{\sin\alpha x}{x^2}dx$; б) $I_2 = \int\limits_1^\infty \frac{(y^2-x^2)dx}{(x^2+y^2)^2}$.

Δ а) Для заданного $\varepsilon > 0$ оценим остаток интеграла $I_1(\alpha)$ по модулю:

$$\left|\int_B^\infty \frac{\sin \alpha x}{x^2} dx\right| \le \int_B^\infty \frac{|\sin \alpha x|}{x^2} dx \le \int_B^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{B} < \varepsilon, \quad \forall \alpha \in \boldsymbol{R}.$$

Отсюда видно, что для выполнения неравенства (4.15) можно взять число $B_0 = 1/\varepsilon$. А это и означает равномерную сходимость интеграла $I_1(\alpha)$ для всех $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

б) Заметим, что $\int \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} dx = \frac{x}{x^2+y^2}$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и оценим остаток интеграла $I_2(y)$ по модулю:

$$\left|\int_B^\infty \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)h^2} dx\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|\Bigg|_{x=B}^{x=\infty} = \frac{B}{B^2+y^2} \le \frac{1}{B} < \varepsilon, \quad \forall y \in \boldsymbol{R}.$$

В качестве B_0 можно взять число $B_0 = 1/\varepsilon$. Тогда при $B \ge 1/\varepsilon$ будет выполнено неравенство (4.15), что и доказывает равномерную сходимость интеграла $I_2(y)$ по параметру y, $\forall y \in \boldsymbol{R}$. ▲

На практике удобными для исследования несобственных сходимостей интегралов являются следующие признаки:

1. *Признак Вейерштрасса.* Если на промежутке $[a, +\infty)$ существует неотрицательная функция $g(x)$, такая, что

$$|f(x,y)| \le g(x), \quad \forall x \in [c,d], \tag{4.16}$$

и несобственный интеграл $I = \int_a^\infty g(x)dx$ сходится, то собственный интеграл $\int_a^\infty f(x,y)dx$ сходится абсолютно и равномерно по параметру y, $\forall y \in [c,d]$.

Функция $g(x)$, удовлетворяющая условию (4.16), называется *мажорантой* или *мажорантной функцией* для $f(x,y)$ на $[a, +\infty)$.

2. *Признак Дирихле.* Интеграл

$$\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$$

сходится равномерно по y, $y \in [c,d]$, если при каждом фиксированном $y \in [c,d]$ функции f, g, g'_x непрерывны по $x \in [a, +\infty)$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $g(x,y) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно относительно $y \in [c,d]$;

2) функция $g'_x(x,y)$ для каждого фиксированного $y \in [c,d]$ не меняет знака при изменении x на $[a, +\infty)$;

3) функция f, $\forall y \in [c,d]$, имеет ограниченную первообразную, т.е. $\exists M > 0$, такое, что

$$\left|\int_a^x f(t,y)dt\right| \le M, \quad \forall x\in[a,+\infty), \quad \forall y\in[c,d].$$

4.17. Исследовать на равномерную сходимость интеграл:

а) $I(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$; б*) $I(\beta)=\int_3^{\infty}\frac{\ln^{\beta}x}{x^{5/4}}dx$.

Δ а) Так как $\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx\right|\le\frac{1}{1+x^2}=g(x), \forall\in\boldsymbol{R}$, а интеграл $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса заключаем, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно по α, $\forall\alpha\in\boldsymbol{R}$.

б) Покажем, что интеграл $I(\beta)$ сходится равномерно по β на $[0,3]$. Действительно, если $\beta\in[0,3]$, $x\in[3,+\infty)$, то $0\le\ln^{\beta}(x)\le\ln^2 x$, и поэтому

$$0\le\frac{\ln^{\beta}x}{x^{5/4}}\le\frac{\ln^2 x}{x^{5/4}}. \tag{4.17}$$

Из сходимости интеграла $\int_3^{\infty}\frac{\ln^2 x}{x^{5/4}}dx$ (докажите это!), в силу оценки (4.17), по признаку Вейерштрасса и вытекает равномерная сходимость интеграла $I(\beta)$ по β, $\forall\beta\in[0,3]$. ▲

4.18.* Доказать, что интеграл

$$I(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

сходится равномерно по α на множестве $[b,+\infty)$, где $b>0$.

Δ Пусть

$$F(x,a)=\int_0^x\sin\alpha t dt=\frac{\cos\alpha x-1}{\alpha}.$$

Ясно, что $|F(x,a)|\le 2/b$, $\forall x\in[0,+\infty)$, и $\forall\alpha\ge b$. Кроме того, $1/x\to 0$ при $x\to+\infty$, причем функция $1/x$ не зависит от α. По признаку Дирихле интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно по α для $\alpha\in[b,+\infty)$, где $b>0$. ▲

4.19.* Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E:

1) $I(\alpha)=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, $\quad E=[\alpha_0,+\infty]$, $\alpha_0>1$.

2) $I(\alpha)=\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha}x}$, $\quad E=[\alpha_0,+\infty]$, $\alpha_0>1$.

3) $I(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^4}dx$, $\quad E=[\alpha_0,+\infty]$, $\alpha_0>0$.

4) $I(\alpha)=\int\limits_1^{\infty} x^{\alpha}e^{-2x}dx, \quad E=[1,3]$.

5) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x}\cos 2x dx, \quad E=[\alpha_0,+\infty], \alpha_0>0$.

6) $I(\alpha)=\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2+\alpha^4}dx, \quad E=\boldsymbol{R}$.

7) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)arctg\alpha x}{x^2}dx, \quad E=[-a,a], \alpha_0>0$.

8) $I(\alpha)=\int\limits_2^{\infty} \frac{\cos\alpha x\ln x}{\sqrt{x}}dx, \quad E=[\alpha_0,+\infty], \alpha_0>0$.

9) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx, \quad E=[0,+\infty]$.

10) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\infty} \frac{\alpha\cos(\alpha^2 x)}{1+\alpha^2}dx, \quad E=[3,5]$.

11) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\infty} \sin 2x\sin\frac{\alpha}{x}dx, \quad E=[0,1/2]$.

12) $I(\alpha)=\int\limits_0^{\infty} (\alpha^5+x^3)e^{-\alpha x^4}dx, \quad E=[1,4]$.

Равномерно сходящиеся несобственные интегралы, зависящие от параметра, обладают следующими свойствами.

1°. (*Непрерывность несобственного интеграла по параметру*). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D и интеграл $F(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно по y $[c,d]$, то функция $F(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

4.20.* Доказать, что функция $F(y)$ непрерывна на множестве E, если:

1) $F(y)=\int\limits_0^{\infty} e^{-(x-y)^2}dx, \quad E=\boldsymbol{R}$.

2) $F(y)=\int\limits_0^{\infty} \sin(yx^2)dx, \quad E=[1,+\infty)$.

3) $F(y)=\int\limits_0^{\infty} \sin\frac{y}{x^2}\sqrt{\ln x}\,dx, \quad E=\boldsymbol{R}$.

2°. (*Интегрируемость несобственного интеграла по параметру*). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D и интеграл $F(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно по y на $[c,d]$, то на этом отрезке функция $F(y)$ интегрируема и

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d dy\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx\int_c^d f(x,y)dy. \qquad (4.18)$$

3°. (*Дифференцируемость несобственного интеграла по параметру*). Пусть функция $f(x,y)$ имеет непрерывную по y производную $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ и интеграл $F(y)$ сходится, а интеграл $\int_a^\infty \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ сходится равномерно по $y\in[c,d]$. Тогда

$$F'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \qquad (4.19)$$

4.21.* Вычислить несобственный *интеграл Дирихле*

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx. \qquad (4.20)$$

Δ Интеграл $F(a)$ сходится по признаку Абеля—Дирихле, но непосредственно его нельзя дифференцировать по параметру a, так как это приводит к расходящемуся интегралу $\int_0^\infty \cos ax dx$. Рассмотрим вспомогательный интеграл $I(k,a) = \int_0^\infty e^{-kx}\dfrac{\sin ax}{x}dx$, отличающийся от данного «множителем сходимости» e^{-kx}, $k>0$. Покажем, что $I(k,a)$ является непрерывной функцией по k, где $k\ge 0$; для этого убедимся, что интеграл $I(k,a)$ сходится равномерно. В самом деле, интегрируя по частям в остатке

$$\int_B^\infty e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx \quad (u=1/x,\, dv=e^{-kx}\sin ax dx),$$

получаем

$$\int_B^\infty e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx = -\frac{e^{-kx}(\sin ax+\varphi)}{x\sqrt{k^2+a^2}}\Bigg|_{x=B}^{x=\infty} - \int_B^\infty \frac{e^{-kx}\sin(ax+\varphi)}{x^2\sqrt{k^2+a^2}}dx,$$

где φ – вспомогательный угол, определяемый соотношениями

$$\cos\varphi = \frac{k}{\sqrt{k^2+a^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{k^2+a^2}},$$

$$\left(v = \int e^{-kx}\sin ax dx = -\frac{e^{kx}(k\sin ax + a\cos ax)}{k^2+a^2} = -\frac{e^{-kx}\sin(ax+\varphi)}{\sqrt{k^2+a^2}}\right).$$

Так как $\left|\dfrac{e^{-kx}\sin(ax+\varphi)}{\sqrt{k^2+a^2}}\right| \le \dfrac{1}{|a|}$ при $a \ne 0$ и $x > 0$, то

$\left|\int\limits_B^{\infty} e^{-kx}\dfrac{\sin ax}{x}dx\right| \le \dfrac{1}{B|a|} + \dfrac{1}{|a|}\int\limits_B^{\infty}\dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{2}{B|a|} < \varepsilon$ при $B > \dfrac{2}{|a|\varepsilon} = B_0$ сразу для всех $k \ge 0$, что и означает равномерную сходимость интеграла $I(k,a)$ по k. Тем самым доказано, что

$$F(a) = \lim_{k\to 0} I(k,a).$$

Дифференцируя $I(k,a)$ по параметру a, получаем

$$I_a(k,a) = \int\limits_0^{\infty} e^{-kx}\cos ax dx \tag{4.21}$$

Дифференцирование по a здесь возможно, так как функции $f(x,a) = e^{-kx}\dfrac{\sin ax}{x}$ и $F_a^{'} = e^{-kx}\cos ax$ непрерывны при $x \ge 0$ и интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx}\sin axdx$ сходится равномерно, ибо $\left|e^{-kx}\cos ax\right| \le e^{-kx}$, а $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx}dx$ – сходящийся интеграл при $k > 0$).

Дважды проинтегрировав интеграл (4.21), найдем, что $I_a^{'}(k,a) = \dfrac{k}{k^2+a^2}$, откуда интегрированием по a получим

$$I(k,a) = arctg\frac{a}{k} + C, \tag{4.22}$$

где C – постоянная интегрирования.

Так как $I(k,0) = 0$, то отсюда и из (4.22) при $a = 0$ получаем $0 = arctg 0 + C \Rightarrow C = 0$.

Таким образом,

$$I(k,a) = \int\limits_0^{\infty} e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx = arctg\frac{a}{k}.$$

Отсюда в пределе при $k \to +0$ имеем

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \lim_{k\to +0} arctg\frac{a}{k} = \begin{cases} \pi/2, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -\pi/2, & a < 0. \end{cases}$$

т.е.

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2} sign\, a. \tag{4.23}$$

В частности, $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx = \dfrac{\pi}{2}$. ▲

4.22.* Исходя из равенства (4.23) найти интеграл

$$I=\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx,\ b>a>0.$$

Δ Имеем

$$\int_a^b \frac{\sin yx}{x}dy=-\frac{\cos yx}{x^2}\Bigg|_{y=a}^{y=b}=\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}.$$

Поэтому искомый интеграл I можно представить в виде

$$I=\int_0^\infty dx\int_a^b \frac{\sin yx}{x}dy=\int_a^b dy\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}dx=\frac{\pi}{2}sign\,y\int_a^b dy=\frac{\pi}{2}(b-a)sign\,y=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

В последнем равенстве перестановка порядка интегрирования законна, так как интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}dx$ сходится равномерно по y, $y>0$ (см. пример 4.18). ▲

4.23. Вычислить интеграл *Эйлера-Пуассона* $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

Δ Интеграл I сходится по признаку сравнения, поскольку при $x>1$ имеем $e^{-x^2}<e^{-x}$, а интеграл $\int_0^\infty e^{-x}dx$ сходящийся. Положим $x=yt$, где $y>0$. Тогда $dx=ydt,\ t\in[0,+\infty)$, и, следовательно, $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=y\int_0^\infty e^{-y^2t^2}dt$. Умножим обе части этого равенства на $e^{-y^2}dy$ и проинтегрируем по y от 0 до $(+\infty)$. Получим

$$I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}=\int_0^\infty e^{-y^2}ydy\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)y^2}ydy=\int_0^\infty\left[-\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-(1+t^2)y^2}\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}arctgt\Bigg|_0^\infty=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда следует, что

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.\ ▲$$

Если функция f непрерывна на $[0,+\infty)$ и для каждого $A>0$ сходится интеграл $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x}dx$, то при любых $a>0,\ b>0$ справедлива *формула Фруллани*:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}. \qquad (4.24)$$

Если функция f непрерывна на $[0,+\infty)$, а интеграл $\int\limits_A^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ расходится, то существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty)$ и, кроме того, сходится интеграл $\int\limits_A^{\infty}\frac{f(x)-f(+\infty)}{x}dx$, то, применив формулу (4.24) к функции $f(x)=f(x)-f(+\infty)$, получим равенство

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\left[f(0)-f(+\infty)\right]\ln\frac{b}{a}. \qquad (4.25)$$

4.24. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx, \quad 0<a<b.$$

Δ Опуская доказательство сходимости несобственного интеграла $\int\limits_A^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$, $A>0$, по формуле Фруллани (4.24) получаем

$$I=e^{-x}\Big|_{x=0}\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}. \quad ▲$$

4.25.* Используя интеграл Дирихле (4.23), вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx$. **Отв.:** $\pi|\alpha|/2$.

2) $\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$. **Отв.:** $\frac{\pi}{2}$.

3) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x^2}{x}dx$. **Отв.:** $\pi/4$.

4) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}dx$. **Отв.:** $3\pi/16$.

5) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}dx$. **Отв.:**. $5\pi/32$.

6) $\int\limits_0^{\infty}\frac{2\sin\alpha x-\sin 2\alpha x}{x^3}dx$. **Отв.:** $\pi\alpha|\alpha|/2$.

7) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}dx$. **Отв.:** $\frac{(|\beta|-|\alpha|)\pi}{2}$.

8) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2 x\cos x}{x^2}dx$. **Отв.:** $(2-\alpha)\pi/4$ если $\alpha<2$; 0 при $\alpha>2$.

4.26.* С помощью дифференцирования по параметру вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^\infty \frac{arctgax - arctgbx}{x}dx$, $0 < a < b$. **Отв.:** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$.

2) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\sin xdx$. **Отв.:** $arctgb - arctga$.

3) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\cos xdx$. **Отв.:** $\frac{1}{2}\ln\frac{a+b^2}{1+a^2}$.

4) $\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx, a > 0$. **Отв.:** $\sqrt{\pi a}$.

5) $\int\limits_0^\infty \left(e^{-a^2/x^2} - e^{-a^2/b^2}\right)dx$. **Отв.:** $\sqrt{\pi}(b-a)$.

6) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2}\sin xdx$. **Отв.:** $\frac{\pi}{2}(b-a)+\frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2} - barctgb + aarctga$.

7) $\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2(x^2+\beta^2)}dx$. **Отв.:** $\frac{\pi}{2}(\alpha\beta - \ln(1+\alpha\beta))$.

4.27. Применив формулу Фруллани (4.24), вычислить интеграл $(a > 0, b > 0)$:

1) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos^2 \alpha x - \cos^2 \beta x}{x}dx$. **Отв.:** $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$.

2) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 \alpha x - \sin^2 bx}{x}dx$. **Отв.:** $\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}$.

3) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}dx$. **Отв.:** $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$.

4) $\int\limits_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}dx$. **Отв.:** $\ln\frac{a+b}{b+1}$.

4.3. Интегралы Эйлера

Гамма-функция и ее свойства. Бета-функция и ее свойства

Гамма-функция $\Gamma(x)$ определяется на промежутке $(0,+\infty)$ равенством

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x\geq 0. \tag{4.26}$$

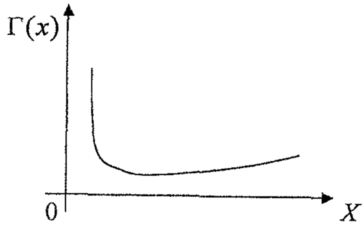

Рис.4.1

Основные свойства функции $\Gamma(x)$:

1°. Функция $\Gamma(x)$ – выпуклая вниз, имеющая положительный единственный минимум (рис.4.1).

4.28. Найти: а) Г(1); б) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Δ а) Имеем по определению

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-dt}=e^{-t}\Big|_0^\infty=1. \tag{4.27}$$

б) Имеем по определению

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}dt=\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}=\left|\begin{array}{c}\sqrt{t}=s, t=s^2; t=0\Rightarrow s=0;\\ dt=2sds; t=\infty\Rightarrow s=\infty.\end{array}\right|=$$

$$=2\int_0^\infty\frac{se^{s^2}}{s}ds=2\int_0^\infty e^{-s^2}ds=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi},$$

так как интеграл Эйлера $\int_0^\infty e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Таким образом,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.\ \blacktriangle \tag{4.28}$$

2°. Справедлива *формула приведения*

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x). \tag{4.29}$$

Отсюда получим

3°. $$\Gamma(n+1)=n!. \tag{4.30}$$

4°. Из (4.30) и (4.27) имеем

$$0!=\Gamma(1)=1 \tag{4.31}$$

5°. Справедлива формула

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5...(2n-3)(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}. \tag{4.32}$$

6°. *Формула дополнения*:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}, x\in(0,1). \tag{4.33}$$

7°. Заменив в (4.33) x на $x+\frac{1}{2}$, получим

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{\pi}{\cos \pi x},\ x\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right). \tag{4.34}$$

8°. $$\frac{\Gamma(x+1)}{x}\sim\frac{1}{x}, x\to +0;\quad \lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty. \tag{4.35}$$

9°. *Формула Лежандра*:

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x). \tag{4.36}$$

4.29. Вычислить $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

Δ Согласно (4.32), имеем

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

Второе решение: по формулам (4.29) и (4.38) находим

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}-1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.\ \blacktriangle$$

4.30.* Показать, что

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdot K\cdot(x+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)...\left(1+\frac{x}{n}\right)}.$$

● Воспользоваться тем, что $e^{-t}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$, и вычислить по частям интеграл $\int\limits_0^n\left(1-\frac{1}{t}\right)^n t^{x-1}dt$.

4.31. Вычислить: а) $\Gamma(6)$; б) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$. **Отв.: а)** 120; **б)** $\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$.

4.32. Доказать, что $\Gamma(x)$– бесконечно дифференцируемая функция, причем

$$\Gamma^{(n)}(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n dt.$$

4.33.* Показать, что:

а) $$\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-2)^m}{(2m-1)!!}\sqrt{\pi};$$

б) $$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)=(-1)^m\pi,\ m\in N.$$

Бета-функцией называется несобственный интеграл

$$B(x,y)=\int_0^1 x^{t-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \tag{4.37}$$

зависящий от двух параметров x и y. Подынтегральная функция в (4.37) имеет две особые точки $t=0$ и $t=1$. Бета-функция определена для всех положительных значений x и y, и для этих значений она непрерывна.

Отметим следующие *свойства бета-функции*:

1°. Заменой $t=z/(z+1)$ интеграл (4.37) сводится к интегралу

$$B(x,y)=\int_0^\infty \frac{x^{z-1}dz}{(1+z)^{x+y}}. \tag{4.38}$$

Выражение (4.38) является другим интегральным представлением бета-функции.

2°. При $x>0$ и $y>0$ справедлива формула

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{4.39}$$

3°. $B(x,y)=B(y,x)$.

4°. Заменой $z=tg^2\varphi$ интеграл (4.38) сводится к интегралу

$$B(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2y-1}\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{4.40}$$

Многие определенные интегралы вычисляются путем сведения их к интегралам Эйлера.

4.34. Вычислить интегралы:

а) $I_1=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0$.

б) $I_2=\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}dx}{(1+x)^2}$.

в) $I_3=\int_0^{\pi/2}\sin^6\varphi\cos^8\varphi\,d\varphi$.

г) $I_4=\int_0^1 \ln^{\rho}(1/x)dx$.

Δ а) Введем замену $x=a\sqrt{t},t>0,\Rightarrow dx=adt/2\sqrt{t};\ x=0\Rightarrow t=0;\ x=a\Rightarrow t=1$. Тогда, согласно (4.37), (4.32), (4.30), получим

$$I_1=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}dt=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{3/2-1}(1-t)^{3/2-1}dt=\frac{a^4}{2}B(3/2,3/2)=\frac{a^4}{2}\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}=$$

$$=\frac{a^4}{2}\frac{(1/2)^2\Gamma^2(1/2)}{2!}=\frac{\pi a^4}{16},\quad \text{так как}\quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\quad \Gamma(3)=2!$$

б) Имеем

$$I_2=\int_0^\infty\frac{x^{5/4-1}dx}{(1+x)^{5/4+3/4}}=B(5/4,5/4)=\frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma(1/4)\Gamma(3/4)=$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma(1/4)\Gamma(1-1/4) = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4},$$

согласно формулам (4.38), (4.39), (4.29) и (4.34).

в) Представим интеграл I_3 в виде (4.40) и воспользуемся формулами (4.32) и (4.30):

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^{2(7/2)-1}\varphi \cdot \cos^{2(9/2)-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(7/2)\Gamma(9/2)}{\Gamma(8)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7!}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\sqrt{\pi} = \frac{5\pi}{2^{12}}.$$

г) Введем замену $1/x = e^y$. Тогда

$$I_4 = \int_0^1 \ln^p(1/x)dx = \int_0^\infty y^p e^{-y}dy = \Gamma(p+1). \ \blacktriangle$$

4.35. Вычислить:

1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}}$. **Отв.:** $\dfrac{(3{,}6256)^2}{4\sqrt{\pi}}$. • Подстановка $\cos t = 1-2\sqrt{u}$.

2) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}$. **Отв.:** $\dfrac{15\pi}{16}$. • Подстановка $x^{2/5} = t$.

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^5 4x\cos^4 2x dx$. **Отв.:** $\dfrac{8}{105}$.

4) $\displaystyle\int_0^{a}x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}dx, a>0$. **Отв.:** $\dfrac{(4n-1)!!\pi a^{2n+1}}{(2n+1)!2^{2n+3}}$. • Замена $x^2/a^2 = t$.

5) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x^6}dx$. **Отв.:** $\dfrac{\pi}{b\sin(a\pi/b)}$. • Подстановка $(1+x^b)/x^b = 1/y$.

6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{tgx}dx$. **Отв.:** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$. • Замена $tgx = u^2$.

4.36. Выразить $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\, dx$ через гамма-функцию.

Отв.: $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)}$.

Приложение

Самостоятельная работа «Интегральное исчисление функций одной переменной»

Структура

1. Найти интегралы.
2. Вычислить определенные интегралы.
3-5. Найти площадь фигуры.
6. Найти объем тела вращения.
7. Найти поверхность тела вращения.
8. Найти центр тяжести линии.
9. Найти статические моменты кривой.
10. Задача с физическим содержанием.
11-12. Исследовать на сходимость несобственный интеграл и в случае сходимости вычислить его.
13. Найти главное значение несобственного интеграла.

Вариант 1

1. а) $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}$; б) $\int\frac{\ln x dx}{x^2}$; в) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,xdx$;

г) $\int\frac{(x^3+1)}{x(x^2+x+1)^2}$; д) $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; е) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

ж) $\int\sqrt{4x^2-2x+1}dx$; з) $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

Отв.: **а)** $-1/\left(3\left(x^3+3x+1\right)\right)+C$; **б)** $-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$; **в)** $-\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2}$;

г) $\frac{2(1-x)}{3\left(x^2+x+1\right)}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

д) $x+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C$; **е)** $\frac{3}{7}t^4\left(4t^3-7\right)+C$, где $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$;

ж) $\left(x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}+\frac{3}{16}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}\right|+C$;

з) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$;

2. а) $\int_0^5\sqrt{25-x^2}dx$; б) $\int_0^a x^2\sqrt{x^2-a^2}dx$; в) $\int_0^{\pi/b}e^{ax}\sin bx\,dx$;

г)* $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x(arctg\sin x)dx.$

Отв.: **а)** $25\pi/4$; **б)** $\ln(4/3)$; **в)** $b\left(e^{a\pi/b}+1\right)/\left(a^2+b^2\right)$; **г)** $\pi/2-1$.

3. а) D- фигура ограниченная кривыми $y^2=x$, $xy=8$ и отрезком AB, где $A=(8,1)$ принадлежит гиперболе, а $B=\left(8,-\sqrt{2}\right)$- параболе.

б)* $D-$ фигура, ограниченная дугой *эвольвенты* окружности $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, и с концами $(a,0)$ и $(a,-2\pi a)$.

в) Найти площадь *лемнискаты* $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$.

Отв.: **а)** $\frac{16}{3}\left(1+2\sqrt{2}+1{,}5\ln 2\right)$; **б)** $a^2\left(4\pi^3+3\pi\right)/3$; **в)** $2a^2$.

4. а) $y=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$, $1<a\le x\le b$;

б) $x=a\cos^3 t,\ \ y=b\sin^3 t,\ 0\le t\le t_0\le\pi/2,\ a\ne b$;

в) $\rho=a(1-\cos\varphi),\ -\pi/2\le\varphi\le-\pi/6$.

Отв.: **а)** $\sqrt{b^2-1}-\sqrt{a^2-1}$; **б)** $\left(\left(a^2\cos^2 t_0+b^2\sin^2 t_0\right)^{3/2}-a^3\right)\Big/\left(b^2-a^2\right)$; **в)** $2a$.

5. $x=a(1+\cos t),\ y=a(t-\sin t),\ z=4a\sin(t/2),\ 0\le t\le t_o$.

6. а) Тело образовано вращением вокруг оси X вокруг фигуры:

$y=1/\sqrt[4]{x},\ \ y=0,\ x=1/4,\ \ x=1$.

б) Тело образовано вращением вокруг оси Y фигуры:

$y=2x-x^2,\ y=0$.

в) Тело образовано вращением вокруг полярного луча фигуры:

$0\le\rho\le a\cos^2$.

г) Тело образовано вращением вокруг оси X фигуры:

$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi, y=0$.

Отв. **а)** $\pi a^3/2$; **б)** $8\pi/3$; **в)** $4\pi a^3/21$; **г)** $5\pi^2 a^3$.

7. а) Кривая $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,\ \ 1\le y\le l$; вращается вокруг оси Y.

б) Кривая $y=\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)/2,\quad 0\le x\le 1$, вращается вокруг оси X.

в) Кривая $x=a(3\cos t-\cos 3t),\ \ y=a(3\sin t-\sin 3t),\ \ 0\le t\le\pi/2$ вращается вокруг оси X.

Отв. **а)** $\pi\left(l^3+3l-3\right)$; **б)** $2\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)/3$; **в)** $18\pi^2 a^2$.

8. Найти центр тяжести полуокружности $x^2+y^2=a^2$, расположенной над осью X.

Отв. $(0,2a/5)$.

9. Найти статические моменты M_x и M_y кривой относительно осей X и Y соответственно:

а) $y^2 = 2x,\ 0 \le x \le 2;$

б) $x = \arcsin t,\ y = b\cos t,\ 0 \le t \le \pi/2,\ a > b;$

в) $\rho = 2a\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/2.$

Отв. а) $M_x = 0,\ M_y = \dfrac{9\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\ln 2 + \sqrt{5}\right);$

б) $M_x = \dfrac{ab}{2e}\left(e\sqrt{1-e^2} + \arcsin e\right),\quad M_y = \dfrac{a^2}{2}\left(1 + \dfrac{1-e^2}{2e}\ln\dfrac{1+e}{1-e}\right);$

в) $M_x = 2a^2,\ M_y = \pi a^2.$

10.* а) Вычислить работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из правильной четырехугольной пирамиды со стороной 5м (удельный вес воды 9,81 кН/м^3, $\pi = 3{,}14$); результат округлить до целого числа.

б) Вычислить силу давления воды на пластину, вертикально погруженную в воду (рис. П1) считая, что удельный вес воды равен 9,81кН/м^3 результат округлить до целого числа.

Отв.: а) 245 кДж; **б)** 22кН.

11. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

Отв.: а) $\pi/2$; **б)** $\pi/2$.

12. а) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^5}}$.

Отв.: а) сх. абс.; **б)** расх.

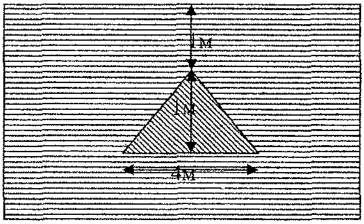

Рис. П 1

13. а) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\,tgx\,dx$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{13+x}{17+x^2}dx$.

Отв.: а) $-\pi\ln 2$; **б)** $13\pi/\sqrt{17}$

Вариант 2

1. а) $\displaystyle\int\frac{12x-14}{\left(3x^2-7x+11\right)^3}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{e^{2x}}dx$; в) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

г) $\displaystyle\int\frac{x^3+3}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}dx$; д) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$;

е) $\int x^5\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}dx$; ж) $\int\sqrt{3+2x-x^2}dx$; з) $\int\frac{dx}{2\sin+\cos x+3}$.

Отв.: **а)** $-\frac{1}{\left(3x^2-7x+11\right)^2}+C$; **б)** $C-e^{-2x}\left(\frac{x2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)$;

в) $\arccos\frac{1}{x}+C$; г) $\frac{x+2}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+2arcctgx+C$;

д) $\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}{(x+2)+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{3}}+C$;

е) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^5}+C$;

ж) $-\frac{x-1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{2}+C$; **з)** $arctg\left(1+tg\frac{x}{2}\right)+C$.

2. а) $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$; б) $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$; в) $\int_{-3}^{0}x\cos\frac{k\pi x}{3}dx \ (k\in\mathrm{N})$;

г)* Решить уравнение: $\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\frac{\pi}{12}$.

Отв.: а) π; б) $\frac{\pi}{6}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$; **в)** $\frac{9}{(k\pi)^2}\left(1-(-1)^k\right)$; **г)** $x=2$.

3. а) D – фигура, ограниченная кривыми $y=\frac{4}{x}$; . . . . ; $y=2x$

б) $\begin{cases}x=3\cos t, & y=4\sqrt{3};\\ y=8\sin t,\end{cases}$

в)* Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$x^2+y^2=2y;\ x^2+y^2=4y;\ y=x;\ y=-x.$$

Отв.: а) 1,5; б) $4\pi-6\sqrt{3}$; **в)** $\frac{3\pi}{2}+3$.

4. а) Найти длину дуги кривой $y=\ln\left(1-x^2\right)$ (от начала координат до точки $B\left(\frac{1}{2};\ln\frac{3}{4}\right)$.

б) $\begin{cases}x=R(\cos t+t\sin t), & 0\le t\le\pi;\\ y=R(\sin t-t\cos t),\end{cases}$

в) Найти длину дуги гиперболической спирали $r=\frac{1}{\varphi}$ (от $\varphi_1=\frac{3}{4}$ до $\varphi_2=\frac{4}{3}$).

Отв.: а) $\ln 3-0{,}5$; б) $\dfrac{\pi^2 R}{2}$; в) $\ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{12}$.

5. Найти длину первого витка винтовой линии $\begin{cases} x=a\cos t, & 0\le t\le 2\pi. \\ y=a\sin t, \\ z=bt. \end{cases}$

Отв.: $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

6. а) Тело образовано вращением вокруг оси X фигуры $(x+1)^2+y^2=4$; $y=x+3$;

б) Тело образовано вращением вокруг оси Y фигуры $y^2=x^3$; $x+y=2$; $x=0$;

в) Тело образовано вращением вокруг полярного луча фигуры $r=2R\cos\varphi$;

г) Тело образовано вращением вокруг оси X фигуры $x=t^2-1$; $y=t^3-t$.

Отв.: а) $\dfrac{8\pi}{3}$; б) $\dfrac{2\pi}{21}$; в) $\dfrac{4\pi}{3}R^3$; г) $\dfrac{\pi}{12}$.

7. а) Кривая $y^2=4+x$ вращается вокруг оси X. (Дуга кривой отсекается прямой $x=2$).

б) Кривая $x=chy(\ln 2\le y\le \ln 3)$ вращается вокруг оси Y;

в) Кривая $x=e^t\sin t$; $y=e^t\cos t$; $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$, вращается вокруг оси X.

Отв.: а) $\dfrac{62\pi}{3}$; б) $\pi\left(185+144\ln\dfrac{3}{2}\right)\Big/144$; в) $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$.

8. Найти координаты центра тяжести дуги кривой $y=ach\dfrac{x}{a}$, содержащейся между точками $x_1=-a$, $x_2=a$.

Отв.: $x_c=0$, $y_c=a\dfrac{e^4+4e^2-1}{4e\left(e^2-1\right)}$.

9. Найти статические моменты M_x и M_y кривой относительно осей X и Y соответственно:

а) $y^2=4x$, $0\le x\le 4$; б) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$; $0\le t\le\pi$; в) $\rho=2a\sin\varphi$, $0\le t\le\pi$.

Отв.: а) $M_x=0; M_y=5\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\ln\left(4+2\sqrt{5}\right)$; б) $M_x=\dfrac{3a^2}{5}$; $M_y=0$; в) $M_x=\pi a^2$; $M_y=2a^2$.

10. а) Пластинка в форме прямоугольного треугольника с катетами a и b опущена вертикально в жидкость плотностью ρ так, что катет a находится на поверхности жидкости. Найти силу давления на пластинку.

б) Котел имеет форму параболоида вращения. Радиус его основания $R = 3м$, глубина $H = 5м$. Котел наполнен жидкостью, плотность которой $\rho = 0{,}8\ г/см^3$. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать жидкость из котла.

Отв.: а) $\dfrac{\rho gab^2}{6}$; **б)** $\approx 294300\ Дж$.

11. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\displaystyle\int_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$. **Отв. а)** π; **б)** $6\sqrt[3]{2}$

12. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

а) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\sin^3(2x)x^2}{x^4-\sqrt[4]{x^5}}dx$; б) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{x\sqrt{x}}dx$. **Отв. а)** сх.; **б)** сх.

13. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$; б) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{1}{4x}\right)}{x^2}dx$. **Отв. а)** 0; **б)** 0.

Вариант 3

1. а) $\displaystyle\int\frac{x-4}{(x^2-8x+25)^4}dx$; б) $\displaystyle\int x\ln(x-1)dx$; в) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1-6\ln x}}$;

г) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$; д) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$;

е) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}$; ж) $\displaystyle\int\sqrt{2x^2+2x+5}dx$; з) $\displaystyle\int\frac{dx}{5-3\cos x}$

Отв.: а) $\dfrac{-1}{6(x^2-8x+25)^3}+C$; **б)** $\dfrac{x^2-1}{2}\ln|x-1|-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{2}+C$;

в) $\dfrac{-1}{3}\sqrt{1-6\ln x}+C$; **г)** $\dfrac{1}{x-1}+\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+C$; **д)** $2arctg\sqrt{x+1}+C$;

е) $2\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x^3}}}+C$;

ж) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+\dfrac{5}{2}}+\dfrac{9}{4}\ln\left(x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\dfrac{5}{2}}\right)+C$, где $C=\sqrt{2}C_1$;

з) $\dfrac{1}{2}arctg\left(2tg\dfrac{x}{2}\right)+C$.

2. а) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx$. б) $\int_0^{3\sqrt{2}} x^2\sqrt{18-x^2}dx$. в) $\int_0^{\pi/4} xtg^2 xdx$.

г)* Решить уравнение: $\int_0^x \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}} = \frac{1}{12}$.

Отв.: **а)** 4π; **б)** $\frac{9\pi}{4}$; **в)** $\frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32}$; **г)** $\sqrt{7}$.

3. а) D - фигура, ограниченная кривыми: $x = y^3$, $y = 2$, $x = 0$;

б) $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$;

в) $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = -x$, $x = 0$.

Отв.: **а)** 4; **б)** $\frac{27\pi}{8}$; **в)** $8\pi + 64$.

4. а) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ (от $y_1 = 1$ до $y_2 = e$);

б) $x = 3(\cos t + t\sin t)$, $y = 3(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi/3$;

в) $\rho = 2e^{4\varphi/3}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

Отв.: **а)** $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$; **б)** $\frac{\pi^2}{6}$; **в)** $\frac{5}{2}\left(\frac{e^{4\pi/3}-1}{e^{2\pi/3}}\right)$.

5. Найти длину кривой

$$\begin{cases} x = 4\cos t, & 0 \le t \le 2\pi. \\ y = 4\sin t, & \\ z = t. & \end{cases}$$

Отв.: $2\pi\sqrt{17}$.

6. а) Вокруг оси X: $y = 4x - x^2$, $y = x$;

б) Вокруг оси Y: $x^2 - y^2 = 1$, $x = 2$;

в) Вокруг полярной оси: $\rho = \sqrt{3}\cos 3\varphi$ (одного лепестка);

г) Вокруг оси X: $x = \sqrt{3}t^2$, $y = \sqrt{3}\left(t - t^3/3\right)$.

Отв.: **а)** $21{,}6\pi$; **б)** $4\sqrt{3}\pi$; **в)** $\frac{\sqrt{2}\pi}{9}$; **г)** $4\sqrt{3}\pi$.

7. а) Вокруг оси X: $y = x^3$ $(0 \le x \le 1)$.

б) Вокруг оси Y: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

в) Вокруг оси X: $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$.

Отв. **а)** $\pi\left(10^{3/2}-1\right)/27$; **б)** $32\pi\sqrt{3} + 16\pi\ln\left(\sqrt{3}+2\right)$; **в)** $8\pi + \frac{32\pi}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Найти координаты центра тяжести дуги кривой $y = \pi\, ch\dfrac{x}{\pi}$, $-\pi \le x \le \pi$. **Отв.:** $x_c = 0$, $yc = \dfrac{\pi\left(e^4 + 4e^2 - 1\right)}{4e\left(e^2 - 1\right)}$.

9. Найти статические моменты M_x и M_y кривой относительно осей X Y соответственно.

а) $6y = x^2$, $0 < y < 6$. **Отв:** $M_x = \dfrac{81\sqrt{5}}{4} - \dfrac{9}{8}\ln\left(6 + 3\sqrt{5}\right)$, $M_y = 0$.

б) $x = \sqrt{3}\cos^3 t$, $y = \sqrt{3}\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$. **Отв:** $M_x = M_y = \dfrac{9}{5}$.

в) $\rho = 6\cos\varphi$; $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$. **Отв:** $M_x = 9$, $M_y = \dfrac{9}{2}\pi + 9$.

10. а) Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать во[ду] из котла, имеющего форму параболоида вращения. Радиус основания 4м, высо[]та 3м.

б) Определить давление воды на вертикальный прямоугольн[ый] шлюз с основанием 8м и высотой 6м. Определить также давление на нижню[ю] половину шлюза.

Отв.: а) 24π *кДж*; б) $144g$ *кН* и $108g$ *кН*.

11. а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$; б) $\displaystyle\int_0^{2,5} \frac{dx}{x^2 - x + 6}$. **Отв.:** а) $1 - \ln 2$; б) рас[х].

12. а) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$. **Отв. а)** сх.; **б)** сх. абс.

13. а) $\displaystyle\int_2^{6} \frac{dx}{(x-5)^5}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ch^2 x}$. **Отв. а)** $\dfrac{20}{81}$; **б)** 2.

Вариант 4

1. а) $\displaystyle\int \frac{2x - x^2}{\left(3x^2 - x^3\right)^4}\,dx$; б) $\displaystyle\int\left(x^2 - 2x + 5\right)e^{-x}dx$; **в)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x(2 + \ln x)}$;

г) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\left(2 + x^3\right)^{5/3}}$;

ж) $\displaystyle\int \sqrt{5 + 4x - x^2}\,dx$; з) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$.

Отв.: а) $\dfrac{-1}{6\left(3x^2 - x^3\right)^3} + C$; б) $-e^{-x}\left(x^2 + 5\right) + C$; **в)** $\ln\left|2 + \ln x\right| + C$;

г) $\frac{-1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{2}arctgx+C$; д) $\frac{1}{3}(1+x)^3+(1+x)^2+(1+x)+C$;

е) $-\frac{1}{8}\cdot\frac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}+C$; ж) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\sqrt{5+4x-\frac{x^2}{\sqrt{3}}}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x-2}{3}+C$;

з) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C$.

2. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$. б) $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$. в) $\int\limits_{-25}^{25}x^2 arctgx\,dx$.

г)* Решить уравнение: $\int\limits_1^x\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{\pi}{6}$.

Отв.: **а)** $\frac{3\pi}{4}$; **б)** $\frac{81\pi}{16}$; **в)** 0; **г)** $\frac{3}{2}$.

3. а) D - фигура, ограниченная кривыми: $y=x^2+1$; $y=x+3$;

б) $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $y=2$;

в)* $y^2-8y+x^2=0$, $y^2-10y+y^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$.

Отв.: **а)** $4{,}5$; **б)** $2\pi+16$; **в)** 6π.

4. а) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$, $1\le x\le 2$;

б) $x=t$, $y=\ln\left(1-t^2\right)$, $0\le t\le 0{,}5$;

в) $\rho=2(1+\sin\varphi)$, $\pi/2\le\varphi\le 3\pi/2$.

Отв.: **а)** $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$; **б)** $\ln 3-0{,}5$; **в)** 8.

5. $x=R(1+\cos t)$, $y=R(t-\sin t)$, $z=4R\sin(t/2)$, $0\le t\le 2\pi$.

Отв. $4R\pi$.

6. а) Вокруг оси X: $x^2=2y-4$, $y=4$;

б) Вокруг оси Y: $4y=4-x^2$, $2y=3\sqrt{4-x^2}$;

в) Вокруг полярной оси: $\rho=2R\cos^2\varphi$;

г) Вокруг оси X: $x=\sqrt{2}(t-\sin t)$, $y=\sqrt{2}(1-\cos t)$ (одну арку).

Отв.: **а)** $512\pi/15$; б) 6π; **в)** $\frac{32\pi}{21}$; **г)** $10\sqrt{2}\pi^2$.

7. а) Вокруг оси X: $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$.

б) Вокруг оси Y: $x=2+chy$, $0\le y\le 1$.

в) Вокруг оси X: $x=\sqrt{5}\cos^3 t$, $y=\sqrt{5}\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$.

Отв.: а) $2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$; **б)** $\dfrac{\pi\left(8e^3+e^4+4e^2-8e-1\right)}{e^2}$; **в)** 12π.

8. Найти координаты центра тяжести дуги полуокружности относительн оси Y: $x^2+y^2=25$. **Отв.:** $x_c=\dfrac{10}{\pi}$, $y_c=0$.

9. Найти статические моменты относительно оси X и Y соответствен

а) $4y^3=x$, $0\le y\le 1$.

Отв.: $M_x=\dfrac{\sqrt{145}}{4}+\dfrac{1}{48}\ln\left(1+\dfrac{\sqrt{145}}{12}\right)$, $M_y=\dfrac{1}{216}\left(145\sqrt{145}-1\right)$.

б) $x=3\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le \pi/2$.

Отв.: $M_x=2+\dfrac{9}{15}\arcsin\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $M_y=\dfrac{9\sqrt{5}}{2}+6\ln 4$.

в) $\rho=\sqrt{2}\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi/4$.

Отв.: $M_x=\dfrac{1}{2}$, $M_y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$.

10. а) Найти работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкос плотностью $900\,кг/м^3$ из цистерны, боковая поверхность которой имеет фо му параболического цилиндра, высота цистерны 2 м, длина 8 м, ширина 4 м.

б) Найти силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18*м* и высотой 6*м*. Плотность воды $\rho=1000\,кг/м^3$.

Отв.: **а)** $30720\,Дж$; **б)** $\approx 3178\,кН$.

11. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^5+6}$; б) $\displaystyle\int_3^6\frac{dx}{x^2-7x=10}$. **Отв.: а)** $\dfrac{\pi}{3\sqrt{6}}$; б) рас

12. а) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x^7-x^5}}$; б) $\displaystyle\int_0^1\sin\frac{1}{1-x}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. **Отв.: а)** сх.; б) сх. абс.

13. а) $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{(2x-3)^2}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^3dy}{3y^4+4}$. **Отв.: а)** $8/9$; б) 0.

Вариант 5

1. а) $\displaystyle\int\frac{14x-7}{\left(1+x-2x^2\right)^3}dx$; б) $\displaystyle\int x\cos 3x dx$; в) $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2+5}dx$;

г) $\displaystyle\int\frac{x^3+3}{(x+1)\left(x^2+1\right)^2}dx$; д) $\displaystyle\int\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$; е) $\displaystyle\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-3/2}dx$;

ж) $\int\sqrt{x^2+4x}dx$; з) $\int\frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^2}$.

Отв.: **а)** $\frac{7}{2(x-2x^2+1)^2}+C$; **б)** $\frac{1}{9}(3x\sin 3x+\cos 3x)+C$;

в) $\frac{1}{6}(2x^2+5)^{3/2}+C$; **г)** $\frac{x+2}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+2arctgx+C$;

д) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}-\sqrt{2x-1}\right)+C$; **е)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}+C$;

ж) $\left(\frac{x}{2}+1\right)\sqrt{x^2+4x}-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|+C$; **з)** $\frac{1}{2}ctg\frac{x}{2}-\frac{1}{6}ctg^3\frac{x}{2}+C$.

2. а) $\int_0^8\sqrt{64-x^2}dx$. **б)** $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx$. **в)** $\int_{\sqrt{2}}^3 x\ln(x^2-1)dx$.

г) Решить уравнение: $\int_1^x\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2e(e-1)$.

Отв.: **а)** 16π; **б)** $\frac{\pi}{4}$; **в)** $4\ln 8-3{,}5$; **г)** 2.

3. а) D - фигура, ограниченная кривыми: $y=x^2-2x-3$, $y=0$;

б) $x=\sqrt{3}(t-\sin t)$, $y=\sqrt{3}(1-\cos t)$, $y=\sqrt{3}$;

в)* $x^2+y^2=2x$, $x^2-8x-y^2=0$, $y=x$, $y=-x$.

Отв. а) $10\frac{2}{3}$; **б)** $\frac{3\pi}{2}+12$; **в)** $\frac{15\pi+30}{2}$.

4. **а)** $y=\sqrt{x^3}$, $0\le x\le 5$;

б) $x=4(\cos t+t\sin t)$, $y=4(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le\pi$;

в) $r=4e^{\varphi}$ (логарифмическая спираль; от $A(4;0)$ и $B(4e^{\pi};\pi)$).

Отв. а) $\frac{335}{27}$; **б)** $2\pi^2$; **в)** $4\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$.

5. Найти длину кривой:

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t, & 0\le t\le\pi/6.\\ y=\sqrt{2}\sin t, & \\ z=\sqrt{2}t. & \end{cases}$$

Отв.: $\pi/3$.

6. а) Вокруг оси X: $y=e^x$, $x=2$.

б) Вокруг оси Y: $y=1/(1+x^2)$, $x=1$, $x=0$, $y=0$.

в) Вокруг полярной оси: $\rho=2\sqrt{3}\cos 3\varphi$ (одного лепестка).

г) Вокруг оси X: $x=\cos t$, $н=2\sin t$.

Отв.: а) $\pi\left(e^4-1\right)/2$; **б)** $\pi\ln 2$; **в)** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$; **г)** $\dfrac{16\pi}{3}$.

7. а) Вокруг оси X: $y = tg\,x$, $0 \le x \le \pi/4$.

б) Вокруг оси Y: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

в) Вокруг оси X: $x = 3\cos t - 3\cos 3t$, $y = 2\sin t - \sin 3t$, $0 \le t \le \pi/2$.

Отв.: а) $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}-2}\right)$; **б)** $75\pi + 80\pi\cdot\ln 2$; **в)** $18\pi^2$.

8. Найти координаты центра тяжести дуги кривой (верхней части полуокружности: $x^2+y^2=2$). **Отв.:** $x_c = 0$, $y_c = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

9. а) $8y = x^2$, $0 \le y \le 8$. **Отв.:** $M_x = 36\sqrt{5} - \dfrac{1}{2}\ln\left(8+4\sqrt{5}\right)$, $M_y = 0$.

б) $x = \sqrt{5}\cos^3 t$, $y = \sqrt{5}\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$. **Отв.** $M_x = M_y = 3$.

в) $\rho = 8\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/4$. **Отв.** $M_x = 16$, $M_y = 8\pi + 16$.

10. а) Какую работу нужно затратить на выкачивание воды из цилиндрического бассейна с радиусом основания 0,5 м, если в начальный момент уровень воды бассейне был равным 2,8 м, что на 0,2 м ниже выпускающего воду отверстия в цилиндре?

б) Определить давление воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м.

Отв.: а) $1200\pi g$ *Дж*; **б)** 167000 *Н*.

11. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{2-3x^2}dx$; б) $\int\limits_1^2 \dfrac{xdx}{\sqrt{x-1}}$. **Отв.: а)** 0; **б)** $8/3$.

12. а) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x\sin\pi x}{x^2+2x+2}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos^2 x}dx$. **Отв. а)** сх. усл. ; **б)** расх.

13. а) $\int\limits_0^2\dfrac{xdx}{4x^2-1}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2\cos x^3 dx$. **Отв.: а)** $\dfrac{1}{8}\ln 15$; **б)** не существует.

Вариант 6

1. а) $\int\dfrac{5x^2-1}{\left(5x^3-3x+4\right)^2}dx$; б) $\int x^2\ln(1+x)dx$; в) $\int\dfrac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}dx$;

г) $\int\dfrac{dx}{\left(x^2-2x\right)^2}$; д) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$; е) $\int\dfrac{x^3dx}{\left(a-bx^2\right)^{3/2}}$;

ж) $\int\sqrt{2+4x-x^2}$;   з) $\int\frac{dx}{2\sin x+\sin 2x}$.

Отв.: **а)** $\frac{-1}{3(5x^3-3x+4)}+C$; **б)** $\frac{(x^2+1)\ln(1+x)}{3}-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$;

в) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3|x|}-6\sqrt{\ln|x|}+C$; **г)** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{4x}-\frac{1}{4(x-2)}+C$;

д) $\sqrt{2x+1}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}-3\ln\left(1+\sqrt[6]{2x+1}\right)+C$;

е) $\frac{1}{b^2\sqrt{a^2-bx^2}}+C$; **ж)** $\frac{2-x}{-\sqrt{6}}\sqrt{2+4x-x^2}-3\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{6}}+C$;

з) $\frac{1}{4}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2}+C$;

2. а) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx$.   б) $\int\limits_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$.   в) $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3 x\,dx$.

г)* Решить уравнение: $\int\limits_x^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}dx$.

Отв.: **а)** $\frac{\pi}{8}$; **б)** 16π; **в)** $\frac{2}{3}$; **г)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. а) D - фигура, ограниченная кривыми: $y^2=2x+1$, $x-y=1$;

б) $x=3\cos t$, $y=2\sin t$, $x=0$ $(x>0)$;

в)* $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $y=x$, $y=0$.

Отв.: **а)** $5\frac{1}{3}$; **б)** 3π; **в)** $\frac{3\pi-6}{4}$.

4. а) $y=-\ln\cos x$, $0\le t\le\pi/2$;

б) $x=3\cos^3\frac{t}{4}$, $y=\sin^3\frac{t}{4}$, $0\le t\le\pi/2$;

в) $\rho=2\sin^3(\varphi/3)$ (всей кривой).

Отв.: **а)** $\ln 3$; **б)** $\frac{9}{2}$; **в)** 3π.

5. Найти длину кривой:
$x=\sqrt{3}\cos t$, $y=\sqrt{3}\sin t$, $z=t$, $0\le t\le\pi/4$.   **Отв.:** $\pi/2$.

6. а) Вокруг оси X: $y=\sin x$, $y=0$ (одна полуволна).

б) Вокруг оси Y: $y=x^3$, $x=2$, $y=0$.

в) Вокруг полярной оси: $\rho=3\cos^2\varphi$.

г) Вокруг оси X: $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$.

Отв.: а) $\pi^2/2$; б) $12{,}8\pi$; в) $\frac{36\pi}{7}$; г) $\frac{188\pi}{35}$.

7. а) Вокруг оси X: $y = 2 + chx$, $0 \le x \le 1$.

б) Вокруг оси $Y: x^2 = 4y$; $y = 3$.

в) Вокруг оси X: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Отв.: а) $\pi\left(2\left(e - e^{-1}\right) + \frac{e^4 - 1}{4e^2} + 1\right)$; б) $\left(\frac{56}{3}\right)\pi$; в) $\frac{48\pi}{5}$.

8. Найти центр масс однородной арки циклоиды $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$. **Отв.:** $x_c = 6\pi$, $y_c = 8$

9. Найти статические моменты кривой относительно осей X и Y соответственно:

а) $y = x^3$, $0 \le x \le 1$.

Отв.: $M_x = \frac{5\sqrt{10}}{27} - \frac{1}{27}$, $M_y = \frac{\sqrt{10}}{4} + \frac{1}{12}\ln\left(3 + \sqrt{10}\right)$.

б) $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \pi/4$.

Отв.: $M_x = 2 + \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$, $M_y = 16\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\ln 5$.

в) $\rho = \sqrt{10}\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. **Отв.:** $M_x = 5$, $M_y = \frac{5\pi}{2}$

10. а) Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость плотностью $900\, кг/м^3$ из цистерны, боковая поверхность которой имеет форму параболического цилиндра, высота цистерны 8 м, длина 6 м, ширина 4 м.

б) Найти давление на пластинку в форме прямоугольного треугольника с катетами 9 и 4 м, опущенную в жидкость с плотностью $1000\, кг/м^3$ так, что катет 9 $м$ находится на поверхности жидкости.

Отв.: а) $368640 g, Дж$; б) $24000 g, Н$.

11. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx\, dx}{\left(1 + x^2\right)\sqrt{1 + x^2}}$; б) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$. **Отв.:** а) $\pi/2 - 1$; б) расх.

12. а) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{\sqrt[7]{2 - 3x^2}}{\sqrt[5]{8 - x^3}} dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{16 - x^4}} dx$. **Отв.:** а) расх.; б) сх.

13. а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(1/x)}{x^4}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + x}{1 + x^2} dx$. **Отв.:** а) 0; б) π.

Вариант 7

1. а) $\int\frac{x+1}{\left(4x^2+8x-3\right)^2}dx$; б) $\int\left(x^2+1\right)e^{-2x}dx$; в) $\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx$;

г) $\int\frac{dx}{x^4-x^2}$; д) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}$; е) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$; ж) $\int\sqrt{x^2-2x-10}dx$;

з) $\int\frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$.

Отв.: **а)** $\frac{-1}{8\left(4x^2+8x-3\right)^2}+C$; **б)** $C-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)e^{-2x}$;

в) $\sqrt{x^2-4}+3\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$; **г)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$; **д)** $2arctg\sqrt{x}+C$;

е) $-\frac{2x^2+1}{x\sqrt{1+x^2}}+C$; **ж)** $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-10}-\frac{11}{2}\ln\left(\sqrt{x^2-2x-10}+x-1\right)+C$;

з) $\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2tgx}{\sqrt{3}}+C$.

2. а) $\int\limits_0^7\sqrt{49-x^2}dx$. б) $\int\limits_0^{3/2}x^2\sqrt{9-4x^2}dx$. в) $\int\limits_{-1}^0 x\sin\frac{2n\pi x}{3}dx$.

г) Решить уравнение $\int\limits_0^x\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}=2\sqrt{5}$.

Отв.: **а)** $\frac{49\pi}{4}$; **б)** $\frac{81\pi}{128}$; **в)** $-\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi n}{3}+\frac{9}{(2\pi n)^2}\sin\frac{2\pi n}{3}$; **г)** 4.

3. а) D – фигура, ограниченная кривыми: $y=\ln x$, $x=0$, $y=\ln a$, $y=\ln b$;

б) $x=2\cos t$, $y=4\sin^3 t$;

в)* $x^2-y+y^2=0$; $x^2-10y+y^2=0$, $y=x$, $y=-x$.

Отв.: **а)** $b-a$; **б)** 6π; **в)** $10{,}5\pi+21$.

4. а) $y=\ln\left(1-x^2\right)$, $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$;

б) $x=e^t\cos t$; $y=e^t\sin t$, $0\le t\le\ln\pi$;

в) $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

Отв.: **а)** $\ln\left(3-\frac{1}{2}\right)$; **б)** $\sqrt{2}(\pi-1)$; **в)** 32.

5. Найти длину первого витка винтовой линии:

$$\begin{cases} x=\cos t, & 0\le t\le 2\pi. \\ y=\sin t, \\ z=2t \end{cases}$$ **Отв.** $2\pi\sqrt{5}$.

6. а) Вокруг оси X: $\ln x$, $x=1$, $x=3$, $y=0$.

б) Вокруг оси Y: $y=1/x$, $x=2$, $x=4$, $y=0$.

в) Вокруг полярной оси: $\rho=a^2\cos^2\varphi$.

г) Вокруг оси X: $x=2t^2$, $y=2\left(t-t^3/3\right)$ (петля).

Отв.: а) $\pi\left(3\ln^2 3-6\ln 3+4\right)$; **б)** 4π; **в)** $\dfrac{8\pi a^6}{21}$; **г)** $\dfrac{32\pi}{3}$.

7. а) Вокруг оси X: $y=e^{-x}$ $(0\le x\le a)$.

б) Вокруг оси Y: $y^2=2(x-1)$, $0\le y\le 1$.

в) Вокруг оси X: $x=t^2+1$, $y=\dfrac{t}{3}\left(3-t^2\right)$ (петля).

Отв.: а) $\pi\left(\sqrt{2}-\left(\sqrt{1+e^{-2a}}\right)e^{-a}-\ln\dfrac{e^{-a}+\sqrt{1+e^{-2a}}}{1+\sqrt{2}}\right)$;

б) $\pi(11\sqrt{2}+7\ln(\sqrt{2}+1))/8$; **в)** 3π.

8. Найти координаты центра тяжести кривой (однородной арки циклоиды) $x=12(t-\sin t)$, $y=12(1-\cos t)$. **Отв.:** $x_c=12\pi$, $y_c=16$.

9. а) $y=\dfrac{x^2}{2}$, $0\le y\le 2$.. **Отв.:** $M_x=\dfrac{9\sqrt{5}}{4}-\dfrac{1}{8}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$, $M_y=0$.

б) $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$, $0\le t\le\pi$. **Отв.:** $M_x=\dfrac{27}{5}$, $M_y=0$.

в) $\rho=4\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi/2$. **Отв.:** $M_x=8$, $M_y=4\pi$.

10. а) Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму параболоида вращения. Радиус основания 3 м, высота 7 м.

б) Найти силу давления, испытываемую полукругом радиусом 3м, погруженным вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.

Отв.: а) 735π *кДж*; б) $18H$.

11. а) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$; б) $\displaystyle\int_2^3\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$. **Отв.: а)** $1-\ln 2$; **б)** $\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{125}$.

12. а) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{tg\frac{1}{x}}{1+x^2\sqrt{x}}dx$; б) $\displaystyle\int_0^{4/\pi}\frac{dx}{\sin^2(4-\pi x)}$. **Отв.: а)** сх.; **б)** расх.

13. а) $\int\limits_{1/2}^{4}\frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$. **Отв.:** а) $\ln 2$; б) $\pi/2$.

Вариант 8

1. а) $\int\frac{4x-18x^2}{\left(x+x^2-3x^3\right)^2}dx$; б) $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$; в) $\int\frac{dx}{x(x-1)}$;

г) $\int\frac{dx}{x^3+x}$; д) $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$; е) $\int x\sqrt{1+x^4}dx$; ж) $\int\sqrt{4x-x^2}dx$;

з) $\int\frac{dx}{3+\cos x}$.

Отв.: а) $-2/(x+x^2-3x^2)+C$; б) $x\,arctg\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$;

в) $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$; г) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$; д) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6arctg\sqrt[6]{x}+C$;

е) $-\frac{1}{4x^2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}-x^2}{\sqrt{1+x^4}+x^2}\right|-\frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{x\sqrt[4]{\sqrt{1+x^4}-x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}+C$;

ж) $\frac{2-x}{-2}\sqrt{4x-x^2}+2\arcsin\frac{(x-2)}{2}+C$; з) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C$.

2. а) $\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx$. б) $\int\limits_0^{\sqrt{5}}x^2\sqrt{5-x^2}dx$. в) $\int\limits_0^{\pi/3}e^{\alpha x}\cos\beta x dx$.

г) Решить уравнение: $\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}$.

Отв.: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{25\pi}{16}$; в) $-\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\left(e^{\frac{\alpha\pi}{\beta}}+1\right)$; г) $\ln 4$.

3. а) D – фигура, ограниченная кривыми: $x=y^2+4y$, $y=x-4$;

б) $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, $y=0$ ($y>0$);

в)* $x^2+y^2=4x$, $x^2-10x+y^2=0$, $y=0$, $x=0$.

Отв.: а) $20\frac{5}{6}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; в) $\frac{21\pi}{2}$.

4. а) $y=1-\ln\sin x$, $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$;

б) $x=4\cos^3\frac{t}{4}$, $y=4\sin^3\frac{t}{4}$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

в) $\rho=4\varphi$ (длину дуги первого витка *архимедовой спирали*).

Отв.: а) $\ln\sqrt{3}$; **б)** 6; **в)** $4\pi\sqrt{1+4\pi^2}+2\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

5. Найти длину кривой: $x=6\cos t$, $y=6\sin t$, $z=2t$, $0\le t\le\pi/6$.

Отв.: $\dfrac{\sqrt{10}\pi}{3}$.

6. а) Вокруг оси X: $y=xe^x$, $x=1$, $y=0$.

б) Вокруг оси Y: $y=3-x^2$, $y=x^2+1$.

в) Вокруг полярной оси: $\rho=2\cos3\varphi$ (одного лепестка).

г) Вокруг оси X: $x=2\cos t$, $y=\sin t$.

Отв.: а) $\pi(e^2-1)/4$; **б)** π; **в)** $\dfrac{4\pi}{9}$; **г)** $\dfrac{8\pi}{3}$.

7. а) Вокруг оси X: $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\le x\le a)$.

б) Вокруг оси Y: $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$.

в) Вокруг оси X: $x=\sqrt{x}(3\cos t-\cos3t)$, $y=\sqrt{2}(3\sin t-\sin3t)$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

Отв.: а) $\pi\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{a^4+1}}{a^2}+\ln\dfrac{\sqrt{a^4+1}+a^2}{\sqrt{2}+1}\right)$;

б) $18\sqrt{2\pi}+3\pi\ln\left(\sqrt{2}+1/2\right)$; **в)** $36\pi^2$.

8. Найти центр тяжести дуги астроиды, расположенной в первой четверти: $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$. **Отв.** $\dfrac{6}{5}=\dfrac{6}{5}=x_c=y_c$;

9. а) $6x=y^2$, $0\le x\le6$. **Отв.:** $M_x=$
$My=81/4\cdot\sqrt{5}-9/8\cdot\ln\left(6+3\sqrt{5}\right)$.;

б) $x=(t-\sin t)$, $y=(1-\cos t)$ (первой арки).

Отв.: $M_x=\dfrac{32}{3}$, $M_y=8\pi$.

в) $\rho=4\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi/4$. **Отв.:** $M_x=2\pi-4$, $M_y=4$.

10. а) Найти работу, необходимую для выкачивания нефтяного масла плотностью $\rho=890кг/м^3$ из вертикального цилиндрического резерва высотой 3 м и радиусом основания 1 м.

б) Найти силу давления, испытываемую полукругом радиусом 4, погруженным вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.

Отв.: **а)** 493 *кДж*; **б)** 128/3.

11. а) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2-1)^2}$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. **Отв.: а)** $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3$; **б)** -4.

12. а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}\cos\pi x dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\cos x}{\sqrt{x}-\sin x}dx$.

Отв.: **а)** сх. абс.; **б)** сх.

13. а) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(arcctgx+\frac{1}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}\right)dx$. **Отв.: а)** 0; **б)** π.

Вариант 9

1. а) $\int\frac{-9x^2-2}{(3x^2+2x)^3}dx$; б) $\int\ln(5+x^2)dx$; в) $\int\frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}dx$;

г) $\int\frac{dx}{(x+1)^2\cdot(x^2+1)}$; д) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$; е) $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^3}}$;

ж) $\int\sqrt{x^2-6x-7}dx$; з) $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Отв.: **а)** $1/2(3x^3+2x)^2+C$; **б)** $\ln(5+x^2)x-2x+2\sqrt{5}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$;

в) $\frac{1}{9}\left(2\sqrt{9x^2-4}-3\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-4}\right|\right)+C$;

г) $C-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)$; **д)** $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)+C$;

е) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(\sqrt[4]{x}-1)^9}{\sqrt[4]{x}-1}\right|-\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-1}\right)+C$;

ж) $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}\right|+C$; **з)** $\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C$.

2. а) $\int\limits_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$. б) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}x^2\sqrt{3-x^2}dx$. в) $\int\limits_{0}^{1/2}\arcsin x\,dx$.

г)* Решить уравнение $\int\limits_{1}^{x}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\frac{\pi}{3}$.

Отв.: **а)** $\frac{9\pi}{4}$; **б)** $\frac{9\pi}{16}$; **в)** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$; **г)** 2.

3. а) D – фигура, ограниченная кривыми $y = 2x - x^2$, $y = -x$;

б) $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$; $y = 0$, $x = 0$ $(y > 0, x > 0)$;

в)* $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 6x$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = x\sqrt{3}$.

Отв.: **а)** 4,5; **б)** $\frac{3}{2}\pi$; **в)** $\frac{4\pi}{3}$.

4. а) $y = \sqrt{1 - x^2} - \arccos x + 1$, $0 \le x \le 9$;

б) $x = 2\cos^3 t/4$, $y = 2\sin\frac{3t}{4}$, $0 \le t \le \pi/2$;

в) $\rho = 2\sin\varphi$ (от полюса до точки, для которой $\varphi = \frac{\pi}{3}$).

Отв.: а) $\ln 2{,}4$; **б)** 3; **в)** $2\pi/3$.

5. $x = 3(1 + \cos t)$, $y = 3(t - \sin t)$, $z = 12\sin(t/2)$, $0 \le t \le \pi/4$. **Отв.** $\frac{3\pi}{2}$.

6. а) Вокруг оси X: $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$.

б) Вокруг оси Y: $y^2 = 4ax$, $x = a$.

в) Вокруг полярной оси: $0 \le \rho \le \sqrt{2}\cos^2\varphi$.

г) Вокруг оси X: $x = 3t^2$, $y = 3(t - t^3/3)$ (петля).

Отв.: а) $128\pi/7$; **б)** $16\pi a^3/5$; **в)** $\frac{8\sqrt{2}\pi}{21}$; **г)** 36π.

7. а) вокруг оси X: $y = \cos x$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$;

б) вокруг оси Y: $x^2 = 2y$, $y = 3/2$;

в) вокруг оси X: $x = 2\sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t$.

Отв.: а) $\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$; **б)** $\frac{14}{3}\pi$; **в)** $4\pi + \frac{16}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Найти координаты центра тяжести дуги кривой (однородная арка циклоиды: $x = 15(t - \sin t)$, $y = 15(1 - \cos t)$). **Отв.:** $x_c = 15\pi$, $y_c = 20$.

9. а) $4y = x^2$, $0 \le y \le 4$. **Отв.:** $M_x = 5\sqrt{5} - \frac{1}{2}\ln\left(4 + 2\sqrt{5}\right)$, $M_y = 0$.

б) $x = \sqrt{2}\cos^3 t$, $y = \sqrt{2}\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi$. **Отв.:** $M_x = 6/5$, $M_y = 0$.

в) $\rho = 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. **Отв.:** $M_x = 2$, $M_y = \pi$.

10. а) Какую работу необходимо затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую полусферический резервуар радиусом $R = 0{,}6\,м$?

б) Пластинка, имеющая форму эллипса, наполовину погружена в жидкость вертикально так, что одна из осей длиной 8 лежит на поверхности. Найти силу давления жидкости на каждую из сторон этой пластинки, если длина другой полуоси эллипса равна 3, а плотность жидкости 900.

Отв.: **а)** 1018 *Дж*; **б)** 216000.

11. а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + arctgx}{1 + x^2} dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2 + 2}{x^{2/3}} dx$. **Отв.: а)** π; **б)** $14\frac{4}{7}$.

12. а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{tg\frac{1}{x}dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{\ln(1+x)}{2-x} dx$. **Отв.: а)** расх.; **б)** расх.

13. а) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^5}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x-3}{4x^2+3} dx$. **Отв.: а)** 0; **б)** $-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 10

1. а) $\int \frac{-3x^2-8}{\left(x^3-8x+4\right)^2} dx$; б) $\int\left(4x^3+6x-7\right)\ln x dx$; в) $\int \frac{x-2x^3}{4+x^4} dx$;

г) $\int \frac{x^5+1}{16-x^4} dx$; д) $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$; е) $\int \frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}{x^6} dx$;

ж) $\int \sqrt{2+2x-x^2} dx$; з) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$.

Отв.: **а)** $1/(x^3-8x+4)+C$;

б) $\left(x^4+3x^2-7x\right)\ln x-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-7x\right)+C$;

в) $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right|-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|+C$;

г) $\frac{1}{16}arctg\frac{x}{2}+\ln\left(x^2+4\right)-\frac{33}{32}\ln|x-2|-\frac{31}{32}\ln|x+2|-\frac{x^2}{2}+C$;

д) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$; **е)** $\ln|x|-\frac{\left(x^2+1\right)^2}{4x^4}-\frac{x^2+1}{2x^2}+C$;

ж) $\frac{x-1}{\sqrt{3}}\sqrt{2+2x-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$; **з)** $arctg\left(tg\frac{x}{2}-1\right)+C$.

2. а) $\int\limits_{0}^{10} \sqrt{100-x^2} dx$; б) $\int\limits_{0}^{6} x^2\sqrt{32-x^2} dx$; в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx$;

г)* Решить уравнение $\int\limits_{x}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=2$.

Отв.: **а)** 25π; **б)** $\frac{81\pi}{2}$; **в)** $-\frac{2}{5}sh\frac{\pi}{2}$; **г)** 1.

3. а) D – фигура, ограниченная кривыми $y=x^2/4$, $y=3-x^2/2$;

б) $x=\sqrt{3}\cos t$, $y=\sqrt{2}\sin t$, $y=0$, $(y>0)$;

в)* $x^2-2y+y^2=0$, $x^2-8y+y^2=0$, $y=x/\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x$.

Отв.: **а)** 8; **б)** $\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$; **в)** 5π.

4. а) $y^2=x^3$ (от точки $O(0,0)$ до $A(4,8)$);

б) $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$; $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$; $0\le t\le\pi$;

в) $\rho=5e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi$.

Отв.: **а)** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$; **б)** $\frac{\pi^3}{81}$; **в)** $5\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$.

5. $x=1+\cos t$, $y=t-\sin t$, $z=4\sin\left(\frac{t}{2}\right)$, $0\le t\le\pi$. **Отв.:** 2π

6. а) Вокруг оси X: $y=1/x$, $x=2$, $x=4$, $y=0$.

б) Вокруг оси Y: $y=x^2$, $4x-y=0$.

в) Вокруг полярного луча: $\rho=2R\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$.

г) Вокруг оси X: $x=t^2$, $y=t-t^3/3$.

Отв.: **а)** $\pi/4$; **б)** $20\pi/3$; **в)** $\frac{4\pi R^3}{3}$; **г)** $\frac{4\pi}{3}$.

7. а) Вокруг оси X: $y^2=12x$, $0\le x\le 9$;

б) Вокруг оси Y: $x=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}-4$;

в) Вокруг оси X : $x=\sqrt{2}\cos^3 t$, $y=\sqrt{2}\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$.

Отв.: **а)** 168π; **б)** $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-\frac{71}{32}$; **в)** $\frac{24\sqrt{2}}{5}\pi$.

8. Найти координаты центра тяжести дуги кривой $y=chx$, $-1\le x\le 1$.

Отв.: $x_c=0$; $y_c=\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}$.

9. а) $\rho\sqrt{6}\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi/4$. **Отв.:** $M_x=\frac{3}{2}$, $M_y=\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}$

б) $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ (первой арки).

Отв.: $M_x = \dfrac{128}{3}$, $M_y = 32\pi$.

в) $2y^3 = x$, $0 \le y \le 1$.

Отв.: $M_x = \dfrac{\sqrt{37}}{4} + \dfrac{1}{24}\ln\left(1 + \dfrac{6}{\sqrt{37}}\right)$, $M_y = \dfrac{1}{216}\cdot\left(74\sqrt{37} - 1\right)$.

10. а) Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать воду из котла, имеющего форму параболоида вращения. Радиус основания R=6 м, высота H=5 м.

б) Пластинка, имеющая форму эллипса, наполовину вертикально погружена в жидкость так, что одна из осей длиной 4м лежит на поверхности. Найдите силу давления жидкости на каждую из сторон этой пластинки, если длина другой полуоси эллипса равна 5 м, а плотность жидкости $\rho = 1000\ кг/м^3$.

Отв.: **а)** $150\pi\ кДж$; б) ≈ 21333.

11. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 12x + 13}$; б) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(5-x)}}$. **Отв.:** **а)** $\pi/4$; **б)** π.

12. а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x + 2}{1 + \sqrt[3]{x^5}}$; б) $\displaystyle\int_{1/2}^{3} \frac{x^2 e^{x^2} dx}{8x^3 - 1}$. **Отв.:** **а)** сх.; **б)** расх.

13. а) $\displaystyle\int_2^{15} \frac{dx}{x - 10}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{16 + x^2}$. **Отв.:** **а)** $\ln\dfrac{5}{8}$; б) $\pi/4$.

Вариант 11

1. а) $\displaystyle\int \frac{3x - 1}{\left(1 + 2x - x^2\right)^3} dx$; б) $\displaystyle\int x^2 \sin(4x - 3) dx$; в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx$; г) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} dx$; д) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}} dx$; е) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$; ж) $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - 4x + 1} dx$; з) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx$.

Отв.: **а)** $1/4(1 + 2x - 3x^2)^2 + C$; **б)** $\dfrac{1 - 8x^2}{32}\cos(4x - 3) + \dfrac{x}{8}\sin(4x - 3) + C$; **в)** $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1 + \ln x)^4} + C$; **г)** $2\ln|x + 1| - \dfrac{2}{\sqrt{3}} arctg\dfrac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$;

д) $-2\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}-\ln\left|\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}\right|+C$; **е)** $\dfrac{3}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4/3}\left(4\left(1+\sqrt[4]{x}\right)-7\right)+C$;

ж) $\dfrac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4+1}+\dfrac{3}{2}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right|+C$;

з) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sin x-\cos x+2}{\sin x-\cos x-2}\right|+C$.

2. а) $\int\limits_0^{\sqrt{5}}\sqrt{5-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi}x^2\sqrt{\pi^2-x^2}\,dx$; в) $\int\limits_0^{T/2}m\cos\dfrac{2k\pi x}{T}dx,\ k\in\mathrm{N}$;

г) Решить уравнение: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\dfrac{dx}{2+\sin x}=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Отв.: **а)** $\dfrac{5\pi}{4}$; **б)** $\dfrac{\pi^5}{16}$; **в)** 0; **г)** $\dfrac{\pi}{2}$.

3. а) D – фигура, ограниченная кривыми $y=x^2$, $xy=8$, $x=6$, $y=0$.

б) $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$;

в)* $x^2+y^2=2x$; $y^2-4x+x^2=0$, $y=x$, $y=0$.

Отв.: **а)** $8/3+16\ln 2$; **б)** $\dfrac{3\pi}{2}$; **в)** $\dfrac{3\pi+1}{4}$.

4. а) $x=\ln\cos y$, (от $y_1=0$ до $y_2=\pi/3$);

б) $x=8\cos^3 t$, $y=8\sin^3 t$, $0\le t\le\pi/6$;

в) $\rho=12e^{12\varphi/5}$, $0\le\varphi\le\pi/3$.

Отв.: **а)** $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$; **б)** 3; **в)** $13\left(e^{4\pi/5}-1\right)$.

5. $\begin{cases}x=2(1+\cos\varphi), & 0\le\varphi\le\pi/2.\\ y=2(t-\sin\varphi), & \\ z=8\sin\varphi/2. & \end{cases}$ **Отв.:** 4π.

6. а) Вокруг оси X: $y=3-x^2$, $y=x^2+1$.

б) Вокруг оси Y: $y^2=8x$, $x=2$.

в) Вокруг полярного луча: $\rho=\sqrt{3}a\sin(\varphi-\cos t)$.

г) Вокруг оси X: $x=\sqrt{2}(t-\sin t)$, $y=\sqrt{2}(1-\cos t)$.

Отв.: **а)** $32\pi/3$; **б)** $\dfrac{128\pi}{5}$; **в)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3\pi$; **г)** $10\sqrt{2}\pi^2$.

7. а) Вокруг оси X: $y=chx-2$, $0\le x\le 1$.

б) Вокруг оси Y: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

в) Вокруг оси X: $x = 2\cos t$, $y = \sin t$.

Отв.: **а)** $\pi\left(1 + \frac{e^4 - 1}{4e^2} - 2\left(e - e^{-1}\right)\right)$; **б)** $144\sqrt{2}\pi + 24\pi \ln\left(2\sqrt{2} + 3\right)$;

в) $2\pi + \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Найти центр тяжести дуги астроиды, расположенной в первой четверти: $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$. **Отв.:** $x_c = y_c = 4/5$.

9. а) $\rho = 4\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/4$. **Отв.:** $M_x = 4$, $M_y = 2\pi + 4$.

б) $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$ (первой арки).

Отв.: $M_x = 96$, $M_y = 72\pi$.

в) $y^2 = 8x$, $0 \le x \le 8$. **Отв.:** $M_x = 0$, $M_y = 36\sqrt{5} - \frac{1}{2}\ln\left(8 + 4\sqrt{5}\right)$.

10. а) Какую работу нужно затратить на выкачивание воды из полушара радиусом $\sqrt{3}$ *м*.

б) Вертикальная плотина имеет форму равнобокой трапеции. Вычислить силу давления воды плотностью $1000\frac{кг}{м^3}$, если известно, что верхнее основание плотины 9 м, нижнее основание 3 м, высота плотины 6 м.

Отв.: **а)** $2250\pi g$ *Дж*; **б)** $90000 g$ *Н*.

11. а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3 - 6x^2}$. **Отв.:** **а)** $\pi/4$; б) расх.

12. а) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{4 + \arcsin\frac{1}{x}}{1 + x\sqrt{x}} dx$; б) $\int\limits_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{\left(9 - x^2\right)^5}}$. **Отв.:** **а)** сх.; б) расх.

13. а) $\int\limits_4^9 \frac{dx}{x - 6}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \sin x^3 dx$. **Отв.:** **а)** $\ln\frac{3}{2}$; **б)** 0.

Вариант 12

1. а) $\int \frac{-2x - 3}{\left(x^2 + 3x\right)^4} dx$; б) $\int \arcsin\frac{x}{3} dx$; в) $\int tg(3x + 4) dx$;

г) $\int \frac{2x dx}{(1 + x)\left(1 + x^2\right)^2}$; д) $\int x^2\sqrt{4 - x^2} dx$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$;

ж) $\sqrt{3 + 2x - x^2} dx$; з) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$.

Отв.: **а)** $1/3(x^2 + 3x)^3 + C$; б) $x\arcsin\frac{x}{3} + \sqrt{9 - x^2} + C$;

в) $-\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+4)\right|+C$; **г)** $\frac{x-1}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left|x+1\right|+C$;

д) $2\arcsin\frac{x}{2}-x+C$;

е) $\frac{1}{4}arctg\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+\frac{1}{16}\ln\left(1+\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-x}{\sqrt[4]{1+x^4}+x}\right|+C$;

ж) $\frac{x-1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{2}+C$; **з)** $\frac{1}{\cos x}-tgx+x+C$.

2. а) $\int\limits_0^6\sqrt{36-x^2}\,dx$. б) $\int\limits_0^{2\sqrt{2}}x^2\sqrt{8-x^2}\,dx$. в) $\int\limits_0^{\pi/6}e^{2x}\sin 3x\,dx$.

г) Решить уравнение: $\int\limits_1^x\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\frac{\pi}{6}$.

Отв.: **а)** 9π; **б)** 4π; **в)** $\frac{1}{13}\left(2e^{\pi/3}+3\right)$; **г)** 1.

3. а) D – фигура, ограниченная кривыми: $y=\cos x$, $y=x+1$, $y=0$

б) $x=t^2$, $y=\frac{t}{3}\left(3-t^2\right)$ (фигура ограничена петлей указанно линии);

в)* $x^2-6x+y^2=0$, $x^2+y^2=10x$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$.

Отв.: **а)** 1,5; **б)** $8\sqrt{3/5}$; **в)** $\left(\frac{\pi+3\sqrt{3}-6}{3}\right)8$.

4. а) $y=ach\frac{x}{a}$ (от $x_1=0$ до $x_2=b$);

б) $x=8\cos^3\frac{t}{4}$, $y=8\sin^3\frac{t}{4}$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

в) $\rho=6e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.

Отв.: **а)** $ash\frac{b}{a}$; **б)** 12; **в)** $6{,}5\left(e^{6\pi/5}-e^{-6\pi/5}\right)$.

5. $\begin{cases}x=3\cos t, & 0\le t\le 2\pi.\\ y=3\cos t,\\ z=3t.\end{cases}$ **Отв.:** $6\pi\sqrt{2}$.

6. а) Вокруг оси X: $xy=4$, $x=1$, $x=2$, $y=0$;

б) Вокруг оси Y: $y=x^3$, $x=2$, $y=0$;

в) Вокруг полярного луча $\rho=a^2\cos\varphi$.

г) Вокруг оси X: $x=2\cos t$, $y=3\sin t$.

Отв.: а) 8; б) $64\pi/5$; в) $\frac{a}{6}\pi$; г) 24π.

7. а) Вокруг оси X: $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{2}+2$.

б) Вокруг оси Y: $x=3+chy$, $0\le y\le 1$.

в) Вокруг оси X: $x=t^2$, $y=\frac{t}{3}\left(t^2-3\right)$, $-\sqrt{6}\le t\le\sqrt{6}$.

Отв.: а) $2+\pi/6+\sqrt{3}+\frac{57}{32}$; б) $\pi\left(3\left(e-e^{-1}\right)+\frac{e^4-1}{4e^2}+1\right)$; в) 12π.

8. Найти центр тяжести правой полуокружности $x^2+y^2=16$.

Отв.: $x_c=\frac{8}{\pi}$, $y_c=0$.

9. Найти статические моменты M_x и M_y кривой относительно осей X и Y соответственно.

а) $y=4x^3$, $0\le x\le 1$.

Отв.: $M_x=\frac{1}{216}\left(145\sqrt{145}-1\right)$, $M_y=\frac{\sqrt{145}}{4}+\frac{1}{48}\ln\left(1+\frac{\sqrt{145}}{12}\right)$.

б) $x=5\cos^3 t$, $y=5\sin^3 t$, $0\le t\le\pi/2$. **Отв.:** $M_x=M_y=15$.

в) $\rho=\sqrt{2}\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi/4$. **Отв.:** $M_x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, $M_y=\frac{1}{2}$.

10. а) Найти работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотностью $\rho=900\,кг/м^3$ из цистерны высотой 1,5 м, боковая поверхность которой имеет форму параболического цилиндра, длина цистерны 3 м, ширина 2 м.

б) Пластинка в форме прямоугольного треугольника с катетами 6 м и 4 м опущена вертикально в жидкость плотностью $900\ кг/м^3$ так, что катет 6 м находится на поверхности жидкости. Найти силу давления на пластинку.

Отв.: а) $\approx 31{,}75\,Дж$; б) $14400g\,H$.

11. а) $\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$; б) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **Отв.:** а) расх.; б) 2.

12. а) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2\ln x}dx$; б) $\int\limits_{0}^{2}\frac{\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{e^{2tgx}-1}dx$. **Отв.:** а) расх.; б) сх. абс.

13. а) $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{(x-4)^3}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\sin\left(x^2+6\right)dx$. **Отв.:** а) $-3/8$; б) 0.

Вариант 13

1. а) $\int\frac{1+x2}{\left(4+3x+x^3\right)^2}dx$; б) $\int(2x-3)\cos 3x dx$;

в) $\int\frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx$; г) $\int\frac{dx}{\left(x^2+9\right)^3}$; д) $\int\frac{1}{(x+1)^2}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{3/4}dx$;

е)* $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$; ж) $\int\sqrt{2x^2+3x+1}dx$; з) $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$.

Отв.: а) $-1/3\left(4+3x+x^3\right)+C$; **б)** $\frac{1}{3}(2x-3)\sin 3x+\frac{2}{9}\cos 3x+C$;

в) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3|x|}-6\sqrt{\ln|x|}+C$; **г)** $\frac{x}{216\left(x^2+9x\right)}+\frac{x}{36\left(x^2+9\right)^2}+\frac{1}{648}arctg\frac{x}{3}+C$;

ж) $\frac{1}{8}\left((4x+3)\sqrt{2x^2+3x+1}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(4x+3+2\sqrt{2}\sqrt{2x^2+3x+1}\right)\right)+C$;

д) $\frac{1}{7}\sqrt[4]{\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^7}+C$;

е) $6\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+2\ln\left|\sqrt[3]{1+x}-1\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1\right)-$

$-\frac{7}{\sqrt{3}}arctg\frac{2\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+1}{\sqrt{3}}+C$; **з)** $\frac{2}{3}arctg\frac{5tg\frac{x}{2}+4}{3}+C$.

2. а) $\int\limits_0^{\sqrt{8}}\sqrt{8-x^2}dx$; б) $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$; **в)** $\int\limits_1^e(1+\ln x)^2dx$.

г)* Решить уравнение $\int\limits_0^x xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}(e-1)$.

Отв.: **а)** 2π; **б)** π; **в)** $2e-1$; **г)** 1.

3. а) D - фигура, ограниченная кривыми $y=(x-2)^2$, $x=3$, $x=0$, $y=$

б) $x=\sqrt{2}(t-\sin t)$, $y=\sqrt{2}(1-\cos t)$, $y=\sqrt{2}$;

в)* $x^2-4y+y2=0$, $x^2-8y+y^2=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$.

Отв.: а) 3; **б)** $\pi+8$; **в)** $2\pi-3\sqrt{3}$.

4. а) $y=1-e^x$, между точками $O(0,0)$ и $B\left(2,1-e^2\right)$;

б) $x=5(t-\sin t)$, $y=5(1-\cos t)$, $0\le t\le\pi$;

в) $\rho=2(1-\cos\varphi)$ (длину всей кардиоиды).

Отв.: **а)** $\approx 6{,}789$; б) $10\sqrt{2}$; **в)** 16.

5. $x=4(1+\cos t)$, $y=4(t-\sin t)$, $z=16\sin(t/2)$, $0\le t\le \pi/6$. **Отв.:** $\dfrac{4\pi}{3}$.

6. а) вокруг оси X: $y=4x-x^2$, $y=x$;

б) вокруг оси Y: $y^2=4x$, $x=1$;

в) вокруг полярного луча: $\rho=2\sqrt{3}\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

г) вокруг оси X: $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$.

Отв.: **а)** $21{,}6\pi$; **б)** $16\pi/5$; **в)** $4\sqrt{3}\pi$; **г)** $\dfrac{256}{105}\pi$.

7. а) Вокруг оси X: $y=1+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}$.

б) Вокруг оси Y: $x=1+chy$, $0\le y\le 1$.

в) Вокруг оси X: $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$.

Отв.: **а)** $\left(\sqrt{3}+\dfrac{89}{32}+\dfrac{\pi}{6}\right)$; **б)** $\pi\left(\left(e-e^{-1}\right)+\dfrac{e^4-1}{4e^2}+1\right)$; **в)** $\dfrac{64}{3}\pi$.

8. Найти центр тяжести однородной арки циклоиды $x=9(t-\sin t)$, $y=9(1-\cos t)$. **Отв.:** $x_c=9\pi$, $y_c=12$.

9. а) $10x=y^2$, $0\le x\le 10$. **Отв.:** $M_x=0$, $M_y=255\sqrt{5}-\dfrac{25}{2}\ln\left(10+5\sqrt{5}\right)$.

б) $x=5\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

Отв.: $M_x=\dfrac{9}{2}+\dfrac{75}{8}\arcsin\dfrac{4}{5}$, $My=50+\dfrac{45}{8}\ln 6$.

в) $\rho=6\sin\varphi$, $0\le\varphi\le\pi/4$. **Отв.** $M_x=\dfrac{9}{2}\pi-9$, $M_y=9$.

10. а) Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы поднять материальную точку массой 50 кг с поверхности земли на высоту 8 м. Радиус земли $R\approx 6400$ *км*.

б) Найти силу давления воды на вертикальный шлюз, сечение которого имеет форму полукруга с диаметром 6 м, совпадающим с поверхностью воды.

Отв.: **а)** $\approx 400g$ *Дж*; **б)** $\approx 174{,}4$ *кН*.

11. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+13}$; б) $\displaystyle\int_2^3\frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}$. **Отв.:** **а)** $\pi/2$; **б)** расх.

12. а) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+\sin^2\pi x}$; б) $\displaystyle\int_{-16}^{16}\frac{\cos\pi x}{\sqrt[3]{16-x}}dx$. **Отв.:** а) расх.; б) сх. абс.

13. а) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x-1}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+4}$. **Отв.:** а) $\ln 2$; б) 0.

Вариант 14

1. а) $\int \frac{6x^2dx}{(x^3-4)^3}$; б) $\int x\sin 2xdx$; в) $\int e^x\sqrt{k-me^x}dx$; г) $\int \frac{(x^3+1)dx}{(x^2-4x+5)^2}$

д) $\int \frac{\sqrt{y^2-2}}{y^4}dy$; е) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; ж) $\int\sqrt{2+x-x^2}dx$; з) $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$

Отв.: **а)** $-1(x^3-4)^2+C$; **б)** $C-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$;

в) $C-\frac{2}{3m}\sqrt{k-me^x}dx$;

г) $\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)}+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+\frac{15}{2}arctg(x-2)+C$;

д) $\frac{1}{6}\cos^3\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{7}\right)+C$; **е)** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$;

ж) $\frac{1}{8}\left(2(2x-1)\sqrt{2+x-x^2}+9\arcsin\frac{2x-1}{3}\right)+C$; **з)** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{3tg\frac{x}{2}+9}{3tg\frac{x}{2}-1}\right|+C$

2. а) $\int\limits_0^2\sqrt{2-x^2}dx$; б) $\int\limits_0^1 x^2-\sqrt{1-x^2}dx$; в) $\int\limits_0^a \cos axdx$;

г)* решить уравнение: $\int\limits_2^x \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=-\frac{\pi}{6}$.

Отв.: **а)** $\frac{\pi}{2}$; **б)** $\frac{\pi}{16}$; **в)** $-\frac{4\pi}{a^3}$; **г)** 4.

3. а) D- фигура, ограниченная кривыми: $y=x^2+6x+10$, $y=-x$; $x=$ $y=5$;

б) $x=4\cos t$, $y=8\sin t$; $y=0$, $x=0$ $(x>0,\ y>0)$;

в) $x\ \ +y=y\ \ $; $x^2-2y+y^2=0$; $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$; $y=x$.

Отв.: **а)** $21\frac{1}{3}$; **б)** 8π; **в)** $\frac{\pi}{12}-\frac{3-3\sqrt{3}}{2}$.

4. а) $y=\sqrt{x-x\ \ }-\arccos\sqrt{x}$, $0\le x\le\frac{1}{4}$;

б) $x = e^t \cos t$, $x = e^t \sin t$, $0 \le t \le \ln 4$;

в) $\delta = \varphi$ (длину дуги первого витка архимедовой спирали).

Отв. а) 1; **б)** $3\sqrt{2}$; **в)** $\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

5. $\begin{cases} x = \cos t, \ 0 \le t \le \pi/2. \\ y = \sin t, \\ z = 7t, \end{cases}$ **Отв.** $2{,}5\sqrt{2\pi}$.

6. а) Вокруг оси $X : xy = 4$, $2x + y - 6 = 0$.

б) Вокруг оси Y : $y^2 = 12x$, $x = 3$.

в) Вокруг полярного луча $\delta = a\cos\varphi$.

г) Вокруг оси X : $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, (одну арку), $y = 0$.

Отв.: а) $4\pi/3$ **б)** $\frac{432\pi}{5}$ **в)** $\frac{a^3\pi}{24}$ **г)** $40\pi^2$.

7. а) Вокруг оси X : $y = 1 - e^x$, $0 \le x \le 2$.

б) Вокруг оси Y : $x^2 = 12y$, $y = 9$.

в) Вокруг оси X : $x = \sqrt{3}(3\cos t - \cos 3t)$, $y = \sqrt{3}(3\sin t - \sin 3t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Отв.: а) $\frac{1}{2}\left(e^2\sqrt{e^4+1} + \ln(e^2 + \sqrt{e^4+1}) - (\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right)$; **б)** 1168π; **в)** $54\pi^2$.

8. Найти центр тяжести дуги астроиды, расположенной в первой четверти: $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$. **Отв.:** $x_e = y_e = 8/5$.

9. а) $\rho = 8\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/4$ **Отв.:** $M_x = 8\pi - 16$, $M_y = 16$;

б) $x = \sqrt{3}(t - \sin t)$, $y = \sqrt{3}(1 - \cos t)$ (первой арки).

Отв.: $M_x = 32$, $M_y = 24\pi$.

в) $x^2 = 10y$, $0 \le y \le 10$. **Отв.:** $M_x = 225\sqrt{5} - \frac{25}{2}\ln(10 - 5\sqrt{5})$, $M_y = 0$.

10. а) Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из полушара радиусом 2 м.

б) Сечение вертикальной плотины имеет форму равнобокой трапеции, верхнее основание равно 46 м, нижнее – 34 м, высота – 8 м. Найти силу давления воды на плотину при условии, что верхнее основание трапеции совпадает с поверхностью воды ($\rho = 1000 кг/м^3$).

Отв. а) $4000\pi g$ *Дж*; **б)** 11916,8 *кг*.

11. а) $\int_0^{+\infty} x \sin 2x dx$; б) $\int_{-3/4}^{0} \frac{x dx}{\sqrt{3+4x}}$. **Отв.: а)** расх.; **б)** $-\sqrt{7}/3$.

12. а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sin^2 x+\sqrt[3]{(x+1)^7}}$ б) $2\int\limits_0^2\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{16-x^4}}$. **Отв.: а)** сх.; **б)**

13. а) $\int\limits_{1/2}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} shxdx$. **Отв.: а)** 0; **б)**

Вариант 15

1. а) $\int\frac{-4-3x^2}{\left(4x+x^3\right)^2}dx$; б) $\int\frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$; в) $\int\frac{tdt}{\sqrt{a^2-t^4}}$; г) $\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$;

д) $\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$; е) $\int\frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx$; ж) $\int\sqrt{x^2-2x+2}dx$; з) $\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$

Отв.: а) $\frac{1}{2}(4x+x^3)+C$; **б)** $C-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sin^2 x}+ctgx)$; **в)** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{t^2}{a}+C$;

г) $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+arctg(x+1)+C$; **д)** $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin(arctgx)-1}{\sqrt{2}\sin(arctg)+1}\right|+C$;

е) $-4\sqrt{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^3}+\frac{6}{5}\sqrt{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^5}+C$;

ж) $(x-1)\sqrt{x^2-2x+1}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})+C$; **з)** $-\frac{1}{1+tgx}+C$.

2. а) $\int\limits_0^{\sqrt{10}}\sqrt{10-x^2}dx$. б) $\int\limits_0^{\sqrt{6}}x^2\sqrt{6-x^2}dx$. в) $\int\limits_j^{\pi/2}\sin^3 xdx$;

г)* Решить уравнение: $\int\limits_{1/4}^{x}\frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}=\frac{\pi}{12}$.

Отв.: а) $\frac{5\pi}{2}$; **б)** $\frac{9\pi}{4}$; **в)** $\frac{2}{3}$; **г)** $\frac{3}{4}$.

3. а) D – фигура, ограниченная кривыми: $x=y^2$, $x=\frac{3}{4}y^2+1$;

б) $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, $y=0$, $(y>0)$;

в) $x^2-y+y^2=0$, $x^2-6y+y^2=0$, $y=\sqrt{3x}$, $Y=X$.

Отв.: а) $8/3$; **б)** 3π; **в)** $\frac{35\pi}{48}+\frac{35(2-\sqrt{3})}{8}$.

4. а) $y=\ln x$ (между точками $A\left(\sqrt{3},0{,}5\ln 3\right)$ и $B\left(\sqrt{8},1{,}5\ln 2\right)$;

б) $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$; $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$; $0\le t\le\pi$;

в) $\rho=3e^{\varphi}$; $0\le\varphi\le\pi$.

Отв.: а) $1+0{,}5\ln 1{,}5$; **б)** $\pi^3/3$; **в)** $3\sqrt{2}\left(e^{\pi}-1\right)$.

5. Найти длину первого витка винтовой линии

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi. \\ y = 2\sin\varphi, \\ z = \varphi. \end{cases}$$

Отв. $2\pi\sqrt{5}$.

6. а) Вокруг оси X: $y^2 = x^3$: $x = 1$, $y = 0$.

б) Вокруг оси Y: $y = x^2$: $y^2 = 8x$.

в) Вокруг полярного луча: $\rho = \sqrt{3}\cos\varphi$.

г) Вокруг оси X: $x = 2t^2$, $y = 2\left(t - t^3/3\right)$ (фигура ограничена петлей).

Отв.: **а)** $\pi/4$ **б)** $24\pi/5$ **в)** $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}$ **г)** $\dfrac{32\pi a^3}{3}$.

7. а) Вокруг оси X: $y^2 = 8x$; $0 \le x \le 6$.

б) Вокруг оси Y: $x = chy$; $\ln 2 \le y \le \ln 3$.

в) Вокруг оси X: $x = 2(t^2 + 1)$; $y = \dfrac{2t}{3}(3 - t^2)$ (петля).

Отв.: **а)** $\dfrac{224\pi}{3}$; **б)** $\pi\left(185 + 144\ln 1{,}5\right)/144$; **в)** 12π.

8. Найти координаты центра тяжести дуги кривой

$y = 2ch\dfrac{x}{2}$; $-2 \le x \le 2$ **Отв.** $x_e = 0$; $y_e = \dfrac{2(e \ + 4e^2 - 1)}{2e(e^2 - 1)}$.

9. а) $y = 2x^3$; $0 \le x \le 1$

Отв.: $M_x = \dfrac{1}{216}\left(74\sqrt{37} - 1\right)$; $M_y = \dfrac{\sqrt{37}}{4} + \dfrac{1}{24}\left(\ln(1 + \dfrac{6}{\sqrt{37}})\right)$.

б) $x = 6\cos t$; $y = 2\sin t$; $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Отв.: $M_x = 2 + \dfrac{9}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $M_y = 72\sqrt{2} + \dfrac{27\sqrt{2}}{2}\ln 7$.

в) $\rho = \sqrt{6}\sin\varphi$ $0 \le \varphi \le \pi/4$. **Отв.:** $M_x = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{3}{2}$; $M_e = \dfrac{3}{2}$.

10. а) Какую работу нужно затратить, чтобы выкачать воду из полушара радиусом 3 м?

б) Вычислить силу давления на плотину, имеющую форму равнобокой трапеции, верхнее основание которой 6,4 м, нижнее – 4,2 м, а высота – 3 м, плотность воды $\rho = 1000\,кг/м^3$.

Отв.: **а)** $20250\pi g$ *Дж*; **б)** $22200 g$ *Н*.

11. а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 dx}{3x^4 + 4}$; б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x}\ (2 - x)}$. **Отв.** **а)** расх.; **б)** $\pi/\sqrt{3}$.

12. а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{\ln(1+x)}$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x+4x^2+\sqrt{x}}$. **Отв. а)** сх. условно; **б)** сх.

13. а) $\int\limits_{-2}^{6}\frac{dx}{x-4}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$. **Отв. а)** $-\ln 3$; **б)** $\pi^2/4$.

Литература

1. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ: Учебник – Мн.: Выш.шк., 1993. - 411 с.

2. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды: Учеб. пособие для вузов/Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1986.–528 с.

3. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: Функции одной переменной. – М.: Наука. Гл. ред., физ.-мат. лит., 1973. – 400 с.

4. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие. В 3ч. Ч. 2/Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 1991. – 352 с.

Содержание

Введение......3
1. **Неопределенный интеграл** 3
   1.1. Первообразная и неопределенный интеграл 3
   1.2. Интегрирование рациональных функций 10
   1.3. Интегрирование иррациональных функций 17
   1.4. Интегрирование тригонометрических выражений 26
2. **Определенный интеграл** 35
   2.1. Интеграл Римана 35
   2.2. Формула Ньютона – Лейбница 38
   2.3. Приближенные методы вычисления определенных интегралов......45
   2.4. **Геометрические приложения определенных интегралов** 49
   2.5. Физические применения определенного интеграла 65
3. **Несобственные интегралы** 75
   3.1. Несобственные интегралы от неограниченных функций 75
   3.2. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (1-го рода) 84
4. **Интегралы, зависящие от параметра** 93
   4.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра 93
   4.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра 99
   4.3. Интегралы Эйлера 108

Приложение. Самостоятельная работа «Интегральное исчисление функций одной переменной». Структура 113
Литература 146