Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 10-ти частях

Часть 8

РЯДЫ. ФУРЬЕ-АНАЛИЗ

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования
по техническим специальностям*

Минск 2007

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1. я 73
С 23

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра математики Минского высшего радиотехнического колледжа;
профессор кафедры высшей математики Белорусского
государственного аграрного технического университета,
доктор физико-математических наук, профессор А. П. Рябушко

А в т о р ы:
А. А. Карпук, Р. М. Жевняк, В. В. Цегельник, Л. А. Конюх

С 23 **Сборник** задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 8: Ряды. Фурье-анализ : учеб. пособие / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2007. – 119 с. : ил.

ISBN 978-985-488-149-2 (ч. 8)

В части 8 сборника приводятся задачи по разделам «Ряды. Фурье-анализ».

УДК 517 (075.8)
ББК 22.1. я 73

Ч.1: Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 10 ч. Ч.1: Аналитическая геометрия / А.А.Карпук, Р.М.Жевняк. – Мн.: БГУИР, 2002. – 112 с.: ил.; 2-е изд. – 2003, 3-е изд. – 2004.

Ч.2: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч.2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями) / А.А.Карпук, Р.М.Жевняк, В.В.Цегельник. – Мн.: БГУИР, 2004. – 154 с.

Ч.3: Сборник задач по высшей математике. Ч.3: Введение в анализ / Н.Н.Третьякова, Т.М.Пушкарева, О.Н.Малышева. – Мн.: БГУИР, 2005. – 116 с.

Ч.4: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч.4: Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А.А. Карпук [и др.]. – Мн.: БГУИР, 2006. – 107 с.

Ч.5: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 5: Функции многих переменных / А.А. Карпук [и др.]. – Мн.: БГУИР, 2004. – 64 с.

Ч.6: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 6: Интегральное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук [и др.]. – Мн.: БГУИР, 2006 – 148 с.

Ч. 7: Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 7: Интегральное исчисление функций многих переменных : учеб. пособие / А. А. Карпук., В. В. Цегельник, Е. А. Баркова. – Мн.: БГУИР, 2007 – 119 с.

ISBN 978-985-488-149-2 (ч.8)
ISBN 978-985-444-727-8
ISBN 975-444-727-8

ВВЕДЕНИЕ

Пособие является восьмой частью «Сборника задач по высшей математике» в 10-ти частях, издаваемого кафедрой высшей математики Белорусского университета информатики и радиоэлектроники. В него вошел материал, посвященный следующим разделам: ряды (числовые и функциональные) и Фурье-анализ (тригонометрические ряды Фурье, преобразования Фурье).

Каждый параграф содержит:

1) краткий обзор теоретических сведений, необходимый для решения последующих задач;

2) решения типовых задач;

3) упражнения и задачи, снабженные ответами и предназначенные для самостоятельного решения.

Наиболее трудные задачи отмечены знаком *). Начало решения задачи обозначено знаком Δ, конец решения – знаком ▲. Знак ● означает «указание».

1. Ряды

1.1. Числовые ряды

Понятие числового ряда и его суммы. Остаток ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Необходимый и достаточный признак сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Простейшие свойства сходящихся числовых рядов. Достаточные признаки сходимости ряда с неотрицательными членами. Признаки сравнения. Метод выделения главной части. Признак Даламбера. Признак Коши. Оценка остатка ряда. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Приближенное вычисление суммы ряда. Ряды с комплексными числами.

Пусть дана числовая последовательность (a_n). Выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1.1}$$

или равносильное ему выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *числовым рядом*, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – *членами ряда*. Число a_n называется *общим членом ряда*. Сумма n первых членов называется n-й *частичной суммой ряда* и обозначается S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, а число S – его *суммой,* что записываются в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Если предел последовательности S_n не существует, в частности, равен бесконечности, то ряд (1.1) называется *расходящимся*.

1.1. Доказать, что ряды

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} nq^n$$

сходятся при $|q| < 1$ и найти их суммы.

Δ а) Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна

$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q|<1$.

Итак, данный ряд сходится и его сумма

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

б) Так как $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} nq^k$, то

$$S_n - S_n q = (q+2q^2+\ldots+nq^n)-(q^2+2q^3+\ldots+(n-1)q^n+nq^{n+1}) =$$
$$= q+q^2+\ldots+q^n - nq^{n+1},$$

откуда

$$S_n(1-q) = \frac{q-q^{n+1}}{1-q} - nq^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}.$$

Поскольку $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} nq^{n+1} = 0$ и, значит, существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2}, \text{ т.е. } S = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad |q|<1. \ ▲$$

1.2.* Докажите, что если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ представлены в виде

$$a_n = b_{n+1} - b_n$$

и если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то ряд сходится и его сумма равна $b - b_1$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = b - b_1. \tag{1.2}$$

Δ Находим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_n - b_{n-1}) + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = b - b_1,$$

т.е. формула (1.2) имеет место. ▲

1.3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и найти его сумму, если

1) $a_n = \frac{14}{49n^2 - 56n - 33}$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Δ 1) Так как $49n^2 - 56n - 33 = (7n-11)(7n+3)$, то, разложив общий член ряда a_n на простейшие дроби, получим

$$\frac{14}{49n^2 - 56n - 33} = \frac{1}{7n-11} - \frac{1}{7n+3}.$$

В таком случае

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{14}{49n^2-56n-33}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7k-11}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7k+3}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{7n-1}-$$

$$-\frac{1}{10}-\frac{1}{17}-\ldots-\frac{1}{7n-1}-\frac{1}{7n-4}-\frac{1}{7n+3}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7n-4}-\frac{1}{7n+3}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{12}.$$

2) Так как

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{(n+3)-n}{3n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)},$$

то, полагая $b_n=-\dfrac{1}{3n(n+1)(n+2)}$, получаем $a_n=b_{n+1}-b_n$, причем $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. По формуле (1.2) находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=-b_1=\frac{1}{18}.\blacktriangle$$

1.4. По первым трем членам рядов 1) 1+3+7+…; 2) 1+3+9+… восстановить их общие члены сначала в простейшей форме, а затем в виде

а) $a_n=an^2+bn+c$; б) $b_n=\dfrac{1}{an^2+bn+c}$; в) $c_n=\dfrac{an+b}{cn+d}$.

Отв.: 1) Простейшая форма общего члена 2^n-1; $a_n=n^2-n+1$, $b_n=\dfrac{21}{5n^2-29n+45}$, $c_n=-\dfrac{5n-1}{n-5}$, $n\neq5$. $c_5=0$; **2)** простейшая форма общего члена 3^{n-1} или $n^2-\dfrac{1+7^n}{2}$; $a_n=2n^2-4n+3$, $b_n=\dfrac{9}{2n^2-12n+19}$, $c_n=-\dfrac{3n}{n-4}$, $n\neq4$, $c_4=0$.

1.5. Найти сумму ряда:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2-12n-35}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{(n-1)n(n+1)}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n-2)(n-3)}$; 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(n^2+3n+3)}{(n-1)n(n+1)}$; 6*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^3(n+1)^3}$.

Отв.: 1) $-\dfrac{4}{5}$; **2)** $\dfrac{6}{5}$; **3)** $\dfrac{4}{3}$; **4)** 1; **5)** $\dfrac{4}{3}$; **6)** 1.

1.6.* Пользуясь формулой (1.2), найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)tg\,\frac{p}{2(n+2)}-(n+1)tg\,\frac{p}{2(n+1)}\right).$$

Отв. $\dfrac{p}{2}-2$.

1.7.* Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}}_{n\ \text{радикалов}}-\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}}_{n-1\ \text{радикалов}}\right).$$

Отв.: $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ ● $S_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n\ \text{радикалов}} = \sqrt{a+S_{n-1}}$.

Остатком ряда (1.1) называется ряд

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} + \ldots = \sum_{p=1}^{\infty} a_{n+p}\,. \qquad (1.3)$$

В таком случае для сходящегося ряда справедливо представление

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = S_n + r_n\,,$$

откуда вытекает *необходимый и достаточный признак сходимости числового ряда*.

Теорема 1.1. *Для того чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Из представления $a_n = S_n - S_{n-1}$ в случае сходимости ряда вытекает *необходимый признак сходимости ряда*.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится*, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Из теоремы 1.1 следует, что *если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *не существует или существует, но отличен от нуля, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

1.8. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$ расходится.

Δ Имеем $a_n = \left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{e^{-1,5}}{e^{0,5}} = e^{-2} \neq 0$,

и поэтому ряд расходится. ▲

1.9. Доказать, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$ выполняется необходимое условие сходимости $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$, но этот ряд расходится.

Δ Здесь $a_n = \dfrac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Так как при $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливы неравенства $a_k = \dfrac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geq n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т.е. исходный ряд расходится. ▲

1.10. Доказать расходимость рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+1}{n+3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin na$, $a \neq mp$, $m \in Z$.

1.11.* Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но является расходящимся.

Примером расходящегося ряда, удовлетворяющего необходимому условию сходимости, служит так называемый *гармонический ряд*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ (см. пример 1.13).}$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, но ряд расходится.

Имеет место следующее утверждение:

***Критерий Коши сходимости ряда**. Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $e>0$ существовал номер $N(e)$ такой, что для любого $n \geq N(e)$ и для любого $p \in N$ было справедливо неравенство $\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|<e$.*

Отметим, что упомянутое в критерии Коши число N не должно зависеть от p.

С помощью кванторов критерий Коши записывается в виде

$$\forall e>0, \exists N=N(e), \forall n \geq N(e), \forall p \in \boldsymbol{N}:$$

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|<e. \tag{1.4}$$

Если условие (1.4) не выполняется, т.е. найдется хотя бы одно $e>0$ и одно натуральное p, что $\forall N>0$ найдется $n>N$, что справедливо неравенство

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right| \geq e, \tag{1.5}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится**.**

1.12.* Используя критерий Коши, доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Δ Докажем, что для этого ряда выполняется условие Коши (1.4).

Используя неравенства $a_k=\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k(k-1)}$ при $k>a$ и замечая, что

$\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$, получаем

$$0<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}<\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

Итак, $\forall n\in \boldsymbol{N}$, $p\in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство

$$\left|a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}\right|<\frac{1}{n}.$$

Зададимся произвольным $e>0$. Тогда из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, следует: $\exists N(e), \forall n\geq N(e), \forall p\in \boldsymbol{N}$ будет выполняться неравенство (1.4). Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится. ▲

Известно, далее (см.[1]) , что так называемый *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ *сходится при* $p>1$ *и расходится при* $p\leq 1$.

1.13. С помощью критерия Коши доказать расходимость гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Δ $\forall k\in \boldsymbol{N}$ возьмем $n=p=k$. Тогда

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right|=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+k}>\frac{1}{2k}\cdot k=\frac{1}{2},$$

т.е. условие (1.5) выполняется при $e=\frac{1}{2}$. Следовательно, *гармонический ряд расходится*. ▲

1.14. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость (1)–(3) и сходимость (4)–(6) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если:

1) $a_n=\dfrac{n+1}{n^2+4}$; 2) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; 3) $a_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$;

4) $a_n=\dfrac{\sin na}{n(n+1)}$; 5) $\dfrac{\cos nx}{2^n}$; 6) $\dfrac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$.

Суммой двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, а *произведением ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *на действительное число* a – ряд

$$a\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a\, a_n).$$

Имеют место следующие *простейшие свойства сходящихся числовых рядов*.

1°. Сходимость ряда не нарушится, если произвольным образом переставить конечное число членов ряда, добавить или отбросить конечное число членов ряда.

2°. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, при этом, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_a, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_b, \quad \text{то} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S_a \pm S_b.$$

3°. Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ можно умножить на любой множитель a, при этом $\sum_{n=1}^{\infty} (a\, a_n) = a\, S$.

1.15. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n (1-q^n)$, $|q| < 1$.

Δ Имеем $\sum_{n=1}^{\infty} q^n (1+q^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (q^n + q^{2n}) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n + \sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^n$. Сходящиеся ряды $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^n$ представляют собой суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий со знаменателями q и q^2 соответственно. Эти суммы равны $S_1 = \dfrac{1}{1-q}$ и $S_2 = \dfrac{1}{1-q^2}$. Тогда исходный ряд также сходится и его сумма равна

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{1-q} + \frac{1}{1-q^2} = \frac{2+q}{1-q^2}. \ \blacktriangle$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого $a_n \geq 0$, называется *знаконеотрицательным*. Имеют место следующие утверждения (достаточные признаки):

Теорема 1.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с *неотрицательными членами* $(a_n \geq 0, n \in \boldsymbol{N})$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху, т.е.* $\exists M > 0,\ \forall n \in \boldsymbol{N}: \ \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M$.

Теорема 1.3 (признак Абеля). *Пусть знаконеотрицательный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится,* а (b_n) – *ограниченная последовательность*. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ тоже
сходится.

1.16. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$.

Δ Оценим частичную сумму данного ряда. Так как $\frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \le \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то для частичной суммы имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \le \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 (M = 1).$$

Следовательно, ряд сходится. ▲

1.17. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2^n}$.

Δ Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ – сходящийся ряд $\left(q = \frac{1}{2} < 1\right)$, а последовательность

$$(b_n) = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$$

сходится к числу e и, значит, ограничена, то по признаку Абеля исходный ряд сходится. ▲

1.18.* Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, установив ограниченность сверху последовательности его частичных сумм:

1) $a_n = \frac{\sin^4 2n}{(n+1)(n+2)}$; 2) $a_n = \frac{p - arctgn}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;

3) $a_n = \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)q^n$, $0 < q < 1$; 4) $a_n = \frac{n2^n + 5}{n3^n + 4}$.

Приведем ещё один достаточный признак сходимости знаконеотрицательных рядов.

Признак Дирихле. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится, если частичные суммы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *ограничены, а последовательность* (a_n) *монотонна и ограничена* $\forall n \ge n_o$ $(n_0 \in \boldsymbol{N})$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

1.19.* Доказать, что если последовательность (a_n) монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin na$ сходится $\forall a \in \boldsymbol{R}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos na$ сходится при $a \ne 2pm$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Δ Обозначим $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\sin ka$, $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\cos ka$. Тогда

$$B_n = \frac{\sin((n+1)a/2)\sin(na/2)}{\sin(a/2)}, \quad C_n = \frac{\cos((n+1)a/2)\sin(na/2)}{\cos(a/2)}, a \neq 2p\,m, m \in \boldsymbol{Z}. \quad (1.6)$$

Для доказательства формул (1.6) можно воспользоваться равенствами

$$2\sin ka \cdot \sin(a/2) = \cos(k-(a/2))a - \cos(k+(a/2))a,$$

$$2\cos ka \cdot \sin(a/2) = \sin(k+(a/2))a - \sin(k-(a/2))a.$$

При $a \neq 2pm, m \in \boldsymbol{Z}$ имеем оценки $|B_n| \le \dfrac{1}{|\sin(a/2)|}$, $|C_n| \le \dfrac{1}{|\sin(a/2)|}$, и по признаку Дирихле ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin na$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos na$ сходятся. Если же $a = 2pm$, $m \in \boldsymbol{Z}$, то $\cos na = 1$, $\sin na = 0$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$. Поэтому при таком a ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin na$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos na = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться. ▲

1.20. Доказать сходимость ряда $\forall a \in \boldsymbol{R}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin na}{\ln\ln(n+2)} \cos\dfrac{1}{n}$.

• Воспользоваться признаком Абеля и результатами задачи 1.19.

Следующие признаки позволяют сводить решение вопроса о сходимости данного ряда к аналогичному вопросу о другом ряде, задача о сходимости которого решена или решается просто.

Теорема 1.4 (признак сравнения). *Если существует номер n_o такой, что для всех $n \ge n_o$ выполняются неравенства*

$$0 \le a_n \le b_n, \qquad (1.7)$$

то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

При выполнении условия (1.7) говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ является *мажорантным* рядом или *мажорантой* для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ или что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *мажорируется* рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

1.21. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если: 1) $a_n = \dfrac{5+3(-1)^n}{2^{n+3}}$; 2) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$.

Δ 1) Так как $\forall n \in \boldsymbol{N}$ выполняются неравенства $2 \le 5+3(-1)^n \le 8$, то $0 \le a_n \le \dfrac{1}{2^n}$, и из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ следует сходимость ряда с общим членом 1).

2) Так как $a_n > \dfrac{1}{n}$, то из расходимости гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n^2}$. ▲

Теорема 1.5 (предельный признак сравнения). *Если* $a_n \geq 0, b_n > 0, \forall n \geq n_o$ *и существует конечный и отличный от нуля* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, *то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *или оба сходятся, или оба расходятся.*

В частности, если $a_n \sim b_n$ *при* $n \to \infty$, *то ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *либо сходятся, либо оба расходятся.*

1.22. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если

1) $a_n = \dfrac{e^n + n^4}{3^n + \ln^2(n+1)}$; 2) $a_n = \dfrac{2n^2 + 5n + 1}{\sqrt{n^6 + 3n^2 + 2}}$.

Δ 1) Из асимптотических формул $e^n + n^4 \sim e^n$, $3^n + \ln^2(n+1) \sim 3^n$, $n \to \infty$ следует, что $a_n \sim (e/3)^n$, $n \to \infty$, где $(e/3) < 1$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Так как $2n^2 + 5n + 1 \sim 2n^2$, $\sqrt{n^6 + 3n_2 + 2} \sim n^3$ при $n \to \infty$, то $a_n \sim (2/n)$, $n \to \infty$, и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. ▲

1.23. Используя признаки сравнения, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

1) $a_n = \dfrac{5 + 3(-1)^{n+1}}{2^n}$; 2) $a_n = \dfrac{arctgn}{n^2+1}$; 3) $a_n = \dfrac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$;

4) $a_n = \dfrac{\cos(p\ /(4n))}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}}$; 5) $a_n = \sin\dfrac{3 + (-1)^n}{n^2}$; 6) $a_n = \dfrac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2\ln n}$;

7) $a_n = \dfrac{n+2}{n^2(4 + \sin(pn/3))}$; 8) $a_n = \dfrac{\ln(1 + (3 + (-1)^n arctg 2n)/n)}{\ln^2 n}$, $n \geq 2$;

9) $a_n = \dfrac{\arcsin\dfrac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$; 10) $a_n = \dfrac{arctg(n^2 + 2n)}{3^n + n^2}$; 11) $a_n = \dfrac{\cos^4(2n/(n+1))}{\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+1}}$;

12) $a_n = \dfrac{n^5(\sqrt{2} + \sin\sqrt{n})}{2^n + n}$; 13) $a_n = \dfrac{\ln(1 + \ln n)}{\sqrt[4]{n^4 + 3n^2 + 1}\cdot\ln^3(n+2)}$; 14) $a_n = n^2 e^{-n}$;

15) $a_n = (3n + n^3) e\sqrt{n} \ln n$; 16) $a_n = \dfrac{(3 - 2\cos^2(pn/3))e^n}{n^2 2^n}$.

Отв.: 1) сх.; **2)** сх.; **3)** сх.; **4)** расх.; **5)** сх.; **6)** сх.; **7)** расх.; **8)** сх.; **9)** расх.; **10)** сх.; **11)** сх.; **12)** сх.; **13)** сх.; **14)** сх.; **15)** сх.; **16)** расх.

Одним из эффективных методов исследования сходимости ряда является *метод выделения главной части*. Суть его в следующем. При исследовании сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами иногда удается получить с помощью формулы Тейлора асимптотичесую формулу вида $a_n \sim \dfrac{c}{n^a}, n \to \infty, c > 0$. В этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $a > 1$и расходится при $a \le 1$.

1.24. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = 1 - \cos\dfrac{p}{\sqrt[3]{n^2}}$; 2) $a_n = \left(1 - \sqrt[3]{\dfrac{n-1}{n+1}}\right)^a$; 3*) $a_n = \ln\dfrac{1 + tg(1/\sqrt{n})}{1 + arctg(1/\sqrt{n})}$.

Δ 1) Так как

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2),\ t \to 0,\ \text{то}\ a_n = 1 - \cos\frac{p}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right),\ n \to \infty.$$

Отсюда $a_n \sim \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{\sqrt[3]{n^2}}\right), n \to \infty$. Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos\dfrac{p}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ сходится, т.к. $a = \dfrac{4}{3} > 1$.

2) Имеем $\dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$. Применим сюда асимптотическую формулу

$(1+t)^b = 1 + bt + o(t)$, при $b = \dfrac{1}{3}$ и $b = -\dfrac{1}{3}$ получим

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

откуда $a_n \sim \left(\dfrac{2}{3n}\right)^a$, $n \to \infty$. Следовательно, ряд расходится при $a \le 1$.

3) Согласно разложениям $(t \to 0)$,

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3),\ tgt = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3),\ arctgt = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3),$$

имеем $\ln(1+tgt)=t-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{2t^3}{3}+o(t^3)$, $\ln(1+arctgt)=t-\dfrac{t^2}{2}+o(t^3)$, $t\to 0$.

Значит, $a_n=\dfrac{2}{3n^{3/2}}+o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$, т.е. $a_n\sim\dfrac{2}{3n^{3/2}}$, $n\to\infty$, и поэтому ряд сходится. ▲

1.25. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, получив асимптотическую формулу $a_n\sim\dfrac{c}{n^a}$ при $n\to\infty$.

1) $a_n=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}arctg\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$; 2) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$;

3) $a_n=(e^{1/n}-1)\sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$; 4) $a_n=\dfrac{n^3+3n^2+5}{n\sqrt[5]{n^{16}+n^4+1}}$;

5) $a_n=e^{(\sqrt[3]{n}+2)/(n^2+3)}-1$; 6) $a_n=\ln\dfrac{n+3}{n^2+4}$;

7) $a_n=\sqrt{n}(ch(p/n)-1)$; 8) $a_n=\arcsin\dfrac{(\sqrt{n}+1)^3}{n^3+3n+2}$;

9) $a_n=\ln(1/\cos(2p/n))$; 10) $a_n=\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\ln\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}}$, $n\ge 2$;

11) $a_n=\sqrt{\dfrac{n-1}{n^2+1}}arctg\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^4+4}}$; 12) $a_n=\log_{2^n}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{3}}{n}\right)$.

Отв.: 1) сх.; **2)** сх.; **3)** сх.; **4)** сх.; **5)** сх.; **6)** расх.; **7)** сх.; **8)** сх.; **9)** сх.; **10)** расх.; **11)** расх.; **12)** сх.

1.26. Найти все значения a, при которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$:

1) $a_n=(1-n\sin(1/n))^a$; 2) $a_n=\left(e^{tg(1/n)}-1\right)^a$;

3) $a_n=\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{\sqrt{n^2-n}}{n}\right)$; 4) $a_n=n\sin^a\left(\dfrac{1}{n}-arctg\dfrac{1}{n}\right)$;

5) $a_n=\left(e^{1-\cos(1/n)}-1\right)^a\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 6) $a_n=\left(n\sin\dfrac{1}{n}-\cos\dfrac{1}{n\sqrt{3}}\right)^a$;

7) $a_n=\left(1-\sin\dfrac{pn^2}{2n^2+1}\right)^a$; 8) $a_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\dfrac{n+1}{n}}\right)^a$;

9) $a_n=\left(1+\dfrac{\ln n}{n}\right)^{an}$; 10) $a_n=\left(n\arcsin\dfrac{1}{n}\right)^{n^a}-1$;

11) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}\ln\left(\cos\dfrac{1}{n} + tg^2\dfrac{a}{n}\right)$; 12) $a_n = \left(\ln\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - \dfrac{4}{\sqrt{n^2+n/2}+\sqrt{n^2-n/2}}\right)^a$.

Отв.: 1) $a > \frac{1}{2}$; **2)** $a > 1$; **3)** $a > \frac{1}{2}$; **4)** $a > \frac{2}{3}$; **5)** $a > \frac{1}{4}$; **6)** $a > \frac{1}{4}$;

7) $a > \frac{1}{2}$; **8)** $a > \frac{2}{3}$; **9)** $a < -1$; **10)** $a < 1$; **11)** $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; **12)** $a > \frac{1}{2}$.

На практике для выяснения сходимости или расходимости рядов часто очень полезны следующие признаки. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$.

Признак Даламбера. *Если существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, *то при* $L < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а при* $L > 1$ *расходится. При* $L = 1$ *ряд может как сходиться, так и расходиться.*

Признак Коши. *Если существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$, $a_n \ge 0$, *то при* $L < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, а при* $L > 1$ *расходится. При* $L = 1$ *ряд может как сходиться, так и расходиться.*

1.27. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Даламбера, если:

1) $a_n = \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$; 2) $a_n = \dfrac{3^n n!}{n^n}$.

Δ 1) Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n+1} = 0$, $a > 0$. По признаку Даламбера ряд сходится. Заметим, что по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$.

2) Имеем $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!3^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}n!3^n} = \dfrac{3n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{3}{(1+1/n)^n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3}{e} > 1$. Поэтому ряд расходится. ▲

1.28. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Коши, если:

1) $a_n = \left(\dfrac{3n}{n+5}\right)^n\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$; 2) $a_n = \dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

Δ 1) Имеем $\sqrt[n]{a_n} = \frac{3n}{n+5}\left(\frac{1+2/n}{1+3/n}\right)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{e} > 1$, и поэтому ряд расходится.

2) Используя асимптотическую формулу Стирлинга $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2p\ n}$ при $n\to\infty$, получаем $\sqrt[n]{a_n} \sim n e^{-1}\left(2p^{\frac{1}{2n}}\right) n^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{n}{e}$, $n\to\infty$, откуда следует, что ряд расходится. ▲

1.29. Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n^2}}{[(3n)!]^n} = 0. \qquad (1.8)$$

Δ Составим ряд $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}\frac{n^{n^2}}{[(3n)!]^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и исследуем его на сходимость с помощью признака Коши: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(3n)!}$. Покажем, что рассматриваемый предел равен нулю. Для этого, в свою очередь, рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(3n)!}$. Он сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}(3n)!}{(3n+3)!\,n^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^n}{(3n+1)(3n+2)} = 0 < 1.$$

Следовательно, общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ стремится к нулю при $n\to\infty$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(3n)!} = 0$. А так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0 < 1$, то по признаку Коши этот ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и, значит, равенство (1.8) справедливо. ▲

1.30. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Даламбера:

1) $a_n = \frac{2\cdot 5\cdot 8 \ldots (3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\ldots(5n-4)}$;
2) $a_n = \frac{n!\,a^n}{n^n}$, $a \ne e$, $a > 0$;

3) $a_n = \frac{1\cdot 5\ldots(4n-3)}{2\cdot 6\cdot 11\ldots(4n-2)}$;
4) $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

5) $a_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+(n-1))}{(2n-1)!!}$, $a > 0$;

6) $a_n = \dfrac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!}$; 7) $a_n = \dfrac{(2n)!!}{n!} arctg \dfrac{1}{3^n}$;

8) $a_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$.

Отв.: **1)** сх.; **2)** сх. при $a < e$ и расходится при $a > e$; **3)** признак Даламбера не решает вопрос о сходимости ряда; **4)** расх.; **5)** сх.; **6)** сх.; **7)** сх.; **8)** сх.

1.31. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Коши:

1) $a_n = 2^n \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^{n^2}$; 2) $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{3/2}}$;

3) $a_n = 3^{n+1} \left(\dfrac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}$; 4) $a_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1} \right)^{n^2+4n+5}$;

5) $a_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+1} \right)^{n(n-1)}$; 6) $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{(n+3)/2}}$;

7) $a_n = \dfrac{n^a}{(\ln(n+1))^{n/2}}$, $a > 0$; 8) $a_n = \left(\dfrac{6n+1}{5n-3} \right)^{n/2} \left(\dfrac{5}{6} \right)^{2n/3}$.

Отв.: 1) сх.; **2)** сх.; **3)** расх.; **4)** сх.; **5)** сх.; **6)** сх.; **7)** сх. $\forall a$; **8)** сх.

1.32. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (ответом служит число *L*, получаемое при применении признака Даламбера или Коши).

1) $a_n = \dfrac{(n+3)!}{n^n}$; 2) $a_n = \dfrac{n^n}{(2n+3)!}$; 3) $a_n = \dfrac{(2n+3)!!}{n^n}$;

4) $a_n = \dfrac{(5n)^n}{(2n+1)!}$; 5) $a_n = \dfrac{(5n)!}{2^{n^2}}$; 6) $a_n = \dfrac{n^n}{[(n+2)!]^2}$.

Отв.: 1) $L = 1/e$; **2)** $L = 0$; **3)** $L = \dfrac{2}{e}$; **4)** $L = 0$; **5)** $L = 0$; **6)** $L = 0$.

Часто сходимость числового ряда можно выяснить из сходимости соответствующего несобственного интеграла 1-го рода. Имеет место

Интегральный признак Коши. *Пусть общий член ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *есть* $a_n = f(n) > 0$. *Если функция* $f(x)$, *принимающая в точках* $x = n,\ n \in \boldsymbol{N}$ *значения* $f(n)$, *монотонно убывает в промежутке* $1 \le a \le x < +\infty$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ *или оба сходятся, или оба* *расходятся.*

1.33. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ если:

1) $a_n = 1/n^p$; 2) $a_n = n^2 e^{-n^3}$; 3) $a_n = \dfrac{1}{n \ln^b n}$, $n \geq 2$;

4) $a_n = 1/((3n-5)\ln^2(4n-7))$.

Δ При $p > 0$ функция $f(x) = 1/x^p$ неотрицательна и убывает на промежутке $[1, +\infty)$. Интеграл же $\int\limits_1^{\infty} dx/x^p$, как известно, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ также сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

2) Функция $f(x) = x^2 e^{-x^3}$ неотрицательна и убывает при $x \geq 1$. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$ сходится, так как существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$, где $F(x) = -\dfrac{1}{3} e^{-x^3}$ – первообразная функции $x^2 e^{-x^3}$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$ сходится.

3) При $x \geq 2$ рассмотрим функцию $f(x) = 1/x \ln^b x$, принимающую положительные значения на $[2, +\infty)$. Её производная

$$f'(x) = -\frac{\ln x + b}{x^2 \ln^{b+1} x}.$$

Если $\ln x + b > 0 \Leftrightarrow x > e^{-b}$, то $f'(x) < 0$. Следовательно, функция f положительна и убывает на промежутке $[a, +\infty)$ где $a = \max(2; e^{-b})$. Так как интеграл $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x \ln^b x}$ сходится при $b > 1$ и расходится при $b \leq 1$, то и наш ряд $\sum\limits_{n-1}^{\infty} 1/n \ln^b n$ сходится при $b > 1$ и расходится при $b \leq 1$.

4) Непосредственное применение здесь интегрального признака приводит к исследованию на сходимость несобственного интеграла $\int\limits_3^{\infty} \dfrac{dx}{(3x-5)\ln^2(4x-7)}$, что является трудной задачей. Поэтому поступим иначе. Так как

$$4n - 7 > 3n - 5,\ \ \forall n \geq 3, \text{ то } \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)} < \frac{1}{(3n-5)\ln^2(3n-5)} = b_n. \quad (1.9)$$

Исследуем теперь сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ интегральным признаком. Функция $f(x)=\dfrac{1}{(3x-5)\ln^2(3x-5)}$ монотонно убывает на $[3,+\infty)$. Для неё имеем:

$$\int_3^{\infty}\frac{dx}{(3x-5)\ln^2(3x-5)}=\frac{1}{3}\int_3^{\infty}\frac{d(\ln(3x-5))}{\ln^2(3x-5)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{\ln(3x-5)}\Bigg|_3^{+\infty}=\frac{1}{6\ln 2},$$

т.е. несобственный интеграл сходится, а значит сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

В таком случае из неравенства (1.9) по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ▲

1.34. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощь интегрального признака, если:

1) $a_n=\dfrac{n}{2^{n^2}}$; 2) $a_n=\dfrac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)}$; 3) $a_n=\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

4) $a_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}$; 5) $a_n=\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$;

6) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+1}{n-1}$; 7) $a_n=\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$; 8) $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

9) $a_n=\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^2 n}$; 10) $a_n=\dfrac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$; 11) $a_n=\dfrac{n}{(n^2-1)\ln n}$;

12) $a_n=\dfrac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$.

Отв.: 1)–9) сх.; **10)–12)** расх.

Интегральный признак Коши позволяет оценить остаток r_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Справедлива следующая оценка $(a_n \ge 0)$:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le r_n \le a_{n+1}+\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{1.10}$$

1.35. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ с точностью до 0,1.

∆ Имеем: $f(x)=1/x^2$. Согласно оценке (1.10) получаем

$$\int_{n+1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\le r_n\le\int_{n+1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{(n+1)^2},\quad \text{т.е. } \frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

Потребовав, чтобы $\dfrac{n+2}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{10}$, получим $n \geq 10$. Итак, с точностью до 0,1 сумма S ряда равна

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} = 1{,}4. \quad \blacktriangle$$

Иногда для оценки знакоположительного ряда можно использовать метод сравнения остатка с остатком сходящегося ряда, члены которого больше членов данного ряда.

1.36. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ нужно взять, чтобы получить значение суммы с точностью до 0,0001.

Δ Оценим остаток данного ряда. Имеем

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right).$$

Но

$$1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots < 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots = \frac{1}{1 - 1/(n+2)} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Поэтому $r_n \leq \dfrac{n+2}{(n+1)!(n+1)}$.

Нам надо выбрать такое значение n, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{n+2}{(n+1)!(n+1)} \leq \dfrac{1}{10000} \Rightarrow n \geq 7$, т.е. можно взять $n = 7$, и тогда с точностью до 0,0001 сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n!$ равна $S = 1{,}7182$. $\blacktriangle$

1.37. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с точностью e, если:

1) $a_n = 1/n^3, e = 0{,}01$; 2) $a_n = 1/n^2\sqrt{n}, e = 0{,}1$;

3) $a_n = 1n^2/(n^6+1), e = 0{,}01$; 4) $a_n = 1/n(n^5+4), e = 0{,}001$.

Отв.: 1) $S \approx S_8 = 0{,}56$; **2)** $S \approx S_4 = 1{,}3$; **3)** $S \approx S_4 = 0{,}56$; **4)** $S \approx S_4 = 0{,}516$.

1.38. Оценить остаток ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$; 2) $a_n = \dfrac{\cos(1/n)}{n^2}$; 3) $a_n = n^3/e^{n^2}$;

4) $a_n = 1/\sqrt{2^n + 1}$; 5) $a_n = 1/n(n^3+1)$.

Отв.: 1) $r_n \leq 1/2\ln^2(n+1)$; **2)** $r_n \leq 1/n$; **3)** $r_n \leq (n^2+1)/2e^{n^2}$; **4)** $r_n \leq 1/(\ln 2 \cdot 2^{n/2-1})$; **5)** $r_n \leq 1/3n^3$.

1.39. Определить, сколько членов ряда нужно взять, чтобы получить значение суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с точностью до 0,0001:

1) $a_n = 1/n^3$; 2) $a_n = 1/(2n+1)^4$; 3) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

4) $a_n = 1/(2n)!!$; 5) $a_n = 1/(2n-1)!!$; 6) $a_n = 1/n!2^n$.

Отв.: 1) $n \geq 71$; **2)** $n \geq 6$; **3)** $n \geq 1 + e^{10000}$; **4)** $n \geq 5$; **5)** $n \geq 5$; **6)** $n \geq 5$.

Ряды, знаки членов которых изменяются, называются *знакопеременными.*

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из модулей членов данного ряда. *Всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся,* т.е. из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ всегда следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся,* если он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – расходится.

Абсолютно и условно сходящиеся ряды обладают следующими свойствами.

1°. *Абсолютно сходящийся ряд остается сходящимся и не меняет величины суммы при любой перестановке его членов.*

2°. *Изменяя порядок следования членов в условно сходящемся ряде, можно сделать сумму ряда равной любому наперед заданному числу или даже сделать ряд расходящимся.*

3°. *Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то сходятся ряды, составленные из его а) положительных членов; б) отрицательных членов. Если же знакопеременный ряд сходится лишь условно, то упомянутые выше ряды расходятся.*

1.40. Доказать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, если

1) $a_n = \dfrac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7 + 3n + 4}}$; 2) $a_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) arctg\, \dfrac{\sin n}{n}$;

3) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln^2(n+1)}\left(1 - \cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Δ 1) Из очевидных неравенств $n+1 \leq 2n$, $|\cos 2n| \leq 1$, $n^7 + 3n + 4 > n^7$ вытекает, что $|a_n| \leq 2/n^{4/3}$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^{4/3}}$ по признаку сравнения следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Заметим, что справедливы соотношения $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$, $\left|arctg\,\frac{\sin n}{n}\right| \le arctg\,\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$, поэтому $|a_n| \le \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{n^{6/5}}$, откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3) Используя формулу $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$ и неравенство $|\sin t| \le |t|$, $t \in \boldsymbol{R}$, получаем $|a_n| \le \frac{1}{2n\ln^2(n+1)}$. Ряд же $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/(2n\ln^2(n+1))$ сходится по интегральному признаку. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. ▲

1.41. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, если:

1) $a_n = \dfrac{arctg(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$; 2) $a_n = \dfrac{\cos(np/4)}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}}$;

3*) $a_n = \sqrt{\dfrac{n^2+3}{n^3+4n}}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \ge 2$; 4) $a_n = n^3 \sin n \cdot e^{-\sqrt{n}}$;

5) $a_n = \dfrac{(-1)^n(2n)!!}{(n+1)^n}$; 6) $a_n = (-1)^{n(n+1)/2}\dfrac{2^n+n^2}{3^n+n^2}$; 7*) $a_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin\dfrac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Справедливы следующие *достаточные признаки абсолютной сходимости рядов*:

1. Признак сравнения. *Пусть для членов рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n > 0$, *имеет место неравенство* $|a_n| \le b_n$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно.*

2. Признак Даламбера. *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$, *то при* $L < 1$ *ряд сходится абсолютно, а при* $L > 1$ *ряд расходится.*

3. Признак Коши. *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$, *то при* $L < 1$ *ряд сходится абсолютно, а при* $L > 1$ *ряд расходится.*

1.42. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-n)^n/(2n)!$.

Δ Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость. С этой целью к ряду из модулей членов данного ряда применим признак Даламбера. Имеем $|a_n| = n^n/(2n)! \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!n^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \dfrac{1}{2(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e}{2(2n+1)} = 0 < 1$, т.е. ряд из модулей сходится. Значит исходный ряд сходится абсолютно. ▲

Среди знакопеременных рядов особо выделяют класс знакочередующихся рядов. Ряд

$$a_1 - a_2 + a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n\,, \tag{1.11}$$

где $a_n > 0,\ \forall n$, называется знакочередующимся рядом. Для этих рядов справедлива следующая

Теорема 1.6 (признак Лейбница). *Пусть дан знакочередующийся ряд (1.11). Если*

1) $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то ряд* ***(1.11)*** *сходится. Сумма его меньше первого члена, а остаток ряда* r_n *удовлетворяет неравенству*

$$|r_n| < a_{n+1}. \tag{1.12}$$

Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 1.6, называется *рядом Лейбница*. Формула (1.12) дает оценку остатка ряда Лейбница.

1.43. Установить сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n^3}$ и найти его сумму с точностью 0,01.

Δ Данный ряд сходится как ряд Лейбница. Согласно неравенству (1.12) имеем

$$|r_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{1+(n+1)^3} \le 0{,}01 \Rightarrow n \ge 4,$$

т.е. с точностью 0,01 сумма ряда $S = S_5 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{28} + \dfrac{1}{65} = 0{,}59$. ▲

1.44. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$; 2) $a_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$;

3) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$; 4) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n \ln 2n}$;

5) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\cos\dfrac{p}{3\sqrt{n}} \sqrt[3]{3n+\ln n}}$; 6) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\cos(2/\sqrt{n+4})}$;

7) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+2}}$; 8) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\cos(2/\sqrt{n+4})}$.

Отв.: 1) сх. усл.; **2)** сх. абс.; **3)–6)** сх. усл.; **7)–8)** сх. абс.

1.45. Вычислить сумму ряда с точностью e , если:

1) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{3n^2}$, $e = 0{,}01$; 2) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$ $e = 0{,}01$;

3) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n)^3}$, $e = 0{,}001$; 4) $a_n = (-1)^n\dfrac{2n+1}{n^3(n+1)!}$, $e = 0{,}01$;

5) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $e = 0{,}0001$; 6) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{2^n}$, $e = 0{,}1$.

Отв.: 1) 0,28; **2)** 0,62; **3)** 0,112; **4)** –1,34; **5)** –0,1585; **6)** – 0,3.

Пусть $z_n = a_n + ib_n$ – комплексное число. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + ib_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,. \qquad (1.13)$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ называется *действительной частью*, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ – *мнимой частью* ряда (1.13). Ряд (1.13) называется *сходящимся*, если последовательность (S_n) его частных сумм сходится к некоторому, в общем случае, комплексному числу S, которое называется суммой ряда (1.13).

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится, если сходится его действительная часть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и мнимая часть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.

1.46. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится и найти его сумму, если:

1) $z_n = 1/(1+i)^n$; 2) $z_n = a^n e^{inj}$, $0 < a < 1$, $j \in \boldsymbol{R}$.

Δ 1) Числа $z_n = 1/(1+i)^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $|q| = 1/\sqrt{2} < 1$. Тогда ряд сходится и его сумма:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{i} = -i\,.$$

2) $z_n = a^n e^{inj} = (ae^{ij})^n$, где $\left|ae^{ij}\right| = |a| = a < 1$. По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем:

$$z_n = a^n e^{inj} = \frac{ae^{ij}}{1 - a\cos j - ia\sin j} = a\frac{(\cos j + i\sin j)(1 - a\cos j + ia\sin j)}{(1-a\cos j)^2 + a^2\sin^2 j} =$$

$$= \frac{\cos j - a + i\sin j}{1 - 2a\cos j + a^2}\,. \quad ▲$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a + ib_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,.$$

Из неравенств

$$|a_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \le |a_n| + |b_n|,\ \ |b_n| \le \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся абсолютно его действительная и мнимая части.

Перечислим *основные свойства сходящихся и абсолютно сходящихся комплексных числовых рядов*.

1°. (*Необходимое условие сходимости ряда*). Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

2°. **(*Критерий Коши*)**. *Для того чтобы комплексный числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall e > 0, \exists N = N(e), \forall n \ge N$,

$$\forall p \in N : |z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| < e\,.$$

3°. Абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

4°. Если для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n > 0$ и $|z_n| \le c_n$ начиная с некоторого номера *N*, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно.

5°. (*Признак Даламбера*). Если для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$, то при $L < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $L > 1$ ряд расходится.

6°. (*Признак Коши*). Если для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ справедливо условие $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$, то при $L < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $L > 1$ ряд расходится.

1.47. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(e-i)^n}$.

Δ По признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1} n!(e-i)^n}{(n+1)!\,n^n (e-i)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{|e-i|} = \frac{e}{|e-i|} = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1,$$

т.е. ряд сходится абсолютно. ▲

1.48. Применяя различные признаки, исследовать сходимость комплексного числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$, если:

1) $z_n = \frac{\cos in}{3^n}$; 2) $z_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$; 3) $z_n = \frac{(2+i)^n}{n2^n}$; 4) $z_n = \frac{n}{\sqrt{n}+in}$;

5) $z_n = \frac{\cos\sqrt{n} + i\sin\sqrt{n}}{n^2}$; 6) $z_n = \frac{\sin in}{3^n}$; 7) $z_n = \left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3}\right)^n$;

8) $z_n = \left(\frac{i(2n+i)}{4n}\right)^n$; 9) $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}+i}$; 10) $z_n = \frac{(1+i)^n n}{2^n}$;

11) $z_n = \frac{(2+i)^n n}{2^n}$; 12) $z_n = \frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$.

В примерах 1) и 2) найти, кроме того, сумму ряда.

Отв.: 1) $S = \frac{3}{2}\cdot\frac{6e-e^2 1}{(3e-1)(3-e)}$**.** ● Использовать формулу Эйлера $\cos in = (e^{-n}+e^n)/2$; 2) $S=(1+i)$; **3)** расх.; **4)** расх.; **5)** сх. абс.; **6)** сх. абс.; **7)** сх.абс.; **8)** сх. абс.; **9)** расх.; **10)** расх.; **11)** сх. абс.; **12)** расх.

1.2. Функциональные ряды

Функциональный ряд (ФР) и его область сходимости. Критерий Коши. Абсолютная сходимость ФР. Равномерная сходимость ФР, признак Вейерштрасса. Критерий Коши равномерной сходимости ФР. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся ФР.

Функциональным рядом (ФР) называется ряд

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x), \tag{1.14}$$

членами которого являются функции $U_n(x)$, определенные в некоторой области D. Сумма $S_n(x) = U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)$ называется n-й *частичной суммой* этого ряда, а выражение $r_n(x) = U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)+\ldots = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)$ – его n-м *остатком.*

Если для $x_0 \in D$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x_0)$ сходится, то говорят, что ФР (1.14) *сходится в точке* x_0. Если в каждой точке $x_0 \in D_1 \subset D$ числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходится, то ряд (1.14) называется *сходящимся в области* D_1. Суммой ряда (1.14) называется функция

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x). \quad (1.15)$$

Равенство (1.15) с помощью кванторов записывается так: ряд (1.14) в D_1 сходится к сумме $S(x)$, если

$$\forall e>0,\ \exists N=N(e,x),\quad \forall n\geq N: \left|S(x)-S_n(x)\right|=\left|r_n(x)\right|<e,\ \forall x\in D_1. \quad (1.16)$$

Критерий Коши. *Для того, чтобы ФР* ***(1.14)*** *был сходящимся в области* D_1, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall e>0,\ \exists N=N(e,x), \forall n\geq N;$ $\forall p\in \mathrm{N}: \left|U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)+...+U_{n+p}\right|<e, \forall x\in D_1.$

Для определения сходимости или области абсолютной сходимости можно воспользоваться либо признаком Даламбера, либо признаком Коши. Именно если: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=L(x)$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_n(x)\right|}=L(x)$, то ряд (1.14) сходится абсолютно для x, удовлетворяющих неравенству $L(x)<1$, и расходится для x, при которых $L(x)>1$. Эти признаки справедливы и для комплексных функциональных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(z)$, где $z=x+iy$ – комплексная переменная.

1.49. Найти область сходимости ФР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n3^n\sqrt{(x+2)^n}}$, $x>-2$.

Δ Так как $\left|U_n(x)\right|=1/n3^n\sqrt{(x+2)^n}$ и $x>-2$, то, применив признак Коши, получим $\dfrac{1}{3\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{3\left|x+2\right|}$. Следовательно, ряд сходится, если $\dfrac{1}{3(x+2)}<1\Rightarrow x>-\dfrac{17}{9}$. При $x=-\dfrac{17}{9}$ получаем ряд Лейбница $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Таким образом, область сходимости ряда есть промежуток $\left[-\dfrac{17}{9},+\infty\right)$. ▲

1.50. Найти области сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(z-i)^n}$, $z=x+iy\in D$.

Δ По признаку Даламбера

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)(z-i)^n}{n(z-i)^{n+1}}\right|=\dfrac{1}{\left|z-i\right|}<1\Rightarrow\left|z-i\right|>1$ – внешность круга радиусом 1 с центром в точке i. На окружности $\left|z-i\right|=1$ ряд очевидно расходится. ▲

1.51. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ если:

1) $U_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n^{2x-1}}$; 2) $U_n(x)=\ln^n(1+x^2)$; 3) $U_n(x)=\dfrac{(x+2)^n}{n2^n}$;

4) $U_n(x) = \dfrac{n(3x-4)^n}{3^n}$; 5) $U_n(x) = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^2(5x+9)^{2n-1}}$; 6) $U_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^n n \ln n}$;

7) $U_n(x) = n \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)^{mn}, m \in Z$; 8*) $U_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)^{mn}, m \in Z$;

9) $U_n(x) = \dfrac{1}{x^{ntgx}}$; 10) $U_n(x) = n^n \left(e^{\frac{x}{n}} - 1 \right)^n$;

11) $U_n(x) = \left(\sqrt[5]{(nx+1)} - \sqrt[5]{n}\right)^n \cdot \sqrt[5]{n^{4n}}$;

12*) $U_n(x) = \left(\dfrac{2^{n+x^2} + nx^2}{2^{n+x+2} + n(x+2)} \right)^{2n}$;

13*) $U_n(x) = \dfrac{(n!)^n}{n^{n^2} x^n}$; 14) $U_n(x) = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\dfrac{2x}{1+x^2} \right)^n$;

15) $U_n(x) = 5^{nx} \, arctg \dfrac{x}{7^{nx}(x-1)}$; 16) $U_n(x) = \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^x$;

17) $U_n(x) = \dfrac{n^{n+1}}{(2n^2+n+x^2)^{(n+1)/2}}$; 18*) $U_n(x) = \dfrac{\sin n \cdot \sin n^2}{\ln^2 x + n}$;

19) $U_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^x} \right)$, $n \ge 2$.

Отв.: 1) $x \ge 1/2$; при $x > 1 -$ сх. абс., при $0{,}5 < x \le 1$ – усл.; **2)** сх. абс. для $-\sqrt{l-1} < x < \sqrt{l-1}$; **3)** сх. абс. для $-4 < x < 0$ и усл. в точке $x = -4$; **4)** сх. абс. для $1/3 < x < 7/3$; **5)** $-\infty < x < -2$, $-8/5 < x < \infty$ в точке $x = -2$ сходимости нет; **6)** $-\infty < x < -1$ *и* $1 \le x < \infty$; **7)** при $m > 0$ сх. абс. для $|x| < 3$; при $m = 0$ расх. $\forall x$; при $m > 0$ сх. абс. для $|x| > 3$; **8)** при $m > 0$ сх. абс. для $|x| < 3^{m/(m+1)}$; при $m = 0$ сх. абс. для $|x| < 1$; при $m < 0$ сх. абс. для $|x| > 3^{m/(m+1)}$; **9)** сх. абс. для $kp < x < p(2k+1)$, $k \in \mathbf{N}$; **10)** $|x| < 1$ – сх. абс.; **11)** сх. лишь при $x = 1$; **12)** сх. абс. для $-1 < x < 2$; **13)** сх. абс. $\forall x \ne 0$; **14)** сх. абс. при $|x| \ne 1$ *и усл. при* $x = -1$; **15)** сх. абс. при $x \ne 0$; **16)** сх. абс. при $x > 2$; **17)** сх. абс. $\forall |x| < \infty$; **18)** сх. усл. при $x > 0$; • Воспользоваться равенством

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin k \cdot \sin k^2 \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^{n} (\cos(k-1)k - \cos(k+1)k) \right| = \frac{1}{2} |1 - \cos(n+1)n| \le 1$$

и применить признак Дирихле; **19)** сх. при $x > 1/2$; • Воспользоваться формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^x}\right)=\frac{(-1)^n}{n^x}-\frac{1}{2n^{2x}}+0\left(\frac{1}{n^{2x}}\right).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в области D_1, если $\forall e>0,\ \exists N=N(e)$, не зависящий от

$$x\in D_1,\ \forall n\ge N: |r_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|<e,\ \forall x\in D_1. \qquad (1.17)$$

Геометрически неравенство (1.17) означает, что, начиная с некоторого номера N, графики частичных сумм S_n ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ не выходят за пределы $e-$ окрестности графика его суммы $S(x),\ \forall x\in D_1$ (рис. 1.1).

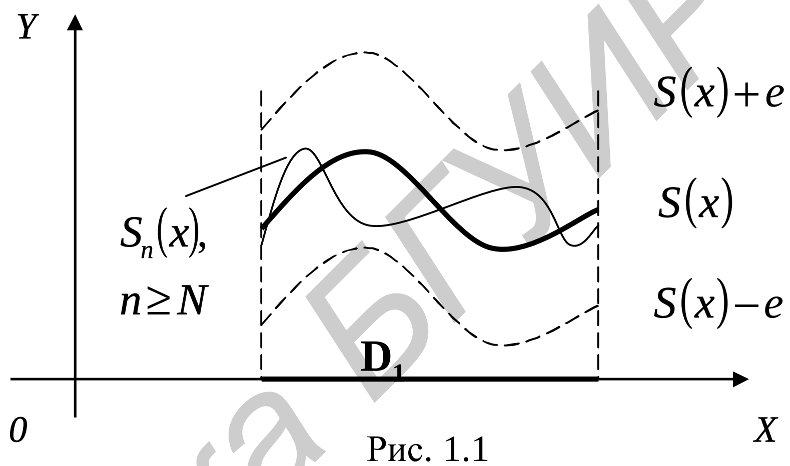


Рис. 1.1

Приведем достаточные признаки равномерной сходимости ФР.

Признак Вейерштрасса. *Если члены ФР $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами, т.е. если $|U_n(x)|\le a_n,\ \forall x\in D_1$, то данный ФР сходится в D_1 абсолютно и равномерно.*

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ a_n>0$ называется при этом *мажорирующим рядом* или *мажорантой для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$.

1.52. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ на множестве *E*, если:

1) $U_n(x)=\dfrac{arctg(n^2x)\cos npx}{n\sqrt{n}},\ E=\boldsymbol{R}$; 2) $U_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^a x^2},\ a>4,\ E=\boldsymbol{R}$;

3) $U_n(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2(n+1)}\right),\ E=[0;2]$; 4*) $U_n(x)=x^2e^{-nx},\ E=[0,+\infty)$.

Δ 1) Так как $\forall x\in\boldsymbol{R}$ и $\forall n\in \mathrm{N}$, справедливы неравенства

$\left|arctg\left(n^2x\right)\right| \le p/2$, $\left|\cos npx\right| \le 1$, то $\left|U_n(x)\right| \le p/\left(2n^{3/2}\right)$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ следует абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ на $\boldsymbol{R}$.

2) Из известного *неравенства Коши* $a^2+b^2 \ge 2|ab|$, $\forall a,b \in \boldsymbol{R}$ *получим* $1+n^a x^2 \ge 2n^{a/2}|x|$, $x \ne 0$, откуда следует, что $\left|U_n(x)\right| \le \frac{n|x|}{n^{a/2}|x|} = \frac{1}{n^{a/2-1}}$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$ (и в силу того, что $U_n(0)=0$). Так как $a/2-1=b>1$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^b}$, $b>1$ следует абсолютная и равномерная сходимость нашего ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$.

3) Так как при $t \ge 0$ выполняются неравенства $0 \le \ln(1+t) \le t$ и учитывая, что $0 \le x \le 2$, получаем $0 \le U_n(x) \le \frac{x}{n\ln^2(n+1)} \le \frac{2}{n\ln^2(n+1)} = b_n > 0$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$.

4) Заметим, что $U_n(x)>0$ при $x>0$ и $U_n(0)=0$. При $x>0$ уравнение $U_n'(x)=e^{-nx}(2x-nx^2)=0$ имеет единственный корень $x=x_n=2/n$, причем $U_n'(x)>0$ при $x \in (0,x_n)$ и $U_n'(x)<0$ при $x \in (x_n,+\infty)$. Поэтому x_n – точка максимума функции $U_n(x)$, причем $\sup\limits_{x\in E}U_n(x)=U_n(x_n)$. Следовательно, $0 \le U_n(x) \le U_n(x_n) = \frac{4}{n^2}e^{-2}$ при $x \in E$ и $n \in N$, откуда и вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ на E_1. ▲

1.53. Исходя из определения равномерной сходимости, доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ в указанном промежутке, если:

1) $U_n(x)=(-1)^n x^n/(n+1)$, $[0;1]$; 2) $U_n(x)=(-1)^{n-1}x^{2n/(2n-1)}$, $(-1,1)$;

3) $U_n(x)=\frac{1}{x^2+n^2}$, $x \in R$; 4) $U_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$, $[0,10]$;

5) $U_n(x)=\frac{x}{3^n\sqrt{1+nx^2}}$, $[0;2]$.

1.54. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость ФР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ в указанном промежутке, если:

1) $U_n(x)=\dfrac{x^2}{1+n^{3/2}x^2}, \quad x\in \boldsymbol{R}$; 2) $U_n(x)=\dfrac{arctgnx}{x^4+n\sqrt[3]{n}}, \quad x\in \boldsymbol{R}$;

3) $U_n(x)=2^{-n}\cos nx, \quad x\in \boldsymbol{R}$; 4) $U_n(x)=x^n/n^2,\ -1\le x\le 1$;

5) $U_n(x)=\dfrac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n},\ -1\le x\le 3$; 6) $U_n(x)=\dfrac{(x+2)^n\cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}},\ [-3,-1]$;

7) $U_n(x)=\dfrac{(n+2)^3(2x)^{2n}}{x^2+3n+4},\ [-1/4,1/4]$; 8) $U_n(x)=\dfrac{narctg\,2n^2x}{\sqrt[3]{n^7+n+x}}, \quad x\ge 0$;

9*) $U_n(x)=nxe^{-n^2x^2}, \quad x\in \boldsymbol{R}$; 10*) $U_n(x)=\dfrac{\cos nx\sin\frac{x}{n}}{x^2+\ln^3(n+1)}, \quad x\in \boldsymbol{R}$;

11*) $U_n(x)=nxe^{-n^6x^7}\sin nx, \quad x\in \boldsymbol{R}$; 12*) $U_n(x)=\dfrac{\sin nx}{1+n^8x^3},\ x\ge 0$.

Критерий Коши равномерной сходимости. *Для того чтобы ФР* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ *равномерно сходился в области* D_1*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall e>0,\ \exists N=N(e),\ \forall n\ge N,\ \forall p\in N,\ \forall x\in D_1:\left|U_{n+1}(x)+...+U_{n+p}(x)\right|<e. \quad (1.18)$$

Равенство (1.18) называется *условием Коши. Если условие Коши не выполняется, т.е.*

$$\exists e_0>0, \forall n\in N, \exists p\in N, \exists x^*\in D_1:\left|U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)+...+U_{n+p}(x)\right|\ge e_0, \quad (1.19)$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ *не является равномерно сходящимся на множестве* D_1.

В частности, если

$$\exists e_0>0,\ \exists n_0\in N,\ \forall n\ge n_0,\ \exists x_n\in D_1:\left|U_n(x_n)\right|\ge e_0, \quad \textit{(1.20)}$$

то ФР не сходится равномерно в D_1.

1.55.* Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве D_1 ФР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, если $U_n(x)=\dfrac{1}{(1+nx)^2},\ D_1=(0,+\infty)$.

Δ Если $x>0$, то $0<U_n(x)<1/(n^2x^2)$, откуда следует сходимость ряда на множестве D_1. Пусть $x=x_n=1/n$, тогда $x_n\in D_1,\ \forall n\in N,\ U_n(x_n)=1/4$. Таким образом, выполняется условие (1.20), и поэтому ряд сходится неравномерно на множестве D_1. ▲

1.56.* Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n(x)$, если:

1) $U_n(x) = e^{-n^2x^2}\sin nx,\ D_1 = \boldsymbol{R}$; 2) $U_n(x) = arctg\left(x^3 / n\sqrt{n}\right),\ D_1 = [1,+\infty)$;
3) $U_n(x) = x/(1+n^2x^2),\ D_1 = [0,1]$; 4) $U_n(x) = n^2x^2e^{-nx},\ D_1 = [0,+\infty)$.

Отв.: 1)–4) Ряд сходится неравномерно на множестве D_1.

Признак Дирихле. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{1.21}$$

сходится равномерно на множестве *E*, если выполняются следующие условия:

1) *Последовательность частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *ограничена на E, т.е.*

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \boldsymbol{N},\ \forall x \in E : \left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \le M . \tag{1.22}$$

2) *Последовательность* $(a_n(x))$ *монотонна при каждом* $x \in E$ *и равномерно стремится к нулю при* $n \to \infty$*, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |a_n(x)| = 0$.

Признак Абеля. *Ряд* (1.21) *равномерно сходится на множестве E, если выполняются следующие условия:*

1) *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно сходится на множестве E.*

2) *Последовательность* $(a_n(x))$ *ограничена на E и монотонна* $\forall x \in E$.

1.57. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *на множестве E, если:*

1) $U_n(x) = \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x^2}},\ E = \boldsymbol{R}$; 2) $U_n(x) = \dfrac{(-1^n)}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n,\ E = [0,1]$.

Δ 1) Обозначим $b_n(x) = \sin x \sin nx,\ a_n = 1/\sqrt{n+x^2}$ и воспользуемся формулой (см. [1]):

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{kx}{2} = \sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x .$$

Тогда

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x ,$$

откуда следует, что $|B_n(x)| \le 2,\ \forall x \in \boldsymbol{R}$ и $\forall n \in \boldsymbol{N}$, т.е. последовательность $(B_n(x))$ ограничена на множестве *E*. Последовательность $(a_n(x))$ монотонна $\forall x \in \boldsymbol{R}$, так как функция $j(t) = 1/\sqrt{t+x^2}$ монотонно убывает при $t \ge 1$, т.к.

$$j'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{(t+x^2)^3}} < 0 \quad \text{при} \quad t \ge 1.$$

Кроме того, $0 < a_n(x) \le 1/\sqrt{n}, \forall x \in \boldsymbol{R}$, откуда следует, что последовательность $(a_n(x))$ сходится равномерно $\forall x \in \mathrm{R}$. По признаку Дирихле ряд равномерно сходится на ***R*.**

2) Обозначим

$$b_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+\sqrt{x}}},\ a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

и заметим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на [0;1], так как он равномерно сходится на $[0;+\infty]$ (покажите это!). Последовательность $(a_n(x))$ ограничена на [0;1], так как

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,$$

и монотонна $\forall x \in [0;1]$, так как $j(t) = \left(1+\frac{x}{t}\right)^n$ – убывающая функция при $t \ge 1, \forall x \in [0;1]$. По признаку Абеля ряд сходится равномерно на множестве [0;1]. ▲

1.58. Исследовать на сходимость и на равномерную сходимость ФР $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ в указанном промежутке:

1) $U_n(x) = \dfrac{x^2 \sin\left(n\sqrt{x}\right)}{1+n^3x^4},\ [0,+\infty);$

2) $U_n(x) = \dfrac{n^2 x}{(n^2+1)(1+n^4x^2)arctg(1+x)},\ 0 < x < +\infty;$

3) $U_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}\cos nx}{n(2nx^2+1)},\ 0 < x < +\infty;$

4) $U_n(x) = arctg^2 \dfrac{x}{x^2+n^2},\ 0 \le x < +\infty;$

5) $U_n(x) = \dfrac{x}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}-x\right)^n,\ 0 \le x \le 1;$

6) $U_n(x) = \dfrac{x\sin x(x+n)}{n^2x^2+n+1},\ 0 \le x < +\infty.$

Отв.: 1)─6) сх. равномерно.

Приведем теперь *основные свойства равномерно сходящихся* ФР.

1° (***Непрерывность суммы ФР***). Если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$– непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, а ряд сходится равномерно на $[a,b]$, то его сумма $S(x)$ также непрерывна на отрезке $[a,b]$.

2° (***Интегрирование ФР***). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ равномерно сходится на отрезке $[a,b]$, а каждая из функций $U_n(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_o}^{x}Un(t)\,dt$, где $x\in[a,b]$ сходится равномерно на $[a,b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_{x_o}^{x}\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_o}^{x}U_n(t)\,dt.$$

3° (***Дифференцирование ФР***). Если функции $U_n(x), n\in N$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U'_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x\in[a,b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ можно почленно дифференцировать, т.е. $\left(\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}U'_n(x)$.

1.59. Доказать, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ непрерывна на отрезке [0,1] и найти эту сумму.

Δ Равномерная сходимость этого ряда доказана в примере 1.52. Тогда по свойству 1° сумма $S(x)$ этого ряда есть функция, непрерывная на отрезке [0,1]. По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=e^{-x}$ находим

$$S(x)=\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{x^2}{e^x-1},\ x>0.$$

При $x=0$ члены ряда равны нулю, и поэтому $S(0)=0$. ▲

1.60. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, а затем вычислить сумму s ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Δ Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$, сходящийся на интервале $(-1,1)$, получаем

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt$$

или

$$arctgx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (1.23)$$

Итак, $S(x) = arctgx$. Полагая в (1.23) $x = 1/\sqrt{3}$, получаем

$$arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{p}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} \Rightarrow s = \frac{p\sqrt{3}}{6}. \ \blacktriangle$$

1.61. Найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Δ 1) Члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ – непрерывные функции, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, составленный из производных членов исходного ряда, сходится равномерно на отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$, а его сумма равна $1/(1-x)$, $x \in (-1,1)$. Дифференцируя почленно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, получаем

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \ |x| < 1. \qquad (1.24)$$

2) Дифференцируя почленно ряд $\sum\limits_{n(n+1)}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = g'(x)$, откуда, согласно (1.24), получаем

$$g'(x) = -\ln(1-x) \Rightarrow \int_0^x g'(t)\,dt = g(x) - g(0) = -\int_0^x \ln(1-t)\,dt \qquad (1.25)$$

или $g(x) - g(0) = \int\limits_0^x \ln(1-t)\,d(1-t) = (1-t)\ln(1-t)\Big|_0^x + \int\limits_0^x dt$, откуда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x), \ |x| < 1. \blacktriangle$$

1.62. Доказать непрерывность суммы ФР $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ на множестве E, если:

1) $U_n(x) = \dfrac{arctgnx}{\sqrt[3]{n^4 + x}}$, $E = \boldsymbol{R}$; 2) $U_n(x) = \arcsin \dfrac{1}{n^2 + x^4}$, $E = \boldsymbol{R}$;

3) $U_n(x) = (-1)^n/(x^2+\sqrt{n}),\ E=[2{,}5];$ 4) $U_n(x) = xe^{-n^2x},\ E=[0,+\infty);$

5) $U_n(x) = 2^n \ln(1+\sin(1/(3^n+x))),\ E=[0,+\infty);$

6) $U_n(x) = (\cos nx)/\sqrt[3]{n},\ E=[p/3,\ 2p/3].$

1.63. Найти сумму ряда и указать его область сходимости:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+n)x^{n-1}}{2^{n-1}}$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+3}}{(4n-1)(4n+3)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)x^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx\left(x^2-2\right)^{n-1}$;

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{x^n}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(1+x^2)^{n+1}}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cos^{n+1}x}{n(n+1)}$; 11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{n+1}$; 12*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n^2-n+3}{(x^2-x+1)^n}$.

Отв.: **1)** $\dfrac{1}{(x-1)^2}$; **2)** $-\ln(1-2x), -\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{1}{2}$;

3) $\dfrac{16}{(2-x)^3},\ |x|<2$;

4) $-\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^4-1}{16}\left(\ln\dfrac{1+x}{1-x}-2arctgx\right), |x|<1;$

5) $-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln(1-x)-1,\ x\ne 0, |x|<1, S(0)=0$; **6)** $\dfrac{2}{(3-x^2)^2},\ 1<|x|<\sqrt{3}$;

7) $\dfrac{5x^2-2x+1}{(1-x)^3}, |x|<1;$ **8)** $\dfrac{x}{(x-1)^2}, |x|>1$; **9)** $1/x^4,\ x\ne 0;$

10) $(1+\cos x)\ln(1+\cos x)-\cos x,\ \ x\ne(2k+1)p$; $S(p+2kp)=1$;

11) $\ln\left|\dfrac{x}{x-\ln x}\right|$. Ряд сходится для $-1\le\dfrac{\ln x}{x}<1$; **12)** Для $x<0$ и $x>1$ сумма ряда равна $\dfrac{3x^6-9x^5+13x^4-11x^3+9x^2-5x+4}{x^3(x-1)^3}$.

1.3. Степенные ряды

Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Степенные ряды в комплексной области. Ряды Тейлора. Остаточный член ряда Тейлора. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена). Применение степенных рядов к вычислению пределов, производных

функций в точке и интегралов. Приближенные вычисления с помощью рядов. Применение рядов к решению дифференциальных уравнений.

Функциональный ряд вида

$$C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \ldots + C_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n \quad (1.26)$$

называется *степенным рядом по степеням* $x - x_0$, а ряд

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad (1.27)$$

по степеням x.

Действительные числа $C_n, n = 0,1\ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда*. Степенной ряд (1.26), очевидно, всегда сходится в точке $x = x_0$, а ряд (1.27) – в точке $x = 0$. Ясно, что заменой $x - x_0 = X$ степенной ряд (1.26) всегда можно свести к ряду вида (1.27).

Для степенных рядов имеют место следующие теоремы:

Теорема 1.7 (Абеля). *Пусть степенной ряд* (1.27) *сходится в точке* $x_0 \neq 0$. *Тогда он сходится абсолютно в любой точке* x, *удовлетворяющей неравенству* $|x| < |x_0|$, *и сходится равномерно в области* $|x| \leq q < |x_0|$. *Если же ряд расходится в некоторой точке* x_1, *то он расходится во всех точках* x *таких, что* $|x| > |x_1|$.

Теорема 1.8. *Для всякого степенного ряда* (1.27) *существует число* R $(R \geq 0$ *или* $R = +\infty)$ *такое, что ряд* (1.27) *абсолютно сходится в интервале* $I = (-R,\ R)$, *если* $R \neq 0; +\infty$.

Этот интервал называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а R – *радиусом сходимости* этого ряда.

Если $R = 0$, то ряд (1.27) сходится в единственной точке $x = 0$, а если $R = +\infty$, то этот ряд сходится $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$ интервал сходимости $\boldsymbol{I}$ имеет вид $\boldsymbol{I} = \{x : |x - x_0| < R)$, т.е. это интервал $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

Теорема 1.9 (Абеля). *Если R – радиус сходимости степенного ряда* (1.27), *причем* $0 < R < +\infty$, *и если этот ряд сходится при* $x = R$, *то он сходится равномерно на отрезке* $[0, R]$, *а его сумма непрерывна на этом отрезке.*

Радиус сходимости R находится по одной из следующих формул:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \quad (1.28)$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}. \quad (1.29)$$

1.64. Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2x^n}{2^n}$; 2) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^nx^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$; 4*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^{n^2}x^{n^2}$.

Δ 1) Здесь $C_n = n^2/2^n$, $C_{n+1}=(n+1)^2/2^{n+1}$, следовательно,

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2 2^{n+1}}{2^n(n+1)^2}=2$ и, значит, интервал сходимости есть (–2, 2).

На концах этого интервала, т.е. в точках $x=\pm 2$ степенной ряд принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(\pm 2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n n^2.$$

Оба эти ряда расходятся, так как не удовлетворяют необходимому признаку сходимости. Следовательно, область сходимости данного ряда есть интервал (–2, 2).

2) Здесь $C_n = n^n$. По формуле (1.29) находим радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

следовательно, ряд сходится в единственной точке $x=0$.

3) Так как $C_n = 1/n!$, $C_{n+1}=1/(n+1)!$, то по формуле (1.28) радиус сходимости

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

т.е. ряд сходится $\forall x\in \boldsymbol{R}$.

4) В развернутом виде ряд имеет вид $5x+5^4x^4+5^9x^9+\ldots+5^{n^2}x^{n^2}+\ldots$, и ясно, что бесконечное множество его коэффициентов равно нулю:

$$C_0=C_2=C_3=C_5=C_6=C_7=C_8=C_{10}=C_{11}=\ldots=C_m=0\ \ (m\neq n^2).$$

В силу этого применение формул (1.28), (1.29) для вычисления радиуса сходимости недопустимо. Поэтому для нахождения области сходимости ряда применим непосредственно признак Коши (возможно применение и признака Даламбера):

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^{n^2}|x|^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}|5x|^n=\begin{cases}\infty,\ \textit{если}\ |5x|>1,\ \textit{или}\ |x|>1/5,\\ 1,\ \textit{если}\ |5x|=1,\ \textit{или}\ |x|=1/5,\\ 0,\ \textit{если}\ |5x|<1,\ \textit{или}\ -1/5<x<1/5.\end{cases}$$

Итак, ряд сходится в интервале $(-1/5, 1/5)$. В точках $x=\pm 1/5$ ряд расходится, как не удовлетворяющий необходимому признаку сходимости ряда. ▲

1.65.* Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

Δ Данный ряд является *обобщенным* степенным рядом, если ввести замену

$e^{-x} = y > 0$. Этот ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$ с радиусом сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+1/n)^{-n^2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

В граничной точке $y = e$ можно показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n}{(1+1/n)^{n^2}}$ расходится. Так как $y > 0$, то областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2} y^n$ является множество чисел $0 < y < e \Rightarrow 0 < e^{-x} < e \Rightarrow -\infty < -x < 1 \Rightarrow x > -1$ – искомая область сходимости данного ряда. ▲

1.66. Найти область сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(2n-1)!}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)(n+6)^{2n+1}}{(2n)!}x^{2n+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\,x^n}{(2n-1)!!}$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$; 5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\cdot\sqrt{n^2+1}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n\ln(n+1)}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(x+10)^n}{n^n}$; 8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{\dfrac{\ln^3(n+1)}{n+1}}\,(x-1)^n$; 9) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+4}{n-4}$;

10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(nx)^n}{(n!)^2}$; 11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}$; 12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\,x^{n!}$;

13*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^n$; 14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\cdot\left(\dfrac{n}{e}\right)^n x^n$; 15*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n\cdot n!}{n^n}$;

16*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$.

Отв.: 1) $|x| < \infty$; **2)** $|x| < \infty$; **3)** $|x| < 2$; **4)** $-1 \le x < 3$; **5)** $-6 \le x \le -4$; **6)** $-1 \le x < 3$; **7)** $-e-1 < x < e-10$; **8)** $0 \le x < 2$; **9)** $0 \le x < 2$; **10)** $|x| < \infty$; **11)** $1 < x \le 2$; **12)** $|x| < 1$; **13)** $-1 \le x < 1$; *при* $x = -1$ – сх. усл.; **14)** $-1 < x \le 1$; *при* $x = 1$ – сх. усл.; **15)** $|x| < 1$; **16)** $|x| < 1$ при $x = -1$ – сх. абс., если $m \ge 0$, и расх., если $m < 0$ при $x = 1$ – сх. абс., если $m \ge 0$ и расх., если $-1 < m < 0$.

1.67. Найти область сходимости *обобщенного* степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n n\cos^n x$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(2x-1)^{2n-1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{p}{2^n}$;   5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}tg^n x$.

Отв: 1) $-p/3+kp < x < p/3+kp$, $k\in \boldsymbol{Z}$; **2)** $x>1$ и $x<0$; **3)** сх. абс. для $x>-1/3$ и $x<-1$; **4)** $|x|>1/2$; **5)** $|x-kp|<p/4,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

Имеет место следующее утверждение:

если степенной ряд

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n;\ a_n,x_0,x\in \boldsymbol{R} \qquad (1.30)$$

имеет радиус сходимости $\boldsymbol{R}>0$, *то*:

1) *в интервале сходимости* $(x_0-R,\,x_0+R)$ *функция* $S(x)$ *имеет производные любого порядка, получаемые почленным дифференцированием ряда* (1.30);

2) *внутри интервала сходимости этот ряд можно почленно интегрировать, т.е.*

$$\int\limits_{x_0}^{x}S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},\ \ x\in(x_0-R,\,x_0+R);$$

3) *степенные ряды, получаемые из ряда* (1.30) *при почленном дифференцировании и интегрировании, имеют тот же радиус сходимости, что и ряд* (1.30).

Дифференцирование и интегрирование степенных рядов (и функциональных) часто применяется для нахождения суммы $S(x)$ ряда. Если сумму $S(x)$ некоторого ряда трудно найти непосредственно, но легко найти сумму ряда производных (или интегралов), то дифференцируя (или интегрируя) ряд с известной суммой, можно вычислить и сумму исходного ряд $S(x)$.

Иногда после нескольких дифференцирований степенного ряда обнаруживается линейная зависимость между суммой $S(x)$ данного ряда и её производными. Тогда вычисление $S(x)$ сводится к решению некоторого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Дифференцирование и интегрирование функциональных рядов применяют и для вычисления сумм некоторых числовых рядов. Для этого составляется вспомогательный ФР, который при $x=x_0$ совпадает с данным числовым рядом. Если сумма $S(x)$ ФР найдена и он сходится при $x=x_0$, то число $S(x_0)$ является суммой данного числового ряда.

Для вычисления суммы сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ в качестве вспомогательного ФР может быть взят степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. Тогда по *методу Абеля* (см.[5]):

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n.$$

1.68. Найти сумму ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x^2-1)^n$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n^2+n+1\right)x^{n+3}$); 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$.

Δ 1) Нетрудно получить, что (– 1,1) – интервал сходимости данного ряда (R = 1). Обозначим его сумму $S(x)$, т.е.

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots=S(x).$$

Отсюда почленным дифференцированием находим

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots=S'(x). \qquad (1.31)$$

Суммируя в левой части равенства (1.31) бесконечно убывающую при $|x|<1$ прогрессию, находим

$$S'(x)=\frac{1}{1-x}\Rightarrow S(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-t)\Big|_0^x=-\ln(1-x).$$

Здесь в качестве точки x_0 (нижнего предела интегрирования) для удобства взята точка $x_0=0\in(-1{,}1)$.

Замечание. Можно для вычисления $S(x)$ воспользоваться и неопределенным интегралом, т.е. из равенства $S'(x)=\dfrac{1}{(1-x)}$ имеем

$$S(x)=\int\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)+C.$$

Постоянную C находим из условия, что при $x=0$ значение $S(0)=0$.

Таким образом, сумма данного ряда $S(x)=-\ln(1-x),\ |x|<1$.

Заметим, что данный ряд расходится при $x=1$ и сходится, как ряд Лейбница, в точке $x=-1$, причем $S(-1)=-\ln 2$.

Таким образом, область сходимости данного ряда есть промежуток $-1\le x<1$.

2) Положим $x^2-1=y$ и найдем сумму $S(y)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$, сходящегося для $|y|<1$ (применить признак Даламбера). Интегрированием равенства $S(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)y^n$, а затем дифференцированием полученного равенства по y последовательно получим

$$\int\limits_0^y S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}y^{n+1}=\frac{y}{1-y}\Rightarrow S(y)=\left(\frac{y}{1-y}\right)'=\frac{1}{(1-y)^2}.$$

Так как $y=x^2-1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x^2-1)^n=\frac{1}{\left(2-x^2\right)^2}.$$

Это разложение имеет место для всех значений x таких, что $\left|x^2-1\right|<1 \Rightarrow -1<x^2-1<1 \Rightarrow 0<x^2<2 \Rightarrow -\sqrt{2}<x<0$ и $0<x<\sqrt{2}$ – область сходимости данного ряда к сумме $1/\left(2-x^2\right)^2$.

3) Пусть

$$S(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots \Rightarrow S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots, S''(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots.$$

Замечаем, что $S''(x)=S(x)$. Это соотношение можно рассматривать, как дифференциальное уравнение относительно суммы $S(x)$, для которого начальные условия имеют вид $S(0)=1$, $S'(0)=0$. Так как это уравнение является линейным однородным с постоянными коэффициентами, то оно решается с помощью характеристического уравнения $l^2-1=0 \Rightarrow l_{1,2}=\pm 1 \Rightarrow S(x)=C_1e^x+$ $+C_2e^{-x}$. Из системы

$$\begin{cases} S(0)=1, \\ S'(0)=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1+C_2=1, \\ C_1-C_2=0 \end{cases}$$

находим $C_1=C_2=1/2$. Следовательно, $S(x)=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}e^{-x}=ch\,x$.

4) Интервалом сходимости данного ряда является (– 1,1). Представим этот ряд в виде суммы рядов, также сходящихся в этом интервале:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n+1)\,x^{n+3}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n+3}+\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n+3}+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3}=S_1(x)+S_2(x)+S_3(x).$$

Имеем

$$S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}x^n=x^3\frac{1}{1-x}=\frac{x^3}{1-x}; \quad S_2(x)=x^4\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1} \Rightarrow \frac{S_2(x)}{x^4}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\ldots=(x+x^2+x^3+\ldots)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x^2)} \Rightarrow S_2(x)=\frac{x^4}{(1-x)^2}.$$

Сумму S_1 представим в виде

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^{n+3}=x^4+4x^5+9x^6+16x^7+\ldots=x^4\left(1+4x+9x^2+16x^3+\ldots\right)=$$

$$=x^4\left(x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots\right)'=x^4\left(x\left(x+x^2+x^3+\ldots\right)'\right)'=x^4\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)'=$$

$$=x^4\left(x\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right)'=x^4\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{x^4(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Таким образом,

$$S(x)=S_1(x)+S_2(x)+S_3(x)=\frac{x^4(1+x)}{(1-x)^3}+\frac{x^4}{(1-x)^2}+\frac{x^3}{1-x}=\frac{x^3(1+x^2)}{(1-x)^3}.$$

5) Составим вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$ и его сумму обозначим $S(x)$, $|x|<2$. Нужно найти $S(1)$. Для этого продифференцируем обе части равенства $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$ и вычислим сумму ряда производных:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x/2}=\frac{1}{2-x}\Rightarrow S(x)=\int_0^x\frac{dt}{2-t}=-(\ln(2-x))\Big|_0^x=$$

$$=-\ln(2-x)+\ln 2. \quad \text{Тогда} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=S(1)=\ln 2.$$

6) Составим вспомогательный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$ и воспользуемся методом Абеля:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}=\lim_{x\to 1-0}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{3n+1}}{3n+1}\right)_t^{/}dt=\lim_{n\to 1-0}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{3n}\right)dt=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(1+t)^2}{1-t+t^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^x=\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{p}{6\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{p}{3\sqrt{3}}. \quad ▲$$

1.69. Найти сумму ряда и указать его область сходимости:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2nx^n}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx\left(x^2-2\right)^{n-1}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos^{n+1}}{n(n+1)}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}tg^n x}{n(n+1)}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-n+3}{(x^2-x+1)^n}$.

Отв.: **1)** $\frac{1}{(x-1)^2}$, $|x|<1$; **2)** $-\ln(1-2x)$, $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$;

3) $(1-x)\ln(1-x)+x$, $-1\le x<1$;

4) $S(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)-1$, $x\ne 0$, $|x|<1$, $S(0)=0$; **5)** $\frac{5x^2-2x+1}{(1-x)^3}$, $|x|<1$;

6) $\dfrac{2x}{(3-x^2)^2}, 1<|x|<\sqrt{3}$;

7) $(1+\cos x)\ln(1+\cos x)-\cos x,\ x\neq(2k+1)p;\quad S(p\ +2kp\ )=1$;

8) $-(1+ctgx)\ln(1+tgx-1), -\dfrac{p}{4}+\quad +kp\ \leq x<kp\ ,\ \ kp\ <x\leq\dfrac{p}{4},\ S(kp\ )=0,\ k\in \mathbf{Z}$;

9) $\dfrac{3x^6-9x^5+13x^4-11x^3+9x^2-5x+4}{x^3(x-1)^3},\ x<0,\ x>1.$

1.70. Составить линейные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют суммы данных степенных рядов. Воспользовавшись полученными уравнениями, найти суммы этих рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n x^n}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2^{3n}n!}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n!}$;

5*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sqrt{2^n}\sin\dfrac{np}{4}}{n!}x^n$.

Отв.: 1) $S'=3S,\ S=e^{3x}$; **2)** $S''=S,\ S=shx$; **3)** $4S''+S=0,\ S=\cos(x/2)$;
4) $S''+2S'+S=0,\ S=xe^{-x}$; **5)** $S''-2S'+2S=0,\ S=e^x\sin x$.

1.71. Найти сумму следующих числовых рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n5^n}$; 3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)2^n}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+6n+5}{3^{n+1}}$;

5)* $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(n^4-5n^2+4)5^n}$.

Отв.: 1) $\dfrac{1}{3}\left(\ln 2+\dfrac{p}{\sqrt{3}}\right)$; **2)** $\ln\dfrac{5}{3}$; **3)** $\dfrac{1}{2}(1-\ln 2)$; **4)** $9/2$; **5)** $\dfrac{343}{1200}-\dfrac{32}{25}\ln\dfrac{5}{4}$.

1.72. Используя метод Абеля, доказать справедливость равенств:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{p}{4}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3n+2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{p}{\sqrt{3}}-\ln 2\right)$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n+1}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left[p\ +2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$; г)* $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n, \qquad (1.32)$$

где $z=x+iy,\ z_0=x_0+iy_0$, а $C_n=a_n+ib_n, a_n$ и b_n – действительные числа, называется *степенным рядом с комплексными членами* или рядом по степеням $z-z_0$. Для рядов (1.32) справедлива

Теорема Абеля. *Если степенной ряд* (1.32) *сходится при некотором* $z=z_1$, *то он сходится абсолютно при всех* z*, удовлетворяющих неравенству*

$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, *и сходится равномерно в области* $|z - z_0| \le q < |z_1 - z_0|$.

Если же этот ряд расходится в некоторой точке z_2, *то он расходится во всех точках, таких, что* $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$.

Согласно теореме Абеля, ряд (1.32) сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ радиусом $|z_1 - z_0|$ с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Неотрицательное число R, такое, что ряд (1.32) сходится в круге $|z_1 - z_0| < R$ и расходится при $|z_1 - z_0| > R$, называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а круг $|z_1 - z_0| < R$ – *кругом сходимости.*

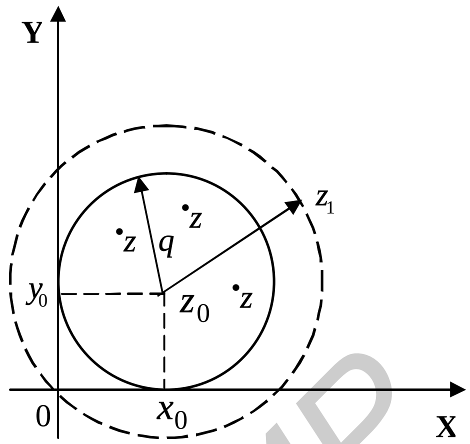


Рис. 1.2

Радиус сходимости ряда (1.32) определяется формулой

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| \qquad (1.33)$$

или формулой

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}\right|, \qquad (1.34)$$

где $|C_n| = |a_n + ib_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, если соответствующие пределы существуют.

1.73. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(z-1+i)^n}$.

Δ а) Здесь $z_0 = i, C_n = 1/n^2(1+i)^n$. По формуле (1.33) радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2(1+i)^{n+1}}{n^2(1+i)^n}\right| = |1+i| = \sqrt{2},$$

т.е. данный ряд сходится абсолютно в круге $|z-i| < \sqrt{2}$. В точках окружности $|z-i| = \sqrt{2}$ ряд исследуем на абсолютную сходимость.

Имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|z-i|^n}{n^2\left(\sqrt{2}\right)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то наш ряд в точках окружности $|z-i| = \sqrt{2}$ сходится абсолютно. Таким образом, наш ряд сходится абсолютно в области $|z-i| \le \sqrt{2}$.

б) Данный ряд не является степенным (такой ряд называется *обобщенным степенным*). Исследуем его на сходимость, применив признак Коши. Обозначим

$U_n(z)=\dfrac{n}{(z-1+i)^n}$ и найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(z)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{n}{(z-1+i)^n}\right|}=\dfrac{1}{|z-1+i|}$.

Отсюда следует, что ряд сходится абсолютно в области

$$\frac{1}{|z-1+i|}<1\Rightarrow|z-1+i|>1,$$

внешность круга радиусом 1 с центром в точке $z_0=1-i$. ▲

1.74. Найти область абсолютной сходимости ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z+2)^{2n}}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}(z-4)^n}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2z^n}{(2n)!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{4n-1}\right)^{2n+1}2^n(z-1)^n$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!z^{n!}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{2n}/(z-3i)^{2n}$.

Отв.: 1) сх. абс. при $|z+2|<1$; **2)** сх. абс. при $|z-4|<1/2$; **3)** сх. абс. при $|z|<4$; **4)** сх. абс. при $|z-1|<8$; **5)** сх. абс. при $|z|<e$; **6)** сх. абс. в области $|z|<1$; **7)** сх. абс. в области $\operatorname{Im} z>0$; **8)** сх. абс. при $|z-3i|>\sqrt{2}$.

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ и в некоторой её окрестности производные всех порядков. Степенной ряд

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{1.35}$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0 независимо от того, сходится ли он к функции $f(x)$ или нет. Если же для всех значений x из некоторой окрестности точки x_0 имеет место равенство

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{1.36}$$

то функция $f(x)$ называется *разложимой в ряд Тейлора в окрестности точки* x_0 *(или по степеням* $x-x_0$*).* Напомним, что в (1.36) $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$, 0! = 1.

В случае, когда $x=x_0$, ряд (1.35) (или (1.36)) называется *рядом Маклорена.*

Обозначим $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $r_n(x)=f(x)-S_n(x)$.

Функция $S_n(x)$ является *n*-ой частичной суммой ряда Тейлора, и она совпадает с многочленом Тейлора $P_n(x)$ функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. Функция $r_n(x)$ называется *остаточным членом ряда Тейлора для функции* $f(x)$ *в окрестности точки* x_0 (или в точке x_0). Заметим, что $r_n(x)$ не есть сумма остатка ряда (1.35), так как сумма остатка ряда имеет смысл только тогда, когда известно, что ряд сходится; относительно же ряда (1.35) это не предполагалось.

Таким образом,

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x)$$

– формула Тейлора для функции $f(x)$. Отсюда следует, что *для того, чтобы функция* $f(x)$ *равнялась сумме своего ряда Тейлора в некоторой окрестности* $(x_0 - d, x_0 + d)$ *точки* x_0, *надо, чтобы в этой окрестности остаточный член* $r_n(x)$ *стремился к нулю при* $n \to \infty$.

Напомним, что остаточный член $r_n(x)$ может быть представлен, в частности, либо в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x - x_0)^n, x \in (x_0, x),$$

либо в форме Пеано $r_n(x) = 0\left(|x - x_0|^n\right), x \to x_0$, либо в других формах: Коши, интегральной и т.д.

1.75. Δ Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{1.37}$$

непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$. Убедимся, что эта функция имеет производные любого порядка n в точке $x_0 = 0$, $f^{(n)}(0) = 0, \ \forall n \geq 0, n \in N$.

Действительно, так как $f(0) = 0$, то по определению

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{e^{1/x^2}}. \tag{1.38}$$

Применив здесь правило Лопиталя, получим

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{(-1/x^2)}{e^{1/x^2}(-2/x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0.$$

Далее, так как $f'(0) = 0$ и для $x \neq 0$ производная $f'(x) = \left(2/x^3\right)/e^{1/x^2}$, то

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{2/x^4}{e^{1/x^2}}.$$

Снова применив правило Лопиталя, найдем, что

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{-8x^{-5}}{e^{1/x^2}(-2x^{-3})} = 4\lim_{x \to 0} \frac{x^{-2}}{e^{1/x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x^{-3}}{e^{1/x^2}(-2x^{-3})} = \lim_{x \to 0} \frac{4}{e^{1/x^2}} = 0.$$

Продолжив этот процесс по индукции получим, что $f^{(n)}(0) = 0, \ \forall n \geq 0, n \in \boldsymbol{N}$.

Таким образом, формально построенный ряд Тейлора (1.35) для данной функции в точке $x_0 = 0$ имеет вид $0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n + \ldots$. Этот ряд сходится к $S(x) \equiv 0,\ \forall x$, но не к $f(x) \neq 0$. Причина неразложимости функции (1.37) в ряд (Маклорена) по степеням x состоит в том, что остаточный член соответствующей формулы Тейлора не стремится к нулю при $n \to \infty$. ▲

Приведем теперь *следующий достаточный признак разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора*.

Теорема 1.10. *Если функция f и все её производные ограничены в совокупности на интервале $\Delta = (x_0 - d,\ x_0 + d)$, т.е. $\exists M > 0, \left| f^{(n)}(x) \right| \le M$, то функция f представляется в каждой точке $x \in \Delta$ сходящимся к ней рядом Тейлора* (1.36).

Приведем теперь *разложения основных элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена)*. Эти разложения называются *табличными*.

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + \ldots . \left(|x| < \infty \right). \qquad (1.39)$$

2. Гиперболические функции:

$$ch\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots . \left(|x| < \infty \right), \qquad (1.40)$$

$$sh\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots . \left(|x| < \infty \right). \qquad (1.41)$$

3. Тригонометрические функции:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots . \left(|x| < \infty \right), \qquad (1.42)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots . \left(|x| < \infty \right). \qquad (1.43)$$

4. *Биномиальный ряд* $\left(a \in \mathbf{R} \right)$:

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_a^n x^n = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + $$
$$+ \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \ldots \left(|x| < 1 \right). \qquad (1.44)$$

Важные частные случаи разложения (1.44):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots . (|x| < 1), \qquad (1.45)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots . \left(|x| < 1 \right). \qquad (1.46)$$

5. Логарифмическая функция:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n} + \ldots \left(|x| < 1 \right), \qquad (1.47)$$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \right) (|x| < 1). \quad (1.48)$$

6. $$arctgx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots (|x| \le 1). \quad (1.49)$$

Способы нахождения коэффициентов ряда Тейлора аналогичны рассмотренным в ч. 4 настоящего сборника способам отыскания коэффициентов формулы Тейлора. Отметим, что обычно коэффициенты ряда Тейлора находят с помощью формул (1.39)–(1.49), применяя различные приемы: представление данной функции в виде суммы более простых функций; замена переменной; почленное дифференцирование и интегрирование ряда; метод неопределенных коэффициентов и др.

1.76. Функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $x-1$.

Δ *Способ непосредственного разложения.* Находим значения функции и её производных всех порядков в точке $x = 1$:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \qquad f(1) = 1;$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}, \qquad f'(1) = \frac{1}{3};$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3^2} x^{-5/3}, \qquad f''(1) = -\frac{2}{3^2};$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cdot 5}{3^3} x^{-8/3}, \qquad f'''(1) = \frac{2 \cdot 5}{3^3};$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-4)}{3^n} x^{-\frac{3n-1}{3}}, \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-4)}{3^n}.$$

Значения функции и производных подставляем в ряд Тейлора (1.36) при $x_0 = 1$:

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 1!}(x-1) - \frac{2}{3^2 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}(x-1)^3 - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-4)}{3^n \cdot n!} \times$$

$$\times (x-1)^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n-4)}{3^n \cdot n!} (x-1)^n.$$

Нетрудно показать, что найденный остаточный член этого разложения в форме Лагранжа стремится к нулю при $n \to \infty$, что и доказывает справедливость полученного разложения.

2. *Способ замены переменной.* Введем замену $x - 1 = t \Rightarrow x = 1 + t$ и, следовательно,

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{1+t} = (1+t)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}t + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!} t^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!} t^3 + \ldots +$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}t^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-4)}{3^n n!}(x-1)^n+\ldots\,. \quad (1.50)$$

Здесь использован биномиальный ряд при $a=1/3$. Так как разложение бинома имеет место для $|t|<1$, то найденное разложение (1.50) справедливо при $-1<x-1<1$, т.е. при $0<x<2$. ▲

1.77. Используя формулы (1.44)–(1.46), доказать, что

1) $$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \ |x|<1. \quad (1.51)$$

2) $$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n, \ |x|<1. \quad (1.52)$$

3) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \ |x|<1. \quad (1.53)$$

4) $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \ |x|<1. \quad (1.54)$$

Δ 1) Заменив в (1.46) x на x^2, получим разложение (1.51), радиус сходимости которого равен 1.

2) Так как $C_{-2}^n=\dfrac{-2(-2-1)(-2-3)\ldots(-2-n+1)}{n!}=(-1)^n)(n+1)$, то, заменяя в (1.44) x на $(-x)$ и полагая $a=-2$, получаем ряд (1.52), сходящийся при $|x|<1$.

3) Находим

$$C_{-1/2}^n=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}=\frac{(-1)^n 1\cdot3\cdot\ldots(2n-1)}{2^n n!}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

Положив в формуле (1.44) $a=-1/2$ и заменив x на $\left(-x^2\right)$, получим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!}{2^n n!}\left(-x^2\right)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},$$

радиус сходимости которого равен 1. Отсюда с учетом того, что $2^n\cdot n!=$ $=2\cdot4\cdot6\ldots2n=(2n)!!$, и получаем ряд (1.53).

4) Так как

$$C_{1/2}^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\cdot\frac{1}{n!}=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}, \quad n\ge2$$

и $C_{1/2}^1=1/2$, то из формулы (1.44) и следует равенство (1.54). ▲

1.78. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{3x+8}{(2x-3)\left(x^2+4\right)}$.

Δ Рациональную функцию $f(x)$ представим в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}=\frac{A}{2x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+4}\Rightarrow 3x+8=A(x^2+4)+(Bx+C)(2x-3).$$

Приравняв в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим систему уравнений, из которой найдем, что $A=2,\ B=-1,\ C=0$. Поэтому

$$f(x)=\frac{2}{2x-3}-\frac{x}{x^2+4}=-\frac{2}{3\left(1-\frac{2}{3}x\right)}-\frac{x}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}.$$

Используя разложения (1.45) и (1.56), получаем

$$f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}x\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+2}\right)x^{2n+1}.$$

Радиус сходимости этого ряда равен 3/2. ▲

1.79. Функцию $f(x)=\ln(4+3x-x^2)$ представить рядом Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

Δ Так как $4+3x-x^2=(4-x)(x+1)$, то, положив $x-2=t$, получим

$$f(x)=f(t)=\ln(2-t)(3+t)=\ln 6-\ln\left(1-\frac{t}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{t}{3}\right).$$

Используя формулы (1.47) и (1.48) получаем разложение

$$f(t)=\ln 6-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{3^n n}=\left|t=x-2\right|=\ln 6+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left((-1)^{-n-1}3^{-n}-2^{-n}\right)(x-2)^n.$$

Радиус сходимости этого ряда равен 2. ▲

1.80. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=p/4$ функцию $f(x)=\sin^4 x$.

Δ Преобразуем $f(x)$ к виду

$$f(x)=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{8}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

Введем замену $x-p/4=t\Rightarrow x=t+p/4,\ \cos 2x=-\sin 2t,\ \cos 4x=-\cos 4t,$

и значит $f(x)=f(t)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8}\sin 2t-\dfrac{1}{8}\cos 4t$.

Используя разложения (1.42) и (1.43), получаем:

$$f(t)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot t^{2n+1}-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n} t^{2n}}{(2n)!},$$

откуда находим $f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)!}\left(x-\frac{p}{4}\right)^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{4n-3}}{(2n)!}\left(x-\frac{p}{4}\right)^{2n}$.

Радиус сходимости этого ряда $R=+\infty$. ▲

При разложении функций в ряд Тейлора часто используют почленное дифференцирование и интегрирование рядов. Например, почленно интегрируя ряд (1.53), получаем ряд

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad (1.55)$$

радиус сходимости которого равен 1.

1.81. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)$ и найти его радиус сходимости:

1) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; 2) $f(x)=arctg\,\frac{x+3}{x-3}$.

Δ Замечаем, что $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Воспользуемся теперь разложением (1.53), в котором x^2 заменим на $\left(-x^2\right)$ получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}. \qquad (1.56)$$

Интегрируя этот ряд, получаем

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (1.57)$$

Радиус сходимости ряда (1.57) равен 1.

2) Легко получить, что $f'(x)=-\frac{1}{3(1+x^2/9)}$. Тогда из (1.51) имеем

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{3^{2n+1}}.$$

Интегрируя этот ряд, находим

$$\int_0^x f'(t)\,dt=f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\int_0^x t^{2n}\,dt,\ \text{откуда}\quad f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

где $f(0)=arctg(-1)=-p/4$. Радиус сходимости этого ряда равен 3. ▲

1.82. Используя разложения (1.39)–(1.57), разложить в ряд Маклорена и найти радиус сходимости полученного ряда:

1) e^{-x^2}; 2) $\sin\left(x^2/3\right)$; 3) $x^3/\sqrt{1-2x}$; 4) $x^2\ln\left(4+x^2\right)$; 5) $\ln\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$;

6) $\left(1+x^2\right)arctgx$; 7) $\dfrac{3x+4}{x^2+x-6}$; 8) $1/\left(x^2+2\right)^2$; 9) $1/\left(3x^4+10x^2-3\right)$;

10) $\dfrac{2x^2+x+3}{(1-x)^2(2+x)}$; 11) $\ln\dfrac{3-2x}{2+3x}$; 12) $\ln\dfrac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}$;

13) $\left(x^2+5\right)\ln\dfrac{9-x^2}{4-x^2}$; 14) $\ln\dfrac{10+3x-x^2}{4-3x}$; 15) $\ln\sqrt[7]{3-x+6x^2-2x^3}$;

16) $\sin x\cdot\cos^2 x$; 17) $\sin^3 x$; 18) $x\cos^3 2x$; 19) $\ln\left(x^3+\sqrt{9+x^6}\right)$;

20) $(x^2-1)\arcsin 2x^2$; 21) $\ln\left(e^{1+2x}\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)\right)$;

22) $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

Отв.: 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $R=\infty$; **2)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{4n+2}}{3^{2n+1}(2n+1)!}$, $R=\infty$;

3) $x^3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+3}$, $R=1/2$; **4)** $x^2\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+2}}{n4^n}$, $R=2$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2x^{2n+1}}{3(2n+1)}$, $R=1$; **6)** $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$, $R=1$;

7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 3^{-(n+1)}-2^{-n}\right)x^n$, $R=2$; **8)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+2}}x^{2n}$, $R=\sqrt{2}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}sh(n\ln 3)\cdot\dfrac{x^{2n-2}}{4}$, $R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; **10)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(2n+1+\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)x^n$, $R=1$;

11) $\ln\dfrac{3}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)\dfrac{x^n}{n}$, $R=\dfrac{2}{3}$;

12) $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^{-n}+2^{n-1}}{n}x^{2n}$, $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

13) $5\ln\dfrac{9}{4}+\left(\dfrac{25}{36}+\ln\dfrac{9}{4}\right)x^2+\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^{2n}\left(\dfrac{5}{n}\left(4^{-n}-9^{-n}\right)+\dfrac{1}{n-1}\left(4^{1-n}-9^{1-n}\right)\right)$, $R=2$;

14) $\ln\dfrac{5}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}-\dfrac{1}{5^n}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)\dfrac{x^n}{n}$, $R=\dfrac{4}{3}$;

15) $\dfrac{1}{7}\ln 3-\dfrac{1}{7}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^{n+1}-3^{-2n}}{n}x^{2n}$, $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

16) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4(2n)!}\left(1+3^{2n+1}\right)x^{2n+1}$, $R=\infty$; **17)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}3\left(3^{2n}-1\right)}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$, $R=\infty$;

18) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3(-1)^n 2^{2(n-1)}}{(2n)!}\left(1+3^{2n-1}\right)x^{2m+1}$, $R=\infty$;

19) $\ln 3+\dfrac{x^3}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\dfrac{(2n-1)!!\,x^{6n+3}}{3^{2n+1}(2n+1)(2n)!!},\ R=\sqrt[3]{3};$

20) $-2x^2+2x^4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!\,2^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}\left(x^4-x^2\right)x^{4n},\ R=1/\sqrt{2};$

21) $1+2x+2x^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\,x^{4n+2},\ R=1;$

22) $-1+\dfrac{x^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\dfrac{x^{2n+2}}{2n+1},\ R=1.$

1.83. Доказать, что:

1) $\dfrac{1}{4}\left(e^x+e^{-x}+2\cos x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!},\ |x|<\infty;$

2) $\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)},\ |x|<1.$

1.84. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и найти радиус сходимости R полученного ряда:

1) $\dfrac{1}{\left(x^2-2x+3\right)^2},\ x_0=1;$ 2) $\dfrac{x^3-3x^2+4x-1}{x^2-2x+2},\ x_0=1;$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-10x+29}},\ x_0=5;$ 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}},\ x_0=2;$

5) $\sin^3 x,\ x_0=p/4;$ 6) $\cos^4 x,\ x_0=-p/2;$

7) $\ln\left(x^2-4x+6\right),\ x_0=5;$ 8) $\ln\left(x^2-10x+30\right),\ x_0=5.$

Отв.: 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-(n+2)}(n+1)(x-1)^{2n},\ R=\sqrt{2}.$

2) $1+(x-1)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^{2n},\ R=1.$

3) $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{n!\,2^{3n+1}\,n!}(x-5)^{2n},\ R=2.$

4) $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{3n+1}n!}(x-2)^{2n},\ R=2.$

5)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{4\sqrt{2}\,(2n+1)!}\left(1+3^{2n}\right)\left(x-\frac{p}{4}\right)^{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{4\sqrt{2}\,(2n)!}\left(1-3^{2n-1}\right)\left(x-\frac{p}{4}\right)^{2n},\ R=\infty.$$

.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}\left(2^{2n-2}-1\right)(x+p/2)^{2n},\quad R=\infty.$

7) $\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{n\,2^n}$, $R=\sqrt{2}$.

8) $\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^{2n}}{n5^n}$, $R=\sqrt{5}$.

1.85. Перемножив соответствующие ряды, разложить функцию в ряд Маклорена и найти радиус сходимости полученного ряда:

1) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$; 2) $\frac{e^x}{1-x}$; 3) $\ln^2(1-x)$; 4) $arctg^2 x$.

Отв.: **1)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)x^n$, $R=1$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)x^n$, $R=1$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}2\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $R=1$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}$, $R=1$.

1.86. С помощью дифференцирования ряда (1.45) доказать, что:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\,x^n=\frac{2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n=\frac{1}{(1-x)^4}$, $|x|<1$.

1.87. Разложить в ряд Маклорена данную функцию, используя ряд Маклорена для её производной. Найти радиус сходимости полученного ряда.

1) $arctg\frac{2x-3}{x+6}$; 2) $arctg\frac{2-x}{1+2x}$; 3) $x^2 arctg\frac{1/3+3x^2}{x^2-1}$;

4) $x^2 arctg\frac{2-x^3/2}{1+x^3}$;

5) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 6) $1+\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{16+x^4}}$; 7) $2x\arcsin\frac{2x^3}{\sqrt{1+4x^6}}$;

8) $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$; 9) $\int_0^x e^{-t^2}dt$; 10) $\int_0^x\frac{1-cht}{t}dt$; 11) $\int_0^x\frac{t^2dt}{\sqrt{1+t^2}}$;

12) $\int_x^1\ln\frac{3+t}{3-t}dt$.

Отв.: 1) $-arctg\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$, $R=3$;

2) $arctg\,2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$;

3) $-x^2 arctg\frac{1}{3}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{2n+1}}{2n+1}x^{4n+4}$, $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

4) $x^3 arctg\,2+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{6n+6}}{(4n+2)4^n}$, $R=\sqrt[3]{2}$; **5)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$;

6) $1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2}\cdot\frac{1}{2n+1}$, $R=2$; **7)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n+1}x^{6n+4}}{2n+1}$, $R=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

8) $2x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R=1$; **9)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$, $R=\infty$;

10) $-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n)!}$, $R=\infty$; **11)** $\frac{x^3}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!\,x^{2n+3}}{(2n)!!(2n+3)}$, $R=1$;

12) $10\ln 2-5\ln 3-x\ln 3-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)3^{2n+1}}$, $R=3$.

Иногда возникает необходимость разложить функции не по степеням $x-x_0$, а по степеням некоторого другого выражения, т.е. в *обобщенный степенной ряд*. При этом можно использовать все рассмотренные выше приемы и, в частности, табличные разложения функций в степенные ряды.

1.88.* Разложить функцию $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$ в ряд по степеням $\cos x$.

Δ Преобразуем данную функцию:

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{2}\ln\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Полагая $\cos x=y$ и разлагая в ряд функцию $\ln(1+y)$, получаем

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{2}\ln(1+\cos x)-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}y^n}{n}+\ldots\right)-\frac{1}{2}\ln 2=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}y^n}{n}=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos^n x.$$

Этот ряд сходится к функции $\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$ при $-1<y\le 1$, т.е. при $-1<\cos x\le 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\ne(2k-1)p,\ k\in\mathbf{Z}$. Заметим, что только при этих x определена и сама функция $\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$. ▲

1.89. Разложить функции по степеням уже указанных выражений:

1) $arctg\frac{1}{x}, \frac{1}{x}$; 2) $\ln x, \frac{1-x}{1+x}$; 3*) $\sec x, \sin\frac{x}{2}$; 4*) $x, \sin x$; 5*) $x, ctgx$;

6) $\frac{(36x-17)(3x-1)}{54x^2-51x+10}, \frac{1}{3x-1}$.

Отв.: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)x^{2n-1}}, |x|\ge 1$; **2)** $-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), 0<x<\infty$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin^{2n}\frac{x}{2}, -\frac{p}{2}+2kp<x<\frac{p}{2}+2kp, k\in\mathbf{Z}$;

• $\sec x=\frac{1}{1-2\sin^2\frac{x}{2}}$; положить $y=2\sin^2\frac{x}{2}$ и разложить в ряд функцию $1/(1-y)$;

4) $\sin x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}(\sin x)^{2n+1}, |x|\le\frac{p}{2}$;

• $x=\arcsin(\sin x)$; положить $x=\sin y$ и воспользоваться разложением в ряд функции $\arcsin y$.

5) $\frac{p}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}(ctgx)^{2n-1}, \frac{p}{4}\le x\le\frac{3p}{4}$. • $x=arcctg(ctgx)=\frac{p}{2}-arctg(ctgx)$; положить $ctgx=y$ и разложить в ряд функцию $arctg\,y$;

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n6^{-n}}{(3x-1)^n}, x<0$ и $x>\frac{2}{3}$.

Степенные ряды широко применяются при вычислении пределов функций в точке, значений производных любого порядка от данной функции в данной точке; при вычислении интегралов, определенных и неопределенных, при приближенном решении дифференциальных уравнений (задача Коши).

Для вычисления $f^{(n)}(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 нужно разложить $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $x-x_0$, а затем из формулы $C_n=f^{(n)}(x_0)/(n!)$ и найти $f^{(n)}(x_0)=n!C_n$.

1.90. Найти $f^{(11)}(0)$ от функции $f(x)=x^5\cos\frac{x}{2}$.

Δ Разложим данную функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$x^5\cos\frac{x}{2}=x^5\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{6!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\frac{1}{8!}\left(\frac{x}{2}\right)^8-\ldots\right)=x^5-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^7+$$

$$+\frac{1}{2^4\cdot 4!}x^9-\frac{1}{2^6\cdot 6!}x^{11}+\frac{1}{2^8\cdot 8!}x^{13}-\ldots .$$

Так как $f^{(11)}(0)=C_{11}\cdot 11!$, то $f^{(11)}(0)=-\dfrac{11!}{2^6\cdot 6!}=-\dfrac{3465}{4}$. ▲

1.91. Для данной функции, пользуясь её разложением в ряд Маклорена, найти указанную производную $f^{(n)}(0)$ в точке $x_0=0$:

1) $\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $n=6$; 2) $x^4\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$, $n=9$; 3) $\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$, $n=40$;

4) $\sqrt[8]{8+x}$, $n=5$; 5) $x^6 arctg\, x$, $n=13$; 6) $x^3\ln\left(1-x+x^2-x^3\right)$, $n=11$.

Отв.: 1) –240; **2)** $9!/160$; **3)** $-40!\left(1+2/3^{41}\right)$; **4)** $55/\left(2^{10}\cdot 3^5\right)$; **5)** $-13!/7$; **6)** $-3\cdot 11!/8$.

1.92. Пользуясь разложением данной функции в ряд Тейлора, найти производные указанных порядков:

1) $(x-1)^2\ln x$, $f^{(5)}(1)-?$; 2) $\dfrac{(x-1)^3}{5x+3}$, $f^{(6)}(1)-?$;

3) $(x-2)^2\ln(3x+2)$, $f^{(7)}(2)-?$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{-x-2}}$, $f^{(5)}(-3)-?$.

Отв.: 1) 40; **2)** -5625/265; **3)** $\dfrac{7!}{5}\cdot\left(\dfrac{3}{8}\right)^5$; **4)** $\dfrac{9!!}{32}$.

При вычислении пределов дробей, числители и знаменатели которых стремятся к нулю, при $x\to x_0$ применяется следующий прием. Числитель и знаменатель дроби разлагают в ряды по степеням $x-x_0$. После этого производятся необходимые сокращения, вследствие чего неопределенность обычно исчезает. Конечно, применение рядов не исключает применение других приемов.

1.93. Вычислить предел $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\dfrac{3}{x^4}\right)$.

Δ Так как $\sin x\sim x$, $x\to 0$, то, приведя выражение в скобках к общему знаменателю и разложив после этого числитель в ряд Маклорена, получим

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x\cos x-3\sin x}{x^4\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+x\left(1-x^2/2!+x^4/4!-x^6/6!+\ldots\right)-3\left(x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+\ldots\right)}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}\right)x^5+\left(-\frac{1}{6!}-\frac{3}{7!}\right)x^7+\ldots}{x^5}=\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}=\frac{1}{60}. \quad ▲$$

1.94. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{2}-\sin x}{arctg^3 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\left((1+x)^{1+x}\right)+x\ln\left((1-x)^{1-x}\right)-\ln\left(1+x^2\right)^x}{x\cos x-\sin x+\sin\left(x^3/3\right)}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x-\sin^2(x-1)}{e^{(x-1)^2}-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)\,e^{-x}-(1-x)\,e^{x}}{\arcsin x-arctg\,x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}arctg\sqrt{x}-x}{x\left(\sqrt[3]{8+x}-2\right)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^{\sin^2 x}-\ln\left(x^2+e\right)\right)}{tg\,x-\sin x}$.

Отв.: 1) 1; **2)** $1/2$; **3)** 20; **4)** $1/2$**;** **5)** 0; **6)** $4/3$**;** **7)** – 4; **8)** $2\left(1-e^{-1}\right)$.

Степенные ряды применяются и при интегрировании функций. Если функция $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся ряд на отрезке $[a,b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ часто так же легко представляется в виде сходящегося ряда. Разумеется, и неопределенные интегралы можно вычислять с помощью разложения в ряд подынтегральных функций с последующим интегрированием этого ряда.

1.95. Интеграл $\int\limits_{1/4}^{1/2}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ представить в виде ряда.

Δ Подынтегральную функцию разложим в ряд Маклорена:

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \qquad (1.58)$$

Отрезок $[1/4, 1/2]$ целиком принадлежит интервалу (–1,1) сходимости ряда (1.58), поэтому ряд на нем сходится равномерно, а значит его можно почленно интегрировать на этом отрезке. Выполняя интегрирование, получаем

$$\int\limits_{1/4}^{1/2}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{1/4}^{1/2}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}dx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n-1}{n^2 4^n}.$$

Сумма полученного числового ряда и дает точное значение исходного интеграла. ▲

1.96. Представить в виде ряда функцию $F(x)=\int\limits_e^x\dfrac{dx}{\ln x}$.

Δ Пусть $\ln x=y\Rightarrow x=e^y,\ dx=e^y dy$. Тогда

$$\int\limits_e^x \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_1^{\ln x} \frac{e^y dy}{y} = \int\limits_1^{\ln x} \left[\frac{1}{y}\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\ldots+\frac{y^n}{n!}+\ldots\right)\right] = \int\limits_1^{\ln x} \left[\left(\frac{1}{y}+1+\frac{y^2}{2!}+\ldots+\frac{y^{n-1}}{n!}+\ldots\right)\right] dy =$$

$$= \left[\ln|y| + y + \ldots + \frac{y^n}{n \cdot n!} + \ldots\right]_1^{\ln x} = \left(\ln|\ln x| + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{\ln^n x}{n \cdot n!} + \ldots\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{1}{n \cdot n!} + \ldots\right) = \ln|\ln x| + \frac{\ln x - 1}{1 \cdot 1!} + \frac{\ln^2 x - 1}{2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{\ln^n x - 1}{n \cdot n!} + \ldots .$$

Это разложение имеет место для $1 \neq x > 0$. ▲

1.97. Представить в виде рядов следующие интегралы:

1) $\int\limits_0^x x^2 e^{-x^2} dx$; 2) $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$; 3) $\int\limits_0^x \frac{\sqrt[5]{\left(1+x^4\right)}-1}{x^3}$; 4) $\int \cos x^3 dx$;

5) $\int \frac{dx}{\ln^2 x}$; 6) $\int \frac{\left(x^5+4x^4-x+3\right)dx}{(x-1)^{11}}$; 7) $\int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;

8) $\int \frac{x - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x^3} dx$.

Отв.: 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+3)n!}, |x| < \infty$; **2)** $x + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!\, x^{3n+1}}{2^n n!(3n+1)}, |x| \le 1$;

3) $\frac{x^2}{10} + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 4 \cdot 9 \cdot 14 \ldots (5n-6)}{5^n n(4n-2)} x^{4n-2}, |x| \le 1$; **4)** $C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+1}}{(6n+1)(2n)!}$;

5) $-\frac{1}{\ln x} + \ln|\ln x| + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^{n-1} x}{n!(n-1)} + C, \quad x > 0,\ x \ne 1$;

6) $C - \frac{1}{5(x-1)^5} - \frac{3}{2(x-1)^6} - \frac{26}{7(x-1)^7} - \frac{17}{4(x-1)^8} - \frac{20}{9(x-1)^9} \frac{7}{10(x-1)^{10}}$;

7) $C + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(2n-1)}$, $0 < x \le 1$; **8)** $C + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)!!\, x^{2n-1}}{(2n)!!\left(4n^2-1\right)}$, $0 < |x| \le 1$.

Для приближенного вычисления значения функции $f(x)$ в точке x_0 её разлагают в степенной ряд и в полученном выражении полагают $x = x_0$. Затем для вычисления $f(x_0)$ с нужной точностью берут необходимое число его начальных членов. Особо отметим следующие случаи.

1. При вычислении различных степеней числа e пользуются приближенной формулой $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n}$, допуская при этом ошибку R_n, которая при $|x| < n+1$ оценивается неравенством

$$|R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{n!\left(n+1-|x|\right)}.$$

При $x \le 0$ можно пользоваться более простой оценкой:

$$|R_n| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. При вычислении значений синуса и косинуса пользуются приближенными формулами

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,!},$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)\,!},$$

при этом ошибки оцениваются соответственно неравенствами

$$|R_{2n-1}| = |R_{2n}(x)| \le \frac{\left|x^{2n+1}\right|}{(2n+1)\,!},$$

$$|R_{2n}(x)| = |R_{2n+1}(x)| \le \frac{\left|x^{2n+2}\right|}{(2n+2)\,!}.$$

3. Для вычисления логарифмов можно пользоваться рядом

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right), \quad |x| < 1. \qquad (1.59)$$

Ошибка, получаемая при замене суммы ряда суммой его первых n членов, оценивается формулой

$$|R_n| < \left|\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)\left(1-x^2\right)}\right|. \qquad (1.60)$$

4. При вычислении корня k-й степени из числа A получаем $A = a^k + y$ (где a^k – число, близкое к A, из которого извлекается точный корень, и такое, что $\frac{y}{a^k} < 1$), тогда $\sqrt[k]{A} = a\sqrt[k]{1+\frac{y}{a^k}} = a\left(1+\frac{y}{a^k}\right)^{1/k}$.

Полученную функцию разлагают в биномиальный ряд и берут затем необходимое число первых слагаемых ряда.

5. Для приближенного вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ его предварительно представляют в виде числового ряда, для суммирования которого берут необходимое число начальных членов.

1.98. Вычислить $\sqrt[4]{e}$ с точностью до 0,00001.

Δ В ряде для e^x полагаем $x = \frac{1}{4}$:

$$e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2\,2!} + \frac{1}{4^3\,3!} + \frac{1}{4^4\,4!} + \dots\ .$$

Если взять пять членов этого ряда $(n = 4)$, то ошибка вычислений

$$R_n < \frac{x^{4+1}}{4!(4+1-x)} = \frac{1}{4^5\,4!(5-1/4)} < 0{,}0001.$$

Тогда с указанной точностью $e^{\frac{1}{4}} \approx 1 + 1/4 + \dfrac{1}{4^3\,3!} + \dfrac{1}{4^4\,4!} \approx 1{,}28403$. ▲

1.99. Вычислить $\cos 1^\circ$ с точностью до 0,0001.

Δ Так как $\cos 1^\circ = \cos\dfrac{p}{180}$, то, положив в разложении косинуса $x = \dfrac{p}{180}$, получим

$$\cos 1^\circ \approx 1 - \frac{p^2}{180^2 \cdot 2!} \approx 0{,}9988\ .$$

Здесь первые два члена уже обеспечивают значительно большую точность, так как

$$|R_2| \le \frac{p^4}{180^4 \cdot 4!} < \frac{4^4}{180^4 \cdot 4!} = \frac{1}{45^4 \cdot 24} < 0{,}0000001\ .\ ▲$$

1.100. Вычислить $\sqrt[3]{68}$ с точностью до 0,001.

Δ $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64+4} = 4 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}}$. Разложим в ряд функцию $(1+x)^{\frac{1}{3}}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4 \cdot 4!}x^4 + \dots\ .$$

Положив здесь $x = \dfrac{1}{16}$ и умножив ряд на 4, получим (используем биномиальный ряд):

$$\sqrt[3]{68} = 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 16} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2 \cdot 46^2}\right) \approx 4{,}082.$$

Здесь взятые три члена ряда обеспечивают нужную точность, так как

$$|R_3| \le 4 \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 16^3} < 0{,}001\ .\ ▲$$

1.101. Вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,001.

Δ В разложении функции $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ положим $\dfrac{1+x}{1-x} = 2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ и, согласно

(1.59), $\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3\cdot 3}+\frac{1}{3^5\cdot 5}+\frac{1}{3^7\cdot 7}+\ldots\right)$.

Заданную точность обеспечивают четыре члена, так как из оценки погрешности (1.60) при $n=4$ и $x=\frac{1}{3}$ имеем $|R_4|<\frac{2\cdot 9}{3^9\cdot 9\cdot 8}=\frac{1}{3^5\cdot 4}<0{,}0001$.

Таким образом, с точностью до 0,0001

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{27}+\frac{1}{405}+\frac{1}{5103}\right)\approx 0{,}6931.\ \blacktriangle$$

1.102. Вычислить $I=\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,001 (предполагается, что $\frac{\sin x}{x}=1$ при $x=0$).

Δ $\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7}+\ldots$.

Этот ряд интегрируем на отрезке $[0,2]$:

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^3 5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots\right)\Bigg|_0^2=2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}+\ldots.$$

Для вычисления интеграла с указанной точностью достаточно взять четыре члена ряда, так как при этом $|R_4|\le 2^9/(9\cdot 9!)<0{,}001$.

Произведя вычисления, получаем $I\approx 1{,}605$. ▲

1.103. Вычислить приближенно с указанной степенью точности e:

1) e^2; $e=0{,}001$; 2) $1/\sqrt{e}$; $e=0{,}0001$; 3) $\cos 10°$; $e=0{,}0001$;

4) $\sin\frac{p}{100}$; $e=0{,}0001$; 5) $\sqrt[3]{8{,}36}$; $e=0{,}001$; 6) $\sqrt[5]{250}$; $e=0{,}001$;

7) $\ln 3$; $e=0{,}0001$; 8) $\ln 10$; $e=0{,}0001$; 9) $arctg\frac{1}{2}$; $e=0{,}001$;

10) $\arcsin\frac{1}{3}$; $e=0{,}001$; 11) $\frac{1}{\sqrt{10}}arctg\frac{1}{\sqrt{10}}$; $e=0{,}0001$;

12) $\sin^2\frac{p}{9}$, $e=0{,}001$.

Отв.: 1) 7,389; **2)** 0,6065; **3)** 0,9848; **4)** 0,0314; **5)** 2,030; **6)** 3,017; **7)** 1,0986; **8)** 2,3026; **9)** 0,464; **10)** 0,340; **11)** 0,0969; **12)** 0,117.

1.104. Следующие интегралы вычислить с точностью до 0,001:

1) $\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx$; 2) $\int_{1/4}^{1/2}\frac{\cos\left(x^2/2\right)}{x^2}dx$; 3) $\int_1^2\frac{e^x}{x}dx$; 4) $\int_0^{1/4}\sin x^2 dx$;

5) $\int\limits_0^{1/2} \frac{arctg}{x}\,dx$; 6) $\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\,dx$; 7) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx$;

8) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$; 9) $\int\limits_5^{10} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$.

Отв.: **1)** 0,245; **2)** 1,995; **3)** 3,057; **4)** 0,005; **5)** 0,487; **6)** 0,508; **7)** 0,608; **8)** 0,495; **9)** 0,384.

Степенные ряды широко применяются при решении ДУ. Для примера рассмотрим ДУ второго порядка

$$y'' = F(x, y, y'). \tag{1.61}$$

Часто его решение не удается найти в элементарных функциях, но его можно отыскать в виде некоторого степенного ряда. Рассмотрим *метод последовательных дифференцирований* решения ДУ с помощью степенных рядов. Этот метод применяется, когда требуется найти частное решение $y = y(x)$ уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = A_0$, $y'(x_0) = A_1$. Если в окрестности этих условий уравнение удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши, то можно попытаться искать его частное решение в виде ряда Тейлора:

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \,. \tag{1.62}$$

Первые два коэффициента ряда известны: $y(x_0) = A_0$, $y'(x_0) = A_1$. Из уравнения (1.61) находим $y''(x_0) = F(x_0, A_0, A_1)$. Продифференцировав уравнение (1.61) по x, можно найти последовательно производные

$$y'''(x_0) = \frac{dF(x_0, A_0, A_1)}{dx}, \ldots, y^{(n)}(x_0) = \frac{d^{n-2}F(x_0, A_0, A_1)}{dx^{n-2}}.$$

Подставляя найденные производные функции $y(x)$ в разложение (1.62), получаем искомое решение.

Этот способ применим, вообще говоря, при решении ДУ любого порядка.

1.105. Найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ ДУ

$$y' = \sin x + 0{,}5y^2, \tag{1.63}$$

удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

Δ Решение $y = y(x)$ ищем в виде ряда, где $y(0) = 1$, т.е.

$$y = 1 + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \,. \tag{1.64}$$

Из уравнения (1.63) имеем $y'(0) = 0 + 0{,}5 \cdot 1^2 = 0{,}5$. Последовательно дифференцируя обе части уравнения по x, получаем

$$y'' = \cos x + y \cdot y' \Rightarrow y''(0) = 1 + y(0) \cdot y'(0) = 1{,}5;$$
$$y''' = -\sin x + y'^2 + y \cdot y'' \Rightarrow y'''(0) = 0{,}5^2 + 1 \cdot 1{,}5 = 1{,}75.$$
Подставляя найденные $y(0), y'(0), y''(0)$ и $y'''(0)$ в равенство (1.64), получаем решение исходного ДУ (1.63)
$$y = 1 + 0{,}5x + \frac{1{,}5}{2!}x^2 + \frac{1{,}75}{3!}x^3 + \ldots. \quad ▲$$

2. Ряды и интеграл Фурье

2.1. Тригонометрические ряды Фурье

Ортогональные системы функций. Тригонометрический ряд Фурье 2π-периодической функции. Условия Дирихле. Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье. Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке длиной $2p$; заданной на отрезке $[0, p]$. Ряд Фурье для функций произвольного периода. Амплитудно-фазовая форма записи ряда Фурье. Комплексная форма ряда Фурье.

Функция $j(t)$ называется *периодической* периода T, $T \neq 0$, если для всех значений T выполняется равенство $j(t+T) = j(t)$, где t и $t+T$ принадлежат ОДЗ функции $j(t)$.

Простейшим периодическим процессом является *гармоническое колебание*, которое задаётся формулой $y = A\sin(w t + a)$, где A – амплитуда, $w = \dfrac{2p}{T}$ – частота, a – начальная фаза колебания. Наименьший период $T = \dfrac{2p}{w}$, а все остальные периоды задаются формулой $T_k = \dfrac{2kp}{w}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Функцию y можно записать в виде $y = a\cos w t + b\sin w t$, где $a = A\sin a$, $B = A\cos a$.

Наоборот,
$$y = a\cos w t + b\sin w t = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos w t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin w t\right) = A\sin(w t + a),$$
где $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\sin a = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos a \ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Замечание. Отклонение точки от положения равновесия при гармоническом колебании часто задаётся формулой
$$y = A\cos(w t + a).$$

Тригонометрическим рядом называется ряд вида

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \qquad (2.1)$$

где x – действительная переменная, а коэффициенты $a_0, a_1, b_1...$ – постоянные числа, не зависящие от x.

Конечная тригонометрическая сумма

$$T_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\,x + b_k \sin k\,x \qquad (2.2)$$

называется *тригонометрическим многочленом порядка* n.

Функция $T_n(x)$, определяемая равенством (2.2), является суперпозицией гармонических колебаний. Она содержит $2n+1$ произвольных постоянных коэффициентов $a_0, a_1, b_1, b_2, ...a_n, b_n$ и является $2p$ - периодической, поскольку каждое слагаемое в (2.2) имеет период $2p$. Поэтому достаточно изучить тригонометрические ряды типа (2.1) на отрезке длиной $2p$, например на $[0, 2p]$ или $[-p, p]$.

Возникает вопрос: нельзя ли выбрать $2n+1$ коэффициентов $a_0, a_1, b_1, b_2, ...a_n, b_n$ так, чтобы сумма $T_n(x)$ давала на отрезке $[-p, p]$ приближение функции $f(x)$, и если это возможно, то как найти коэффициенты? Далее, сама собой возникает проблема: возможно ли, совершая предельный переход при $n \to \infty$, отождествить $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ с «произвольной», в некотором смысле, функцией $f(x)$? Другими словами, возможно ли заданную функцию $f(x)$ разложить в бесконечный ряд (2.1)?

Процесс разложения периодической функции на гармонические составляющие называется *гармоническим анализом*.

2.1. Найти действительную и мнимую части степенного ряда

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n}\left(a_n - ib_n\right)z^n \qquad (2.3)$$

на единичной окружности $z = e^{ix}$, $0 \le x \le 2p$.

Δ При $z = e^{ix}$, согласно формуле Эйлера, имеем

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)z^n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)\,e^{inx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)(\cos nx + i\sin nx) =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) + i\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sin nx - b_n \cos nx\right).$$

Отсюда следует, что ряд (2.1) представляет собой действительную часть ряда (2.3), а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx - b_n \cos nx \qquad (2.4)$$

– его мнимую часть. При этом отметим, что ряд (2.4) называется рядом, сопряжённым с рядом (2.1). ▲

То обстоятельство, что тригонометрический ряд можно рассматривать как действительную часть степенного ряда, часто облегчает определение его суммы.

2.2. Найти суммы рядов

$$P(r,\ x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx,\ \ 0 \le r < 1; \qquad (2.5)$$

$$Q(r,\ x) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx,\ \ 0 \le r < 1. \qquad (2.6)$$

Δ Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-z+2z}{1-z} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2z}{1-z}\right) = \frac{1}{2} + \frac{z}{1-z} = \frac{1}{2} + z\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2} + z\sum_{n=0}^{\infty} z^n =$$

$$= \frac{1}{2} + z + z^2 + \ldots,\ \ |z| < 1.$$

Отсюда при $z = r\cdot e^{ix}$, $0 \le r < 1$ имеем

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+r\cos x + ir\sin x}{1-r\cos x - ir\sin x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+r\cos x+ir\sin x)(1+ir\sin x)}{(1-r\cos x-ir\sin x)(1-r\cos x+ir\sin x)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r\cos\ \ x+i\ \ r\sin x+r\cos x-r^2\cos^2 x+i\ \ r^2\sin x\cos x+i\ \ r\sin x-ir^2\sin x\cos x-r^2\sin^2 x}{1-2r\cos x+r^2\cos^2 x+r^2\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2+2ir\sin x}{1-2r\cos x+r^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} + i\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + \ldots z^n + \ldots = \frac{1}{2} + re^{ix} + r^2e^{2ix} + \ldots + r^n e^{nix} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + r\cos x + r^2\cos 2x + \ldots + r^n\cos nx + \ldots + i\left(r\sin x + r^2\sin 2x + \ldots + 2^n\sin nx + \ldots\right).$$

Отсюда, согласно (2.5) и (2.6), находим, что

$$P(r,x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2},$$

$$Q(r,x) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx = \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2},\ 0 \le r < 1.$$

2.3.* Доказать равенства:

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}},\quad D_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

● Левую часть умножить и разделить на $2\sin x/2$. Сумма $D_n(x)$ называется *ядром Дирихле*.

2.4.* Найти сумму

$$F_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Отв.: $F_n(x)=\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2.$

Сумма $F_n(x)$ называется *ядром Фейера*.

2.5.* Пользуясь разложением

$$\ln\frac{1}{1-z}=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots,\quad |z|<1,$$

получить формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}r^n=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-2r\cos x+r^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}r^n=arctg\frac{r\sin x}{1-r\cos x},\quad 0\le r<1.$$

2.6.* Показать, что

а) $\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)dx=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}D_n(x)\,dx=1;$ б) $\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}F_n(x)\,dx=1,$

где $F_n(x)$ – ядро Фейера.

Система ненулевых функций $j_0(x), j_1(x),\dots, j_n(x),\dots,$ определённых на отрезке $[a,b]$, называется *ортогональной* на $[a,b]$, если для всех $i, j=0,1,2,\dots$ выполняются соотношения $\int_a^b j_i(x)j_j(x)\,dx=0,\ i\neq j$.

Ортогональная система функций называется *ортонормированной*, если для всех n выполняются условия $\int_a^b j_n^2(x)\,dx=1$.

Величина $\|j_n\|=\sqrt{\int_a^b j_n^2(x)\,dx}$ называется *нормой функции* $j_n(x)$, $n=0, 1, 2,\dots$ на $[a,b]$.

Если система функций $\{j_n(x)\}$ ортогональна, то система функций

$$\left(\frac{j_n(x)}{\|j_n\|}\right)=\frac{j_0(x)}{\|j_0\|},\frac{j_1(x)}{\|j_1\|},\frac{j_2(x)}{\|j_2\|},\dots$$

будет уже ортонормированной.

Основной ортогональной тригонометрической системой на отрезке $[-p,p]$ является система функций

$$\{1, \cos n\,x, \sin n\,x\} = 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots.$$

Так как $\|1\| = \sqrt{2p}$, $\|\cos n\,x\| = \sqrt{p}$, $\|\sin n\,x\| = \sqrt{p}$, то соответствующая ортонормированная система имеет вид

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2p}}, \frac{\cos n\,x}{\sqrt{p}}, \frac{\sin n\,x}{\sqrt{p}}\right), n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (2.7)$$

Система функций $\left(1, \cos\frac{p\,n\,x}{l}, \sin\frac{p\,n\,x}{l}\right), n = 1, 2, 3, \ldots,$ является основной ортогональной тригонометрической системой функций на отрезке $[-l, l]$.

Так как $\|1\| = \sqrt{2l}, \left\|\cos\frac{n\,p\,x}{l}\right\| = \sqrt{l}, \left\|\sin\frac{n\,p\,x}{l}\right\| = \sqrt{l}, \quad n = 1, 2, \ldots,$ то тригонометрическая система функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{np\,x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{np\,x}{l}, \ldots\right\}$ является ортонормированной на отрезке $[-l, l]$.

2.7. Доказать, что каждая из двух систем функций

а) $1, \cos x, \cos 2\,x, \ldots, \cos n\,x, \ldots,$

б) $\sin x, \sin 2\,x, \ldots, \sin n\,x, \ldots$ ортогональна на $(0, p)$.

2.8. Доказать, что *многочлены Лежандра*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2 - 1\right)^n, \quad L_0(x) = 1, \quad n \in \mathbf{N}$$

образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-1, 1]$.

Δ Так как для $L_n(x)$ величина $\frac{1}{2^n \cdot n!}$ – константа, то доказательство ортогональности многочленов Лежандра на отрезке $[-1, 1]$ сводится к проверке тождества $J = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2 - 1\right)^n \cdot \frac{d^m}{dx^m}\left(x^2 - 1\right)^m d\,x = 0$ при $n > m$.

Так как $x = 1$ и $x = -1$ нули многочлена $\left(x^2 - 1\right)^n$ кратности n, то все его производные до порядка $n - 1$ включительно обращаются в нуль в точках $x = 1$ и $x = -1$. Интегрируя выражение J по частям, получаем, что

$$J = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2 - 1\right)^n \cdot \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(x^2 - 1\right)^m d\,x = \ldots = (-1)^n \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right)^n \cdot \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left(x^2 - 1\right)^m d\,x = 0,$$

так как $m + n > m$, и многочлен $\left(x^2 - 1\right)^m$ имеет степень $2m$, а производная от многочлена порядка более высокого, чем степень многочлена, тождественно равна нулю. ▲

2.9. Показать, что система функций

а) $\sin\frac{p\,x}{l}, \sin\frac{2p\,x}{l}, \ldots, \sin\frac{np\,x}{l}, \ldots \qquad (2.8)$

ортогональна на любом отрезке вида $[a,\ a+l],\ a\in \boldsymbol{R}$.

б) тригонометрическая система

$\frac{1}{2} \cos\frac{2p\ x}{b-a},\ \sin\frac{2p\ x}{b-a},...,\sin\frac{np\ x}{l},...$ ортогональна на отрезке $[a,b]$.

Функции $f(x),\ g(x)$, не равные тождественно нулю, называются *ортогональными* на $[a,b]$ с весом $r\,(x)\ge 0$, если $\int\limits_a^b f\,(x)\cdot g\,(x)\cdot r\,(x)\,dx=0$.

Функция $r\,(x)$ при этом называется *весовой или весом.*

2.10.* Показать, что:

а) *полиномы Чебышева* $T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos\,(n\arccos x)$ ортогональны на интервале $(1,1)$ с весом $r\,(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т.е. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_i(x)\cdot T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{p}{2^{n-1}}d_{ij}$, где $d_{ij}=\begin{cases}0,\ i\ne j\\ 1,\ i=j\end{cases}$ – символ Кронекера;

б) *полиномы Абеля–Лагерра* $L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\cdot\frac{d^n\left(x^n e^{-x}\right)}{d\,x^n}$ обладают свойством ортогональности на интервале $(0,+\infty)$ с весовой функцией $r\,(x)=e^{-x}$, т.е.

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}L_i(x)\,L_j(x)\,dx=d_{ij};$$

в) *полиномы Чебышева–Эрмита* $H_n(x)=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!}\cdot\frac{d^n(e^{\frac{x^2}{2}})}{d\,x^n}$ определены на всей числовой прямой и для них справедливо соотношение

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}}H_i(x)H_j(x)d\,x=\frac{\sqrt{2p}}{n!}d_{ij}.$$

Тригонометрическим рядом Фурье $2p$ -периодической функции $f(x)$ по системе (2.7) называется ряд

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\,x+b_n\sin n\,x\right), \tag{2.9}$$

в котором коэффициенты a_0, a_n, b_n определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p}f(x)\,dx, a_n=\frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p}f(x)\cos\,nx\,dx,\ \ b_n=\frac{1}{p}\int\limits_{-p}^{p}f(x)\sin nx\,dx,\ \ n\in\mathbf{N}. \tag{2.10}$$

Таким образом, каждой интегрируемой $2p$ - периодической функции $f(x)$ можно сопоставить ее ряд Фурье, что обозначается таким образом

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right).$$

2.11. Пусть $2p$ - периодическая функция (изображена на рис 2.1)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-p, 0], \\ x, & x \in (0, p]. \end{cases}$$

Составить для неё ряд Фурье.

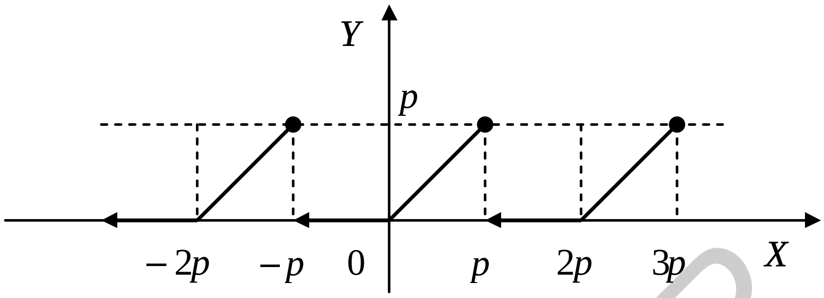


Рис. 2.1

Δ Найдем коэффициенты ряда Фурье по формулам (2.10).

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\, dx = \frac{1}{p} \left(\int_{-p}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{p} x\, dx \right) = \frac{1}{p} \cdot \frac{x^2}{2} \bigg|_0^p = \frac{p}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{p} \int_{0}^{p} x \cos nx\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx: \\ dv = \cos nx\, dx, \\ v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{p} \left(\frac{x \sin nx}{n} \bigg|_0^p - \int_0^p \frac{\sin nx}{n}\, dx \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{p \sin np}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \bigg|_0^p \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{\cos np}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{pn^2},$$

поскольку $\sin np = 0, \cos np = (-1)^n$;

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin nx\, dx = \frac{1}{p} \int_{0}^{p} x \sin nx\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx: \\ dv = \sin nx\, dx, \\ v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{p} \left(\frac{-x \cos nx}{n} \bigg|_0^p + \int_0^p \frac{\cos nx}{n}\, dx \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{-p \cos np}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \bigg|_0^p \right) = -\frac{\cos np}{n} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$T(x) = \frac{p}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{pn^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right).$$

Заметим, что необязательно выполняется равенство $f(x) = T(x)$.

2.12. Разложить в ряд Фурье на указанном промежутке функции:

а) $f(x)=x,\ -p \le x \le p$; б) $f(x)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le p,\\ 0,\ -p \le x<0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}-a,\ -p \le x<0;\\ a,\ 0\le x\le p;\end{cases}$ г) $f(x)=p+x,\ -p \le x\le p$;

д) $f(x)=|x|,\ -p \le x\le p$; е) $f(x)=sig\ n\ x,\ -p<x<p$.

Отв.: а) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{2}$; **б)** $\frac{1}{2}+\frac{2}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$;

в) $\frac{4a}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; **г)** $p+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$;

д) $\frac{p}{2}+\frac{4}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$; **е)** $\frac{4}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)}{2n-1}$.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-гладкой на некотором отрезке*, если она сама и её производная имеют лишь конечное число точек разрыва на этом отрезке, причём все они – точки разрыва первого рода.

Функция $f(x)$ называется удовлетворяющей *условиям Дирихле* на отрезке $[a,b]$, если она на этом отрезке:

1) имеет конечное число разрывов, причем все они первого рода;
2) имеет конечное число экстремумов.

Теорема 2.1. *Ряд Фурье кусочно-гладкой на отрезке* $[-p,p]$ *функции* $f(x)$, *удовлетворяющей условиям Дирихле, сходится в каждой точке интервала* $(-p,p)$ *к значению* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, *а в точках* $x=-p$ *и* $x=p$ *– к значению* $\frac{f(-p+0)+f(p-0)}{2}$.

Теорема 2.2. *Если для непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке* $[-p,p]$ *функции* $f(x)$ *выполняется равенство* $f(-p)=f(p)$, *то её тригонометрический ряд Фурье* $T(x)$ *сходится равномерно на этом отрезке и сумма его совпадает с* $f(x)\ \forall x\in[-p,p]$.

Отсюда, в частности, следует, что в точках непрерывности кусочно-гладкой функции $f(x)$ сумма ряда Фурье $T(x)=f(x)$.

2.13. Функция

$$f(x)=\begin{cases}x, -1\le x<0,\\ 1,\ 0\le x\le 1\end{cases}$$
(рис 2.2) является кусочно-гладкой, а функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ не является кусочно-гладкой, так как у неё при $x=0$ разрыв второго рода.

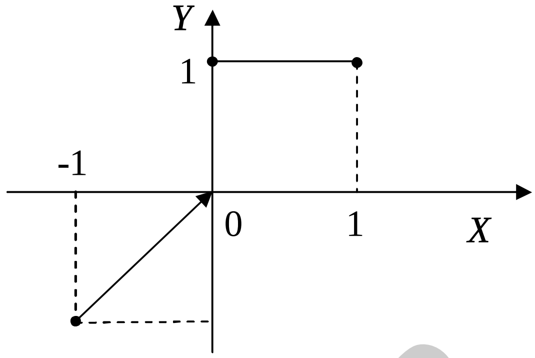


Рис. 2.2

2.14. Разложить в ряд Фурье функцию, получающуюся периодическим продолжением с периодом $2p$ на всю числовую ось:

$$f(x)=\frac{p-x}{2},\quad 0\le x<2p\ ,$$

и доказать с помощью этого разложения, что

$$\frac{p}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\ . \qquad (2.11)$$

Δ Находим коэффициенты Фурье. Так как $f(x)$ периодически продолжается на всю числовую ось с периодом $2p$, то

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos nx\,dx=\int_0^{2p} f(x)\cos nx\,dx,\ n=0,1,2,\dots,$$

$$\int_{-p}^{p} f(x)\sin nx\,dx=\int_0^{2p} f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,2,\dots.$$

Отсюда находим

$$a_0=\frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{p-x}{2}dx=\frac{1}{2p}\left(p\,x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2p}=\frac{1}{2p}\left(2p^2-2p^2\right)=0;$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{p-x}{2}\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=\dfrac{p-x}{2},\ du=-\dfrac{1}{2}dx,\\ dv=\cos nx\,dx,\ v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{p}\left(\frac{p-x}{2}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{2p}+\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=-\frac{1}{2p}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_0^{2p}=-\frac{1}{2p}\left(\frac{\cos 2pn-1}{n^2}\right)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}p-x\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=p-x,\ du=-dx,\\ dv=\sin nx\,dx,\ v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{(p-x)}{2p}\cdot\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2p}-\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\frac{\cos nx}{n}dx=\frac{1}{n}.$$

Таким образом, на интервале $(0,2p)$, согласно теореме (2.2), выполняется равенство

$$\frac{p-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad 0<x<2p \,. \qquad (2.12)$$

При $x=0$ и $x=2p$ это равенство уже не имеет места. График суммы ряда Фурье изображен на рис. 2.3, где жирными точками по оси X обозначены значения ряда суммы Фурье в точках разрыва.

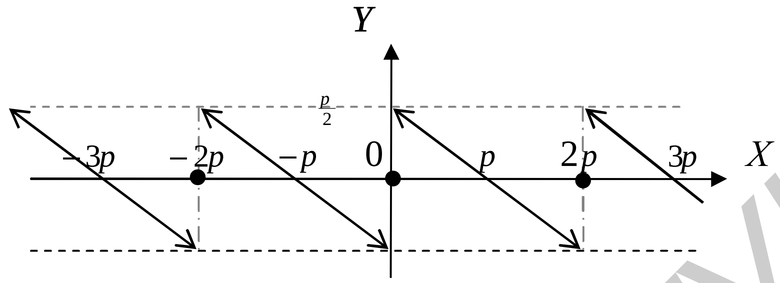


Рис. 2.3

Докажем равенство (2.11). Для этого в (2.12) заменим x на $2x$ и разделим обе части получившегося равенства на 2:

$$\frac{p}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}, 0<x<2p \,.$$

Вычтя это равенство из равенства (2.12), будем иметь

$$\frac{p}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, 0<x<2p \,.$$

Положив здесь $x=\frac{p}{2}$, получим равенство (2.11). ▲

2.15.* Используя разложение в ряд Фурье функции $f(x)=\operatorname{sign} x, 0<x<p$ и продолжив её периодически на всю ось X, доказать, что

а) $x=\frac{p}{2}-\frac{4}{p}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\,x}{(2n+1)^2}, \ 0\le x\le p$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{p^2}{8}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{p^2}{6}$.

● В пункте а) вычислить $\int_{p/2}^{x} signnx\,dx$, разложив подынтегральную функцию в ряд Фурье.

2.16. Разложить в ряд Фурье следующие периодические функции с периодом $2p$. С помощью полученного ряда показать, что:

а) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...=\frac{p}{4}$, если $f(x)=\begin{cases}-1, -p<x<0,\\ 1, 0<x<p;\end{cases}$

б) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...=\frac{p^2}{8}$, если $f(x)=|x|, -p\le x\le p$;

в) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...=\frac{p^2}{12}$, если $f(x)=x^2$, $-p \le x \le p$;

г) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...=\frac{p^2}{6}$, если $f(x)=x^2$, $-p \le x \le p$.

Если функция $f(x)$ четная, т.е. $f(x)=f(-x)$, $-p \le x \le p$; то все её коэффициенты Фурье $b_n=0$, а коэффициенты a_0, a_n вычисляются по формулам

$$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx;\ \ a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos nx\,dx;\ n=1,2...\ . \tag{2.13}$$

Ряд Фурье в этом случае имеет вид

$$T(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\,,$$

т.е. чётная функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по косинусам (чётным функциям).

Если функция $f(x)$ нечетная, т.е. $f(x)=-f(-x)$, $-p \le x \le p$, то все её коэффициенты $a_n=0$, $n=0,1,2,...$, а коэффициенты b_n вычисляются по формулам

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin nx\,dx,\ \ n=1,2...\ . \tag{2.14}$$

Значит, ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\ nx\,.$$

2.17. Разложить в Фурье функцию $f(x)=|x|$, $-p \le x \le p$, продолжив её периодически с периодом $2p$ на всю числовую ось.

Δ Данная функция непрерывна на отрезке $[-p\,,p\,]$ и является кусочно-гладкой. По теореме 2.2 она может быть разложена в равномерно сходящийся к $f(x)$ ряд Фурье. Её периодическое продолжение на всю числовую ось имеет вид согласно рис. 2.4.

Построенная таким образом функция непрерывна на всей числовой оси. Функция чётная. Её ряд Фурье будет иметь *постоянную составляющую* a_0 и разложение по косинусам. Находим коэффициенты a_n по формулам (2.13):

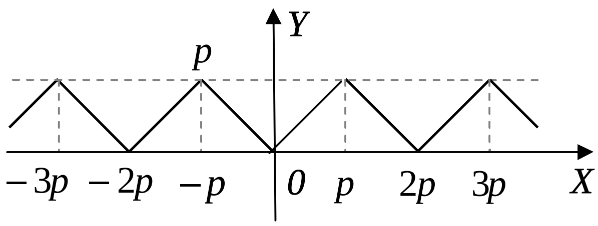


Рис. 2.4

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p x\cos nx\, dx = \left| \begin{matrix} u = x,\ du = dx; \\ dv = \cos nx\, dx,\ v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{p}\left(x \cdot \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^p - \frac{1}{p}\int_0^p \sin nx\, dx \right) = \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, \text{ если n четное;} \\ -\dfrac{4}{n^2 p}, \text{ если n нечетное,} \end{cases}$$

т.е. имеем: $a_1 = -\frac{4}{p}$, $a_3 = -\frac{4}{p}\cdot\frac{1}{3^2}$, $a_5 = -\frac{4}{p}\cdot\frac{1}{5^2}, \ldots$.

Таким образом, ряд Фурье, сумма которого для всех $x \in [-p\,;p\,]$ равна $|x|$, имеет вид

$$|x| = \frac{p}{2} - \frac{4}{p}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots \right).$$

Отсюда при $x = 0$ получаем

$$0 = \frac{p}{2} - \frac{4}{p}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \right) \Rightarrow \frac{p^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots .$$

Из этого числового ряда можно получить другие интересные формулы. В самом деле, положим

$$s = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots; \qquad s_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{p^2}{8};$$

$$s_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \right) = \frac{1}{4}s\ . \qquad (2.15)$$

Отсюда имеем

$$s = s_1 + s_2, \quad s_2 = \frac{1}{4}s = \frac{1}{4}(s_1 + s_2),$$

т.е. в силу (2.15) $s_2 = \frac{1}{4}(s_1 + s_2) = \frac{1}{4}s = \frac{1}{4}\left(\frac{p^2}{8} + s_2 \right) \Rightarrow s_2 = \frac{p^2}{24}$,

но $s = (s_1 + s_2) = \frac{p^2}{8} + \frac{p^2}{24} = \frac{p^2}{6}$, т.е. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{p^2}{6}$.

2.18. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos ax;\ -p \le x \le p$, a – нецелое число, продолжив её с периодом $2p$ на всю числовую ось.

Δ Так как данная функция четная, то все $b_n = 0$. Находим коэффициенты $a_n,\ n = 0, 1\ldots$:

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p \cos ax \cos x dx = \frac{1}{p}\int_0^p (\cos(a+n)x + \cos(a+n)x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{\sin(a+n)\,x}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\,x}{a-n}\right)\Bigg|_0^p = \frac{1}{p}\left(\frac{\sin(a+n)p}{a+n} + \frac{\sin(a-n)p}{a-n}\right) =$$

$$= \frac{2}{p} a \sin ap \cdot \frac{\cos np}{a^2 - n^2} = \frac{2}{p}(-1)^n \frac{a \sin ap}{a^2 - n^2}.$$

Отсюда получаем равенство

$$\cos ax = \frac{2a \sin ap}{p}\left(\frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{a^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{a^2 - 2^2} - \frac{\cos 3x}{a^2 - 3^2} + \ldots\right), -p < x < p. \quad (2.16)$$

Эта функция при периодическом её продолжении остаётся непрерывной при переходе через точки $x = \pm p$.

Приложение. Положим в формуле (2.16) $x = p$ и обозначим a через x. Затем, разделив обе части получившегося равенства на $\sin p\, x$, получим формулу

$$ctg p\, x = \frac{2x}{p}\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2 - 1^2} + \frac{1}{x^2 - 2^2} . + \frac{1}{x^2 - 3^2} + ..\right), \quad (2.17)$$

представляющую так называемое *разложение котангенса на элементарные дроби*.

Запишем равенство (2.17) в виде

$$ctg p\, x - \frac{1}{p\, x} = \frac{1}{p}\left(\frac{-2x}{1^2 - x^2} + \frac{-2x}{2^2 - x^2} + \frac{-2x}{3^2 - x^2} + \ldots\right). \quad (2.18)$$

Если $|x| \le q < 1$, то n-й член ряда в правой части полученного равенства по абсолютной величине меньше, чем $\frac{2}{p} \cdot \frac{1}{n^2 - q^2}$. Следовательно, ряд равномерно сходится в этом интервале и его можно почленно интегрировать. После умножения равенства на p из его левой части получаем

$$p\int_0^x \left(ctg p\, t - \frac{1}{p\, t}\right) dt = p\left(\frac{\ln \sin p\, t}{p} - \frac{1}{p}\ln t\right)\Bigg|_0^x = \ln\frac{\sin px}{x} - \lim_{t \to 0} \ln \frac{\sin pt}{t} =$$

$$= \ln\frac{\sin px}{x} - \ln p = \ln\frac{\sin px}{px},$$

а в правой части имеем

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2t}{n^2 - t^2}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{-2t}{n^2 - t^2}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(n^2 - t^2\right)\Bigg|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(n^2 - x^2\right) - x^2 - \ln n^2\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2 - x^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Таким образом, имеем равенство

$$\ln\frac{\sin p\,x}{p\,x}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\Rightarrow\frac{\sin p\,x}{p\,x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

где

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)...=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)...\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)-$$

бесконечное произведение. Из этого бесконечного произведения получаем ещё одно представление $\sin px=px\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$. ▲

2.19. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x,\ -p\le x\le p$, $2p$ – периодически продолженную с периодом $2p$ на всю числовую ось.

Δ Функция $f(x)$ – нечетная и, следовательно, все её коэффициенты Фурье $a_n=0,\ n=0,1,2...$. Найдём коэффициенты:

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{p}\int_0^p x\sin nx\,dx\left|\begin{array}{l}u=x,\ du=dx;\\ dv=\sin nx\,dx,\ v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{p}\left(-x\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^p+\frac{1}{n}\int_0^p\cos nx dx\right)=\frac{2}{p}\left(-p\cdot\frac{\cos np}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^p=$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1},\ n=1,2...\ .$$

Таким образом, ряд Фурье $2p$ -периодической функции $f(x)=x,\ -p<x<p$ есть

$$x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+...\right).$$

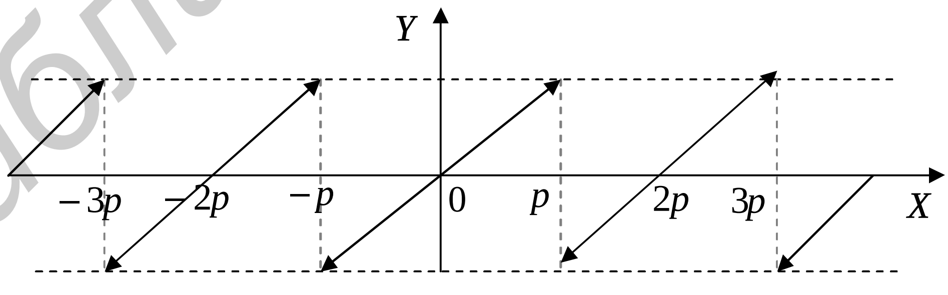


Рис. 2.5

В точках разрыва $x=(2n-1)p$, $n=\pm 0,1,2,...$ сумма ряда Фурье равна нулю (рис. 2.5), где жирные точки на оси x соответствуют значению суммы ряда Фурье в этих точках.

2.20. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1,\ -p<x<0,\\ 1,\quad 0<x<p.\end{cases}$$

Отв.: $f(x)=\frac{4}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

2.21. Функцию $f(x)=x^2$ разложить в ряд Фурье:

а) по косинусам кратных дуг;

б) по синусам кратных дуг;

в) в интервале $(0,2p)$.

Отв.: **а)** $x^2=\dfrac{p^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2},\ |x|\le p$;

б) $x^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2p}{n}(-1)^{n+1}+\dfrac{4}{pn^3}\left((-1)^n-1\right)\right)\sin nx,\ 0\le x<p$;

в) $x^2=\dfrac{4p^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}-4p\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n},\ 0<x<2p$.

2.22. Функцию $f(x)$ разложить в ряд Фурье в указанном промежутке:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<p,\\ -1, & -p<x<0.\end{cases}$ **Отв.:** $\dfrac{4}{p}\left(\dfrac{\sin x}{1}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)$.

б) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<p,\\ -x, & -p<x<0.\end{cases}$ **Отв.:** $-\dfrac{p}{2}-\dfrac{4}{p}\left(\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{a^2-5^2}+\ldots\right)$.

в) $f(x)=x,\quad -p<x<p$. **Отв.:** $2\left(\dfrac{\sin x}{1}+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\ldots\right)$.

г) $f(x)=x,\quad 0<x<2p$. **Отв.:** $p-2\left(\dfrac{\sin x}{1}+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\ldots\right)$.

д) $f(x)=|\sin x|,\quad -p<x<p$. **Отв.:** $\dfrac{2}{p}-\dfrac{4}{p}\left(\dfrac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\dfrac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\dfrac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)$.

е) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<p,\\ 0, & p<x<2p.\end{cases}$

Отв.: $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{2}{p}\left(\dfrac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\dfrac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\dfrac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)$.

ж) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<p,\\ -\cos x, & -p<x<0.\end{cases}$ **Отв.:** $\dfrac{8}{p}\left(\dfrac{\sin 2x}{1\cdot 3}+\dfrac{2\sin 4x}{3\cdot 5}+\dfrac{3\sin 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)$.

з) $f(x)=x(p-x),\quad 0<x<p$. **Отв.:** $\dfrac{p^2}{6}\left(\dfrac{\cos 2x}{1^2}+\dfrac{\cos 4x}{2^2}+\dfrac{\cos 6x}{a^2-3^2}+\ldots\right)$.

и) $f(x)=x(p-x)(p+x),\quad -p<x<p$. **Отв.:** $12\left(\dfrac{\sin x}{1^3}+\dfrac{\sin 2x}{2^3}+\dfrac{\sin 3x}{3^3}+\ldots\right)$.

к) $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<p-a,\\ 1, & p-a<x<p+a,\\ 0, & p+a<x<2p.\end{cases}$

Отв.: $\dfrac{a}{p}-\dfrac{2}{p}\left(\dfrac{\sin a\cos x}{1}-\dfrac{\sin 2a\cos 2x}{2}+\dfrac{\sin 3a\cos 2x}{3}-\ldots\right)$.

л) $f(x)=\begin{cases} x(p-x), & 0<x<p, \\ -x(p-x), & -p<x<0. \end{cases}$ **Отв.:** $\dfrac{8}{p}\left(\dfrac{\sin x}{1^3}+\dfrac{\sin 3x}{3^3}+\dfrac{\sin 5x}{5^3}+\ldots\right).$

м) $f(x)=\sin m\,x, \quad -p<x<p, \quad m-$ *нецелое*.

Отв.: $\dfrac{2\sin m\,p}{p}-\left(\dfrac{\sin x}{1^2-m^2}-\dfrac{2\sin 2x}{2^2-m^2}+\dfrac{3\sin 3x}{3^2-m^2}-\ldots\right).$

н) $f(x)=e^{m\,x}, \quad -p<x<p$. **Отв.:** $\dfrac{2shp}{p}\left(\dfrac{1}{2m}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(m\cos nx-n\sin nx)}{m^2+n^2}\right).$

о) $f(x)=shm\,x, \quad -p<x<p.$

Отв.: $\dfrac{2\sin nhm\,p}{p}-\left(\dfrac{\sin x}{1^2+m^2}-\dfrac{2\sin 2x}{2^2+m^2}+\dfrac{3\sin 3x}{3^2+m^2}-\ldots\right).$

п) $f(x)=chm\,x, \quad -p<x<p..$

Отв.: $\dfrac{2m\,shm\,p}{p}\left(\dfrac{1}{2m^2}-\dfrac{\cos x}{1^2+m^2}+\dfrac{\cos x}{2^2+m^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2+m^2}+\ldots\right).$

р) $f(x)=\ln\left|\sin\dfrac{1}{2}x\right|, \quad -p<x<p.$

Отв.: $-\left(\ln 2+\dfrac{\cos x}{1}+\dfrac{\cos 2x}{2}+\dfrac{\cos 3x}{3}+\ldots\right).$

с) $f(x)=\ln\left|\cos\dfrac{1}{2}x\right|, \quad -p<x<p.$

Отв.: $-\left(\ln 2-\dfrac{\cos x}{1}+\dfrac{\cos 2x}{2}-\dfrac{\cos 3x}{3}+\ldots\right).$

т) $f(x)=\dfrac{1}{6}p^2-\dfrac{1}{2}px+\dfrac{1}{4}x^2, \quad 0\le x\le 2p.$

Отв.: $\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos 2x}{2^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\ldots.$

Формулы (2.10) можно применять к любой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[x_0, x_0+2p]$, не обязательно периодической. Если для неё выполнены условия теоремы 2.1 на отрезке $[x_0, x_0+2p]$, то ряд Фурье сходится. Важно помнить, что его сумма $T(x)$ совпадает с исходной функцией $f(x)$ только на основном промежутке $[x_0, x_0+2p]$.

2.23. Функцию $f(x)=x$ разложить в ряд Фурье по синусам на промежутке $[p, 3p]$.

Δ Находим коэффициенты Фурье:

$$b_n=\frac{1}{p}\int\limits_{p}^{3p}x\sin nx\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x,\ du=dx; \\ dv=\sin nx\,dx,\ v=-\dfrac{\cos nx}{n} \end{array}\right|=$$

$$= -\frac{1}{p} x \cdot \frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{p}^{3p} + \frac{1}{np}\int_{p}^{3p}\cos nx dx = -\frac{1}{pn}\left(3p\cos 3np - p\cos np\right) + \frac{1}{np}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{p}^{3p} =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Следовательно, $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\cdot\sin nx$. ▲

2.24. Разложить в ряд Фурье на интервале $\left(-\frac{p}{2}, \frac{3p}{2}\right)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} a, & -\frac{p}{2} < x < \frac{p}{2}, \\ b, & \frac{p}{2} \le x < \frac{3p}{2}. \end{cases}$$

Отв.: $\frac{a+b}{2} + \frac{2(a-b)}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x.$

Пусть теперь $f(x)$ является $2l$-периодической функцией. Её ряд Фурье по ортонормированной на отрезке $[-l, l]$ системе (2.8) имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{npx}{l} + b_n\sin\frac{npx}{l}\right), \tag{2.19}$$

где коэффициенты Фурье a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2...$ вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\, dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{npx}{l}\, dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{npx}{l}\, dx. \tag{2.20}$$

В случае четной функции $f(x)$ ряд и коэффициенты Фурье a_n имеют вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\cdot\frac{npx}{l}, \qquad a_n = \frac{2}{l} + \int_{0}^{l} f(x)\cos\cdot\frac{npx}{l}\, dx,\ n = 0, 1, 2..., \tag{2.21}$$

т.е. чётная функция разлагается в ряд Фурье только по косинусам кратных дуг $p\frac{x}{l}$.

Для нечетной функции $f(x)$ ряд Фурье и коэффициенты b_n имеют вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\cdot\frac{npx}{l}, \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\cdot\frac{npx}{l}\, dx,\ n = 1, 2..., \tag{2.22}$$

т.е. нечетная функция разлагается в ряд Фурье только по синусам кратных дуг $p\frac{x}{l}$.

2.25. Продолжив периодически на всю числовую прямую функцию $f(x) = x^2, -1 \le x \le 1$, написать её разложение в ряд Фурье. Найти значение суммы ряда Фурье $f(x)$ в точках

$x_1 = -16{,}1;\ \ x_2 = 0{,}5$

.

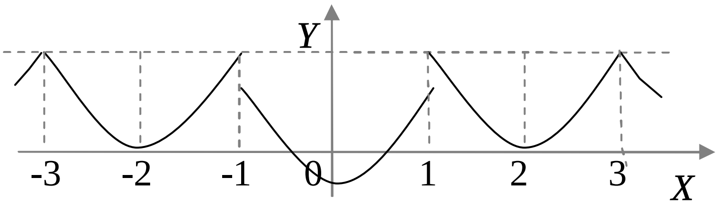


Рис. 2.6

Δ График продолженной периодической функции изображен на рис. 2.6. Функция чётна.

Имеем период $T = 2\,l = 2$, т.е. $l = 1$. Значит,

$$\cos\frac{npx}{l} = \cos npx,\ \ \sin\frac{npx}{l} = \sin npx.$$

В соответствии с формулами Фурье (2.21) находим:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-0}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1} = 0.$$

$$a_n = 2\int_0^1 x^2\cos np\ x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2,\, du = 2x\,dx; \\ dv = \cos np\ x\,dx,\, v = -\dfrac{\sin np\ x}{np}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{np}x^2\sin np\Big|_0^1 + \frac{4}{np}\int_0^1 x\sin np\ x = \left|\begin{matrix} x = u,\, dx = du; \\ dv = \sin\ np\ x\,dx,\, v = -\dfrac{\cos np\ x}{np}\end{matrix}\right| dx =$$

$$= \frac{4}{n^2p}x\cos npx\Big|_0^1 - \frac{4}{n^2p^2}\int_0^1 \cos npx\,dx = (-1)^n\frac{4}{n^2p}.$$

Таким образом, получаем ряд Фурье

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{p^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos np\ x.$$

Найдём теперь значение суммы ряда $f(x)$ при $x = -16{,}1$ и $x = 0{,}5$. Выделив целую часть периодов, будем иметь, (учитывая, что $f(x)$ имеет период $T = 2$).

$$f(-16{,}1) = f(-16 - 0{,}1) = f(-0{,}1) = f(-0{,}1) = (-0{,}1)^2 = 0{,}01.$$

Значение $T(0{,}5)$, как и $T(-0{,}1)$, вычисляем непосредственно по $f(x)$, поскольку для гладкой функции по теореме 2.2 ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно. Таким образом,

$$T(0{,}5) = f(0{,}5) = (0{,}5)^2 = 0{,}25\ \blacktriangle$$

2.26. Разложить в ряд Фурье следующие функции:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \mathbf{l}, \\ -1, & -l < x < 0; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1, \\ 1 + x, & -1 < x < 0; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}0, & -l<x\le 0,\\ x, & 0\le x<l.\end{cases}$

Отв.: **а)** $\dfrac{4}{\pi}\left(\sin\dfrac{\pi x}{l}+\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3\pi x}{l}+\dfrac{1}{5}\sin\dfrac{5\pi x}{l}+\ldots\right);$

б) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}\left(\dfrac{\cos 3\pi x}{1^2}+\dfrac{\cos 3\pi x}{3^2}+\dfrac{\cos 5\pi x}{5^2}+\ldots\right);$

в) $\dfrac{l}{4}-\dfrac{2l}{\pi^2}\left(\cos\dfrac{\pi x}{l}+\dfrac{1}{3^2}\cos\dfrac{3\pi x}{l}+\dfrac{1}{5^2}\cos\dfrac{5\pi x}{l}+\ldots\right)+$

$+\dfrac{l}{\pi}\left(\sin\dfrac{\pi x}{l}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{3\pi x}{l}+\dfrac{1}{5}\sin\dfrac{5\pi x}{l}+\ldots\right).$

2.27. Разложить в ряд Фурье на интервале $(0,2l)$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}a, & 0<x<l,\\ \dfrac{a}{2}, & x=l,\\ 0, & l<x<2l.\end{cases}$$

Отв.: $\dfrac{a}{2}+\dfrac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\dfrac{2n-1}{l}\pi x.$

2.28. Разложить функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$$

в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0,2]$.

Отв.: $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$

2.29. Разложить функцию $f(x)=x^2$ в ряд Фурье:

а) на отрезке $[-\pi,\pi]$ по косинусам; б) на интервале $(0,\pi)$ по синусам;

в) на интервале $(0,2\pi)$ по синусам и косинусам.

Отв.: а) $\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos nx}{n^2};$ **б)** $\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{\pi^2}{n}-\dfrac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n^3}\right)\sin nx;$

в) $\dfrac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos nx}{n^2}-\dfrac{\pi\sin nx}{n}\right).$

2.30. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=x\sin x,\ 0\le x\le\pi$.

Отв.: $\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin x-\dfrac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\left(4n^2-1\right)^2}\cdot\sin 2nx.$

Функцию $f(x)$, заданную на промежутке $[0,l]$, можно разложить в тригонометрический ряд как только по косинусам, так и только по синусам.

Чтобы получить ряд по косинусам, функцию $f(x)$ продолжают на симметричный промежуток $[-l, 0]$ так, чтобы получилось четная функция: $f(-x) = f(x)$ и коэффициенты Фурье a_n вычисляются по формулам (2.21).

Для получения ряда Фурье только по синусам функцию $f(x)$ продолжают на отрезок $[-l, 0]$ нечетным образом: $f(-x) = -f(x)$ и коэффициенты Фурье находятся по формулам (2.22).

2.31. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, определённую на интервале $(0, l)$, продолжив её на интервал $(-l, 0)$: а) нечётным; б) чётным образом.

Отв.: **а)** $\dfrac{2l}{p}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\dfrac{np\,x}{l},\ 0 \le x \le l$;

б) $\dfrac{l}{2} - \dfrac{4l}{p^2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\,p\,x}{l}\right)$.

2.32. Продолжив нечётным образом функцию $f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 1$ на симметричный отрезок $[-1, 0]$, найти её ряд Фурье, нарисовать график суммы $T(x)$ ряда Фурье.

Отв.: $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n 2}{np} + \dfrac{\left((-1)^n - 1\right)4}{n^3 p^3}\right)\sin npx$. График $T(x)$ имеет вид

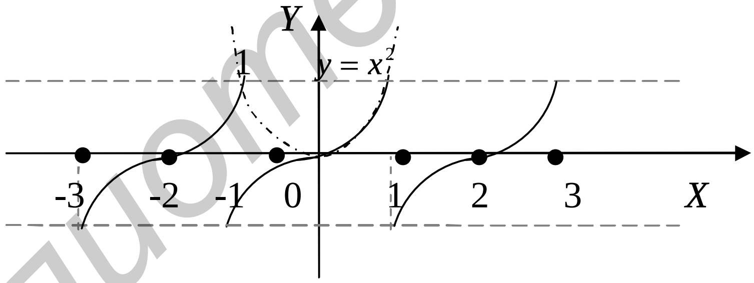


Рис. 2.7

Жирная точка на оси X означает сумму ряда Фурье в соответствующей точке оси X.

2.33. Функцию $f(x) = x,\ 0 \le x \le l$ доопределить чётным образом на интервал $[-l, 0]$ и разложить получившуюся $2\,l$-периодическую функцию в ряд Фурье.

Отв.: $\dfrac{l}{2} - \dfrac{4l}{p^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\cos\dfrac{(2n+1)x}{l}$.

Если обозначить $w = \dfrac{2p}{T} = \dfrac{p}{l}$ – частоту колебаний, то ряд Фурье (2.19) примет вид

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x\right). \qquad (2.23)$$

Ряд (2.23) можно представить в амплитудно-фазовой форме так:

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\omega x-\varphi_n\right), \qquad (2.24)$$

где

$$A_0=\frac{a_0}{2},\ \ A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\ \ tg\varphi_n=\frac{b_n}{a_n}. \qquad (2.25)$$

Величина A_n равна длине вектора с координатами (a_n, b_n) и называется *амплитудой* n*-ой гармоники*, а полярный угол φ – её фазой (рис. 2.8).

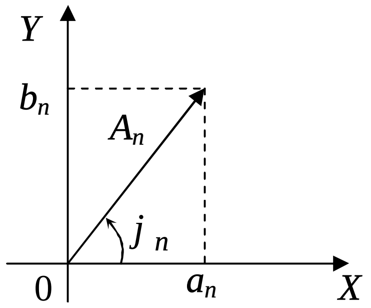


Рис. 2.8

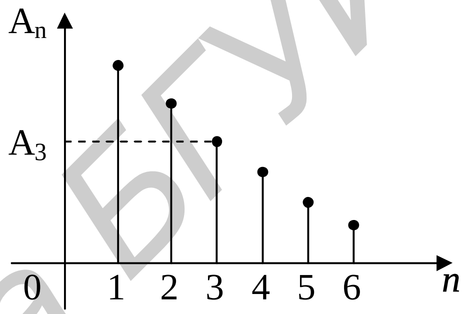


Рис. 2.9

Числа $A_0, A_1, A_2...$ образуют *спектр амплитуд* и изображаются с помощью *амплитудной диаграммы* (рис. 2.9).

Аналогично числа $\varphi_1, \varphi_2,...$ изображаются на фазовой диаграмме (рис. 2.10).

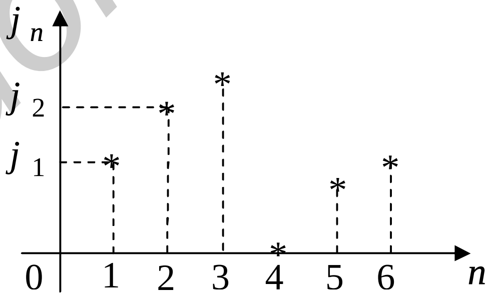


Рис. 2.10

2.34. Записать в амплитудно-фазовой форме ряд

$$\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{1}{8}\cos 8x+\ldots\ .$$

Δ По формулам (2.23)–(2.25) находим

$$\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\quad -\cos 2x=\cos\left(2x-\pi\right),\quad -\sin 3x=\cos\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$\cos 4x=\cos\left(4x-2\pi\right),\ldots\ .$$

Следовательно, ряд (2.24) может быть записан в виде

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(nx - \frac{np}{2} \right).$$

2.35. Для рядов

а) $\frac{1}{3} - \frac{4}{p^2}\cos px + \frac{1}{p^2}\cos 2px - \frac{4}{9p^2}\cos 3px + \frac{1}{4p^2}\cos 4px + \ldots;$

б) $\frac{1}{2} + \frac{2}{p}\cos x - \frac{2}{3p}\cos 3x + \frac{2}{5p}\cos 5x - \frac{2}{7p}\cos 7x + \ldots$

найти амплитудный спектр и изобразить его с помощью амплитудной диаграммы.

Отв.: **а)** $A_0 = \frac{1}{3},\ A_1 = \frac{4}{p^2},\ A_2 = \frac{1}{p^2},\ A_3 = \frac{4}{9p^2},\ A_4 = \frac{1}{4p^2}, \ldots$;

б) $A_0 = \frac{1}{2},\ A_1 = \frac{2}{p},\ A_2 = 0,\ A_3 = \frac{2}{3p},\ A_4 = 0,\ A_5 = \frac{2}{5p},\ A_6 = 0, \ldots$.

Система комплекснозначных функций

$$v_n(t) = e^{inx},\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \qquad (2.26)$$

ортогональна на отрезке $[-p, p]$, причём скалярное произведение функций в комплексном анализе определяется соотношением

$$(U_n, U_k) = \int_{-p}^{p} U_n(t)\, \overline{U_k(t)}\, dt,$$

где $\overline{U_k(t)}$ – сопряжённая функция для функции $\overline{U_k(t)}$.

Ряд Фурье для $2p$-периодической функции $f(x)$ *в комплексной форме* по системе (2.26) имеет вид

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}. \qquad (2.27)$$

Его коэффициенты Фурье C_n вычисляются по формулам

$$C_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(x)\, e^{inx} dx,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (2.28)$$

Аналогично, система комплекснозначных функций

$$U_n(x) = e^{\frac{inpx}{e}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2.29)$$

является ортогональной на отрезке $[-l, l]$. Ряд Фурье $2l$-периодической функции $f(x)$ в комплексной форме по системе функций (2.29) представляется в форме

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx/l}, \qquad (2.30)$$

где коэффициенты Фурье C_n вычисляются по формулам

$$C_n = \frac{1}{2e}\int_{-e}^{e} f(x)\, e^{inpx/l}\, dx,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2.31)$$

2.36. Разложить функцию $f(x) = e^x, \quad -p < x < p$, в комплексный ряд Фурье.

Δ Вычислим коэффициенты Фурье по формулам (2.28):

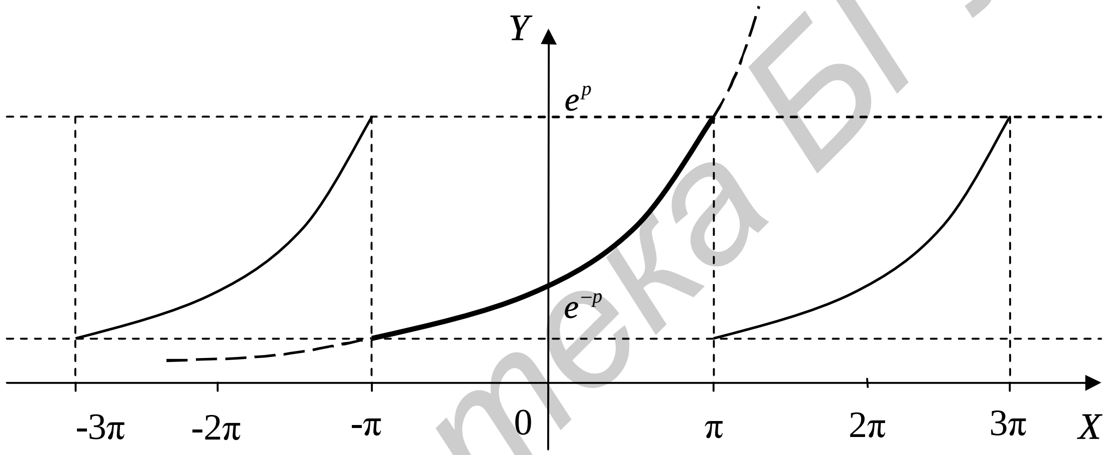
$$C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} e^x e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2p}\cdot\frac{e^{x(1-in)}}{1-in}\Bigg|_{-p}^{p} = \frac{1}{2p}\cdot\frac{1}{1-in}\left(e^{p}\cdot e^{-inp} - e^{-p}\cdot e^{inp}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2p}\cdot\frac{1}{1-in}\left(e^{p} - e^{-p}\right) = (-1)^n \frac{shp}{p\,(1-in)},$$

так как $e^{\pm inp} = \cos np = (-1)^n$. Следовательно, имеем ряд

$$e^x = \frac{shp}{p}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}\, e^{inx}.$$

График функции и ее периодического продолжения изображены на рис. 2.11.



▲

Рис. 2.11

2.37. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x < 0, \\ -x, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Δ Период функции $2l = 4$, т.е. $l = 2$. Комплексные коэффициенты Фурье вычислим по формулам (2.31).

Имеем**:**

$$c_0 = \frac{1}{2e}\int_{-e}^{e} f(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{2}(-x)\, dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{2} = -\frac{1}{2};$$

$$c_n = \frac{1}{2e}\int_{-e}^{e} f(x)\, e^{\frac{inpx}{2}}\, dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\, e^{\frac{inpx}{2}}\, dx = -\frac{1}{4}\int_{0}^{2} x e^{\frac{inpx}{2}}\, dx =$$

$$=\left|\begin{array}{l} u = x,\ du = dx; \\ dv = e^{-\frac{inpx}{2}}\,dx,\ v = -\dfrac{2}{inp}\cdot e^{-\frac{inpx}{2}} \end{array}\right| = -\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{inp}\,x e^{-\frac{inpx}{2}}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{inp}\int_0^2 e^{-\frac{inpx}{2}}\,dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{4i}{np}\,e^{-inp} - \frac{2}{inp}\cdot\frac{2}{inp}\,e^{-\frac{inpx}{2}}\Bigg|_0^2 \right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4i}{np}(-1)^n + \frac{4}{n^2p^2}\,e^{-inp} - 1 \right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{4i}{np}(-1)^n + \frac{4}{n^2p^2}\left((-1)^n - 1\right) \right) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot i}{np} + \frac{1}{n^2p^2}\left(1-(-1)^n\right) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{i}{np}, & \text{если } n \text{ четное,} \\ \dfrac{i}{np} - \dfrac{2}{n^2p^2}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Итак, ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$T(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{i}{(2k-1)p} - \frac{2}{(2k-1)^2 p^2} \right) e^{\frac{i(2k-1)px}{2}} - i\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k)p}\,e^{\frac{i(2k)px}{2}}.$$

Этот ряд сходится к порождающей его функции при $-2 < x < 2$, а в крайних точках $x = \pm 2$ его сумма равна $(0+(-1))/2 = -1/2$. ▲

2.38. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме функции:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le p, \\ -1, & p < x \le 2p; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ -1, & 1 < x < 3. \end{cases}$

Отв.: а) $-\dfrac{2i}{p}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}$; **б)** $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1-e^{\frac{2npi}{3}}}{n}\cdot e^{\frac{2npi}{3}}$, $n \ne 0$.

Рассмотрим теперь ряды Фурье по произвольной ортогональной системе функций.

Пусть $f(x)$ – функция, заданная на отрезке $[a,b]$, и

$$j_1(x),\ j_2(x),\ \ldots,\ j_n(x),\quad x \in [a,b] \qquad (2.32)$$

– система ортогональных функций на этом отрезке т.е.

$$(j_i, j_j) = \int_a^b j_i(x) j_j(x)\,dx = d_{ij} = \begin{cases} 0, & i \ne j \\ \|j_j\|^2, & i = j, \end{cases} \qquad (2.33)$$

где

$$\|j_j\|^2 = \int_a^b j_j^2(x)\,dx\ . \qquad (2.34)$$

Ряд вида

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n j_n(x) \qquad (2.35)$$

называется *рядом Фурье функции* $f(x)$ *по ортогональной системе* (2.32), если коэффициенты C_n определяются по формулам

$$C_n = \frac{1}{\|j_n\|^2}(f, j_n), \quad n = 1, 2, \ldots \,, \tag{2.36}$$

где

$$(f, j_n) = \int_a^b f(x) j_n(x)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots \,. \tag{2.37}$$

Предполагается, что интегралы в соотношениях (2.33) и (2.37) существуют.

Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *интегрируемой с квадратом* на этом отрезке, если существует интеграл $\int_a^b f^2(x)\, dx$.

Для коэффициентов Фурье любой интегрируемой с квадратом функции $f(x)$ имеет место *неравенство Бесселя:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n{}^2 \|j_n\|^2 \le \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{2.38}$$

Ортогональная система функций на отрезке $[a, b]$ называется *замкнутой*, если для любой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом на $[a, b]$, выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n{}^2 \|j_n\|^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx, \tag{2.39}$$

которое называется *равенством Парсеваля–Стеклова.*

В частности, для 2π-периодической функции $f(x)$ для коэффициентов Фурье неравенство Бесселя записывается в виде

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f^2(x)\, dx, \tag{2.40}$$

а равенство Парсеваля–Стеклова – в виде

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f^2(x)\, dx, \tag{2.41}$$

где коэффициенты a_n, b_n определяются по формулам (2.10).

Для $T = 2l$-периодической функции $f(x)$ имеем соответственно неравенство Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\, dx \tag{2.42}$$

и равенство Парсеваля–Стеклова:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\, dx \,. \tag{2.43}$$

2.39. Разложить в ряд Фурье по полиномам Чебышева функцию

$f(x) = x^3, \ -1 < x < 1.$

Δ Исходим из общего представления функции рядом Фурье:

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \tag{2.44}$$

где коэффициенты Фурье a_n подлежат определению. Для их вычисления воспользуемся свойством ортогональности полиномов Чебышева на интервале $(-1, 1)$ с весом $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Умножив обе части равенства (2.44) на весовую функцию и проинтегрировав по x от -1 до 1 в силу свойства ортогональности и нечетности функции x^3, получим $a_0 = 0$. Далее, умножив обе части равенства (2.44) на $T_n(x)/\sqrt{1-x^2}$ и проинтегрировав по x от -1 до 1, найдем, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{2^{n-1}} \int_{-1}^{1} \frac{x^3 \cos(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{p a_n}{2^{2n-1}}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся явным выражением многочленов Чебышева и произведем подстановку $\arccos x = t$. Тогда получим

$$a_n = \frac{2n}{p} \int_0^p \cos t \cos(nt)\, dt = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ n \neq 1{,}3, \\ \dfrac{4}{3}, \ \textit{если} \ n = 1, \\ 1, \ \textit{если} \ n = 3. \end{cases}$$

Таким образом, равенство (2.44) имеет вид

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x). \ \blacktriangle$$

2.40. Разложить в ряд Фурье по многочленам Лежандра функции:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если} \ -1 < x < 0, \\ 1, \ \textit{если} \ 0 < x < 1; \end{cases}$ б) $f(x) = |x|, \ -1 < x < 1.$

Отв.: а) $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (4n+3)(2n)!}{2^{2n+2} \cdot n!(n+1)!} \cdot P_{2n+1}(x);$

б) $\dfrac{1}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (4n+1)(2n-2)!}{2^{2n} \cdot (n-1)!(n+1)!} \cdot P_{2n}(x).$

2.41. Зная, что ряд Фурье функции $f(x) = x^2, \ -p \le x \le p$, имеет вид

$$x^2 = \frac{p^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2},$$

написать равенство Парсеваля–Стеклова. **Отв.:** $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{p^4}{3}=\frac{2p^4}{5}$.

2.42. Ряд Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x\le 0,\\ 1, & 0\le x<l\end{cases}$$

имеет вид

$$T(x)=\frac{1}{4}-\frac{2l}{p^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)x}{l}+\frac{l}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{np\,x}{l}.$$

Написать равенство Парсеваля–Стеклова.

Отв.: $\frac{l^3}{3p}=\frac{l^2}{16}+\frac{2l}{p^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{l}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

2.2. Интеграл и преобразования Фурье

Интеграл Фурье. Косинус- и синус-преобразования Фурье. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразования Фурье и его свойства. Теорема Парсеваля–Планшереля.

Функция $f(x)$ называется абсолютно интегрируемой на $\boldsymbol{R}$, если существует несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$. Заметим, что несобственные интегралы типа $\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx$ вычисляются в смысле главного значения, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}F(x)\,dx,\ A>0.$$

Теорема 2.3. *Если функция $f(x)$ на бесконечном промежутке $(-\infty,\infty)$ является ограниченной и абсолютно интегрируемой, а в каждом конечном промежутке удовлетворяет условиям Дирихле, то для любого x имеет место равенство*

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{1}{p}\int_{0}^{\infty}f(t)\cos w(t-x)\,dt. \qquad (2.45)$$

В точках непрерывности функции $f(x)$ справедлива формула

$$f(x)=\frac{1}{p}\int_{0}^{\infty}d\,w\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos w(t-x)\,dt. \qquad (2.46)$$

Равенство (2.45) или (2.46) называется *интегральной формулой Фурье*, а двойной интеграл справа в них – *интегралом Фурье.*

Интегральную формулу Фурье можно также представить в виде

$$f(x)=\frac{1}{p}\int\limits_{0}^{\infty}\left(a\,(w)\cos w\,x+b(w)\sin w\,x\right)dw\;, \qquad (2.47)$$

где $\quad a(w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos w\,t\,dt\,, \qquad b(w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin w\,t\,dt\,.$ (2.48)

2.43. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & \textit{если} \quad x\ge 0, \\ 0, & \textit{если} \quad x<0. \end{cases}$$

Δ График функции $f(x)$ изображён на рис. 2.12. Очевидно, что $\left|f(x)\right|=\left|e^{-x}\right|\le 1$ при любом $x\ge 0$; кроме того,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}=1\,.$$

Следовательно, функция $f(x)$ на промежутке $(-\infty,\infty)$ является ограниченной и абсолютно интегрируемой. Условия Дирихле выполняются очевидным образом. Следовательно, функцию $f(x)$ можно представить интегралом Фурье (2.46).

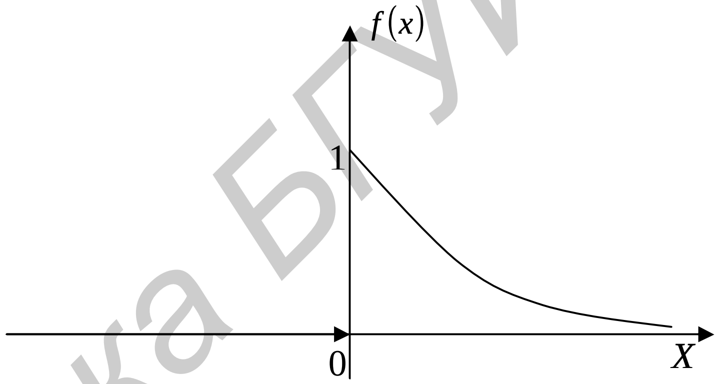


Рис. 2.12

Вычислим внутренний интеграл (2.46). Интегрируя по частям, будем иметь

$$I(x,w)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos w\,(t-x)\,dt\;=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t}\cos w\,(t-x)\;d\,t=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{-t},\,du=-e^{-t}dt; \\ dv=\cos w\;(t-x)\;dt,\,v=\dfrac{\sin w\;(t-x)}{w} \end{matrix}\right|_{0}^{\infty}=\frac{\sin w\;(t-x)}{w}\cdot e^{-t}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}+$$

$$+\frac{1}{w}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t}\sin w\;(t-x)\;dt=\frac{\sin w\,x}{w}+\frac{1}{w}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t}\sin w\;(t-x)\,dt=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{-t},\,du=-e^{-t}dt; \\ dv=\sin\,w\;(t-x)\;dt,\,v=-\dfrac{\cos w\;(t-x)}{w} \end{matrix}\right|=\frac{\sin w\;x}{w}-\frac{1}{w}\frac{\cos w\,(t-x)}{w}\cdot e^{-t}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}-$$

$$-\frac{1}{w^2}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-t}\cos w\;(t-x)\;dt=\frac{\sin w\,x}{w}+\frac{\cos w\,x}{w^2}-\frac{1}{w^2}I(x,w)\,.$$

Отсюда $\left(1+\dfrac{1}{w^2}\right)I(x,w)=\dfrac{x\sin w\,x+\cos w\,x}{w^2}$, т.е.

$$I(x,w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos w\,(t-x)\,dt=\frac{x\sin w\,x+\cos w\,x}{1+w^2}.$$

Тогда по формуле (2.46)

$$f(x)=\frac{1}{p}\int_0^{p}\frac{x\sin w\,x+\cos w\,x}{1+w^2}\,dw.$$

Отсюда при $x=1$ получим равенство

$$\int_0^{p}\frac{x\sin w\,x+\cos w\,x}{1+w^2}\,dw. \quad ▲$$

2.44. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, & если\ \ |x|<1,\\ 0, & если\ \ |x|>1,\\ \dfrac{1}{2}, & если\ \ |x|=1\end{cases}$$

и с помощью этого представления получить формулу $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}\,dw=\frac{p}{2}$.

Отв.: $\displaystyle f(x)=\frac{2}{p}\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}\cos w\,x\,dw$.

2.45. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=e^{-|x|}$.

Отв.: $\displaystyle e^{-|x|}=\frac{2}{p}\int_0^{\infty}\frac{\cos w\,x}{1+w^2}\,dw$.

2.46. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}\sin x, & если\ \ |x|\le p,\\ 0, & если\ \ |x|>p.\end{cases}$

Отв.: $\displaystyle \sin x=\frac{4}{p}\int_0^{\infty}\frac{\sin(n+w)p\cdot\sin w\,x}{n^2-w^2}\,dw,\ -p\le x\le p$.

Для четных функций формула Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{2}{p}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)\cos w\,t\,dt\right)\cos w\,x\,dw. \qquad (2.49)$$

Если обозначить

$$a(w)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\infty} f(t)\cos w\,t\,dt, \qquad (2.50)$$

то интеграл Фурье (2.49) примет вид

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\infty} a(w)\cos w\,x\,dw. \qquad (2.51)$$

Соотношение (2.50) называется *косинус-преобразованием Фурье* четной функции. Сама функция $f(x)$ восстанавливается по её косинус-преобразованию Фурье с помощью интеграла Фурье (2.51).

Для нечетных функций интегральная формула Фурье представляется в виде

$$f(x) = \frac{2}{p}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)\sin w\,t\,d\,t\right)\sin w\,x\,dw\,. \qquad (2.52)$$

Если положить

$$b(w) = \sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\infty} f(t)\sin w\,t\,d\,t\,, \qquad (2.53)$$

то интегральная формула Фурье (2.52) примет вид

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\infty} b(w)\sin w\,x\,dw\,. \qquad (2.54)$$

Соотношение (2.53) называется *синус-преобразованием Фурье* нечетной функции $f(x)$. Функция $f(x)$ при этом восстанавливается по интегральной формуле Фурье (2.54), где $b(w)$ – её синус-преобразование Фурье.

2.47. Найти синус-преобразование Фурье нечетной функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & если\ \ |x| \le l, \\ 0, & если\ \ |x| > l \end{cases}$$

и представить её интегральной формулой Фурье.

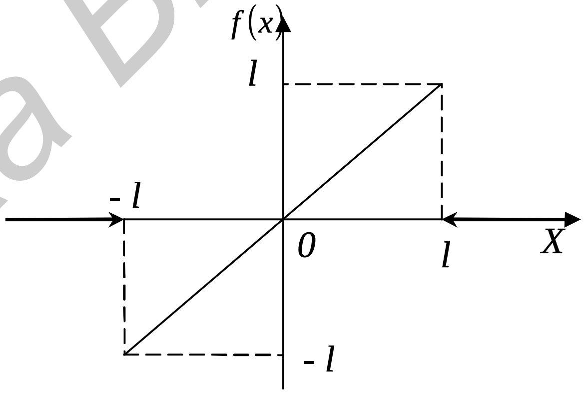


Рис. 2.13

Δ Очевидно, что данная функция $f(x)$ ограничена (рис. 2.13), абсолютно интегрируемая и удовлетворяет условиям Дирихле. Для внутреннего интеграла в формуле (2.52) имеем

$$I(w) = \int_0^{\infty} f(t)\sin w\,t\,d\,t = \int_0^{l} t\sin w\,t\,d\,t = -t\frac{\cos w\,t}{w}\Bigg|_0^{l} + \frac{1}{w}\int_0^{l}\cos w\,t\,d\,t = -\frac{l\cos w\,l}{w} + \frac{\sin l}{w^2}\,.$$

Согласно формуле (2.53) синус-преобразование Фурье имеет вид $b(w) = \sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{\infty} f(t)\sin w\,t\,d\,t = \sqrt{\frac{2}{p}}\,\frac{\sin w\,l - w\,e\cos w\,l}{w^2}$, а интегральная формула Фурье (2.54) запишется следующим образом:

$$f(x) = \frac{2}{p}\int_0^{\infty}\frac{\sin w\,l - w\,e\cos w\,l}{w^2}\sin w\,x\,dw\,. \quad ▲$$

2.48. Найти косинус-преобразование Фурье четной функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & если\ \ |x| \le l, \\ 0, & если\ \ |x| > l \end{cases}$$

и представить функцию интегральной формулой Фурье.

Отв.: $a(w)=\sqrt{\dfrac{2}{p}}\,\dfrac{\sin w\,l}{w}$, $\quad f(x)=\dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin w\,l}{w}\cos w\,x\,d\,w$.

2.49. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax},\ x\ge 0,\ a>0,\\ 0,\quad x<0.\end{cases}$$

Отв.: $a(w)=\sqrt{\dfrac{2}{p}}\,\dfrac{a}{a^2+w^2}$; $\quad b(w)=\sqrt{\dfrac{2}{p}}\,\dfrac{w}{a^2+w^2}$.

2.50. Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x)$:

1) $f(x)=\begin{cases}1,\ 0<x<b,\\ 0,\ x>b.\end{cases}$ **Отв.:** $\dfrac{1-\cos bw}{w}$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$. **Отв.:** $p/2$.

3) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+b^2}$. **Отв.:** $\dfrac{p}{2}e^{-bw}$.

4) $f(x)=e^{-bx}$. **Отв.:** $\dfrac{w}{w^2+b^2}$.

5) $f(x)=x\,e^{-bx^2}$. **Отв.:** $\dfrac{\sqrt{p}}{4b^{3/2}}w\,e^{-w^2/4b}$.

6) $f(x)=x^{-1/2}$. **Отв.:** $\sqrt{p/2w}$.

7*) $f(x)=\dfrac{\sin bx}{x}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{w+b}{w-b}$.

8*) $f(x)=\dfrac{\sin bx}{x^2}$. **Отв.:** $\begin{cases}pw/2,\ w<b,\\ pb/2,\ w>b.\end{cases}$

9) $f(x)=\dfrac{\cos bx}{x}$. **Отв.:** $\begin{cases}0,\quad w<b,\\ p/4,\ w=b,\\ p/2,\ w>b.\end{cases}$

2.51. Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$:

1) $f(x)=\begin{cases}1,\ 0<x<b,\\ 0,\ x>b.\end{cases}$ **Отв.:** $\dfrac{\sin bw}{w}$.

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+b^2}$. **Отв.:** $\dfrac{p\,e^{-bw}}{2b}$.

3) $f(x)=e^{-bx}$. **Отв.:** $\dfrac{b}{w^2+b^2}$.

4) $f(x)=e^{-bx^2}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{p}{6}}e^{-w^2/4b.}$.

5) $f(x)=x^{-1/2}$. **Отв.:** $\sqrt{\dfrac{p}{2w}}$.

6) $f(x)=\ln\dfrac{x^2+b^2}{x^2+c^2}$. **Отв.:** $\dfrac{e^{-cw}-e^{-bw}}{pw}$.

7*) $f(x)=\dfrac{\sin bx}{x}$. **Отв.:** $\begin{cases} p/2, \ w<b, \\ p/4, \ w=b, \\ 0, \ w>b. \end{cases}$

8*) $f(x)=\sin bx^2$. **Отв.:** $\sqrt{\dfrac{p}{8b}}\left(\cos\dfrac{w^2}{4b}-\sin\dfrac{w^2}{4b}\right)$.

9) $f(x)=\cos bx^2$. **Отв.:** $\sqrt{\dfrac{p}{8b}}\left(\cos\dfrac{w^2}{4b}+\sin\dfrac{w^2}{4b}\right)$.

Формула

$$f(x)=\frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iw(t-x)}dt\right)dw \qquad (2.55)$$

называется *интегралом Фурье в комплексной форме*.

2.52. Разложить в интеграл Фурье в комплексной форме функцию

$$f(x)=e^{-x^2/2}.$$

Δ График $f(x)$ изображен на рис. 2.14. Вычислим внутренний интеграл в (2.55).

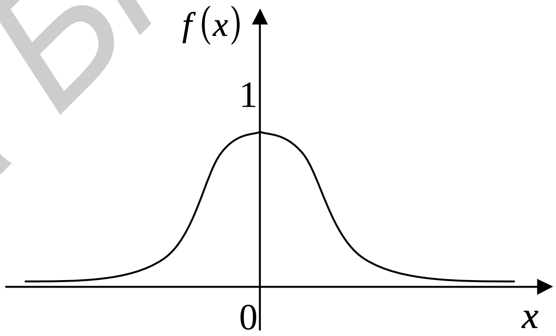


Рис. 2.14

Имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{iw(x-t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}+iwx-iwt}dt=e^{iwx}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}-iwt}dt=e^{iwx}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(t+iw)^2-\frac{w}{2}}dt=$$

$$=e^{iwx-\frac{w^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(t+iw)^2}dt. \qquad (2.56)$$

Интеграл справа есть функция от w, обозначим его $I(w)$. Тогда

$$I(w)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(t+iw)^2}dt=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}e^{-\frac{1}{2}(t+iw)^2}dt=\begin{vmatrix} z=t+iw \\ dz=dt \end{vmatrix}=\lim_{A\to\infty}\int_{-A+iw}^{A+iw}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz.$$

Отсюда, продифференцировав обе части этого по w, получим

$$I'(w)=\lim_{A\to\infty}\left(ie^{-\frac{1}{2}(A+iw)^2}-\lim_{A\to\infty}ie^{-\frac{1}{2}(A+iw)^2}\right)=0,$$

т.е. $I(w)=C$.

Вычислим $I(0)$. Имеем

$$I(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \qquad I(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Отсюда

$$I^2(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\,dy.$$

Перейдя в двойном интеграле к полярным координатам, будем иметь

$$I^2(0)=\int\limits_0^{2p}\left(\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}rdr\right)dj=\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}d\left(\frac{r^2}{2}\right)\cdot\int\limits_0^{2p}dj=2p\left(-e^{-\frac{2r}{2}}\Bigg|_0^{\infty}\right)=2p.$$

Таким образом,

$$I(0)=\sqrt{I^2(0)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2p}.$$

Следовательно, согласно соотношению (2.56),

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-iw(t-x)}dt=e^{iwx-\frac{1}{2}w^2}\cdot\sqrt{2p}.$$

Таким образом, искомым разложением $f(x)$ в интеграл Фурье в комплексной форме является равенство

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iwx-\frac{1}{2}w^2}dw. \ ▲$$

2.53. Найти интеграл Фурье в комплексной форме для функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & -l\le x\le l,\\ 0, & x>1,\ x<-l.\end{cases} \qquad \textbf{Отв: } f(x)=\frac{1}{p}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin wl}{w}e^{iwx}dw.$$

2.54. Представить интегралом Фурье в комплексной форме функцию $f(x)=e^{-|x|}$.

Отв: $e^{-|x|}=\dfrac{1}{p}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos wx}{1+w^2}dw.$

Будем предполагать, что для функции $f(x)$ выполняется условие теоремы 2.3.

Прямым преобразованием Фурье или просто *преобразованием Фурье* называется интеграл

$$F(iw)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iwx}dx=\boldsymbol{F}(f(x)).$$

Обратное преобразование Фурье $\boldsymbol{F}^{-1}(F(iw))$, восстанавливающее исходную функцию $f(x)$, определяется соотношением

$$f(x)=\boldsymbol{F}^{-1}(iw)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(iw)\,e^{iwx}dw.$$

Если прямое преобразование Фурье $\boldsymbol{F}\left(f(x)\right)$ определить равенством

$$\boldsymbol{F}\left(f(x)\right) = F(iw) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iwx} d\,x, \tag{2.57}$$

то обратное преобразование $\boldsymbol{F}^{-1}\left(F(iw)\right)$ примет вид

$$\boldsymbol{F}^{-1}\left(F(iw)\right) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(iw)\, e^{iwx} d\,w\,. \tag{2.58}$$

В дальнейшем будем пользоваться преобразованиями Фурье (2.57),(2.58).

Полученная с помощью преобразования Фурье функция $\boldsymbol{F}(iw) = \boldsymbol{F}\left(f(x)\right)$ называется *изображением по Фурье функции* $f(x)$.

2.55. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \ge 0,\, a > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Δ По формуле (2.57) находим

$$F(iw) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx} d\,x = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-iwx} d\,x = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(a+iw)x} dx = \left.\frac{e^{-(a+iw)x} dx}{-(a+iw)}\right|_{0}^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{a+iw} \lim_{x\to\infty} e^{-(a+iw)x} + \frac{1}{a+iw}\,.$$

Так как

$$\left|e^{-(a+iw)x}\right| = \left|e^{-ax}\right| \cdot \left|e^{-iwx}\right| = e^{-ax}, \quad a > 0,$$

то $\lim\limits_{x\to\infty}\left|e^{-(a+iw)x}\right| = 0$. В таком случае $F(iw) = \boldsymbol{F}\left(e^{-ax}\right) = \dfrac{1}{a+iw}$. ▲

2.56. Найти прямое преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & x > 1,\ x < -1 \end{cases}$$

и выразить $f(x)$ с помощью обратного преобразования Фурье.

Отв.: $F(iw) = \dfrac{2\sin w}{w}, \quad f(x) = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin w \cos w\, x}{w} dw\,.$

2.57.* Найти изображение по Фурье функции $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. **Отв.:** $\sqrt{2p}\, e^{-\frac{w^2}{2}}$.

2.58. Для следующих функций найти изображение по Фурье:

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & -a \le x \le a,\, a > 0, \\ 0, & x < -a,\ x > a. \end{cases}$ **Отв.:** $\dfrac{\sin w\, a}{w\ a}$.

$f(x) = \dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty\,.$ **Отв.:** $e^{-|w|}$.

2.59. Доказать следующие равенства:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos w\,x}{a^2+w^2}\,d\,w = \frac{p}{2a}e^{-|x|}, \quad x\in \boldsymbol{R}, \quad a>0;$

б) $\int\limits_0^\infty e^{-w}\cos w\,x\,d\,w = \frac{1}{1+x^2}, \quad x\in \boldsymbol{R};$

в)* $\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}s^{2}w^{2}}\cos w\,x\,d\,w = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{p}{2}}e^{\frac{x^2}{2s^2}}, \quad x\in \boldsymbol{R}, \sigma>0$

2.60.* Доказать, что для любого $t>0$ справедлива формула

$$\boldsymbol{F}\left(\frac{1}{2\sqrt{pt}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)=e^{-w^2t}.$$

2.61. Найти преобразования Фурье функций:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+b^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+b^2}$.

Отв.: 1) $\dfrac{2\sin bw}{w}$; **2)** $\dfrac{pe^{-bw}}{b}$.

Перечислим *основные свойства преобразований Фурье* (2.57),(2.58).

1º (*Линейность преобразования Фурье*). Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ преобразуемы по Фурье и $\boldsymbol{F}(f_1(x))=F_1(iw)$, $\boldsymbol{F}(f_2(x))=F_2(iw)$, то для любых чисел a_1 и a_2 справедливы равенства

$$\boldsymbol{F}(a_1f_1(x)+a_2f_2(x))=a_1\boldsymbol{F}(f_1(x))+a_2\boldsymbol{F}(f_2(x)),$$

$$\boldsymbol{F}^{-1}(a_1F_1(iw)+a_2F_2(iw))=a_1\boldsymbol{F}^{-1}(f_1(x))+a_2\boldsymbol{F}^{-1}(f_2(x)). \qquad (2.59)$$

2º *(Преобразование Фурье производной).* Если функция $f(x)$ и её производная $f'(x)$ преобразуемы по Фурье, то

$$\boldsymbol{F}(f'(x))=iw\,\boldsymbol{F}(f(x)) \qquad (2.60)$$

в общем случае

$$\boldsymbol{F}\left(f^{(k)}(x)\right)=(iw)^k\,\boldsymbol{F}(f(x)), \quad k=1,2\ldots . \qquad (2.61)$$

3º *(Преобразование Фурье интеграла).* Если $f(x)$ преобразуема по Фурье и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=0$, то

$$\boldsymbol{F}\left(\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)\,dt\right)=\frac{1}{iw}\boldsymbol{F}(f(x)). \qquad (2.62)$$

4º (*Преобразование Фурье смещенной функции*). Если функция $f(x)$ преобразуема по Фурье, то для $f(x-a)$ справедлива формула

$$\boldsymbol{F}(f(x-a))=e^{-iwa}\boldsymbol{F}(f(x)), \qquad (2.63)$$

а для функции $f(x+a)$ – формула

$$\boldsymbol{F}(f(x+a))=e^{-iwa}\boldsymbol{F}(f(x)). \qquad (2.64)$$

5º *(Преобразования по Фурье свертки двух функций).*

Сверткой двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенных для всех $x \in \boldsymbol{R}$, называется новая функция $f_1(x) * f_2(x)$, определяемая равенством

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t) f_2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(x-t)\,dt. \qquad (2.65)$$

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ преобразуемы по Фурье, то

$$\boldsymbol{F}\left(f_1(x) * f_2(x)\right) = \boldsymbol{F}\left(f_1(x)\right) \cdot \boldsymbol{F}\left(f_2(x)\right). \qquad (2.66)$$

$$\boldsymbol{F}^{-1} F\left(f_1(x)\right) * \boldsymbol{F}\left(f_2(x)\right) = 2p\ f_1(x) \cdot f_2(x). \qquad (2.67)$$

$$\boldsymbol{F}\left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = \frac{1}{2p}\left(\boldsymbol{F}\left(f_1(x)\right) * \cdot \boldsymbol{F}\left(f_2(x)\right)\right). \qquad (2.68)$$

6º *(Теорема Парсеваля–順 Планшереля)*. Если существуют интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f_1(x)\right|^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|f_2(x)\right|^2 dx,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(x)} f_2(x)\,dx = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F\left(f_1(x)\right)} \cdot F\left(f_1(x)\right) dw, \qquad (2.69)$$

где $\overline{f(x)}$ – комплексно-сопряженная функция для $f(x)$.

2.62. Доказать, что если $f(x)$ – четная на всей числовой оси функция, удовлетворяющая условиям теоремы 2.3, то ее преобразование по Фурье является действительной функцией.

2.63. Найти преобразование Фурье функций

а) $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2+4\right)} = -\left(\dfrac{1}{x^2+4}\right)$; б) $f(x) = \dfrac{9-x^2}{\left(x^2+9\right)^2} = \left(\dfrac{x}{x^2+9}\right)$.

Отв.: а) $-2i/\sin 2w$; **б)** $-p\ iw\,e-3w$.

2.64. Найти преобразование Фурье функции $f(x-2)$, если

$f(x) = \begin{cases} |x|, & -2 < x < 2, \\ 0, & x > 2,\ x < -2. \end{cases}$ **Отв.:** $\dfrac{2i}{w} e^{-2iw}\left(2\cos 2w - \dfrac{1}{w}\sin 2w\right)$.

2.65. Найти преобразование Фурье функции

$f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+5}$. **Отв.:** $2\dfrac{e^{2iw}}{w}\sin 2w$.

• Воспользоваться формулой (2.64).

2.66. Найти свертку функций:

а) $f_1(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \ge 0,\ a > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$ $f_2(x) = \begin{cases} e^{-b\,x}, & x \ge 0,\ b > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$

б) $f_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1,\ x < 0; \end{cases}$ $f_2(x) = e^{-a\,x},\ x \ge 0,\ a > 0.$

Отв.: а) $f_1(x) * f_2(x) = \dfrac{e^{-bx} - e^{-ax}}{a - b}$; **б)** $f_1(x) * f_2(x) = \dfrac{\left(e^{a} - 1\right)}{a} e^{-ax}$.

2.67. Найти преобразование Фурье свертки функций

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \ge 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & x > 1, x < -1. \end{cases}$$ **Отв.:** $\dfrac{2\sin w}{w(a + iw)}$.

2.68. Найти обратное преобразование для функции

$F(iw) = \dfrac{1}{(a + iw)(b + iw)}$, $a > 0$, $b > 0$. **Отв.:** $f(x) = \dfrac{e^{-b\,x} - e^{-a\,x}}{a - b}$.

• Воспользоваться результатами примера 2.55. и формулой (2.66).

2.69. Проверить равенство Парсеваля–Планшереля для функций

$$f_1(x) = \begin{cases} -2, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x < 0, x \ge 1; \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & x \ge 1, x \le 1. \end{cases}$$

Изображение по Фурье $F(iw) = F(f(x))$ функции называется *спектральной функцией* или *спектральной характеристикой* для исходной функции. Функция e^{iwx} называется *комплексной гармоникой,* а $F(iw)$ – *комплексной амплитудой гармоники* e^{iwx}. С механической точки зрения функция e^{iwx} при любом значении w описывает некоторое гармоническое колебание. В соответствии с этим интегральное представление (2.57) можно понимать как представление описываемого этой функцией движения в виде бесконечной непрерывной системы независимых колебаний e^{iwx} с различными частотами w. Функция $F(iw)$ показывает при этом, с какой интенсивностью происходят колебания, соответствующие различным значениям w. Функция $|F(iw)|$ называется *амплитудным частотным спектром* функции $f(x)$.

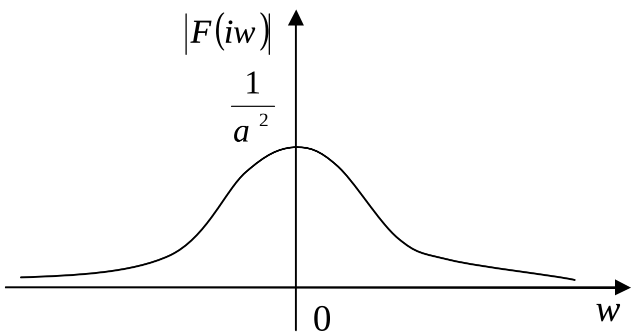


Рис. 2.15

2.70. Построить график амплитудно-частотного спектра функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \ge 0, a > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Δ Согласно примеру 2.55**,** изображение Фурье функции $f(x)$ равно

$$F(iw) = \frac{1}{a + iw}.$$

Тогда $|F(iw)| = \dfrac{1}{a^2 + w^2}$. График функции $|F(iw)|$ изображен на рис. 2.15. ▲

2.71. Изобразить графически амплитудно-частотный спектр функции

$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1, \ x < -1. \end{cases}$ • Воспользоваться примером 2.56.

Самостоятельная работа

«Ряды. Фурье-анализ»

Структура

1. Найти сумму ряда.
2. Исследовать на сходимость ряд.
3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
4. Исследовать на сходимость ряд.
5. Исследовать на абсолютную сходимость ряд.
6. Вычислить сумму ряда с точностью e.
7. Найти область сходимости функционального ряда.
8. Доказать равномерную сходимость функционального ряда на заданном отрезке.
9. Найти область сходимости степенного ряда.
10. Найти сумму степенного ряда.
11. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$.
12. Используя разложение в ряд Тейлора, вычислить приближенно с точностью до
    а) 0,01; б) 0,001.
13. С помощью степенных рядов решить приближенно задачу Коши (и получить k членов ряда, отличных от нуля).
14. Вычислить предел.
15. Пользуясь разложением данной функции в ряд Маклорена, найти значение $f^{(n)}(0)$.

Вариант 1

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+n+1}{\left(4n^2-1\right)\left(n^2+n\right)}$. **Отв.** 1,5.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2\sin\frac{p}{2^n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$;
   д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\left(\ln n^4 n+1\right)}$. **Отв.: а)** сх.; **б)** расх.; **в)** сх.; **г)** расх.; **д)** сх.

3. $a_n = (2n)!!/n^n$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 10\cdot 16\ldots(6n-2)}{1^2\cdot 4^2\cdot 7^2\ldots(3n-2)}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln n}}$. **Отв.** расх.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}$, $e=0{,}01$. **Отв.** 1/27.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(p\sqrt{n^2+x^2}\right)$. **Отв.** сх. усл. $\forall|x|<\infty$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$, $[0{,}10]$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!x^n}{(2n-1)!!}$. **Отв.** $|x|<2$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. **Отв.** $(1-x)\ln(1-x)+x,\ -1\le x<1$.

11. $f(x)=arctg\,\dfrac{2-2x}{1+4x},\ x_0=0$. **Отв.** $arctg\,2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{2n-1},\ |x|\le\dfrac{1}{2}$.

12. а) $\sqrt[5]{250}$; б) $\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx$. **Отв.** **а)** 3,02; **б)** 0,508.

13. $y''=x\sin y';\quad y(1)=0,\quad y'(1)=p/2;\ k=5$.

Отв. $y=\dfrac{p}{2}(x-1)+\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{6}(x-1)^3-\dfrac{1}{24}(x-1)^4-\dfrac{1}{20}(x+1)^5+\ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+arctgx-2\sin x}{\left(e^{x^2}-1\right)\ln\left(1+2x^3\right)}$. **Отв.** 11/120.

15. $f(x)=\cos x\cdot\operatorname{sh}x;\quad f^{(7)}(0)-?$ **Отв.** 8.

Вариант 2

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. **Отв.** 1.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{3n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{p}{4^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\left(n^2-1\right)\ln(3n-1)}$. **Отв.:** **а)** сх.; **б)** расх.; **в)** сх.; **г)** сх.; **д)** расх.

3. $a_n=\dfrac{n^n}{(2n)!}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\cdot5\cdot7...(2n+1)}{2\cdot5\cdot8...(3n-1)}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n}{n!}$. **Отв.** сх. абс. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$, $e=0{,}01$. **Отв.** $-0{,}41$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+3}\,\dfrac{1}{x^2+4x+11}$. **Отв.** Ø. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{2x+4}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+7}}$, $[0;\,2]$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^{2n}}{n^2+5}$. **Отв.** $\left[-\frac{1}{\sqrt{7}};\frac{1}{\sqrt{7}}\right]$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n-1}\cdot n}$. **Отв.** $-4\ln|4-x|+8\ln 2$.

11. $f(x)=\ln\left(7-6x-x^2\right),\ x_0=0$. **Отв.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{7n}-\frac{1}{n}\right)x^n+\ln 7$.

12. а) $\cos 18°$; б) $\int_0^{0,4}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$. **Отв.** **а)** 0,95; **б)** 0,077.

13. $y'=y\cos x+2\cos y;\quad y(0)=0;\ k=3$. **Отв.** $y=2x+x^2-x^3+\ldots$

14. $\lim_{x\to 0}\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}$. **Отв.** $\frac{1}{60}$.

15. $f(x)=x^5\cos\frac{x}{2},\ f^{(11)}(0)-?$ **Отв.** – 866,25.

Вариант 3

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+15n+4}$. **Отв.** $\frac{1}{2}$.

2. а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{2^n\left(n^2-1\right)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt[3]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}tg^2\,\frac{p}{4\sqrt{n}}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{2n}}{(\ln n)^n}$;

д) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+1}{\left(n^2+1\right)\ln^2(4n-7)}$. **Отв.:** **а)** сх.; **б)** расх.; **в)** расх.; **г)** сх.; **д)** сх.

3. $a_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\ldots(5n-3)}$. **Отв.** сх.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{10^{10}}{n}$. **Отв.** сх. усл. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^6+1},\ e=0{,}001$. **Отв.** – 0,486.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n\left(1+x^2\right)$. **Отв.** сх.абс. при $x\in\left(-\sqrt{e-1};\sqrt{e-1}\right)$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$, $[-1;3]$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}$. **Отв.** $|x|<2$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot x^{2n}}{2n-1}$. **Отв.** $x^2\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|$.

11. $f(x)=\ln\left(1-5x+4x^2\right),\quad x_0=0$. **Отв.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+4^n}{n}x^n,|x|<\frac{1}{4}$.

12. а) $arctg\,\dfrac{p}{10}$; б) $\int\limits_0^{0,25}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$. **Отв. а)** 0,30; **б)** 0,070.

13. $y'' = 2yy',\ \ y(0) = 0, y'(0) = 1;\ k = 3$. **Отв.** $y = x + \dfrac{2x^3}{3!} + \dfrac{12x^5}{5!} + \ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{x-\sin x}$. **Отв.** 1.

15. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f^{(10)}(0) - ?$ **Отв.** – 945.

Вариант 4

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{9^n-2^n}{18^n}$. **Отв.** $\dfrac{7}{8}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+2}\right)^{3n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(\dfrac{n}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\,arctg\,\dfrac{5}{3^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot 4^n$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^2}{\left(n^3+n^2+1\right)\ln n}$. **Отв.: а)** расх.; **б)** сх.; **в)** сх.; **г)** расх.; **д)** расх.

3. $a_n = \dfrac{n^n}{(2n+1)!}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{1\cdot 8\cdot 27\cdot\ldots\cdot n^3}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$. **Отв.** сх. абс. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $e = 0{,}001$. **Отв.** 0,632.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2}\right)^{x}$. **Отв.** сх. абс. для $x < -1$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(x+3)^n}{n^n}$, $[-5;-1]$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^{n^2}x^{n^2}}{2^n}$. **Отв.** $|x| < \dfrac{1}{5}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n-1}}{8^n\cdot 3^n}$. **Отв.** $-\dfrac{x}{8}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}\ln\left|\dfrac{x}{2}-1\right|$.

11. $f(x) = x^5\ln\left(1+x^2\right)$, $x_0 = 0$. **Отв.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+5}}{n}$, $|x| \le 1$.

12. а) $\sqrt[3]{80}$; б) $\int\limits_0^{0,2}\sqrt{x}e^{-x}dx$. **Отв. а)** 4,31; **б)** 0,054.

13. $y'' = xyy';\ y(0) = y'(0) = 1;\ k = 5.$ **Отв.** $y = 1 + x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{2x^4}{4!} + \dfrac{3x^5}{5!} + \ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{1-\cos x}$. **Отв.** $\dfrac{1}{3}$.

15. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2},\ f^{(6)}(0) - ?$ **Отв.** 0.

Вариант 5

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{(3n-1)(3n+2)}$. **Отв.** $\dfrac{5}{6}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{5^{n-2}+2n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sin n}{n^2-n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$;

г) $\sum n\left(\dfrac{3n-1}{4n+1}\right)^{2n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\ln n}{\left(5n^2+1\right)\ln^2(5n+1)}$.

Отв.: а) сх.; **б)** сх.; **в)** сх.; **г)** сх.; **д)** расх.

3. $a_n = \dfrac{(3n)!}{2n^2}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4\cdot 9\cdot 14\cdot\ldots\cdot(5n-1)}{3\cdot 10\cdot 17\cdot\ldots\cdot(7n-1)}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} tg\,\dfrac{1}{4n}$. **Отв.** сх. усл. 6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)},\ e = 0{,}01$. **Отв.** 0,04.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n^3}{x^n}\right)^x$. **Отв.** сх. абс. для $|x| > 1$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2},\ \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$. 9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{5^n x^n}{(2n+1)^2\cdot\sqrt{3^n}}$. **Отв.** $|x| \le \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{4n+3}}{(4n-1)(4n+3)}$. **Отв.** $-\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4-1}{16}\left(\ln\dfrac{1+x}{1-x} - 2arctg\right)$.

11. $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x},\ x_0 = 0$. **Отв.** $2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1},\ |x| < 1$.

12. а) $\ln 5$; б) $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{arctgx}{x}\,dx$. **Отв. а)** 1,61; **б)** 0,487.

13. $y'' = (y')^2 + xy;\ y(0) = 4,\ y'(0) = -2;\ k = 5$.

Отв. $y = 4 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \dfrac{19}{6}x^4 + \ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(tgx-\sin x)-x^3}{x^5}$. **Отв.** $\dfrac{1}{4}$.

15. $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $f^{(6)}(0)-?$ **Отв.** – 240.

Вариант 6

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4}{n^2+9n+20}$. **Отв.** $\dfrac{4}{5}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^4}\cdot\sqrt[4]{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3-1}{2^n+3}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{\left(n^2-3\right)\sqrt{\ln n}}$.

Отв.: а) расх.; **б)** расх.; **в)** сх.; **г)** сх.; **д)** расх.

3. $a_n=\dfrac{n^3}{4n^2}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-5)}{10\cdot 13\cdot 16\cdot\ldots\cdot(3n+7)}$. **Отв.** расх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!e^n}{n^{n+2}}\sin\dfrac{pn}{4}$. **Отв.** сх. абс. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$, $e=0{,}01$. **Отв.** $-0{,}41$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(x-2)^n}$. **Отв.** $x\in(-\infty;1]\cup(3;+\infty)$, при $x=1$ усл.сх.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^{2n-1}}{n^2 4^n}$, $[-7;-3]$. 9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n$. **Отв.** $|x|<2$.

10. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{3x^{n-1}}{n^2-3n+2}$. **Отв.** $3(1-x)(\ln(1-x)-1)$.

11. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$, $x_0=-2$. **Отв.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{6\cdot 3^n}-\dfrac{1}{10\cdot 5^n}\right)(x+2)^n$, $x\in(-5;1)$.

12. а) $\sqrt[6]{738}$; б) $\int\limits_0^{0,2}\sqrt{x}\cos x\,dx$. **Отв. а)** 3,01; **б)** 0,059.

13. $y''=e^y\sin y'$; $y(p)=1$, $y'(p)=\dfrac{p}{2}$; $k=3$.

Отв. $y=1+\dfrac{p}{2}(x-p)+\dfrac{e^p}{2}(x-p)^2+\dfrac{pe^p}{2\cdot 3!}(x-p)^3+\ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+arctgx-2\sin x}{\left(e^{x^2}-1\right)\ln\left(1+2x^2\right)}$. **Отв.** $\dfrac{11}{120}$.

15. $f(x)=x^2\sqrt[4]{1+x}$, $f^{(5)}(0)-?$ **Отв.** $\dfrac{105}{16}$.

Вариант 7

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. **Отв.** 0,5.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(n+2)!}{n^5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\dfrac{1}{5^n}\right)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)\,\ln^2(n+5)}$.

Отв.: а) сх.; **б)** расх.; **в)** сх.; **г)** сх.; **д)** сх.

3. $a_n=\dfrac{(n+3)!}{n^n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7\cdot15\cdot23\cdot\ldots\cdot(8n-1)}{4^2\cdot7^2\cdot10^2\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$. **Отв.** сх. усл. 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!\,(n+1)}$, $e=0{,}01$. **Отв.** 0,76.

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^n n\ln n}$. **Отв.** $x\in(-\infty;-1]\cup(1;+\infty)$, в $x=1$ усл.сх.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$, $[1;3]$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$. **Отв.** $|x|<e^{-1}$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+4n+3}$. **Отв.** $\ln|1+x|\cdot\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x$.

11. $f(x)=\sin\dfrac{px}{4}$, $x_0=2$. **Отв.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{p}{4}\right)^{2n}\dfrac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}$, $|x|<\infty$.

12. а) $\sqrt[3]{y}$; б) $\int\limits_0^{0,5}\ln\left(1+x^3\right)dx$. **Отв. а)** 1,39; **б)** 0,015.

13. $y''=x^2+y^2$; $y(-1)=2,\ y'(-1)=0{,}5;\ k=4$.

Отв. $y=2+\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{5}{2}(x+1)^2+\dfrac{15}{16}(x+1)^4+\ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-arctgx}{x^3}$. **Отв.** $\dfrac{1}{6}$.

15. $f(x)=x^4\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$, $f^{(9)}(0)-?$ **Отв.** $\dfrac{9!}{160}$.

Вариант 8

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^n}{15^n}$. **Отв.** 0,75.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n-3}{4+5n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n+1!}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)\,tg\,\frac{p}{3^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}4n$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\,\ln n}$.

Отв.: а) расх.; **б)** сх.; **в)** сх.; **г)** расх.; **д)** расх.

3. $a_n=\frac{(5n)^n}{(2n+1)!}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 8\cdot 11\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{4\cdot 9\cdot 14\cdot\ldots\cdot(5n-1)}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n^2\cdot\frac{1}{n^2}$. **Отв.** сх. абс. 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,3^n\,(2n+1)}$, $e=0{,}01$. **Отв.** 0,9.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$. **Отв.** $x\in(1;+\infty)$ сх. абс.

8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(p-x)\cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7+1}}$, $[0;p]$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n arctg^n\frac{n^2+3}{n^2+1}$. **Отв.** $x>\frac{4}{p}$.

10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+2}}{n^2+2n-3}$. **Отв.** $\ln|1+x|\cdot\left(\frac{1}{4x}+\frac{x^3}{4}\right)-\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+1\right)$.

11. $f(x)=\frac{1}{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}$, $x_0=0$. **Отв.** $\sqrt{2}\,\frac{(2n+1)!!}{4^{n+1}\cdot n!}x^{2n}$, $|x|<\sqrt{2}$.

12. а) $\sqrt[3]{8{,}36}$; б) $\int\limits_0^1 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$. **Отв. а)** 2,03; **б)** 0,855.

13. $y''=y\cos y'+x$; $y(0)=1$, $y'(0)=\frac{p}{3}$; $k=3$. **Отв.** $y=1+\frac{p}{3}x+\frac{1}{4}x^2+\ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-\sin x}{arctg^3 x}$. **Отв.** $\frac{1}{2}$.

15. $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$, $f^{(6)}(0)-?$ **Отв.** $-6!\left(1+\frac{2}{3^7}\right)$.

Вариант 9

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2n+7)}$. **Отв.** 0,1.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{5}{n+1}\right)^{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sin n}{n^2-n+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\dfrac{1}{2^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2 3^{5n}}{5^n}$; д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{\left(3n^2+4\right)\ln n}$.

Отв.: а) расх.; **б)** сх.; **в)** сх.; **г)** сх.; **д)** расх.

3. $a_n=\dfrac{(2n-1)!!}{n^n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6\cdot 13\cdot 20\cdot\ldots\cdot(7n-1)}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(n+1)^2}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{\ln(1+n)}$. **Отв.** сх. усл. 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n^3(n+1)}$, $e=0{,}01$. **Отв.** 0,18.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n\sin^{2x}x}{n}$. **Отв.** $x\in(pk-\dfrac{p}{6};pk+\dfrac{p}{6})$, $k\in\boldsymbol{Z}$, абс. сх.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$, $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$. 9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2-x)^n\sin\dfrac{p}{2^n}$. **Отв.** $x\in(0;4)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n^2+4n+3\right)x^{n+1}$. **Отв.** $\dfrac{6x^2(x+2)}{(x+1)^2}+\dfrac{2x^2}{\left(1+x^3\right)}$.

11. $f(x)=\ln(5x+3)$, $x_0=1$. **Отв.** $\ln 8+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{5}{8}\right)^n(x-1)^n$, $x\in\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{13}{5}\right)$.

12. а) $arctg\,0{,}5$; б) $\int\limits_0^1\dfrac{e^x-1}{x}dx$. **Отв.: а)** 0,46; **б)** 0,103.

13. $y''=x+y^2$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$; $k=4$. **Отв.** $y=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^6}{45}+\ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$. **Отв.** $\dfrac{2}{3}$.

15. $f(x)=\sqrt[3]{8+x}$, $f^{(5)}(0)-?$ **Отв.** $\dfrac{55}{2^{10}\cdot 3^5}$.

Вариант 10

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n-2^n}{10^n}$. **Отв.** 1,25.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+n}\right)^3$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)\sin\dfrac{p}{3^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(10n+3)\,\ln^2(10n+3)}$.

Отв.: а) расх.; **б)** расх.; **в)** сх.; **г)** сх.; **д)** сх.

3. $a_n=\dfrac{n!}{2^{n^2}}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 4\cdot 9\cdot\ldots\cdot n^2}{101\cdot 201\cdot 301\cdot\ldots\cdot(100n+1)}$. **Отв.** расх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$. **Отв.** сх. абс. 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n!}$, $e=0{,}01$. **Отв.** 0,79.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\left(e^{\frac{x}{n}}-1\right)^n$. **Отв.** $|x|<1$, сх. абс.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n\cdot n^3}$, $[-3;3]$. 9. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}\ln\dfrac{n+4}{n-4}$. **Отв.** $x\in[0;2]$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(4n^2+8n+3\right)x^{2n}$. **Отв.** $\dfrac{3+3x^2-4x^3+2x^5}{\left(1-x^2\right)^3}$.

11. $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}$, $x_0=1$. **Отв.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}$, $x\in[0;2]$.

12. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{30}}$; б) $\int\limits_0^{0,5}\ln\left(1+x^2\right)dx$. **Отв. а)** 0,30; **б)** 0,385.

13. $y''-xy^2=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=1$; $k=4$. **Отв.** $y=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{4x^4}{4!}+\ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$. **Отв.** $\dfrac{1}{2}$.

15. $f(x)=x^6 arctgx$, $f^{(13)}(0)-?$ **Отв.** $-\dfrac{13!}{7}$.

Вариант 11

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8^n-3^n}{24^n}$. **Отв.** $\dfrac{5}{14}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{n^2-1}{n^3-3n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n}{2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2 tg\dfrac{2p}{7^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-10}{n^4}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Отв.: а) расх.; **б)** сх.; **в)** сх.; **г)** расх.; **д)** сх.

3. $a_n = \dfrac{2^{3n}}{n!}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8\cdot 13\cdot 18\cdot \ldots \cdot (5n+3)}{1\cdot 8\cdot 15\cdot \ldots \cdot (7n-6)}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$. **Отв.** сх. усл. 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$, $e = 0{,}001$. **Отв.** 0,927.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+(5x)^{2n}}{(-x)^n}$. **Отв.** расх. $\forall x$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{3n+1}$, $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(nx)^n}{(n!)^2}$. **Отв.** $x \in \boldsymbol{R}$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(n^2+3n+2\right) x^n$. **Отв.** $\dfrac{2}{(1-x)^3}$.

11. $f(x) = \sqrt[3]{8-4x}$, $x_0 = -4$. **Отв.** $\dfrac{3}{\sqrt{24}}\left(1+\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n\cdot 6^n\cdot n!}\left(x+4^n\right)\right)$.

12. а) $\sqrt[10]{1080}$; б) $\int\limits_0^{0,4} \sqrt{x} e^{-\frac{x}{4}}\, dx$. **Отв. а)** 2,03; **б)** 0,159.

13. $4x^2 y'' + y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = \dfrac{1}{2}$; $k = 3$.

Отв. $y = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{8}(x-1)^2 + \ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln^2 x - \sin^2(x-1)}{e^{(x-1)^2}-1}$. **Отв.** 0.

15. $f(x) = x^3 arctgx$, $f^{(11)}(0) - ?$ **Отв.** 0.

Вариант 12

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n+2)(3n+5)}$. **Отв.** $\dfrac{1}{15}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n\,(n+3)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{p}{5n+1}\right)^n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n}\left(\dfrac{n}{n+3}\right)^{n^2}$; д) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

Отв.: **а)** расх.; **б)** расх.; **в)** сх.; **г)** сх.; **д)** расх.

3. $a_n = \dfrac{(4n)^n}{(2n-1)!}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot n!}{9 \cdot 13 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot (4n+5)}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin 3^n}{3^n}$. **Отв.** сх. абс. 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^n}$, $e = 0{,}001$. **Отв.** 0,840.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\ln x}}$. **Отв.** $x \in (e; +\infty)$, сх.абс. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n^2} \cdot n!}{2n+3}$, $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3-2x)^n}{n - \ln^2 n}$. **Отв.** $x \in (1; 2]$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n^2-1)x^n}{3^n}$. **Отв.** $\dfrac{6x^2}{(3-x)^2} + \dfrac{x^2}{(3-x)^2}$.

11. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4x + 3}$, $x_0 = -5$. **Отв.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{6^{n+1}} - \dfrac{1}{8^{n+1}} \right) (x+5)^n$.

12. а) $\sqrt[4]{90}$; б) $\int\limits_{0,3}^{0,5} \dfrac{1+\cos x}{x^2}\, dx$. **Отв.** **а)** 3,08; **б)** 2,569.

13. $(1-x)y'' + y = 0$; $y(0) = y'(0) = 1$; $k = 3$.

Отв. $y = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots$.

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}\, arctg \sqrt{x} - x}{x\left(\sqrt[3]{8+x} - 2\right)}$. **Отв.** –4.

15. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$, $f^{(7)}(0) - ?$ **Отв.** – 7!.

Вариант 13

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{2n^2 + 8n + 3}$. **Отв.** 1.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \left(\dfrac{n+2}{n+4} \right)^{n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3 + 2n^2 + 1}}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln \left(\dfrac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$;

г) $\sum \left(\cos \dfrac{2}{n} \right)^{n^2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{5n^2 \ln^3 (n+3)}$.

Отв.: **а)** расх.; **б)** сх.; **в)** сх.; **г)** сх.; **д)** сх.

3. $a_n = \dfrac{n^2+1}{(2n)!!}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot (n+1)!}{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot (5n-1)}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n}$. **Отв.** сх. абс. 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos px}{3^{n}(n+1)}$, $e=0{,}001$. **Отв.** 0,864.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^{ntgx}}$. **Отв.** $x\in\left(kp\,;\dfrac{2k+1}{2}p\right)$, $k\in \boldsymbol{Z}$, сх.абс.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6^{n}\cdot x^{2n}}{n^{2}}$, $\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right]$.

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+5)^{n^{2}}}{(n+1)^{n}}$. **Отв.** $x\in[-6;-4]$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{2}+n\right)x^{n-1}$. **Отв.** $\dfrac{2}{(1-x)^{3}}$.

11. $f(x)=\ln\left(x^{2}+9x+8\right)$, $x_{0}=-7$. **Отв.** $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^{n}6^{n}}{6^{n}\cdot n}(x+7)^{n}$.

12. а) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{136}}$; б) $\int\limits_{0}^{0,1}\cos\sqrt[3]{x}\,dx$. **Отв.** **а)** 0,50; **б)** 0,718.

13. $y''=\dfrac{y'}{y}-\dfrac{1}{x}$; $y(1)=1$, $y'(1)=0$; $k=4$.

Отв. $y=1-\dfrac{(x-1)^{2}}{2!}-\dfrac{(x-1)^{4}}{4!}+\dfrac{4(x-1)^{5}}{5!}\ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x}-2-2x-x^{2}}{x-\sin x}$. **Отв.** 2.

15. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^{x}}}$, $f^{(10)}(0)-?$ **Отв.** $\dfrac{1}{2^{10}}$.

Вариант 14

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{24}{9n^{2}-12n-5}$. **Отв.** 5.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^{n}}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^{2}}}-1\right)^{2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)\ln(7n-1)}$.

Отв.: **а)** расх.; **б)** сх.; **в)** сх.; **г)** сх.; **д)** расх.

3. $a_{n}=\dfrac{n^{12}}{4n^{2}}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^{2}}{4\cdot 11\cdot\ldots\cdot\left(2n^{2}+n+1\right)}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$. **Отв.** сх. усл. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{p}{2}+pn\right)}{n^3}$, $e=0{,}01$. **Отв.** – 0,82.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$. **Отв.** $x\in(-1;1)$, сх.абс.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{p}{4^{2n}}\right)(x-9)^{5n}$, $[7;11]$.

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{(1+4n)5^n}}$. **Отв.** $x\in\left[-\frac{\sqrt{5}}{3};\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^n}{3^n}$. **Отв.** $\frac{9}{(x+3)^2}$.

11. $f(x)=\frac{11}{10-9x-x^2}$, $x_0=3$. **Отв.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{13^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(3-x)^n$.

12. а) $\sin\frac{p}{100}$; б) $\int\limits_0^{25}\frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx$. **Отв.:** **а)** 0,03; **б)** 0,976.

13. $y'''=ye^x-x(y')^2$; $y(0)=1,\ y'(0)=y''(0)=1;\ k=6$.

Отв. $y=1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{4x^6}{6!}+\ldots$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x-x^2/2}{e^{x^2}-1-x^2}$. **Отв.** $-\frac{1}{12}$.

15. $f(x)=2^{-x^2}$, $f^{(9)}(0)-?$ **Отв.** 0.

Вариант 15

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{n^2+n+1}$. **Отв.** $\frac{p}{4}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{10n}{n^2-1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt[3]{n+1}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{p}{5n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(n+1)}$.

Отв.: **а)** расх.; **б)** расх.; **в)** сх.; **г)** расх.; **д)** сх.

3. $a_n=\frac{2^{3n}}{n!}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 8\cdot 13\cdot\ldots(5n+3)}{1^2\cdot 4^2\cdot 7^2\cdot\ldots\cdot(3n-2)^2}$. **Отв.** сх.

5. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$. **Отв.** сх. усл. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}$, $e = 0{,}01$. **Отв.** – 0,22.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin^n \frac{x-3}{n+1} x^n}{3^{x+\frac{1}{n}}}$. **Отв.** сх.абс. $\forall\, x \in \boldsymbol{R}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n\ln^2 n \cdot 4^n}$, $[-2;\, 2]$.

9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)}$. **Отв.** $x \in [-1;\, 3)$.

10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(2n^2 - 2n + 1\right) x^n$. **Отв.** $\frac{5x^2 - 2x + 1}{(1-x)^3}$.

11. $f(x) = \cos^2 x,\ x_0 = \frac{p}{3}$.

Отв. $\frac{1}{4} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} \sin\left(\frac{2}{3}p + (n-1)\frac{p}{2}\right)\left(x - \frac{p}{3}\right)^n$, $|x| < \infty$.

12. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; б) $\int\limits_0^1 \cos\frac{x^2}{4}\, dx$. **Отв.** **а)** 0,72; **б)** 0,994.

13. $y''' = y'' + (y')^2 + y^3 + x$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 2;\ y''(0) = 0{,}5;\ k = 6$.

Отв. $y = 1 + 2x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{12}x^3 + \frac{29}{48}x^4 + \frac{25}{48}x^5 + \ldots$.

14. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)\,e^{-x} - (1-x)\,e^{x}}{\arcsin x - arctgx}$. **Отв.** $\frac{4}{3}$.

15. $f(x) = x\cos\sqrt{x}$, $f^{(8)}(0) - ?$ **Отв.** $-\frac{8!}{14!}$.

Литература

1. Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М. : Наука, 1965.

2. Дороговцев, А. Я. Математический анализ : сб. задач / А. Я. Дороговцев. – Киев : Вища школа, 1987.

3. Жевняк, Р. М. Высшая математика: Дифференциальные уравнения. Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной : учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск, ИРФ «Обозрение», 1997.

4. Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы, ряды / Л. Д. Кудрявцев [и др.]. – М. : Наука, 1986.

5. Справочное пособие по математическому анализу / И. И. Ляшко [и др.]. – Киев : Вища школа , 1985.

7. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1988.

Содержание

Учебное издание

Авторы:

Карпук Андрей Андреевич
Жевняк Ростислав Михайлович
Цегельник Владимир Владимирович
Конюх Людмила Афанасьевна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 10-ти частях

Часть 8

РЯДЫ. ФУРЬЕ-АНАЛИЗ

Учебное пособие

Редактор *Т. П. Андрейченко*
Корректор *М. В. Тезина*
Компьютерная верстка *Е. Н. Мирошниченко*

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Печать ризографическая. Усл. печ. л. 7,09. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 500 экз. Заказ 1.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ № 02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП № 02330/0131666 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6