10. ***Скиба, А.Н.*** Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
11. ***Залесская, Е.Н.*** О нелокальных классах Локетта / Е.Н. Залесская // Веснік ВДУ. – 2002. – № 1 (23). – С. 84–88.
12. ***Коуровская тетрадь.*** Нерешенные вопросы теории групп // Институт математики. СОРАН. – 1999. – № 14. – С. 134.

S U M M A R Y

A Lockett conjecture about a structure of a Fitting class for ω-local Fitting classes with given characteristic is affirmed. The negative answer for the Lockett conjecture in the case of ω-local Fitting classes is obtained.

Поступила в редакцию 8.10.2006

УДК 517.977+621.07.064

А.А. Агранович, Е.А. Барабанов, В.В. Жарский, С.Е. Карпович

Об одной задаче адаптивного управления мехатронной системой

При исследовании динамических процессов, описывающих поведение прецизионных электроприводов, используемых в автоматизированном оборудовании производства изделий микроэлектроники, возникает необходимость решения следующей задачи управления [1–3].

Система управления описывается линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \alpha x = u, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

где коэффициенты α и β – заданные вещественные постоянные, а управление $u(\cdot): [0, +\infty) \to \mathrm{R}$ – кусочно-постоянная функция с постоянным и заданным шагом T участков постоянства (т.е. $u(t) \equiv u_k$ при $t \in [kT, (k+1)T)$, $k \in \mathrm{Z}_+$, $u_k \in \mathrm{R}$). Задано также положительное число δ (так называемый шаг нарезки). Требуется найти необходимые и достаточные условия на постоянные α и β, при которых можно так выбрать последовательность $(u_k)_{k\in \mathrm{Z}_+}$, $k \in \mathrm{Z}_+$, значений функции управления $u(\cdot)$ на участках ее постоянства, чтобы для решения $x(\cdot)$ задачи Коши уравнения (1) с нулевыми при $t = 0$ начальными данными (т.е. удовлетворяющей уравнению (1) дифференцируемой при всех $t \ge 0$ функции $x(t)$, для которой $x(0) = \dot{x}(0) = 0$) выполнялись следующие условия: $x(kT) = k\delta$, $k \in \mathrm{N}$, и модуль производной $|\dot{x}(kT)|$ был достаточно «мал» при всех $k \in \mathrm{N}$.

Дадим вначале полное решение этой задачи без учета последнего требования. Полученные формулы дадут возможность решить и общую задачу при любом понимании «малости» модуля производной $|\dot{x}(kT)|$. Обозначим: $x_k(t) \equiv x(t)$ при $kT \le t \le (k+1)T$, $k \in \mathrm{Z}_+$. Легко видеть, что поставленная задача формализуется следующим равносильным образом: найти необходимые и достаточные условия на постоянные α и β, при которых существует последовательность $(u_k)_{k\in Z_+}$ вещественных чисел, такая, что разрешима следующая последовательность переопределенных начально-краевых задач:

$$\begin{cases} \ddot{x}_k+\beta\dot{x}_k+\alpha x_k=u_k, \quad kT\le t\le (k+1)T, \\ x_k(kT)=k\delta, \quad x_k((k+1)T)=(k+1)\delta, \ \dot{x}_k(kT)=\dot{x}_{k-1}(kT), \end{cases} \qquad (2_k)$$

где $k\in Z_+$, и для единообразия записи положено $\dot{x}_{-1}(0)=0$. Как видим, начальные и краевое условия каждой, начиная со второй, следующей из задач (2_k) определяются по решению предыдущей задачи (2_{k-1}). Существование при каждом $k\in Z_+$ такого $u_k\in \mathrm{R}$, что последовательно при $k=0,1,2,\ldots$ разрешима каждая из задач (2_k), является необходимым и достаточным условием существования указанного выше решения $x(\cdot)$ уравнения (1), и тогда это решение $x(t)\equiv x_k(t)$ при $t\in[kT,(k+1)T)$, $k\in Z_+$. Определенную так функцию $x(\cdot)$ назовем решением последовательности задач (2_k).

Решение поставленной задачи дает

Теорема. *Пусть $D=\beta^2-4\alpha$ – дискриминант характеристического уравнения $z^2+\beta z+\alpha=0$ для дифференциального уравнения (1).*

Последовательности $(u_k)_{k\in Z_+}$, доставляющей решение последовательности задач (2_k), не существует, если и только если выполнено одно из условий:

$$\alpha=0 \ \text{ или } \ D<0, \text{ а } \ 4e^{-\beta T/2}\sqrt{\alpha}\cos(T\sqrt{-D}/2+\arccos(2^{-1}\sqrt{-D/\alpha}))=\sqrt{-D}.$$

Если же ни одно из этих двух условий не выполнено, то последовательность $(u_k)_{k\in Z_+}$ существует, единственна и задается формулой: $u_k=\alpha\delta k+c+db(a-1)^{-1}(a^k-1)$, $k\in Z_+$, где не зависящие от k постоянные a, b, c и d в зависимости от корней $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения равны:

1) если $D>0$, то $\lambda_{1,2}=(-\beta\pm\sqrt{D})/2$, а

$$a=-(\lambda_1 e^{\lambda_1 T}(e^{\lambda_2 T}-1)-\lambda_2 e^{\lambda_2 T}(e^{\lambda_1 T}-1))/\Delta, \quad b=\delta\lambda_1\lambda_2(e^{\lambda_1 T}-e^{\lambda_2 T})/\Delta,$$

$$c=-\alpha\delta(\lambda_2-\lambda_1)/\Delta, \quad d=-\alpha(e^{\lambda_1 T}-e^{\lambda_2 T})/\Delta,$$

где $\Delta=\lambda_2(e^{\lambda_1 T}-1)-\lambda_1(e^{\lambda_2 T}-1)$;

2) если $D<0$, то $\lambda_{1,2}=\mu\pm i\omega$, где $\mu=-\beta/2$, $\omega=\sqrt{-D}/2$, а

$$a=-e^{\mu T}(\omega\cos(\omega T)+\mu\sin(\omega T)-\omega e^{\mu T})/\Delta, \quad b=\delta(\mu^2+\omega^2)e^{\mu T}\sin(\omega T)/\Delta,$$

$$c=-\alpha\delta\omega/\Delta, \quad d=\alpha e^{\mu T}\sin(\omega T)/\Delta,$$

где $\Delta=e^{\mu T}(\omega\cos(\omega T)-\mu\sin(\omega T))-\omega$;

3) если $D=0$, то $\lambda_{1,2}=\lambda=-\beta/2$, а

$$a=-e^{\lambda T}(\lambda T+e^{\lambda T}-1)/\Delta, \quad b=-\lambda^2\delta Te^{\lambda T}/\Delta, \quad c=-\alpha\delta/\Delta, \quad d=\alpha e^{\lambda T}T/\Delta,$$

где $\Delta = e^{\lambda T}(1-\lambda T)-1$.

При этом величина скорости в моменты kT, $k \in Z_+$, *решения* $x(\cdot)$ *последовательности задач* (2_k) *равна* $\dot{x}(kT) = b(a-1)^{-1}(a^k - 1)$, $k \in Z_+$, *где величины* a *и* b *(в зависимости от корней характеристического уравнения) определены выше в формулировке теоремы.*

Доказательство. Для доказательства теоремы рассмотрим отдельно случаи вещественных различных, комплексно-сопряженных и вещественных совпадающих корней характеристического уравнения $z^2 + \beta z + \alpha = 0$. Поскольку эти рассмотрения идентичны, рассмотрим подробно только случай вещественных различных корней. Решим отдельно каждую задачу (т.е. при каждом $k \in Z_+$) последовательности (2_k) в общем виде, обозначив для удобства $\dot{x}(kT)$ через v_k; позже из этих решений «склеим» решение $x(\cdot)$ всей последовательности задач (2_k), $k \in Z_+$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, – корни характеристического уравнения ($D = \beta^2 - 4\alpha > 0$). Тогда общее решение дифференциального уравнения задачи (2_k) дается формулой:

$$x_k(t) = C_1^k e^{\lambda_1 t} + C_2^k e^{\lambda_2 t} + \alpha^{-1} u_k. \tag{3}$$

Поэтому в этом случае начально-краевые условия задачи (2_k) примут вид:

$$\begin{cases} C_1^k e^{\lambda_1 kT} + C_2^k e^{\lambda_2 kT} + \alpha^{-1} u_k = k\delta, \\ C_1^k e^{\lambda_1 (k+1)T} + C_2^k e^{\lambda_2 (k+1)T} + \alpha^{-1} u_k = (k+1)\delta, \\ C_1^k \lambda_1 e^{\lambda_1 kT} + C_2^k \lambda_2 e^{\lambda_2 kT} = v_k. \end{cases}$$

Почленно вычитая из второго уравнения этой системы ее первое уравнение, учитывая третье уравнение и обозначив для упрощения $D_1^k = C_1^k e^{\lambda_1 kT}$ и $D_2^k = C_2^k e^{\lambda_2 kT}$, придем к системе:

$$\begin{cases} D_1^k (e^{\lambda_1 T} - 1) + D_2^k (e^{\lambda_2 T} - 1) = \delta, \\ D_1^k \lambda_1 + D_2^k \lambda_2 = v_k. \end{cases} \tag{4}$$

Найдем решение этой линейной относительно D_1^k и D_2^k алгебраической системы. Ее определители равны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 T} - 1 & e^{\lambda_2 T} - 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 (e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1 (e^{\lambda_2 T} - 1),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \delta & e^{\lambda_2 T} - 1 \\ v_k & \lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \delta\lambda_2 - v_k(e^{\lambda_2 T} - 1), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 T} - 1 & \delta \\ \lambda_1 & v_k \end{vmatrix} = v_k(e^{\lambda_1 T} - 1) - \delta\lambda_1.$$

Прежде чем продолжить вычисления, выясним, при каких $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{R}$ система (4) разрешима. Если эта система неразрешима, то необходимо, чтобы $\Delta = 0$. Из формулы для Δ видно, что если хотя бы один из корней λ_1 или λ_2 нулевой, то $\Delta = 0$. Пусть для определенности $\lambda_1 = 0$. Тогда система (4) не имеет решений уже при $k = 0$. Действительно, при $k = 0$ (тогда $v_0 = 0$) из второго уравнения этой системы следует, что либо $D_2^k = 0$, либо $\lambda_2 = 0$. В любом случае, если $\lambda_1 = 0$, левая часть первого уравнения системы (4) при $k = 0$ равна 0, в то время как его правая часть, равная δ, отлична от нуля. Стало быть, если хотя бы один из корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения равен 0 (а это равносильно тому, что $\alpha = 0$), то система (4), а тогда и последовательность задач (2_k), $k \in Z_+$, неразрешимы.

Стандартными рассуждениями несложно показать, что если ни один из корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения не равен 0, то $\Delta \neq 0$, а значит, система (4) разрешима. Это условие ($\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$) считаем в дальнейшем выполненным. Тогда решением системы (4) являются $D_1^k = \Delta^{-1}\Delta_1$ и $D_2^k = \Delta^{-1}\Delta_2$, и, значит, согласно (3), решением $x_k(\cdot)$ задачи (2_k) будет:

$$x_k(t) = \Delta^{-1}\Delta_1 e^{\lambda_1(t-kT)} + \Delta^{-1}\Delta_2 e^{\lambda_2(t-kT)} + \alpha^{-1}u_k, \quad t \in [kT, (k+1)T). \qquad (5)$$

Из формулы (5) находим, во-первых, значение скорости $\dot{x}((k+1)T)$ и, во-вторых, значение управления u_k. Вычислим $v_{k+1} = \dot{x}_k((k+1)T)$. Вследствие представления (5) имеем: $\dot{x}_k((k+1)T) = \Delta^{-1}\Delta_1\lambda_1 e^{\lambda_1 T} + \Delta^{-1}\Delta_2\lambda_2 e^{\lambda_2 T}$. Подставляя в это равенство выражения для Δ_1, Δ_2 и Δ, получаем:

$$v_{k+1} = \frac{\delta\lambda_1\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)} - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 T}(e^{\lambda_2 T} - 1) - \lambda_2 e^{\lambda_2 T}(e^{\lambda_1 T} - 1)}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)} \cdot v_k. \quad (6)$$

Поэтому если обозначить не зависящие от k величины:

$$a = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 T}(e^{\lambda_2 T} - 1) - \lambda_2 e^{\lambda_2 T}(e^{\lambda_1 T} - 1)}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)} \text{ и } b = \frac{\delta\lambda_1\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)},$$

то согласно (6) $v_{k+1} = av_k + b$, $k \in Z_+$. Заметим, что $a \neq 1$, поскольку в противном случае имели бы $\lambda_1 = \lambda_2$, а это не так в рассматриваемом случае. Поэтому из предыдущей рекуррентной формулы для v_{k+1} легко находим, что $v_{k+1} = a^{k+1}v_0 + b(a^k + a^{k-1} + \ldots + 1) = a^{k+1}v_0 + b(a-1)^{-1}(a^{k+1} - 1)$, а так как в силу постановки задачи $v_0 = 0$, то $v_{k+1} = \dot{x}((k+1)T) = b(a-1)^{-1}(a^{k+1} - 1)$.

Вычислим теперь значение u_k управления. Из формулы (5) находим: $k\delta = x_k(kT) = \Delta^{-1}\Delta_1 + \Delta^{-1}\Delta_2 + \alpha^{-1}u_k$, откуда следует $u_k = \alpha\cdot(k\delta - \Delta^{-1}(\Delta_1 + \Delta_2))$, или, подставляя в это равенство выражения для Δ_1, Δ_2 и Δ, получаем:

$$u_k = \alpha\delta k - \frac{\alpha\delta(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)} - \frac{\alpha(e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)} \cdot v_k . \quad (7)$$

Поэтому если обозначить не зависящие от k величины:

$$c = -\frac{\alpha\delta(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)} \quad \text{и} \quad d = -\frac{\alpha(e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T})}{\lambda_2(e^{\lambda_1 T} - 1) - \lambda_1(e^{\lambda_2 T} - 1)},$$

то $u_k = \alpha\delta k + c + dv_k$, и поэтому вследствие найденного выше выражения для v_k находим $u_k = \alpha\delta k + c + db(a-1)^{-1}(a^k - 1)$, т.е. u_k – сумма линейной $\alpha\delta k + c - db(a-1)^{-1}$ и показательной $db(a-1)^{-1}a^k$ функций, $k \in Z_+$.

Теорема в случае вещественных различных корней характеристического уравнения доказана. Случай вещественных совпадающих корней рассматривается точно так же. Случай же комплексно-сопряженных корней сводится к рассмотренному случаю вещественных различных корней с помощью следующего рассуждения. В случае комплексно-сопряженных корней общее комплекснозначное решение $x_k(\cdot)$ имеет тот же вид (3) с тем лишь отличием, что корни $\lambda_{1,2}$ – комплексные. Поэтому если $r_k(t) + iw_k(t) = x_k(t)$ – разложение на комплексную и мнимую части решения задачи Коши: $x_k(kT) = k\delta$, $\dot{x}_k(kT) = v_k$, – то поскольку $k\delta$, v_k и $\alpha^{-1}u_k$ – вещественные, мнимая часть $w_k(\cdot)$ является решением однородного уравнения $\ddot{w} + \beta\dot{w} + \alpha w = 0$ с нулевыми начальными условиями: $w(kT) = \dot{w}(kT) = 0$. Поэтому в силу единственности решения такой задачи $w(t) \equiv 0$ при $t \in [kT, (k+1)T)$. Следовательно, все вычисления, проведенные в случае вещественных различных корней, не только справедливы в случае комплексно-сопряженных корней, но и формула (5) дает вещественнозначное решение начально-краевой задачи (2_k) (хотя коэффициенты при экспонентах и сами экспоненты мнимые). В частности, формулы (6) и (7) дают значения скорости v_{k+1} и управления u_k (и они, вычисленные по этим формулам, будут вещественными). Нужно лишь найти, при каких μ и ω справедливо неравенство $\Delta \neq 0$, и переписать эти формулы в явном (через μ и ω) виде. Теорема доказана.

Используя доказанную теорему, легко получить решение полной задачи. Так как $\dot{x}(kT) = b(a-1)^{-1}(a^k - 1)$, $k \in Z_+$, то малость скорости $|\dot{x}(kT)|$ можно обеспечить лишь в случае, если $|a| < 1$, а $|b|$ достаточно (в нужном смысле) мал. На практике временно́й интервал движения $x(\cdot)$ всегда ограничен некоторым моментом времени $t = mT$, $m \in \mathrm{N}$; при этом необходимо, чтобы скорость $\dot{x}(mT)$ в этот момент была нулевой. Из формулы для скорости следует, что это возможно только, если $b = 0$ (и тогда в каждый момент времени kT, $k \le m$, то скорость будет нулевой). В свою очередь, из формул для b вытекает, что равенство $b = 0$ возможно только в случае комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения и равносильно условию: $\omega = \pi l T^{-1}$, где $l \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$, а μ – любое, если $l \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, и μ – любое ненулевое, если $l \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$. Отметим также, что только в случае $b = 0$ функция управления имеет постоянный шаг и по оси u.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Луценко, В.Е.*** Электропривод и автоматизация промышленных установок / В.Е. Луценко, В.П. Рубцов // Итоги науки и техники: Электропривод с шаговым двигателем. – М.: ВИНИТИ, 1978. – 6 т.
2. ***Аналитическая механика и мехатронные системы перемещений*** / С.Е. Карпович [и др.]. – Мн.: Технопринт, 2004. – 187 с.
3. ***Следящие приводы:*** в 3 т. / под ред. Б.К. Чемоданова. – М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 1999. – Т. 1: Теория и проектирование следящих приводов / Е.С. Блейз [и др.]. – 1999. – 904 с.

S U M M A R Y

The solution to the problem, appearing with synchronous stepper motor simulation, is described in the article.

Поступила в редакцию 07.02.2007

УДК 512.542

В.Н. Семенчук

Об одной проблеме в теории формаций конечных групп

В теории конечных групп понятие субнормальной подгруппы играет большую роль. Построенная Виландтом теория субнормальных подгрупп оказала огромное влияние на развитие всей теории конечных групп.

В теории формации обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа K группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь*

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n = K$$

такая, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

В монографии Л.А. Шеметкова [1] была поставлена задача о построении теории $\mathfrak{F}$-субнормальных подгупп аналогичной теории субнормальных подгрупп.

Им, в частности, в Коуровской тетради [2] была поставлена следующая проблема.

Проблема (Шеметков Л.А. [2]) классифицировать наследственные сверхрадикальные формации.

Напомним определение сверхрадикальной формации.