Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 10-ти частях

Часть 10

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений
по техническим специальностям*

Минск БГУИР 2010

УДК 517(075.8)

ББК 22.1.я73

С23

А в т о р ы :

А. А. Карпук, В. В. Цегельник, Д. Н. Олешкевич,

Н. В. Спичекова, З. Н. Примичева

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра математического анализа Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка;

профессор кафедры высшей математики №1 Белорусского национального технического университета,

доктор физико-математических наук, профессор А. П. Рябушко

Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие. В 10 ч. Ч. 10 :

С23 Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2010. – 146 с.: ил.

ISBN 978-985-488-437-0 (ч. 10)

В части 10 сборника приводятся задачи по важнейшим разделам курса высшей математики – «Функции комплексной переменной» и «Операционное исчисление».

УДК 517(075.8)

ББК 22.1.я73

Ч. 1: Аналитическая геометрия / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк. – Минск : БГУИР, 2002; 2-е изд. – 2003, 3-е изд. – 2004.

Ч. 2: Линейная алгебра (с решениями и комментариями) / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк, В. В. Цегельник. – Минск : БГУИР, 2004.

Ч. 3: Введение в анализ / Н. Н. Третьякова, Т. М. Пушкарева, О. Н. Малышева. – Минск : БГУИР, 2005.

Ч. 4: Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук, В. В. Цегельник, Р. М. Жевняк, И. В. Назарова. – Минск : БГУИР, 2006.

Ч. 5: Функции многих переменных / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2004. – 64 с.

Ч. 6: Интегральное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2006.

Ч. 7: Интегральное исчисление функций многих переменных / А. А. Карпук, В. В. Цегельник, Е. А. Баркова. – Минск : БГУИР, 2007.

Ч. 8: Ряды. Фурье-анализ / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2007.

Ч. 9: Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / А. А. Карпук, В. В. Цегельник, В. А. Ранцевич. – Минск : БГУИР, 2008.

ISBN 978-985-488-437-0 (ч. 10)
ISBN 985-444-727-8
ISBN 978-985-444-727-8

Введение

Данное учебное пособие, представляющее собой 10-ю, заключительную, часть «Сборника задач по высшей математике», посвящено функциям комплексной переменной и операционному исчислению, которые изучаются в общем курсе высшей математики во втузах.

Как и в предыдущих частях, в издании приводятся теоретические сведения (определения, теоремы, формулы и т.д.), используемые при решении соответствующих задач. В качестве образцов приведены задачи для аудиторных и домашних самостоятельных занятий и решения наиболее характерных из них. Все задачи снабжены ответами. Наиболее трудные задачи отмечены знаком *. Начало решения задачи отмечено знаком Δ, конец – знаком ▲, указание к решению – знаком ●.

Пособие полностью соответствует программе курса высшей математики по теории функций комплексной переменной и операционному исчислению и будет полезным не только для студентов, но и для преподавателей, ведущих практические занятия по этим разделам в студенческих группах.

Авторы выражают сердечную благодарность доктору физико-математических наук, профессору Л. А. Черкасу, а также рецензентам – доктору физико-математических наук, профессору А. П. Рябушко и кандидату физико-математических наук, профессору Н. Т. Стельмашуку за внимательное прочтение рукописи и сделанные конструктивные замечания, способствовавшие улучшению содержания 10-й части сборника.

1. Функции комплексной переменной

1.1. Комплексные числа

Определение комплексного числа (к. ч.). Алгебраическая форма к. ч. Равенство к. ч. Действия над к. ч. в алгебраической форме. Геометрическая интерпретация к. ч. Модуль и аргумент к. ч. Тригонометрическая форма к. ч. Формула Муавра. Формулы Эйлера. Показательная форма к. ч. Действия над к. ч. в показательной форме. Некоторые свойства комплексно-сопряженных выражений. Извлечение корня из к. ч.

Комплексным числом (к. ч.) z называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1.1}$$

где x, y – действительные числа, i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i = \sqrt{-1}$.

Числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой* частями к. ч. z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Запись (1.1) называется *алгебраической формой* к. ч. z.

К. ч. $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к. ч. $z = x + iy$.

К. ч. $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, т.е. $(z_1 = z_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2,\ y_1 = y_2)$.

Суммой к. ч. $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется к. ч. вида

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Произведением этих к. ч. называется к. ч.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1.2}$$

Заметим, что произведение (1.2) к. ч. $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ получается, если эти числа перемножить обычным способом как двучлены с учетом $i^2 = -1$.

Отметим также, что применяется и второе обозначение произведения двух комплексных чисел z_1 и z_2: $z_1 z_2$.

Действительное число x есть частный случай к. ч. $z = x + iy$ при $y = 0$.

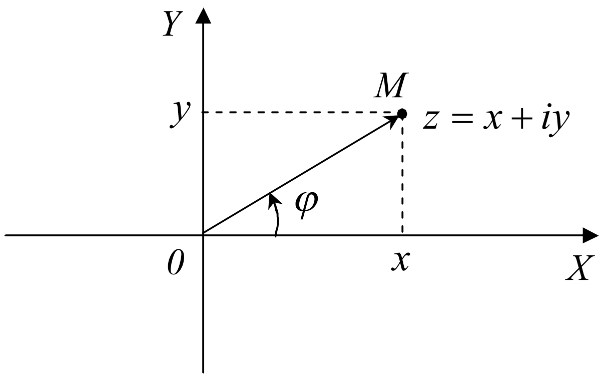


Рис. 1.1

К. ч. $z = 0$, если одновременно $x = y = 0$. Числа вида $0 + bi = bi$ называются *чисто мнимыми* к. ч.

К. ч. $z = x + iy$ изображается на плоскости XY точкой $M = (x, y)$ либо вектором с началом в точке 0, а концом – в точке M (рис. 1.1).

Длина $r = |\overrightarrow{OM}|$ называется *модулем* к. ч. z и обозначается $|z|$, т. е. $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Заметим, что согласно (1.2),

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \qquad (1.3)$$

Угол $\varphi = \angle(X, \overrightarrow{OM})$ называется *аргументом* к. ч. z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Так как каждой точке плоскости соответствует бесконечное множество значений полярного угла, отличающихся друг от друга на $2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{Arg} z$ – бесконечнозначная функция z . То из значений полярного угла φ , которое удовлетворяет неравенству $-\pi < \varphi \le \pi$ или $0 \le \varphi < 2\pi$, называют *главным значением аргумента* и обозначают $\arg z$. Далее обозначение φ сохраним только для главного значения аргумента z , т.е. положим $\varphi = \arg z$, а тогда для остальных значений аргумента z получим равенство

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi + 2k\pi, \, k \in \boldsymbol{Z} .$$

Заметим, что для определения $\arg z$, согласно рис. 1.1, справедливы равенства

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (1.4)$$

При этом имеют место формулы: 1) $\arg z = \operatorname{arctg}(y/x), x > 0$; 2) $\arg z = \pi + \operatorname{arctg}(y/x), x < 0, y > 0$; 3) $\arg z = -\pi + \operatorname{arctg}(y/x), x < 0, y < 0$.

Для числа $z = 0$ аргумент $\arg 0$ не определен. Нужно отметить, что $\arg z$, $z \ne 0$, определен однозначно.

Частным z_1 / z_2 от деления к. ч. z_1 на к. ч. z_2 , $z_2 \ne 0$, называется к. ч. z , удовлетворяющее условию $z \cdot z_2 = z_1$. Частное z_1 / z_2 определяется равенством

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (1.5)$$

1.1. Выполнить действия $z_2 - z_1$ и z_1 / z_2 , где $z_1 = 10 - i,\quad z_2 = -5 + 2i.$

Δ $z_2 - z_1 = (-5 + 2i) - (10 - i) = (-5 - 10) + i(2 + 1) = -15 + 3i;$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10 - i}{-5 + 2i} = \frac{(10 - i)(-5 - 2i)}{(-5 + 2i)(-5 - 2i)} = \frac{-52 - 15i}{(-5)^2 + 2^2} = \frac{-52 - 15i}{29} = -\frac{52}{29} - \frac{15}{29}i. \ \blacktriangle$$

1.2. Доказать тождество $z_1 \operatorname{Im}(\bar{z}_2 z_3) + z_2 \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_3) + z_3 \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) = 0.$

Δ Пусть $z_1 = x_1 + iy_1,\quad z_2 = x_2 + iy_2,\quad z_3 = x_3 + iy_3$. Тогда

$$\operatorname{Im}(\bar{z}_2\, z_3) = \operatorname{Im}[(x_2 x_3 + y_2 y_3) + i(x_2 y_3 - x_3 y_2)] = x_2 y_3 - x_3 y_2.$$

Аналогично находим $\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_3) = x_3 y_1 - x_1 y_3$, $\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

Тогда

$$z_1 \operatorname{Im}(\bar{z}_2 z_3) = (x_1 + iy_1)(x_2 y_3 - x_3 y_2) = (x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2) + i(x_2 y_1 y_3 - x_3 y_1 y_2).$$

Точно так же получим

$$z_2 \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_3) = (x_2x_3y_1 - x_1x_2y_3) + i(x_3y_1y_2 - x_1y_2y_3),$$
$$z_3 \operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2) = (x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1) + i(x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3).$$

Отсюда уже легко получается доказываемое тождество. ▲

1.3. Решить уравнение $z^2 + |z| = 0$.

Δ Пусть $z = x + iy$. Тогда $z^2 + |z| = (x+iy)^2 + \sqrt{x^2+y^2}$ и, значит,

$$(x+iy)^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} + 2xyi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0, \\ xy = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Отсюда или $x = 0$, или $y = 0$. При $x = 0$ из (1.6) имеем $-y^2 + |y| = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |y|^2 - |y| = 0 \Rightarrow |y| = 0$ или $|y| = 1$. При $y = 0$ из (1.6) получаем $x^2 + |x| = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| = 0 \Rightarrow |x| = 0$. Следовательно, числа $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm i$ – решения данного уравнения. ▲

1.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}, \\ \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Δ Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right|^2 = \dfrac{|z-12|^2}{|z-8i|^2} = \dfrac{x^2+y^2+144-24x}{x^2+y^2+64-16y} = \dfrac{25}{9}, \\ \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = \dfrac{|z-4|^2}{|z-8|^2} = \dfrac{x^2+y^2+16-8x}{x^2+y^2+64-16x} = 1. \end{cases}$$

После преобразований данная система принимает вид

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 27x - 50y + 38 = 0, \\ x = 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 17, \end{cases} \cup \begin{cases} x = 6, \\ y = 8. \end{cases}$$

Итак, решением исходной системы (1.7) являются к. ч. $z_1 = 6 + 17i$ и $z_2 = 6 + 8i$. ▲

1.5. Выполнить действия:

а) $\dfrac{1-i}{1+i} + \dfrac{1+i}{1-i}$; б) $\dfrac{(1+i)(2+i)}{2-i} - \dfrac{(1-i)(2-i)}{2+i}$; в) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$;

г) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$; д) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

Отв.: а) 0; б) $14i/5$; в) i; г) $-2+3i/2$; д) 2.

1.6. Представить к. ч. в алгебраической форме:

а) $\dfrac{-41+63i}{50}-\dfrac{6i+1}{1-7i}$; б) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2i}\right)^2$; в) $\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(2i+1)^2}{i+2}$; г) $(2+i)^6$.

Отв.: а) i; б) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $-\dfrac{18}{25}+\dfrac{23}{50}i$; г) $-117+44i$.

1.7. Найти модуль к. ч. $z=\dfrac{x^2-y^2+2xyi}{xy\sqrt{2}+i\sqrt{x^4+y^4}}$. **Отв.:** 1.

1.8. Решить уравнения:

а) $|z|-z=1+2i$; б) $z+|z+1|+i=0$;

в) $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$; г) $z^2+(3+2i)z-7+17i=0$.

Отв.: а) $3/2-2i$; б) $-1-i$; в) $-1-i$; г) $2-3i$; $-5+i$.

1.9*. Для каждого $a\in\boldsymbol{R}$ найти все к. ч. z, удовлетворяющие равенству:

а) $|z|^2+2iz+2a(1+i)=0$; б) $z|z|-az-i=0$.

Отв.: а) при $-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$ имеются два корня $z_1=-a+i(1+\sqrt{1-2a-a^2})$, $z_2=-a+i(1-\sqrt{1-2a-a^2})$, при $|a+1|>\sqrt{2}$ решений нет; б) при $a<2$ корень $z_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}i$, при $a\ge 2$ корни

$$z_1=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}i,\ z_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}i,\ z_3=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}i.$$

1.10. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases}|z-2i|=|z|,\\ |z-i|=|z-1|;\end{cases}$ б) $\begin{cases}|z^2-2i|=4,\\ \left|\dfrac{z+1+i}{z-1-i}\right|=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}z_1+2z_2=1+i,\\ 3z_1+iz_2=2-3i;\end{cases}$

г) $\begin{cases}|z+1-i|=\sqrt{2},\\ |z|=3.\end{cases}$

Отв.: а) $1+i$; б) $\pm(1-i)$; в) $z_1=1-i$; $z_2=i$; г) нет решений.

1.11. При каких действительных значениях x и y к. ч. $z_1=9y^2-4-10xi^5$ и $z_2=8y^2+20i^{11}$ являются сопряженными? **Отв.:** (–2,–2); (–2;2).

1.12*. Доказать равносильность неравенств $\log_2\dfrac{3|z-1|-2}{|z-1|+4}>1$ и $|z-1|>10$.

1.13. Доказать, что если $|z|\le 1$, то $\left|\dfrac{2z-i}{2+iz}\right|\le 1$.

1.14. Решить уравнение $z = \left(2 - \frac{z+1}{z-7}\right)^2$, если известно, что число $3+4i$ является его корнем.

Отв.: $z_1 = 9,\ z_2 = 3+4i,\ z_3 = 3-4i$.

1.15. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z+1-i| = |z-1+i|$; б) $|z-2| + |z+2| = 5$.

Δ а) так как $z = x+iy$, то

$$|z+1-i| = |x+iy+1-i| = |x+1+i(y-1)| = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2};$$

$$|z-1+i| = |x+iy-1+i| = |x-1+i(y+1)| = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}.$$

Следовательно, данное равенство равносильно уравнению $\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow y = x$ – биссектриса 1-го и 3-го квадрантов.

● Геометрически $|z - z_0|$ равен расстоянию от точки z до точки z_0;

б) данное равенство выражает тот факт, что сумма расстояний от точки z до двух данных точек $z_1 = 2$ и $z_2 = -2$ есть величина постоянная, равная 5. По определению это эллипс с фокусами в точках $z_1 = 2$ и $z_2 = -2$ и большой осью $2a = 5$. ▲

1.16. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z-2| - |z+2| > 3$; б) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$; в) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$;

г) $\operatorname{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0,\ \operatorname{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$; д) $|2z| > |1+z^2|$; е) $\operatorname{Re}(1/z) = c,\ |c| < \infty$;

ж) $\operatorname{Im}(z^2) = c,\ 0 < |c| < \infty$; з) $|z| - 3\operatorname{Im} z = 6$; и) $|z-2| = |1-2\bar{z}|$;

к) $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$.

Отв.: а) внутренность левой ветви гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 2$ и действительной полуосью $3/2$; б) парабола $y^2 = 2x+1$; в) полуплоскость, ограниченная прямой $x+y=1$ и содержащая начало координат; г) прямая, проходящая через точки z_1 и z_2, $z \neq z_2$; окружность, диаметром которой служит отрезок, соединяющий точки z_1 и z_2, $z \neq z_2$; д) внутренность окружностей $|z-i| = \sqrt{2}$ и $|z+i| = \sqrt{2}$, не включая границу, за исключением их общей части; е) семейство окружностей $c(x^2+y^2) = x$, касающихся в начале координат мнимой оси, и сама мнимая ось; ж) гиперболы $xy = c/2$; з) гипербола $\frac{(y+9/4)^2}{(3/4)^2} - \frac{x^2}{(3\sqrt{2}/2)^2} = 1$; и) окружность $x^2+y^2 = 1$; к) парабола $y^2 = 2x+1$.

В дальнейшем, если не оговорено особо, под аргументом к. ч. z будем понимать его главное значение.

1.17. Найти аргумент к. ч.:

а) $5i$; б) $-1-i$; в) $-2-5i$.

Δ а) По определению аргумента φ к. ч. имеем $\cos\varphi = \frac{0}{|5i|} = \frac{0}{5} = 0,$

$\sin\varphi = \frac{5}{|5i|} = 1 \Rightarrow \varphi = \pi/2$ (рис. 1.2).

б) Здесь $x=-1,\ y=-1,\ |-1-i| = \sqrt{2},\ \cos\varphi = -1/\sqrt{2},\ \sin\varphi = -1/\sqrt{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi = -3\pi/4$ (рис. 1.3). В качестве φ можно взять и угол $5\pi/4$.

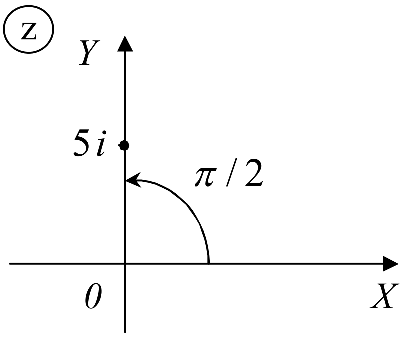


Рис. 1.2

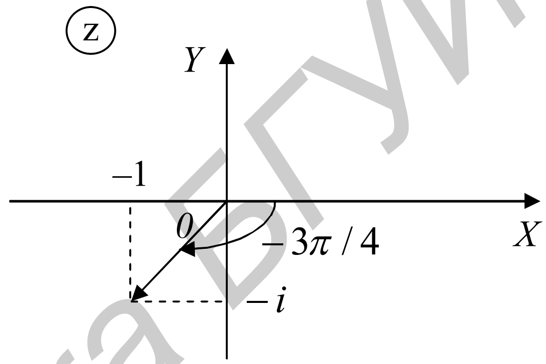


Рис. 1.3

в) $\cos\varphi = \frac{-2}{\sqrt{29}},\ \sin\varphi = \frac{-5}{\sqrt{29}} \Rightarrow \varphi = -\pi + \operatorname{arctg}(5/2)$. ▲

1.18. Найти аргумент к. ч.:

а) -3; б) $1+i$; в) $-2+5i$; г) $bi,\ b\neq 0,\ b\in \boldsymbol{R}$.

Отв.: а) π; б) $\pi/4$; в) $\pi - \operatorname{arctg}(5/2)$; г) $\pi/2$, если $b>0$, $-\pi/2$, если $b<0$.

1.19. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям:

а) $2 < |z-i| \leq 3,\ -\pi/4 \leq \arg z < \pi/6$; б) $-\pi/4 \leq \arg(z+1-i) < \pi/2$.

Δ а) на комплексной плоскости неравенству $2<|z-i|\leq 3$ удовлетворяют точки, лежащие внутри кольца с центром в точке i с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3. При этом точки внутренней окружности $|z-i|=2$ в искомую область D не входят, а точки внешней окружности $|z-i|=3$ в искомую область D включаются.

Неравенству $-\pi/4 \leq \arg z < \pi/6$ удовлетворяют точки, лежащие в угле $-\pi/4 \leq \varphi < \pi/6$, причем точки луча $\varphi = -\pi/4$ в область D входят, а луча $\varphi = \pi/6$ – не входят.

С учетом вышеизложенного искомая область D имеет вид, изображенный на рис. 1.4 (точки A, B, C из области D исключаются).

б) к. ч. $z+1-i=z-(-1+i)$ изображается вектором с началом в точке $(-1+i)$, а концом – в точке z. Угол между этим вектором и осью X есть $\arg(z+1-i)$, и он изменяется в пределах от $-\pi/4$ до $\pi/2$. Значит, данное неравенство определяет угол между лучами, выходящими из точки $-1+i$, образующими с осью X углы $\varphi=-\pi/4$ и $\varphi=\pi/2$ (точки луча $\varphi=-\pi/4$ в область D входят, а луча $\varphi=\pi/2$ – не входят, точка $(-1+i)$ исключается (рис. 1.5)). ▲

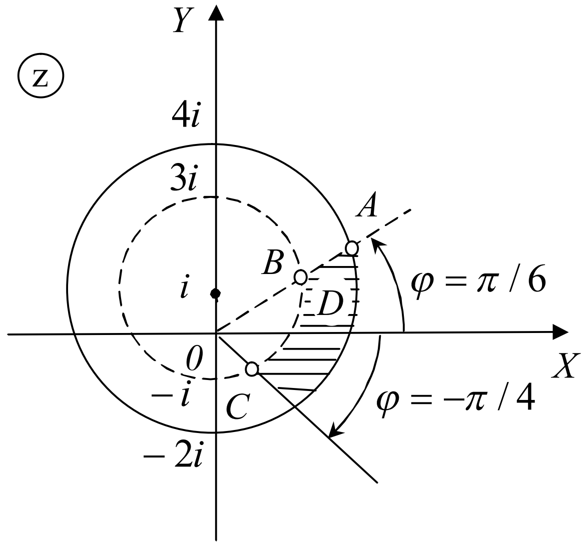


Рис. 1.4

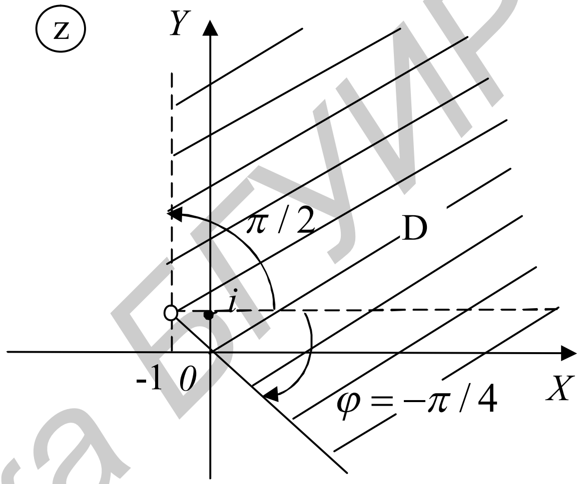


Рис. 1.5

1.20. Где расположены точки z, для которых выполняются соотношения:
а) $\arg(z-2i)=\pi/6$; б) $\pi/6<\arg(z+2i)\le\pi/2$;

в) $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\arg z<\beta<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\gamma\le\operatorname{Re}z\le\delta$; г*) $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$;

д) $\arg\dfrac{z-1}{z+1}=\pi/4$; е) $1\le\operatorname{Im}z<3,\ -\pi/8<\arg z\le 3\pi/4$?

Отв.: а) на луче, исходящем из точки $z=2i$ под углом $\pi/6$ к оси X (точка $z=2i$ исключается); б) внутри угла между лучами, выходящими из точки $(-2i)$ и образующими с положительным направлением оси X углы $\pi/6$ и $(\pi/2)$ соответственно, причем точка $(-2i)$ и точки луча $\varphi=\pi/6$ исключаются; в) на трапеции; г)* $\begin{cases}x<0,\\ x^2+y^2+2x>1,\end{cases}\bigcup\begin{cases}x>0,\\ x^2+y^2+2x<1;\end{cases}$ д) $x^2+(y-1)^2=2$ – на окружности; е) на трапеции, ограниченной прямыми $y=1$, $y=3$ и лучами $\varphi=\pi/8$, $\varphi=3\pi/4$, причем точки прямой $y=3$ и луча $\varphi=\pi/8$ исключаются.

1.21. Среди к. ч. z, удовлетворяющих условию а) $|z+1-i|\le 1$; б) $|z-5i|\le 3$, найти число, имеющее наименьший положительный аргумент.

Отв.: а) $z=i$; б) $z=(12+16i)/5$.

Любое к. ч. $z = x + iy,\ z \neq 0,$ можно представить в *тригонометрической форме*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.8}$$

где $r = |z|,\ \varphi = \arg z.$

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$ то

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),\\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Таким образом, *модуль произведения двух к. ч. равен произведению модулей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей; модуль частного двух к. ч. равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент – разности их аргументов.*

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $\forall\, n \in \boldsymbol{Z}$,

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{1.10}$$

т.е. *модуль целой степени к. ч. равен степени модуля с тем же показателем, а аргумент – произведению показателя степени на аргумент числа.*

Из соотношения (1.10) при $r = 1$ получаем **формулу Муавра**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,\ \ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.11}$$

Используя **формулу Эйлера**

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi, \tag{1.12}$$

комплексное число (1.8) можно записать в *показательной (экспоненциальной)* форме $z = re^{i\varphi}$.

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2},$ то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ \ z^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{1.13}$$

Соотношения (1.13) определяют операции над к. ч., записанными в показательной форме.

1.22. Представить в тригонометрической и показательной формах к. ч.:

а) $z = -1 + i\sqrt{3}$; б) $z = \sin(6\pi/5) + i(1 + \cos(6\pi/5))$;

в) $z = (\sqrt{3} - i)^{100}$; г) $z = \dfrac{(1+i)^{13}}{(1-i)^7}$.

Δ а) имеем $|-1 + i\sqrt{3}| = 2;\ \ \cos\varphi = -1/2,\ \sin\varphi = \sqrt{3}/2 \Rightarrow \varphi = 2\pi/3.$ Следовательно, $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi/3)}$;

б) проведем следующие преобразования:

$$z = 2\sin\frac{3}{5}\pi \cdot \cos\frac{3}{5}\pi + i2\cos^2\frac{3}{5}\pi =$$

$$=2\cos\frac{3}{5}\pi(\sin\frac{3}{5}\pi+i\cos\frac{3}{5}\pi)=2\cos\frac{3}{5}\pi(\cos(\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{2})-i\sin(\frac{3\pi}{5}-\frac{\pi}{2}))=$$

$$=2\cos\frac{3}{5}\pi(\cos(-\frac{\pi}{10})+i\sin(-\frac{\pi}{10})).$$

Это искомая тригонометрическая форма. Из нее следует, что $|z|=2\cos\frac{3}{5}\pi>0$, $\arg z=-\frac{\pi}{10}\Rightarrow z=2\cos\frac{3}{5}\pi e^{-i\pi/10}$ – показательная форма к. ч z.

в) $|\sqrt{3}-i|=2;\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\varphi=-\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{3}-i=2(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))=2e^{-i\pi/6}.$

По формуле (1.11) получаем

$$(\sqrt{3}-i)^{100}=2^{100}(\cos(-\frac{100}{6}\pi)+i\sin(-\frac{100}{6}\pi))=$$

$$=2^{100}(\cos(-\frac{2}{3}\pi)+i\sin(-\frac{2}{3}\pi))=2^{100}e^{-i2\pi/3}.$$

Так как

$$\cos(-\frac{2}{3}\pi)=-\frac{1}{2},\ \sin(-\frac{2}{3}\pi)=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

то $z=-2^{100}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=-2^{99}(1+i\sqrt{3})$ – алгебраическая форма к. ч. z.

г) Так как $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),\quad 1-i=\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$

и

$(1+i)^{13}=(\sqrt{2})^{13}(\cos\frac{13\pi}{4}+i\sin\frac{13\pi}{4}),\quad (1-i)^7=(\sqrt{2})^7(\cos(-\frac{7\pi}{4})+i\sin(-\frac{7\pi}{4})),$

то, согласно (1.10), получим

$$z=\frac{(\sqrt{2})^{13}}{(\sqrt{2})^7}\frac{\cos\frac{13\pi}{4}+i\sin\frac{13\pi}{4}}{\cos(-\frac{7\pi}{4})+i\sin(-\frac{7\pi}{4})}=8(\cos(\frac{13}{4}+\frac{7}{4})\pi+$$

$$+i\sin(\frac{13}{4}+\frac{7}{4})\pi)=8(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=8(\cos\pi+i\sin\pi)=8e^{i\pi}.$$

Это искомая тригонометрическая и показательная формы к. ч. z. Заметим, что $z=-8$. ▲

1.23. Что произойдет с вектором, изображающим к. ч. z, если: а) умножить z на к. ч. $1+\sqrt{3}i$; б) разделить z на к. ч. $(1+i)/\sqrt{2}$?

Отв.: а) повернется против часовой стрелки на угол 60° и увеличится по длине в 2 раза; б) повернется на угол 45° по часовой стрелке, при этом длина вектора не изменится.

1.24*. Доказать, что если точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой, то число $\dfrac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ является действительным.

1.25*. Доказать, что если точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности, то число $\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ является действительным.

1.26. Представить в тригонометрической форме к. ч.:

а) $i, \dfrac{1}{2}, \sqrt{3}, -2, -5i$; б) $-4+4i, \ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i$; в) $(1+2i)(1-i)$; г) $\dfrac{1}{i-1}, \ \dfrac{1-i}{3+i}$;

д) $\cos\dfrac{\pi}{10}+i\sin\dfrac{\pi}{10}$; е) $\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}$; ж) $1+\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$; з) $2+i\sin\dfrac{\pi}{6}$.

Отв.:

а) $\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{1}{2}(\cos 0+i\sin 0), \sqrt{3}(\cos 0+i\sin 0), 2(\cos\pi+i\sin\pi)$,

$5(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2})$; б) $4\sqrt{2}(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}), \dfrac{\sqrt{2}}{3}(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4})$;

в) $\sqrt{10}\left[\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)+i\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)\right]$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4})$,

$\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right]$; д) $\cos\dfrac{\pi}{10}+i\sin\dfrac{\pi}{10}$;

е) $\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}$; ж) $\sqrt{2+\sqrt{2}}\left[\cos\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)+i\sin\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)\right]$;

з) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}\left[\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)+i\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)\right]$.

1.27. Представить к. ч. в алгебраической форме:

а) $(2+i)^6, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right), (-1+i\sqrt{3})^{60}$;

б) $\dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{100}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right), \ (2-2i)^7, \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$.

Отв.: а) $-117+44i, \ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i, 2^{60}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i), 2^{10}(1+i), -2^{19}(1+i\sqrt{3})$.

1.28. Вычислить $z^{158}+z^{152}+\dfrac{2}{z^{122}}$, если $z+\dfrac{1}{z}=1$. **Отв.:** –2.

1.29. Пользуясь формулой Муавра, вычислить через степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ функции $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$.

Δ Выполним очевидные преобразования:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$

или

$$\cos^3\varphi + i\,3\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$

т.е. $(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi) + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi) = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$ Отсюда, согласно равенству комплексных выражений, получаем

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi(1-\cos^2\varphi),$$

т.е. $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$

Аналогично $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi(1-\sin^2\varphi) - \sin^3\varphi,$ т.е. $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$ ▲

1.30. Используя формулу Муавра, доказать, что:

а) $\sin 4\varphi = 8\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin\varphi$;

б) $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$;

в) $\sin 5\varphi = 5\sin\varphi\cos^4\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$;

г) $\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$;

д) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \dfrac{\sin\dfrac{n\varphi}{2}\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$;

е) $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \dfrac{\cos\dfrac{n\varphi}{2}\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$.

По определению *корнем n-й степени* из к. ч. z называется к. ч. w такое, что $w^n = z$, $n \in \boldsymbol{N}$. Корень n-й степени из к. ч. z имеет n различных значений, которые можно найти по формуле

$$\mathrm{w_k} = (\sqrt[n]{\mathrm{z}})_{\mathrm{k}} = \sqrt[n]{\mathrm{r}}\left(\cos\frac{\varphi + 2\mathrm{k}\pi}{\mathrm{n}} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2\mathrm{k}\pi}{\mathrm{n}}\right),\ \mathrm{k} = 0, 1, \ldots, \mathrm{n}-1, \tag{1.14}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

В показательной форме эта формула имеет вид $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi + 2k\pi)/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Из (1.14) следует, что $|w_k| = \sqrt[n]{r}$, $k = \overline{0, n-1}$, т.е. все n значений корня $\sqrt[n]{z}$ располагаются на окружности радиусом $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат, разделяя эту окружность на n равных частей, причем $\arg w_0 = \varphi / n$, а аргументы двух соседних значений $\sqrt[n]{z}$ отличаются один от другого на $2\pi / n$. Следовательно, все значения $\sqrt[n]{z}$ располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат (рис. 1.6, где $n = 6$).

1.31. Найти все значения $\sqrt[6]{-64}$.

Δ Так как $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$, то, применив формулу (1.14), получим $w_k = \sqrt[6]{64}(\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{6})$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Следовательно,

$$w_0 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i,$$

$$w_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i,$$

$$w_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i,$$

$$w_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3} - i,$$

$$w_4 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i,$$

$$w_5 = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3} - i. \ \blacktriangle$$

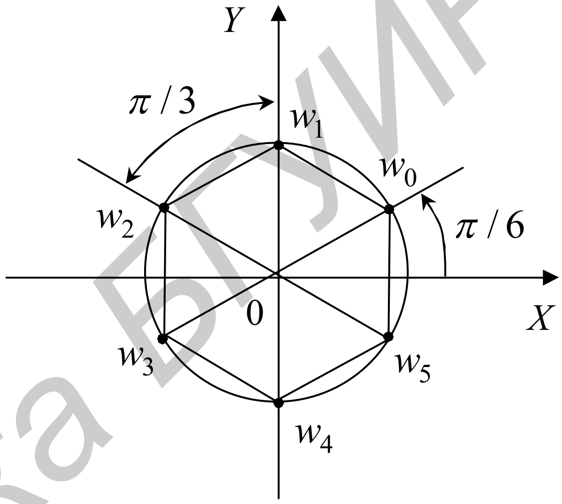


Рис. 1.6

1.32. Решить уравнение $z^3 + \dfrac{2\sqrt{2}}{1+i} = 0$.

Δ Из условия следует, что $z^3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$. Учитывая, что $\left|-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right| = 2$; $\cos\varphi = -\sqrt{2}/2, \sin\varphi = \sqrt{2}/2$, получим $\varphi = 3\pi/4$. Отсюда по формуле (1.14) имеем $z_k = \sqrt[3]{2}\,(\cos\dfrac{3\pi/4 + 2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{3\pi/4 + 2k\pi}{3})$, $k = 0, 1, 2$, следовательно, $z_0 = \sqrt[3]{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4})$, $z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12})$, $z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\sin\dfrac{19\pi}{12})$. ▲

1.33. Найти все значения $\sqrt[n]{z}$, если:

а) $z = 1, n = 3$; б) $z = -1, n = 4$; в) $z = -4 + \sqrt{48}i, n = 3$.

Отв.: а) $1, -1/2 + i\sqrt{3}/2, -1/2 - i\sqrt{3}/2$; б) $\sqrt{2}(1+i)/2, -\sqrt{2}(1-i)/2, -\sqrt{2}(1+i)/2, \sqrt{2}(1-i)/2$; в) $2(\cos\dfrac{2\pi}{9} + i\sin\dfrac{2\pi}{9}), 2(\cos\dfrac{8\pi}{9} + i\sin\dfrac{8\pi}{9}), 2(\cos\dfrac{14\pi}{9} + i\sin\dfrac{14\pi}{9})$.

1.34*. Пусть к.ч. $A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ определяют вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $R = 1$. Найти:

а) $A_0A_1^2 + A_0A_2^2 + ... + A_0A_{n-1}^2$; б) $A_0A_1 \cdot A_0A_2 \cdot ... \cdot A_0A_{n-1}$.

Отв.: а) -1; б) $(-1)^{n-1}$.

1.35. Решить уравнения:

а) $z^2 - 20z + 92 + 6i = 0$;

б) $z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$;

в) $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$;

г) $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$.

Отв.: а) $z_1 = 13 - i,\ z_2 = 7 + i$;

б) $z_k = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{6k+1}{15}\pi + i\sin\frac{6k+1}{15}\pi),\ k = \overline{0,4}$;

в) $z_1 = 1,\ z_2 = 3,\ z_{3,4} = \pm 2i$;

г) $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = -1 + i\sqrt{3},\ z_3 = -2,\ z_4 = -1 - i\sqrt{3},\ \ z_5 = 1 - i\sqrt{3}$.

1.36. Убедиться, что число $1+i$ является корнем уравнения $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$, и найти остальные корни.

Отв.: $z_2 = 1 - i,\ z_3 = (\sqrt{13} - 1)/6,\ z_4 = -(\sqrt{13} + 1)/6$.

1.37*. Найти общие корни уравнений $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ и $z^{1988} + z^{100} + 1 = 0$. **Отв.:** $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.38*. При делении многочлена $P_n(z)$ на $z - i$ в остатке получается i, а при делении на $z + i$ – $1 + i$. Найти остаток от деления $P_n(z)$ на $z^2 + 1$.

Отв.: $i\frac{z}{2} + \frac{1}{2} + i$.

1.2. Последовательности комплексных чисел. Кривые в комплексной плоскости

Определение последовательности к. ч. и ее предела. Свойства предела. Достаточное условие сходимости последовательности к. ч. Кривые в комплексной плоскости.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное положительное число, а z_0 – произвольное к. ч. Множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$| z - z_0 | < \varepsilon, \qquad (1.15)$$

является *открытым кругом* радиусом ε с центром в точке z_0 (рис. 1.7).

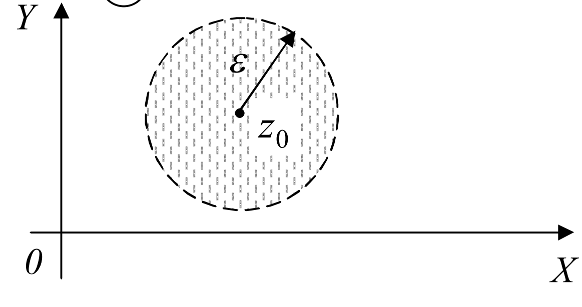


Рис. 1.7

Совокупность точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенству (1.15), называется ε*-окрестностью* точки z_0 и обозначается $U_\varepsilon(z_0)$. Исключив из этой окрестности точку z_0, получим так называемую *проколотую окрестность* $\dot{U}_\varepsilon(z_0)$ точки z_0.

Пусть дана последовательность к. ч. $(z_n)=(x_n)+i(y_n)$, где $(x_n),(y_n)$ – последовательности действительных чисел.

Число $A=a+ib$ называется *пределом последовательности* (z_n), $z_n=x_n+iy_n$, если $\forall\varepsilon>0,\ \exists N=N(\varepsilon),\ \forall n\ge N(\varepsilon):\ |z_n-A|<\varepsilon.$

Другими словами, число $A=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если для любого действительного числа $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что все члены последовательности (z_n) с номерами $n\ge N(\varepsilon)$ принадлежат ε-окрестности $U_\varepsilon(A)$ точки A.

1.39. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-i}{n+1}=1.$

Δ Зададимся произвольным $\varepsilon>0$ и покажем, что существует такой номер N, что $|z_n-1|<\varepsilon$, как только $n\ge N$. Так как

$$|z_n-1|=\left|\frac{n-i}{n+1}-1\right|=\left|\frac{1+i}{n+1}\right|=\frac{\sqrt{2}}{n+1},$$

то неравенство $|z_n-1|<\varepsilon$ будет выполнено, если $\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow n>\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}-1$, т.е. в качестве номера N можно взять $N=N(\varepsilon)=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}-1\right]+1$. Напомним, что $[x]$ – целая часть числа x. ▲

1.40. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$, если

а) $z_n=\dfrac{3n-2i}{2n+7i},\ A=\dfrac{3}{2}$;

б) $z_n=\dfrac{4n^2+1-i}{3n^2-i},\ A=\dfrac{4}{3}$;

в) $z_n=\dfrac{1-2n^2+i}{2-i+4n^2},\ A=-\dfrac{1}{2}$;

г) $z_n=\dfrac{4i-7+2n}{3i+1-3n},\ A=-\dfrac{2}{3}$.

Последовательность (z_n), имеющая предел, называется *сходящейся.*

Последовательность (z_n) к. ч. называется *сходящейся к бесконечности* (*к бесконечно удаленной точке,* обозначаемой $z=\infty$) и обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\infty$. Это означает, что для любого сколь угодно большого действительного числа $R>0$ существует номер N такой, что $\forall n\ge N:\ |z_n|>R$, т. е. все точки z_n с номерами $n\ge N$ расположены вне круга достаточно большого радиуса R с центром в точке 0 (рис. 1.8).

Комплексная плоскость $\boldsymbol{C}$, дополненная точкой $z=\infty$, называется *расширенной комплексной плоскостью* и обозначается $\overline{\boldsymbol{C}}$. *Окрестностью точки*

$z = \infty$ называется множество $\{z : |z| > R\}$, т.е. внешняя часть круга (на рис. 1.8 эта область заштрихована).

Выясним геометрический смысл расширенной комплексной плоскости. Пусть S – сфера радиусом 1, касающаяся комплексной плоскости в точке $z = 0$ (рис. 1.9), и P – точка сферы диаметрально противоположная точке 0.

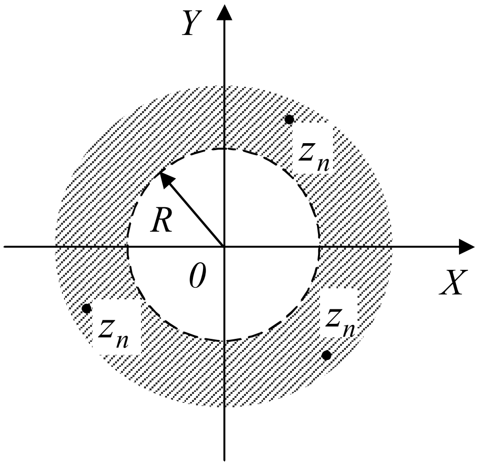


Рис. 1.8

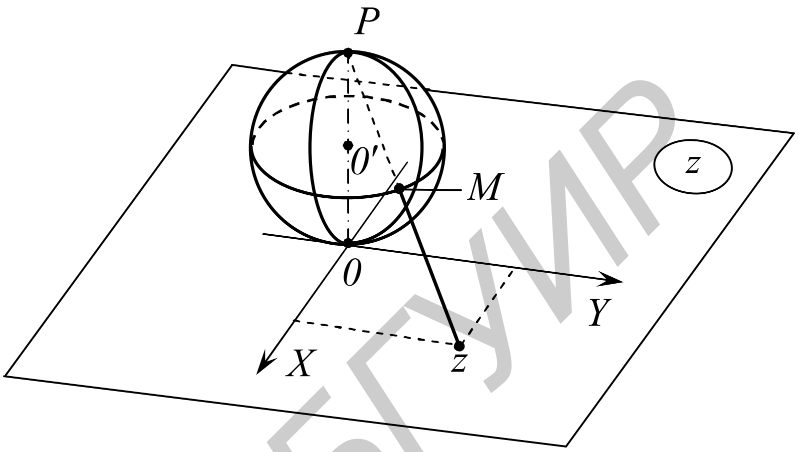


Рис. 1.9

Каждой точке $z \in \boldsymbol{C}$ взаимно однозначно поставим в соответствие точку $M \in S$, $M \neq P$, являющуюся точкой пересечения сферы S с отрезком Pz. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = P$, а следовательно, точке $z = \infty$ соответствует также одна единственная точка $P \in S$. Построенное соответствие называется стереографической проекцией, S – комплексной сферой (или сферой Римана).

Числовая последовательность (z_n) называется *расходящейся,* если она не имеет предела или $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Последовательность (z_n) называется *ограниченной*, если существует положительное число M такое, что для всех элементов z_n этой последовательности выполняется неравенство $|z_n| \leq M$.

Сходящиеся последовательности к. ч. обладают следующими *свойствами:*

1. Последовательность (z_n), $z_n = x_n + iy_n$ сходится к числу $A = a + ib$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

2. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = B$, $A, B \in \boldsymbol{C}$, то:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \pm \xi_n) = A \pm B$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n \xi_n) = AB$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{\xi_n} = \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0; \xi_n \neq 0, \forall n \geq n_0,\, n_0 \in \boldsymbol{N})$.

4. (*Достаточное условие сходимости последовательности к. ч.*).

Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, где $r_n = |z_n|, \varphi_n = \arg z_n$. *Тогда, если* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = r_0 e^{i\varphi_0}$.

1.41. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$, где $z = x+iy$.

Δ Обозначим

$$z_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|z_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2+y^2+2xn}{n^2}\right)^{n/2} = e^x.$$

Поскольку

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = \operatorname{arctg}\frac{y/n}{1+x/n} = \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x},$$

то $\varphi_n = \arg z_n = \arg\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = n\arg\left(1+\dfrac{z}{n}\right) = n\operatorname{arctg}\dfrac{y}{n+x}$, и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\dfrac{y}{n+x} = y.$ Отсюда в силу достаточного условия 4 сходимости последовательности к. ч. получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$. ▲

1.42. Доказать, что последовательность (z_n), $z_n = \arg\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ расходится.

Δ Поскольку $z_n = \arg\dfrac{(-1)^n}{n^2} = \begin{cases} 0, \text{ если } & n - \text{четно}, \\ \pi, \text{ если } & n - \text{нечетно}, \end{cases}$ то последовательность (z_n) принимает вид $\pi, 0, \pi, 0, \ldots$, и, значит, предела не имеет, следовательно, она расходится. ▲

1.43. Найти пределы последовательностей:

а) $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{e^{i\pi/n^2}}$; б) $z_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n + in\sin\dfrac{1}{n}$;

в) $z_n = (1-5i)^n$; г) $z_n = \dfrac{e^{in^2}}{n^2}$;

д) $z_n = \dfrac{2i-3n}{5n-7i}$; е) $z_n = e^{i\left(\pi - \frac{1}{2n^2}\right)}$;

ж) $z_n = n^2\sin\dfrac{i}{n^2}$; з) $z_n = n\cos\dfrac{n\pi}{2} + in\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

и) $z_n = \left(\dfrac{3n+i}{3n-i}\right)^{2n+3}$; к) $z_n = \dfrac{\operatorname{ch} in}{n}$; л) $z_n = \left(\dfrac{2n^2+3i}{2n^2-i}\right)^{3n^2-7}$.

Отв.: а) 1; б) $e+i$; в) ∞; г) 0; д) $-\dfrac{3}{5}$; е) -1; ж) i; з) ∞; и) $e^{4i/3}$; к) 0; л) e^{6i}.

Пусть $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T,$ – непрерывно дифференцируемые функции переменной t, $t \in \boldsymbol{R}$. Комплекснозначная функция

$$z(t) = x(t) + iy(t),\ x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0,\ t \in T, \tag{1.16}$$

на плоскости $\overline{\boldsymbol{C}}$ определяет некоторую гладкую кривую l. Уравнение (1.16) равносильно тому, что на плоскости XY кривая l задана параметрическими равенствами $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T$.

1.44. Известно, что $x = x_0 + R\cos t,\ y = y_0 + R\sin t,\ t \in [0; 2\pi],$ – параметрические уравнения окружности с центром в точке (x_0, y_0) радиусом R. Тогда

$$z(t) = x(t) + iy(t) = (x_0 + R\cos t) + i(y_0 + R\sin t) =$$

$$= (x_0 + iy_0) + R(\cos t + i\sin t) = z_0 + \mathrm{R}e^{it},$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$. И, значит, $z(t) = z_0 + \mathrm{R}e^{it},\ t \in [0, 2\pi],$ – уравнение данной окружности в комплексной форме. В частности, если $z_0 = 0$, то $z = \mathrm{R}e^{it},\ t \in [0, 2\pi],$ – уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат.

1.45. Определить вид кривой:

а) $z = 3e^{it} - \dfrac{1}{2e^{it}}$; б) $z = (t^2 + 4t + 20) - i(t^2 + 4t + 4)$.

Δ а) Имеем $z(t) = 3e^{it} - \dfrac{1}{2}e^{-it} = 3(\cos t + i\sin t) - \dfrac{1}{2}(\cos t - i\sin t) = \dfrac{5}{2}\cos t + i\dfrac{7}{2}\sin t$. Отсюда $x = \dfrac{5}{2}\cos t,\ y = \dfrac{7}{2}\sin t$ – параметрические уравнения эллипса $\dfrac{\mathrm{x}^2}{(5/2)^2} + \dfrac{\mathrm{y}^2}{(7/2)^2} = 1$;

б) имеем $x = x(t) = t^2 + 4t + 20,\ y = y(t) = -(t^2 + 4t + 4) \Rightarrow x + y = 16$ – прямая линия на плоскости XY. ▲

1.46. Определить вид кривой:

а) $z = 1 - it,\ t \in [0,2]$; б) $z = t + it^2,\ t \in \boldsymbol{R}$;

в) $z = t^2 + it^4,\ t \in \boldsymbol{R}$; г) $z = a(\cos t + i\sin t),\ \dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2},\ a > 0$;

д) $z = t + i/t,\ -\infty < t < 0$; е) $z = t + i\sqrt{1-t^2},\ |t| \le 1$;

ж) $z=-t+i\sqrt{1-t^2}$, $-1\le t<0$ (берется арифметическое значение корня);

з) $z=a(t+i-ie^{-it}),\ t\in \boldsymbol{R},\ a>0$;

и)* $z=ia+at-ibe^{-it}$, $0\le t\le 2\pi$, $a>0, b>0.$

Отв.: а) отрезок прямой $x=1,\ -2\le y\le 0$; б) парабола $y=x^2$; в) дважды пробегаемая правая половина параболы $y=x^2$; г) левая полуокружность радиусом a с центром в начале координат; д) ветвь гиперболы $y=1/x$, лежащая в третьем квадранте; е) верхняя полуокружность радиусом $R=1$ с центром в начале координат; ж) четверть окружности радиусом $R=1$, лежащей в первом квадранте, с центром в начале координат; з) циклоида $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$; и) первая (считая от начала координат) дуга удлиненной $(a<b)$, укороченной $(a>b)$ или обыкновенной $(a=b)$ циклоиды $x=at-b\sin t,\ y=a-b\cos t.$

1.3. Функции комплексной переменной: предел, непрерывность, дифференцирование

Области в комплексной плоскости. Понятие функции комплексной переменной (ФКП). Геометрическая интерпретация ФКП. Предел и непрерывность ФКП. Элементарные ФКП. Отображение областей. Производная ФКП. Условия Коши – Римана. Аналитичность ФКП. Гармонические функции. Условия Коши – Римана в полярных координатах. Геометрический смысл модуля и аргумента производной ФКП в точке. Понятие конформного отображения.

Точка $z_0\in D\subset \overline{\boldsymbol{C}}$ называется *внутренней точкой множества* D, если существует ε-окрестность этой точки, целиком содержащаяся в D (рис. 1.10).

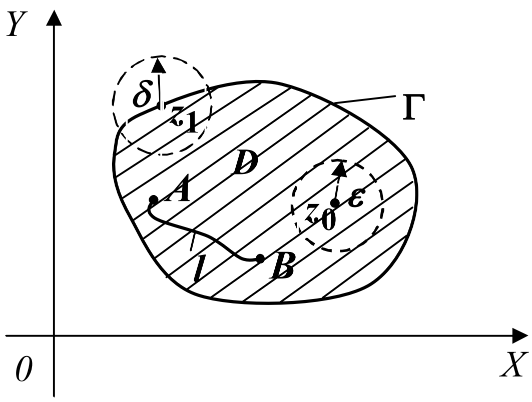


Рис. 1.10

Точка z_1 называется *граничной точкой множества* D, если в любой ее δ-окрестности имеются точки как принадлежащие, так и не принадлежащие D (рис. 1.10). Совокупность граничных точек множества D образует его границу Γ. Множество D с присоединенной к нему границей Γ называется *замкнутым.* Множество D называется *открытым,* если каждая его точка является внутренней точкой этого множества. Множество D называется *связным,* если любые две его точки A и B можно соединить непрерывной кривой l, целиком лежащей в D. Связное открытое множество

$D \subset \overline{\boldsymbol{C}}$ называется *областью.* Если граница области состоит из нескольких непересекающихся (изолированных друг от друга) частей, то она называется *многосвязной.* На рис. 1.11 изображена 4-связная область D, граница которой состоит из внешней границы Γ, внутренних границ γ_1, γ_2 и выколотой точки z_0.

Если каждой точке $z \in D$ соответствует по тому или иному правилу вполне определенное комплексное число $w = f(z)$, то говорят, что в области D определена однозначная функция $w = f(z)$ комплексной переменной z.

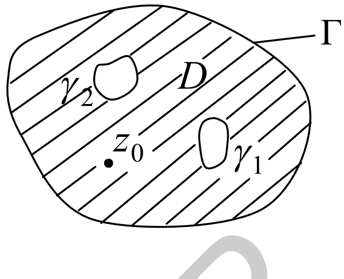


Рис. 1.11

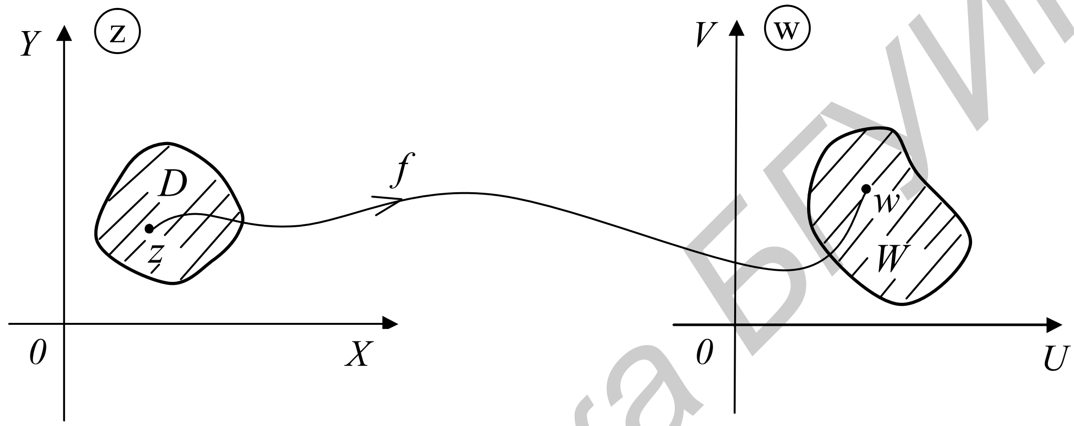


Рис. 1.12

а *б*

Если $w = f(z)$ – однозначная функция, то она осуществляет отображение точек комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости w (рис. 1.12). Образ области D (рис. 1.12, а) при отображении $w = f(z)$ в плоскости w образует некоторое множество $W = f(D)$ (рис. 1.12, б).

Если $z = x + iy,\ w = u + iv,$ то задание ФКП $w = f(z)$ равносильно заданию двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ переменных $x, y \in \boldsymbol{R}$:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Функция $u(x, y)$ называется *действительной частью* ФКП $f(z)$ (обозначается $u = \operatorname{Re} f(z)$), а функция $v(x, y)$ – ее *мнимой частью* (обозначается $v = \operatorname{Im} f(z)$).

Говорят, что в области D плоскости переменной z определена многозначная функция $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ соответствует хотя бы одно значение переменной w, а некоторым точкам соответствуют несколько (быть может, и бесконечно много) значений функции. Очевидно, что геометрически уже нельзя истолковать многозначные функции $w = f(z)$, как отображение одной плоской области на другую плоскую область. При дополнительных условиях такие функции можно рассматривать как отображения областей на более сложных геометрических образах – *римановых поверхностях*.

Более простой метод исследования многозначных функций состоит в том, что выделяют отдельные ветви таких функций. Например, многозначная функция $w = \operatorname{Arg} z$ определена всюду, кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$. Обычно выделяют одну из ветвей – главное значение этой функции $\arg z$ – как значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \operatorname{Arg} z \le \pi$ или $0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi$. Полученная таким образом однозначная ветвь $\arg z$ также определена для всех z, кроме $z = 0$ и $z = \infty$, но отрицательная действительная полуось $-\infty < x \le 0,\ y = 0$, является для нее линией разрыва. Выбросив из области определения функции $\arg z$ все точки отрицательной действительной полуоси $-\infty < x \le 0,\ y = 0$, в полученной разрезанной плоскости $C \setminus \{-\infty < \operatorname{Re} z \le 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$ имеем непрерывную однозначную функцию $\arg z$ – непрерывную ветвь функции $w = \operatorname{Arg} z$.

Другим примером служит двузначная функция $w = \sqrt{z}$, определенная во всей расширенной плоскости комплексной переменной z; $f(0) = 0$, и можно принять $f(\infty) = \infty$. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются для функции $w = \sqrt{z}$ *точками ветвления*. В этих точках $\sqrt{0} = 0$ и $\sqrt{\infty} = \infty$ единственны, а во всех остальных точках $\sqrt{z}$ имеет два значения. Линию разреза для выделения однозначных ветвей между точками ветвления в принципе можно выбрать как угодно. Более подробно об этом смотрите в [7].

1.47. Найти образ полукруга $D: x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0$, при отображении функцией $w = z^2$.

Δ Для $z \in D$ имеем $z = |z|\, e^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi$. Тогда

$$w = u + iv = z^2 = |z|^2\, e^{2i\varphi} =$$

$$= |z|^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \Rightarrow u = |z|^2 \cos 2\varphi,\ v = |z|^2 \sin 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi.$$

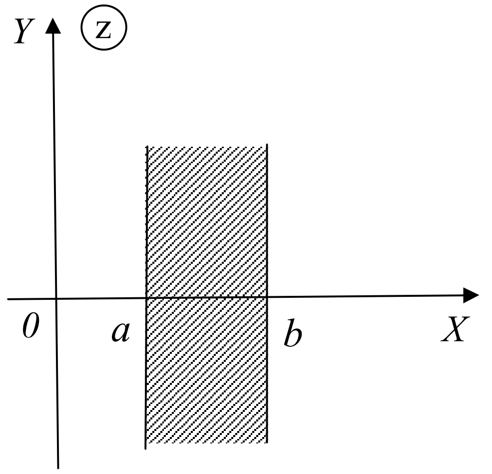
Отсюда $u^2 + v^2 = |z|^4, 0 \le |z| \le 1$ – окружность радиусом $|z|^2$ с центром в начале координат. Так как этот радиус изменяется от нуля до единицы, то полученные окружности полностью «заметают» (заполняют) круг $u^2 + v^2 \le 1$ в комплексной плоскости w.

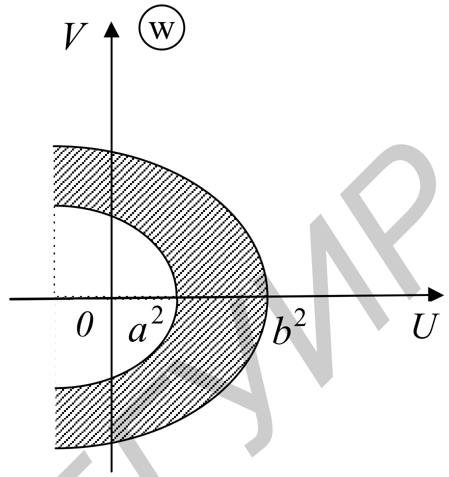
Итак, функция $w = z^2$ отображает полукруг $x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0$, из комплексной плоскости z в круг $u^2 + v^2 \le 1$ на комплексной плоскости w. ▲

1.48. Найти образ линий $x = c$ и $\arg z = \alpha$ при отображении их функцией $w = z^2$.

Δ Прямая $x = c$ в плоскости XY параметрически описывается уравнениями $x = c,\ y = y,\ y \in \boldsymbol{R}$, ($y$ – параметр). Согласно равенству (1.16), эта прямая в комплексном виде определяется соотношением $z = c + iy \Rightarrow w = u + iv =$ $= (c + iy)^2 = c^2 - y^2 + 2ciy \Rightarrow u = c^2 - y^2, v = 2cy \Rightarrow u = c^2 - v^2/(4c^2)$ – парабола с вершиной в точке $(c^2, 0)$, направленная в отрицательную сторону оси U

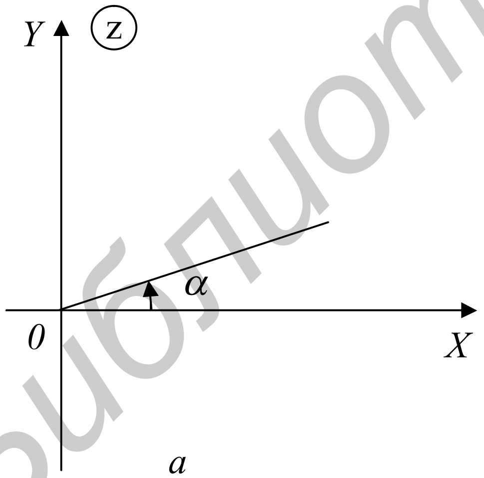
в плоскости UV. Отсюда следует, что если в плоскости XY задать полосу $a \le x \le b$ (рис. 1.13, а) то ее образом в плоскости UV при отображении функцией $w = z^2$ будет область, заключенная между параболами $u = a^2 - v^2/(4a^2)$ и $u = b^2 - v^2/(4b^2)$ (рис. 1.13, б).



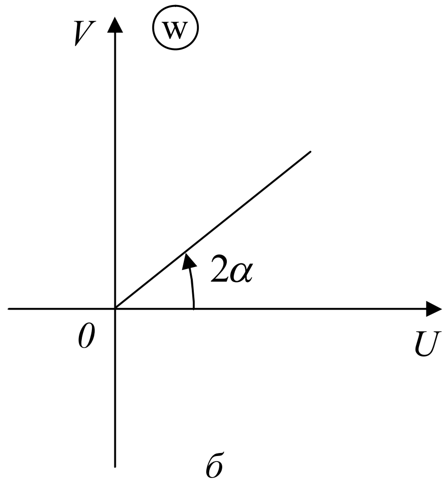


а Рис. 1.13 *б*

В комплексной плоскости z уравнение $\arg z = \alpha$ определяет луч, исходящий из начала координат под углом α к оси X (рис. 1.14, а). Для него $z = |z| e^{i\alpha}$. Тогда $w = \rho e^{i2\alpha}$, $\rho = |z|^2$, – луч, исходящий из начала координат под углом 2α к оси U (рис. 1.14, б). ▲



а



б

Рис. 1.14

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой проколотой δ-окрестности $\dot{U}_\delta(z_0)$ точки z_0. Число $A = a + bi$ называется *пределом функции* $f(z)$ *в точке* z_0 (обозначается $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$), если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0), \forall z \in \dot{U}_\delta(z_0) : |f(z) - A| < \varepsilon .$$

Другое определение предела: число A называется *пределом* функции

$f(z)$ в точке z_0, если для любой последовательности $(z_n), z_n \in \dot{U}_\delta(z_0)$, сходящейся к z_0, соответствующая последовательность $(f(z_n))$ сходится к A.

Все свойства функций комплексной переменной, имеющих предел в некоторой точке, дословно повторяют соответствующие свойства функций действительной переменной, имеющих предел в данной точке.

Функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется *непрерывной* в этой точке, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение функции $f(z)$, непрерывной на некотором множестве D, вводится по аналогии с функциями действительных переменных: пусть $z_0 \in \partial D, \partial D$ – граница замкнутой области $D, \partial D \subset D$. Тогда аналогом одностороннего предела функции одной переменной является предел функции $f(z)$ в граничной точке z_0 по множеству D: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, |z - z_0| < \delta, z \in D, |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Тогда функция $f(z)$ называется непрерывной на замкнутой области D, если она непрерывна в каждой точке области D, включая и граничные точки, т.е. для $\forall z_0 \in \partial D \ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ непрерывна на замкнутом множестве D, если и только если функции $u(x, y),\ v(x, y)$ непрерывны на D.

К *основным элементарным* ФКП относятся: степенная функция, целая рациональная функция (многочлен), дробно-рациональная функция (рациональная дробь), показательная функция, тригонометрические функции, гиперболические функции, логарифмическая функция, обратные тригонометрические функции, обратные гиперболические функции.

1°. *Степенная функция* $w = z^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, определена, непрерывна и однозначна на всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\boldsymbol{C}}$.

2°. *Целая рациональная функция* $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$, $a_i \in \boldsymbol{C}, i = \overline{0, n}$, определена, непрерывна и однозначна $\forall z \in \overline{\boldsymbol{C}}$.

3°. *Дробно-рациональная функция* имеет вид

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_{m-1} z + b_m},$$

где $n, m \in \boldsymbol{N}$, $a_i \in \boldsymbol{C}, b_j \in \boldsymbol{C}, i = \overline{0, n},\ j = \overline{0, m}$. Эта функция определена, непрерывна и однозначна $\forall z \in \overline{\boldsymbol{C}}$ за исключением тех точек, где знаменатель обращается в нуль.

4°. *Показательная функция* e^z, $z = x + iy$, определяется равенством

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{1.17}$$

При $z = x \in \boldsymbol{R}$ она совпадает с функцией e^x действительной переменной x. Функция e^z определена, непрерывна $\forall z \in \boldsymbol{C}$ и обладает свойствами, аналогичными свойствам функции e^x.

Функция e^z *является периодической функцией с периодом* $2\pi i$, так как $e^z = e^{z+2k\pi i}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Других периодов, кроме периодов вида $2k\pi i, k \in \boldsymbol{Z}$, функция e^z не имеет.

5°. *Тригонометрические функции.* Функции $\sin z$ и $\cos z$, $z = x + iy$, определяются равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{1.18}$$

Тригонометрические функции однозначны, непрерывны во всех точках комплексной плоскости и обладают всеми свойствами, присущими функциям $\sin x$, $\cos x, x \in \boldsymbol{R}$. Но может оказаться, что $|\cos z| > 1$ или $|\sin z| > 1$, что в действительном анализе не имеет места. Например,

$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} > 1; \ \ \sin 2i = \frac{e^{-2} - e^2}{2i} \Rightarrow |\sin 2i| = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} > 1.$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ – периодические функции с действительным периодом 2π.

Для них имеют место формулы

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y, \\ \cos z &= \cos(x + iy) = \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin x \cdot \operatorname{sh} y. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются соотношениями

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

где функция $\operatorname{tg} z$ непрерывна $\forall z \in \boldsymbol{C}, z \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, функция $\operatorname{ctg} z$ непрерывна $\forall z \in \boldsymbol{C}, z \neq l\pi, l \in \boldsymbol{Z}$. Эти функции, как и в действительном анализе, имеют основной период π.

6°. *Гиперболические функции* $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ определяются соотношениями

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{1.20}$$

Они периодичны с периодом $2k\pi i, k \in \boldsymbol{Z}$, откуда следует, что

$$\operatorname{sh} z = 0 \Rightarrow z = k\pi i, k \in \boldsymbol{Z}; \operatorname{ch} z = 0 \Rightarrow z = (\pi/2 + l\pi)i, l \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.21}$$

Кроме того,

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz; \operatorname{ch} z = \cos iz. \tag{1.22}$$

Функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ определяются формулами $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \operatorname{cth} z = \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$, где функция $\operatorname{th} z$ непрерывна $\forall z \in \boldsymbol{C}, z \neq (\pi/2 + k\pi)i, k \in \boldsymbol{Z}$, а функция $\operatorname{cth} z$ непрерывна $\forall z \in \boldsymbol{C}, z \neq l\pi i, l \in \boldsymbol{Z}$. Они периодичны с основным периодом πi.

Имеют место соотношения $\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz$, $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz$.

7°. *Логарифмическая функция* $w = \operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной функции $z = e^w$, поэтому

$$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \boldsymbol{Z}. \tag{1.23}$$

При $k = 0$ из (1.23) получается главное значение логарифма

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z. \tag{1.24}$$

Тогда $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Итак, $\operatorname{Ln} z$ – многозначная функция, определенная $\forall z \neq 0$.

С помощью логарифмической функции определяется *общая степенная функция* $w = z^\alpha$ с показателем $\alpha \in \boldsymbol{C}$:

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} \tag{1.25}$$

и *общая показательная функция* $w = a^z$, $0 \neq a \in \boldsymbol{C}$:

$$w = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}. \tag{1.26}$$

Если в (1.25) $\alpha = \dfrac{1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, то мы получаем простейшую n-значную функцию $w = z^{\frac{1}{n}}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

8°. *Обратные тригонометрические функции* $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как функции, обратные соответственно к функциям $\sin w, \cos w, \operatorname{tg} w, \operatorname{ctg} w$. Все они многозначны, и для них

$$\begin{aligned} &\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}), \quad \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}), \\ &\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{iz+1}{iz-1}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

9°. *Обратные гиперболические функции*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{1+z^2}), \qquad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}), \\ &\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Все данные функции многозначны.

1.49. Дана линейная функция $w = f(z) = (1-i)z + 3 + 4i$. Доказать, что в точке $z_0 = i$ она имеет предел, равный $w_0 = (1-i)i + 3 + 4i = 4 + 5i$.

Δ Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Так как $|f(z) - w_0| = |(1-i)z + 3 + 4i - ((1-i)i + 3 + 4i)| = |(1-i)z - (1-i)i| = |1-i||z-i| = \sqrt{2}|z-i|$, то, выбрав в качестве $\delta(\varepsilon) > 0$ число $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\sqrt{2}$, будем иметь $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ при $0 < |z-i| < \delta$. Это означает, что $w_0 = (1-i)i + 3 + 4i$ есть предел функции $w = f(z) = (1-i)z + 3 + 4i$ в точке i.

Поскольку $\lim\limits_{z \to i} f(z) = (1-i)i + 3 + 4i = f(i)$, то тем самым доказано, что в точке i линейная функция непрерывна. Кроме того, можно заметить, что она будет непрерывной и в любой точке z_0 комплексной плоскости. ▲

1.50. Пользуясь определением предела, показать, что

а) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{2z-1}{3z+2}=\dfrac{1}{5}$; б) $\lim\limits_{z\to -3+4i}|z|=5.$

1.51. Найти $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2+3iz-2}{z+i}$.

Δ В точке $z=-i$ и числитель, и знаменатель функции $f(z)=\dfrac{z^2+3iz-2}{z+i}$ обращаются в нуль. Так как $z^2+3iz-2=(z+i)(z+2i)$, то $\lim\limits_{z\to -i}f(z)=$
$=\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{(z+i)(z+2i)}{z+i}=\lim\limits_{z\to -i}(z+2i)=i.$ ▲

1.52. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z\to \pi/4}\dfrac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz+i\operatorname{sh} iz}$; б) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{\operatorname{sh} iz}$; в) $\lim\limits_{z\to -\pi i/2}\dfrac{e^{2z}+1}{e^z+i}$.

Отв.: а) $\sqrt{2}$; б) $-i$; в) $-2i.$

1.53. Представить в алгебраической форме:

а) $\operatorname{Ln}(-1-i)$; б) i^i; в) $\operatorname{Arctg}\dfrac{3\sqrt{3}+8i}{7}$.

Δ а) согласно (1.23), имеем

$$\operatorname{Ln}(-1-i)=\ln|-1-i|+i(\arg(-1-i)+2k\pi)=$$

$$=\ln\sqrt{2}+i(\frac{5}{4}\pi+2k\pi),\ k\in\boldsymbol{Z},\ \text{так как } |-1-i|=\sqrt{2},\ \arg(-1-i)=\frac{5}{4}\pi;$$

б) согласно равенству (1.25), $i^i=e^{i\operatorname{Ln} i}=e^{i(\ln|i|+i(\arg i+2k\pi))}=$
$=e^{-(\pi/2+2k\pi)}, k\in\boldsymbol{Z}$, так как $\ln|i|=\ln 1=0,\ \arg i=\dfrac{\pi}{2}$;

в) по формуле для арктангенса из (1.27)

$$\operatorname{Arctg}\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{1+i(3\sqrt{3}+8i)/7}{1-i(3\sqrt{3}+8i)/7}=$$

$$=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\frac{-1+i3\sqrt{3}}{15-i3\sqrt{3}}=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{6}+i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{1}{2i}\left(\ln\frac{1}{3}+i\left(\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right)\right)=$$

$$=\frac{\pi}{3}+k\pi+i\frac{\ln 3}{2},\quad k\in\boldsymbol{Z}.\ ▲$$

1.54. Вычислить действительную и мнимую части функций e^{2z+3i} и $\sin(iz-1)$.

Отв.: $\operatorname{Re} e^{2z+3i}=e^{2x}(\cos 2y+3),\ \operatorname{Im} e^{2z+3i}=e^{2x}\sin(2y+3)$;
$\operatorname{Re}\sin(iz-1)=-\operatorname{ch}x\sin(y+1),\ \operatorname{Im}\sin(iz-1)=\operatorname{sh}x\cos(y+1).$

1.55. Вычислить значения функций:

а) $\operatorname{ch}(1+2i)$. **Отв.:** $\operatorname{ch}1\cos 2 + i\operatorname{sh}1\sin 2$.

б) $\operatorname{Arcsin} i$. **Отв.:** $2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$; $(2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

в) $\operatorname{Arch} 2$. **Отв.:** $\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

г) $\sin(1-3i)$. **Отв.:** $\operatorname{ch}3\sin 1 - i\operatorname{sh}3\cos 1$.

д) $\operatorname{th}(\ln 3 + \pi i/6)$. **Отв.:** $80/91 + i9\sqrt{3}/91$.

е) $\operatorname{sh}(-1+5i)$. **Отв.:** $-\operatorname{sh}1\cos 5 + i\operatorname{ch}1\sin 5$.

ж) $\operatorname{th}(\ln 5 - \pi i/4)$. **Отв.:** $312/313 - i25/313$.

з) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$. **Отв.:** $e^{\pi(-1/4+2k)-\pi i/4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

и) $(3+4i)^{i-2}$. **Отв.:** $e^{-2\ln 5 - \operatorname{arctg}(4/3) - 2k\pi + i(\ln 5 - 2\operatorname{arctg}(4/3))}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

к) $\operatorname{Arcsin} 2$. **Отв.:** $\pi/2 + 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

л) $\operatorname{Arccos} i$. **Отв.:** $\pi/2 + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$; $-\pi/2 + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

м) $\operatorname{Arth}(1-i)$. **Отв.:** $(1/4)\ln 5 + i\left((1/2)\operatorname{arctg} 2 + (k+(1/2))\pi\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

1.56. Доказать равенства

а) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$; б) $\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z$;

в) $\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z$; г) $\operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$.

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. *Производной* функции f в точке z_0 называется число, обозначаемое $f'(z_0)$,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}, \tag{1.29}$$

если этот предел существует и конечен. В формуле (1.29)

$$\Delta z = z - z_0, \Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

Функция $w = f(z)$, имеющая в точке z_0 производную, называется *дифференцируемой* в этой точке. Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в области D*, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Как и в действительном анализе, *функция, дифференцируемая в точке z_0, непрерывна в этой точке.*

Все свойства и правила дифференцирования действительного анализа переносятся и на комплексный случай. В частности, сохраняются правила дифференцирования суммы, произведения, дроби, сложной функции, свойство линейности дифференцирования. Важно при этом отметить, что понятие предела, а следовательно, и понятие производной, применимо только к однозначным функциям $w = f(z)$. Поэтому если понадобится дифференцировать многозначную функцию, то предварительно необходимо выделить ту или иную однозначную ее ветвь и вести разговор именно об этой ветви.

Все рассмотренные выше основные элементарные (однозначные) функции дифференцируемы в области определения, причем для них имеют место следующие формулы:

$$(z^n)' = nz^{n-1}, n \in N; \quad (e^z)' = e^z; \ (\sin z)' = \cos z; \ (\cos z)' = -\sin z;$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z; \ (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z; \ (\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

1.57. Исходя из определения, найти производную функции $f(z) = z^2 + 3z - 4$. **Отв.:** $2z + 3$.

1.58. Показать, что функция e^{5iz-4} дифференцируема при любом z, и найти ее производную. **Отв.:** $5ie^{5iz-4}$.

1.59. Доказать формулы:

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}; \quad (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}; \quad (\operatorname{th} z)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}; \quad (\operatorname{cth} z)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}.$$

1.60. Показать, что функция $w = f(z) = \operatorname{Re} z$ не дифференцируема ни в одной точке.

Δ Пусть $z = x + iy$, тогда $w = x$. По определению производной функции $w = f(z)$ в точке z предел разностного отношения $\dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$ не должен зависеть от способа приближения к точке z. Рассмотрим два случая.

1. Пусть сначала $h = t$ – действительное. Тогда

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x+t) - x}{t} = 1.$$

2. Положим теперь $h = it, t \in \boldsymbol{R}$. Тогда $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(z+it) - f(z)}{it} = \lim_{t \to 0} \frac{x - x}{it} = 0.$

Таким образом, способ приближения к точке z существенно влияет на предельное значение разностного отношения. Следовательно, функция $w = \operatorname{Re} z$ не дифференцируема ни в одной точке комплексной плоскости. ▲

1.61. Доказать, что функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

1.62. Доказать, что функция $w = z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в точке $z = 0$, и найти $w'(0)$. **Отв.:** $w'(0) = 0$.

Для дифференцируемой функции $w = f(z)$ ее дифференциал в точке z_0 $dw = df(z_0) = f'(z_0)\,dz$, где $dz = \Delta z = z - z_0$.

Дифференциал есть линейная, а если $f'(z_0) \neq 0$, то и главная часть приращения функции.

Требование дифференцируемости функции $f(z)$ в точке $z = x + iy$ накладывает определенные условия на поведение действительной и мнимой частей этой функции в окрестности точки (x, y). Так, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z = x + iy$, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют частные производные* *первого порядка в этой точке, удовлетворяющие соотношениям*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\ \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \tag{1.30}$$

При этом

$$f'(z)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{1. 31}$$

Соотношения (1.30) называются *условиями Коши – Римана*.

Условия Коши – Римана являются необходимыми для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z.

Теорема 1.2 ***(достаточные условия дифференцируемости ФКП).*** *Пусть непрерывно дифференцируемые функции* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *в точке* (x,y) *удовлетворяют условиям Коши – Римана. Тогда функция* $w=u(x,y)+iv(x,y)$ *дифференцируема в точке* $z=x+iy$.

Однозначная функция $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ называется *аналитической* в точке z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она аналитическая в каждой точке этой области. Точка z_0, в которой функция $f(z)$ аналитическая, называется *правильной точкой* функции. Точка z_0, в которой функция $f(z)$ не является аналитической или не определена в ней, называется *особой* для $f(z)$.

1.63. Используя условия Коши – Римана, доказать, что функция $w=e^{iz^2}$ является аналитической на всей комплексной плоскости. В случае их выполнимости найти значение $w'(i\sqrt{\pi}/2)$.

Δ Имеем

$$w=e^{iz^2}=e^{i(x+iy)^2}=e^{i(x^2-y^2+i2xy)}=e^{-2xy}e^{i(x^2-y^2)}=$$
$$=e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)+ie^{-2xy}\sin(x^2-y^2).$$

Отсюда

$$u=e^{-2xy}\cos(x^2-y^2),\ \ v=e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=-2e^{-2xy}(y\cos(x^2-y^2)+x\sin(x^2-y^2))\equiv\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\\ &\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-2e^{-2xy}(x\cos(x^2-y^2)-y\sin(x^2-y^2))\equiv-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Таким образом, для функции $w=e^{iz^2}$ условия Коши – Римана выполнены $\forall z\in \boldsymbol{C}$. Так как частные производные первого порядка функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны на всей плоскости XY, то по теореме 1.2 функция w дифференцируема в любой точке $z\in\boldsymbol{C}$, и ее производная в точке $z_0=i\sqrt{\pi}/2=0+i\sqrt{\pi}/2$, согласно формулам (1.30) – (1.32), равна

$$w'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{x_0=0,\, y_0=\sqrt{\pi}/2} = -2\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\,2\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(-1+i). \ ▲$$

1.64. Показать, что функции $w = \operatorname{Re} z;\ w = \bar{z};\ w = |z|;\ w = (\operatorname{Re} z)/z$ не являются аналитическими ни в одной точке комплексной плоскости.

1.65. Доказать, что функции $w = z^2;\ w = \sin z;\ w = \operatorname{ch} z$ являются аналитическими на всей комплексной плоскости. Получить для них производные по формулам из (1.31).

1.66. Является ли функция $w = ze^z$ аналитической хотя бы в одной точке?

Δ Имеем

$$w = ze^z = (x+iy)e^{x+iy} = (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) =$$

$$= e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(y\cos y + x\sin y) \Rightarrow u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y),$$

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = e^x((x+1)\cos y - y\sin y) \equiv \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x((x+1)\sin y + y\cos y) \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким образом, условия Коши – Римана (1.30) выполнены во всех точках комплексной плоскости. Значит, эта функция является аналитической на всей комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$. ▲

1.67. Является ли функция $w = z\bar{z}$ аналитической хотя бы в одной точке?

Δ Имеем $z\bar{z} = x^2 + y^2 \Rightarrow u = x^2 + y^2,\ v = 0.$ Условия Коши – Римана в этом случае имеют вид $2x = 0,\ 2y = 0$ и выполняются только в точке $(0, 0)$. Значит, функция $w = z\bar{z}$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не является аналитической. ▲

1.68. Выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке, а какие – нет:

а) $w = \bar{z}$; б) $w = z^2\bar{z}$; в) $w = |z|\,\bar{z}$; г) $w = e^{z^2}$;

д) $w = |z|\operatorname{Re}\bar{z}$; е) $w = \cos 5z + i$; ж) $w = \operatorname{ch} 3z + z$.

Отв.: а) нет; б) нет; в) нет; г) да; д) нет; е) да; ж) да.

1.69. Найти постоянные $a, b, c,$ при которых функция $f(z)$ будет аналитической:

1) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$;

2) $f(z) = \cos x(\operatorname{ch} y + a\operatorname{sh} y) + i\sin x(\operatorname{ch} y + b\operatorname{sh} y)$.

Отв.: 1) $c = 1, b = -a;\ f(z) = (1 - ai)z$; 2) $a = b = -1;\ f(z) = e^{iz}$.

1.70*. Найти области, в которых функция $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ является аналитической.

Отв.: функция является аналитической при $0 < \arg z < \pi/4,\ \pi < \arg z < 5\pi/4,$

если $f(z)=z^2$, и при $\pi/2<\arg z<3\pi/4,\ 3\pi/2<\arg z<7\pi/4$ в случае, когда $f(z)=-z^2$.

При переходе от декартовых координат (x,y) к полярным координатам (ρ,φ) по формулам $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$ условия Коши – Римана имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi},\ \frac{\partial v}{\partial\rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}. \tag{1.33}$$

В полярных координатах ρ,φ, согласно условиям Коши – Римана (1.33), производная $f'(z)$ имеет вид

$$f'(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-i\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=\frac{\rho}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+i\frac{\partial v}{\partial\rho}\right),\ z\neq 0. \tag{1.34}$$

1.71. Пусть $f(z)=\ln z=\ln\rho+i\varphi$, где $\varphi=\arg z$. Имеем $u=\ln\ \rho,\ v=\varphi$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho},\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0;$ $\frac{\partial v}{\partial\rho}=0,\frac{\partial v}{\partial\varphi}=1.$ Отсюда $\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial v}{\partial\rho}=0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$, т.е. условия Коши – Римана (1.33) выполнены, и поэтому согласно (1.34), $(\ln z)'=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-i\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=\frac{1}{z}$.

Если функция $w=u(x,y)+iv(x,y)$ является аналитической в области D, причем функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемы по обеим переменным в этой области, то в области D они удовлетворяют *уравнению Лапласа*:

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\quad \Delta v=\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}=0,$$

т.е. действительная $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ части аналитической функции $f(z)=u+iv$ *являются гармоническими в* D *функциями.*

Гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, удовлетворяющие в D условиям Коши – Римана, называются *сопряженными.*

Для таких функций имеет место

Теорема 1.3. *Всякая гармоническая в односвязной области D функция служит действительной (мнимой) частью некоторой аналитической в этой области функции.*

1.72. Найти аналитическую функцию $w=f(z)$, для которой $u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)=x^2-y^2+3x+y,\ f(0)=i.$

Δ Проверим сначала, что $u(x,y)$ гармоническая на всей плоскости функция: $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2-2=0.$ Из условий Коши – Римана найдем теперь сопряженную с $u(x,y)$ функцию $v(x,y)$. Имеем: $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+3$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y-1$. Первое уравнение интегрируем по y, считая x постоянным: $v(x,y)=(2x+3)y+C(x)$. Но в силу второго условия $\frac{\partial v}{\partial x}=2y-1$ имеем $2y+C'(x)=2y-1 \Rightarrow C'(x)=-1 \Rightarrow C(x)=-x+C$, где C – постоянная. Таким образом, $f(z)=x^2-y^2+3x+y+i((2x+3)y-x+C)=z^2+(3-i)z+iC$. Из условия $f(0)=i$ находим $C=1$, значит, окончательно получим, что $f(z)=z^2+(3-i)z+i$. ▲

1.73. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если:

а) $v(x,y)=x^2-y^2-1,\ f(-1)=0$;

б) $u(x,y)=xe^x\cos y-ye^x\sin y,\ f(0)=0$;

в) $u(x,y)=x^3-3xy^2+2,\ f(0)=2+i$;

г) $v(x,y)=2e^x\cos y,\ f(0)=2+2i$;

д) $u(x,y)=x^2-y^2+xy,\ f(0)=0$;

е) $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2},\ f(1)=6+i\ \ (|z|>0)$;

ж) $v(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3,\ f(0)=0$;

з)* $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)+2\sin x\,\mathrm{sh}\,y+x^3-3xy^2+y$;

и)* $v(x,y)=3+x^2-y^2-\frac{y}{2(x^2+y^2)}$;

к)* $u\ (x,y)=\ln(x^2+y^2)+x-2y$.

Отв.: а) $f(z)=i(z^2-1)$; б) $f(z)=ze^z$; в) $f(z)=z^3+2+i$; г) $f(z)=2ie^z+2$; д) $f(z)=(2-i)z^2/2$; е) $f(z)=z^2+(5-i)\ z-\frac{i}{z}+3i$; ж) $f(z)=(2+i)z^3$; з) $f(z)=ze^z+2i\cos z+z^3-iz+Ci$; и) $f(z)=1/(2z)+iz^2+3i+C$; к) $f(z)=2\ln z+(1+2i)z+iC$.

1.74. Показать, что следующие функции являются гармоническими:

а) $u=-y/(x^2+y^2)$; б) $u=\mathrm{arctg}(y/x)$; в) $u=\ln(x^2+y^2)$.

1.75. При каких условиях трехчлен $u=ax^2+2bxy+cy^2$ является гармонической функцией? **Отв.:** $a+c=0$.

1.76*. Доказать существование и найти аналитическую функцию $f(z)$ по заданному модулю или аргументу:

а) $r=(x^2+y^2)e^x$; б) $r=e^{\rho^2\cos 2\varphi}$; в) $\theta = xy$; г) $\theta=\varphi+\rho\sin\varphi$.

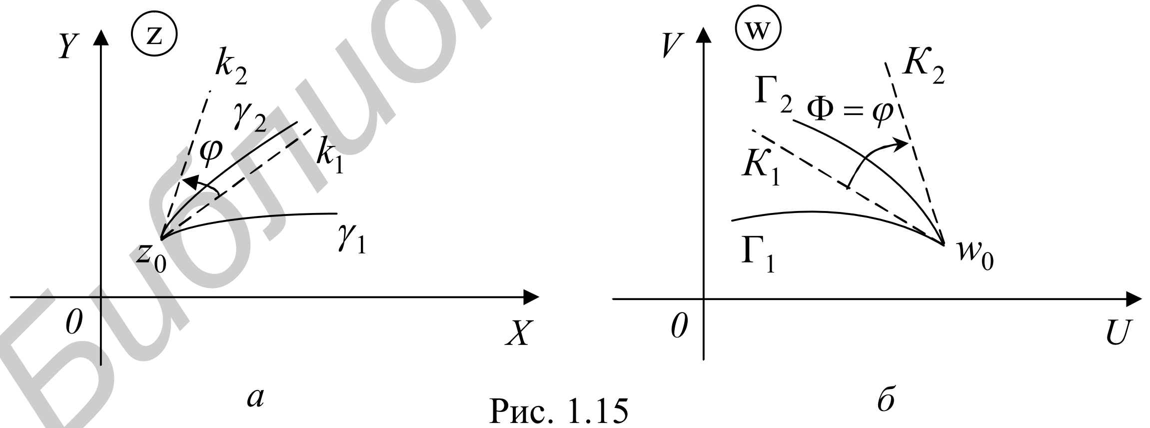
Отв.: а) $f(z)=e^{i\alpha}z^2e^z$; б) $f(z)=e^{i\alpha}e^{z^2}$; в) $f(z)=Ae^{z^2/2}$; г) $f(z)=Aze^z$ (α – произвольная действительная постоянная, A – произвольная положительная постоянная).

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая функция в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$. Тогда *модуль производной* $|f'(z_0)|\neq 0$ *равен коэффициенту растяжения кривой в точке* z_0 *при отображении* $w=f(z)$ *комплексной плоскости z на комплексную плоскость w*: при $|f'(z_0)|>1$ имеет место растяжение, а при $|f'(z_0)|<1$ – сжатие. При этом $f'(z_0)\neq 0$ не зависит от выбора кривой.

Аргумент производной $f'(z_0)$ *равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке* z_0 *к любой гладкой кривой на комплексной плоскости z, проходящей через точку* z_0*, чтобы получить направление касательной в точке* $w_0=f(z_0)$ *к образу этой кривой на комплексной плоскости w при отображении* $w=f(z)$.

При $\varphi=\arg f'(z)>0$ поворот происходит против часовой стрелки, а при $\varphi<0$ – по часовой. Таким образом, $\arg f'(z)$ равен углу поворота кривой в точке z при ее отображении с помощью функции $w=f(z)$.

Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки $w_0=f(z_0)$, осуществляемое функцией $w=f(z)$, называется *конформным,* если в точке z_0 оно обладает свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжения (рис. 1.15, а, б).



а Рис. 1.15 *б*

Это означает, что если при отображении $w=f(z)$ кривые γ_1 и γ_2 переходят соответственно в кривые Γ_1 и Γ_2, то угол φ между касательными k_1 и k_2 к кривым γ_1 и γ_2 в точке z_0 будет равен углу Φ между касательными K_1 и K_2 к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке $w_0=f(z_0)$, т.е. $\Phi=\varphi$.

Если при отображении $w=f(z)$ углы между соответствующими направлениями равны не только по величине, но и по направлению отсчета, то такое отображение называется *конформным отображением первого рода.*

Конформное отображение, при котором углы сохраняются только по абсолютной величине, но изменяется направление их отсчета на противоположное, называется *конформным отображением второго рода.*

Однозначное отображение $w = f(z)$ называется *конформным в области* D, если оно конформно в каждой точке этой области.

1.77. Найти угол поворота θ и коэффициент растяжения k длин в точке $z_0 = 1+i$ под действием отображения $w = z^2$.

Δ Функция $w = z^2$ аналитична на всей комплексной плоскости z и для нее $w' = 2z$. Под действием этой функции точка z_0 перейдет в точку $w_0 = (1+i)^2 = 2i$. Следовательно, луч γ, выходящий из точки $z_0 = 1+i$ (рис. 1.16, а), отобразится в некоторую кривую Γ, исходящую из точки $w_0 = 2i$ (рис. 1.16, б), причем относительно действительной оси U кривая Γ в точке $w_0 = 2i$ повернется на угол $\theta = \arg w'(z_0) = \arg(2(1+i)) = \pi/4$.

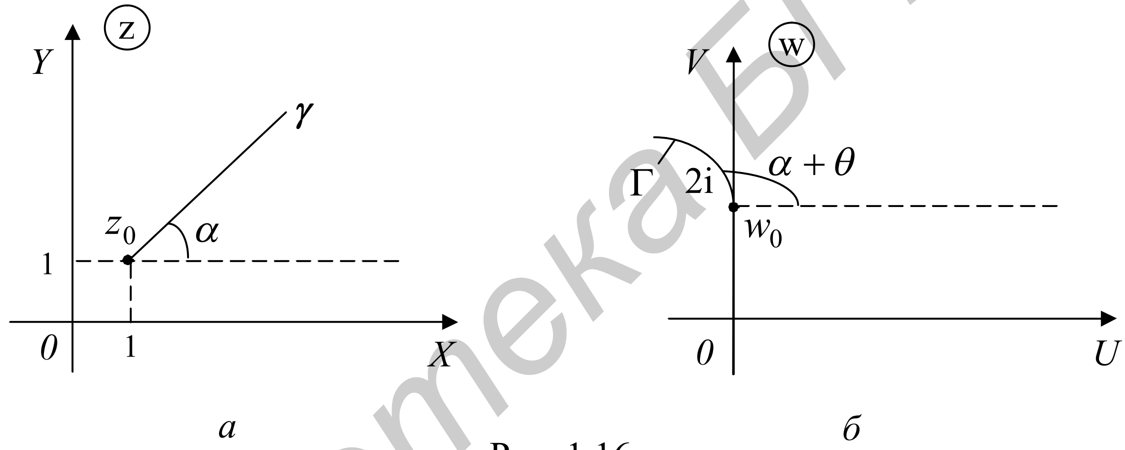


Рис. 1.16

Коэффициент растяжения длин при переходе от z_0 к w_0 равен $k = |w'(z_0)| = |2+2i| = 2\sqrt{2} > 1$. ▲

1.78. Какая часть плоскости сжимается, а какая – растягивается при отображении функцией $w = z^2 + 2z$?

Δ Так как $k = |f'(z)| = |2z+2|$, то при $|2z+2| > 1 \Leftrightarrow |z+1| > 1/2$, т. е. при отображении внешней части круга $|z+1| > 1/2$ происходит растяжение, а при отображении его внутренней части – сжатие. ▲

1.79. В каких точках нарушается конформность отображения $w = z^3 - 6z^2 + 9z - 3$?

Δ Нарушение конформности происходит в тех точках z, в которых $w'(z) = 0$, т. е. в тех точках, где $w' = 3z^2 - 12z + 9 = 0 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = 3$. ▲

1.80. Отображение осуществляется с помощью функции $w = f(z)$. Найти угол поворота θ и коэффициент растяжения k при заданных отображениях в следующих точках: а) $w = e^z$, $z_1 = \ln 2 + i\pi/4$ и $z_2 = -1 - i\pi/2$;

б)* $w=\sin z$, $z_1=0$ и $z_2=1+i$; в)* $w=z^3$, $z_1=2-i$ и $z_2=1+\mathrm{i}\pi/2$.

Отв.: а) $k_1=2, \theta_1=\pi/4$; $k_2=1/e, \theta_2=-\pi/2$; б)* $k_1=1, \theta_1=0$; $k_2=\sqrt{\operatorname{ch}^2 1-\sin^2 1}, \theta_2=-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}1\cdot\operatorname{th}1)$; в)* $k_1=15$, $\theta_1=-\operatorname{arctg}(4/3)$, $k_2=3(1+\pi^2/4), \theta_2=\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{4\pi}{\pi^2-4}$.

1.81. Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая – сжимается при отображениях:

а) $w=e^z$; б) $w=\ln z$; в) $w=1/z$; г) $w=z^3$; д) $w=\ln(z-1)$.

Отв.: а) полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$ растягивается, а полуплоскость $\operatorname{Re} z<0$ сжимается; б) в любой точке z (кроме $z=0$), лежащей внутри окружности $|z|=1$, происходит растяжение, а для точек вне окружности – сжатие; в) аналогично б); г) часть плоскости внутри окружности $|z|=1/\sqrt{3}$ сжимается, а вне окружности – растягивается; д) сжатие при $|z-1|>1$, растяжение – при $|z-1|<1$.

1.82. В каких областях комплексной плоскости конформны отображения:

а) $w=e^{-3z}$; б) $w=z^2-4z$; в) $w=-iz^2$;

г) $w=\operatorname{sh}(1-z)$; д) $w=(z+2i)^3$; е) $w=(z-2)^2$.

Отв.: а) на всей плоскости; б) на всей плоскости, кроме точки $z=2$; в) на всей плоскости, кроме точки $z=0$; г) на всей плоскости, кроме точек $z_k=1-(k+1/2)\pi i, k\in\boldsymbol{Z}$; д) на всей плоскости, кроме точки $z=-2i$; е) на всей плоскости, кроме точки $z=2$.

1.4. Интегрирование функций комплексной переменной

Интеграл от ФКП, его вычисление и свойства. Интегральная теорема Коши. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема Мореры. Неопределенный интеграл от ФКП. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование многозначных функций. Интегральная формула Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций.

Пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – однозначная функция, определенная и непрерывная в области D, а Γ – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая ориентированная кривая, лежащая в D.

Вычисление интеграла $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz$ от функции $f(z)$ комплексной переменной $z=x+iy$ сводится к вычислению криволинейных интегралов второго рода (КрИ-2) по формуле

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz=\int\limits_\Gamma (u+iv)(dx+idy)=\int\limits_\Gamma u\,dx-v\,dy+i\int\limits_\Gamma v\,dx+u\,dy, \qquad (1.35)$$

в которой интеграл в ее левой части, вообще говоря, зависит от пути интегрирования.

Интеграл от ФКП по кривой будем кратко называть *контурным интегралом.* Перечислим его основные свойства:

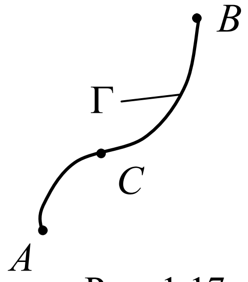


Рис. 1.17

1°. $\int\limits_{AB} f(z)\,dz = -\int\limits_{BA} f(z)\,dz$ (рис. 1.17).

2°. $\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{AC} f(z)\,dz + \int\limits_{CB} f(z)\,dz$ (рис. 1.17).

3°. $\int\limits_{\Gamma} (\alpha\, f(z) + \beta\, g(z))\,dz = \alpha \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz + \beta \int\limits_{\Gamma} g(z)\,dz$, где α и β – постоянные, в общем случае комплексные.

4°. (*Оценка интеграла).* Если на Γ выполняется неравенство $|\, f(z)\,| \le M$, где $M = const$, и L – длина Γ, то $|\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz\,| \le ML.$

Для интеграла от ФКП имеет место

Теорема 1.4 (*интегральная теорема Коши*). *Пусть в односвязной области D определена однозначная аналитическая функция $f(z)$. Тогда интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в D, равен нулю:* $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$

Следствие. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в многосвязной области D и на ее границе, состоящей из внешнего контура Γ и внутренних контуров $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ (рис. 1.18). Тогда*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)\,dz, \tag{1.36}$$

где при движении вдоль контура γ_i область D находится слева.

Если кривая Γ в интеграле (1.35) задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t) \Leftrightarrow z(t) = x(t) + iy(t),$$

причем при изменении t от t_1 до t_2 кривая Γ описывается от начальной точки t_1 до конечной t_2, то контурный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)\,dz. \tag{1.37}$$

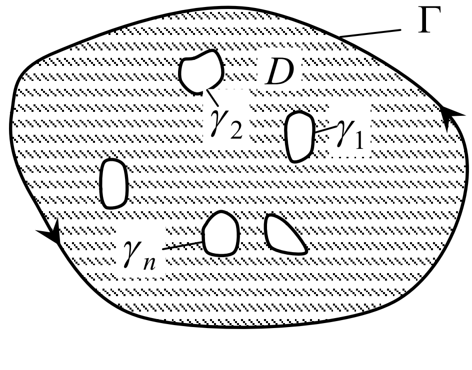


Рис. 1.18

Пусть $f(z) = u + iv$ – аналитическая в области D функция. Так как для КрИ-2 в правой части (1.35) в силу соотношений Коши – Римана выполнены условия $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial(-v)}{\partial x}$,

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, то эти интегралы не зависят от пути интегрирования. Тогда контурный интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ не зависит от кривой Γ, лежащей в D и соединяющей точки z_0 и z. В этом случае принято обозначать

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,ds. \tag{1.38}$$

Этот интеграл называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Имеет место

Теорема 1.5 (*Мореры*). *Пусть функция* $f(z)$ *непрерывна в односвязной области* D *и интеграл* $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ *не зависит от пути интегрирования* $\Gamma \in D$, *соединяющего начальную и конечную точки пути* Γ. Тогда *функция* (1.38) *является аналитической в* D *и* $F'(z) = f(z)$, *т.е.* $F(z)$ *является первообразной для* $f(z)$ *в* D.

Множество всех первообразных для $f(z)$ в D называется *неопределенным интегралом от* $f(z)$ и обозначается $\int f(z)\,dz$.

Итак, $\int f(z)\,dz = F(z) + C,\ \ F'(z) = f(z).$

Методы вычисления неопределенных интегралов от аналитических функций в комплексном анализе те же, что и в действительном. Так, справедлива *таблица неопределенных интегралов* из действительного анализа, в которой, в частности,

$$\int e^z\,dz = e^z + C;\ \int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in \boldsymbol{Z},\ n \neq -1;\ \int \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} z + C$$

(за $\operatorname{Ln} z$ можно взять любую ветвь логарифма, т.к. они отличаются друг от друга на постоянную);

$$\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctg}\frac{z}{a} + C;\ \int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{Ln}\frac{z-a}{z+a} + C;$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + a^2}) + C;\ \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \operatorname{Arcsin}\frac{z}{a} + C \quad \text{и т.д.}$$

Если функция $f(z)$ в (1.38) является аналитической в односвязной области D, содержащей точки z_1 и z_2, то имеет место аналог *формулы Ньютона – Лейбница*:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \Phi(z)\Big|_{z_1}^{z_2}, \tag{1.39}$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для $f(z)$ в области D.

Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ – аналитические функции в односвязной области D, а z_1 и z_2 – произвольные точки этой области, то имеет место *формула интегрирования по частям*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\varphi'(z)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,d\varphi(z) = \left(f(z)\varphi(z)\right)\Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) f'(z)\,dz. \quad (1.40)$$

Замена переменных в контурных интегралах производится аналогично случаю функции действительной переменной. Если аналитическая функция $z=\varphi(w)$ взаимно однозначно отображает контур Γ_1 в комплексной плоскости w на контур Γ в комплексной плоскости z, то

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(\varphi(w))\varphi'(w)\,dw. \quad (1.41)$$

В частности, если Γ – полупрямая, выходящая из точки z_0, или окружность с центром в точке z_0, то удобна замена $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, т. к. в первом случае $\varphi = const$, а ρ – действительная переменная интегрирования, во втором случае $\rho = const$, а φ – действительная переменная интегрирования.

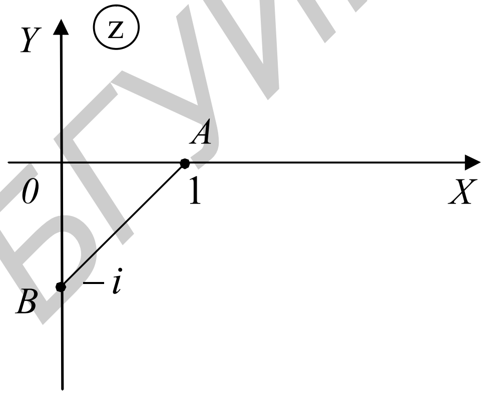


Рис. 1.19

1.83. Вычислить $\int_{AB} (y+1-xi)\,dz$, где AB – отрезок прямой, соединяющий точки $z_A = 1$ и $z_B = -i$ (рис. 1.19).

Δ Имеем $u = y+1, v = -x.$ По формуле (1.35) получаем

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AB} (y+1)\,dx + x dy - i \int_{AB} x\,dx - (y+1)\,dy.$$

Уравнение отрезка прямой, проходящей через точки $z_A = 1$ и $z_B = -i$, имеет вид $y = x-1$, $0 \le x \le 1$, и значит, $dy = dx$. Поэтому

$$\int_{AB} (y+1-ix)\,dz = \int_1^0 ((x-1+1)+x)\,dx - i\int_1^0 (x-(x-1+1))\,dx = \int_1^0 2xdx = x^2\Big|_1^0 = -1.$$

Можно поступить и иначе. Легко видеть, что $f(z) = 1 - iz.$ Так как $f(z)$– аналитическая функция на всей комплексной плоскости z, то по формуле (1.39) получим

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_1^{-i} (1-iz)\,dz = \frac{(1-iz)^2}{-2i}\Bigg|_1^{-i} =$$

$$= \frac{(1+i^2)^2}{-2i} + \frac{(1-i)^2}{2i} = \frac{1-2i+i^2}{2i} = -1. \quad ▲$$

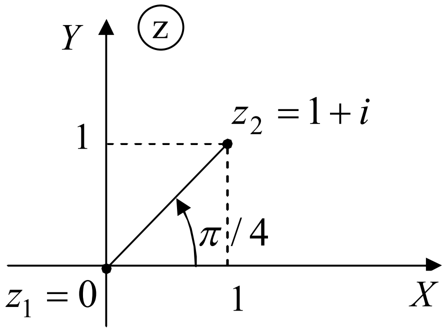


Рис. 1.20

1.84. Вычислить интеграл $I = \int_{\Gamma} e^{|z|^2} \operatorname{Re} z\,dz$, где Γ – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1+i$ (рис. 1.20).

Δ Параметрические уравнения отрезка Γ имеют вид $x = t,\ y = t,\ t \in [0, 1]$, или $z = x + iy = (1+i)t \Rightarrow dz = (1+i)\,dt$. Так как $\operatorname{Re} z = x = t,\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = t\sqrt{2}$, то по формуле (1.37)

$$I = \int_0^1 e^{2t^2} t(1+i)\,dt = \frac{1+i}{4}\int_0^1 e^{2t^2}\,d(e^{2t^2}) = \frac{1+i}{4} e^{2t^2}\Big|_0^1 = \frac{1+i}{4}(e^2 - 1). \ \blacktriangle$$

1.85. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_\Gamma (z-a)^m\,dz$, где Γ – окружность радиусом R с центром в точке $z = a$, m – произвольное целое число.

Δ Уравнение окружности Γ имеет вид $z = a + \mathrm{Re}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда по формуле (1.37)

$$I = \int_0^{2\pi} (\mathrm{Re}^{it})^m Rie^{it}\,dt = iR^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,dt = \begin{cases} i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i, & m = -1; \\ \dfrac{R^{m+1}}{m+1} e^{i(m+1)t}\Big|_0^{2\pi} = 0, & m \neq -1. \end{cases} \ \blacktriangle$$

1.86. Вычислить интеграл $I = \int\limits_i^{1+i} z^2\,dz.$

Δ Так как подынтегральная функция $f(z) = z^2$ аналитична на всей комплексной плоскости, то по формуле Ньютона – Лейбница (1.39)

$$\int_i^{1+i} z^2\,dz = \frac{z^3}{3}\Big|_i^{1+i} = \frac{1}{3}((1+i)^3 - i^3) = \frac{-2+3i}{3}. \ \blacktriangle$$

1.87. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_\Gamma (z^2 - \sin z)\,dz.$

Δ Подынтегральная функция $z^2 - \sin z$ является аналитической в любой замкнутой области, ограниченной замкнутым контуром Γ. Тогда по интегральной теореме 1.4 (Коши) $I = 0$. $\blacktriangle$

1.88*. Пусть Γ – простой замкнутый контур, ограничивающий площадь S. Доказать, что: 1) $\oint\limits_\Gamma x\,dz = iS$; 2) $\oint\limits_\Gamma y\,dz = -S$; 3) $\oint\limits_\Gamma \bar{z}\,dz = 2iS$.

● Использовать формулу Грина для КрИ-2.

1.89. Вычислить интегралы $I_1 = \int x\,dz$ и $I_2 = \int y\,dz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $z = 2 + i$;

2) по полуокружности $|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi$ (начало пути в точке $z = 1$);

3) по окружности $|z - a| = R$.

Отв.: 1) $I_1 = 2 + i, I_2 = 1 + i/2$; 2) $I_1 = \pi i/2, I_2 = -\pi/2$; 3) $I_1 = \pi i R^2, I_2 = -\pi R^2$.

1.90. Вычислить $\int\limits_{\Gamma} |z|\, dz$ по следующим путям:

1) по радиусу-вектору точки $z = 2 - i$;

2) по полуокружности $|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi$ (начало пути в точке $z = 1$);

3) по полуокружности $|z| = 1,\ -\pi/2 \le \arg z \le \pi/2$ (начало пути в точке $z = -i$);

4) по окружности $|z| = R$.

Отв.: 1) $\sqrt{5}(1 - i/2)$; 2) 2; 3) $2i$; 4) 0.

1.91. Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} |z|\, \bar{z}\, dz$, где Γ – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $|x| \le 1,\ y = 0$. **Отв.:** πi.

1.92. Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$, где Γ – граница полукольца, изображенного на рис. 1.21. **Отв.:** 4/3.

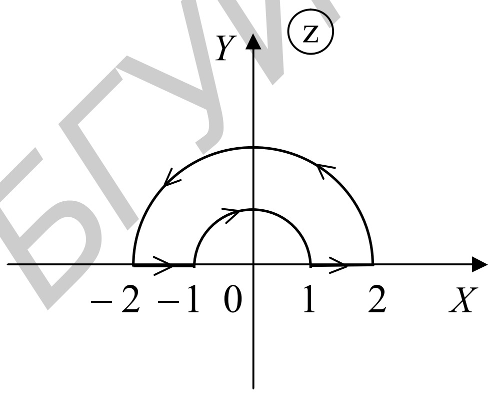


Рис. 1.21

1.93. Вычислить интеграл $\oint\limits_{AB} f(z)\, dz$, где $f(z) = x^2 + y^2 i$, AB – отрезок, соединяющий точки $z_A = 1 + i$ и $z_B = 2 + 3i$.

Отв.: –19/3 + 9*i*.

1.94. Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z - 4}$, где Γ – эллипс $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$. **Отв.:** 0.

1.95. Вычислить интеграл $I_1 = \int\limits_0^i z^2 \sin z\, dz$ и $I_2 = \int\limits_0^{2\pi i} z e^z\, dz$.

Отв.: $I_1 = 3\,\mathrm{ch}\,1 - 2\,\mathrm{sh}\,1 - 2,\ \mathrm{I}_2 = 2\pi i.$

1.96. Различна или одинакова величина интеграла $\int\limits_{-1}^{1} \bar{z}\, dz$, если интегрирование происходит: а) по отрезку действительной оси от точки $z = -1$ до точки $z = 1$; б) по верхней полуокружности $|z| = 1$. **Отв.:** Различна.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитическая в области D, отображает область D на область G и такова, что обратная функция $z = \varphi(w)$ многозначна в G. Если существуют однозначные и аналитические в G функции $z = \varphi_1(w),\ z = \varphi_2(w), \ldots,$ для которых данная функция $w = f(z)$ является обратной, то функции $\varphi_1(w),\ \varphi_2(w), \ldots$ называются *однозначными ветвями функции* $\varphi(w)$, определенными в G.

Так, например, функция $w = z^n$ каждой точке z_0 ставит в соответствие единственную точку w_0, но одной и той же точке w_0 $(w \ne 0,\ w \ne \infty)$ функция

$z=\sqrt[n]{w}$ ставит в соответствие n различных точек комплексной плоскости z. Если $w=\rho e^{i\theta}$, то эти n значений z находятся, как известно, по формулам $z_k = re^{i\varphi_k}$, где $r=\sqrt[n]{\rho},\ \varphi_k = \dfrac{\theta+2k\pi}{n},\ k=\overline{0,n-1},\ -\pi<\theta\le\pi$.

Пусть односвязная область G содержит точку w_0, но не содержит точек $w=0$ и $w=\infty$. Тогда различным фиксированным значениям $k,\ k=\overline{0,n-1}$, при одном и том же выборе числа $\theta_0=\arg w_0$ соответствуют различные ветви функции $z=\sqrt[n]{w}$.

Точка, обладающая таким свойством, что обход вокруг нее в достаточно малой окрестности приводит к переходу от одной ветви многозначной функции к другой, называется *точкой ветвления* данной многозначной функции.

Точками ветвления функции $\sqrt[n]{w}$ являются точки $w=0$ и $w=\infty$.

Понятие точки ветвления тесно связано с определением особой точки аналитической функции. Более подробно об этом см. [9].

При интегрировании необходимо выделять ветвь многозначной функции, что достигается заданием значения многозначной функции в некоторой точке контура интегрирования. Если контур интегрирования Γ замкнут, то начальной точкой z_0 этого контура считается та, в которой задано значение подынтегральной функции.

1.97. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{\Gamma}\dfrac{dz}{\sqrt{z}}$, где Γ – верхняя дуга окружности $|z|=1$. Для $\sqrt{z}$ берется та ветвь, для которой $\sqrt{1}=-1$.

Δ *Первый способ.* Функция $\sqrt{z}$ имеет два значения:
$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\,(\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}),\ \varphi=\arg z$, и $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\,(\cos\dfrac{\varphi+2\pi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi}{2})=$
$=-\sqrt{|z|}\,(\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2})$. Так как $z\in\Gamma$, где $|z|=1$, то $\sqrt{z}=\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}$ и $\sqrt{z}=-\cos\dfrac{\varphi}{2}-i\sin\dfrac{\varphi}{2}$. Условию $\sqrt{1}=-1$ удовлетворяет второе значение

$\sqrt{z}=-\cos\dfrac{\varphi}{2}-i\sin\dfrac{\varphi}{2}$. В самом деле, если $z=1\in\Gamma$, тогда $\arg z=0$ и, значит, $\sqrt{1}=-\cos 0-i\sin 0=-1$. Применив формулу Ньютона – Лейбница, получим $\int\limits_{\Gamma}\dfrac{dz}{\sqrt{z}}=\int\limits_{1}^{-1}\dfrac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}\Big|_1^{-1}=2(\sqrt{-1}-\sqrt{1})$. Положив в формуле $\sqrt{z}=-\cos\dfrac{\varphi}{2}-i\sin\dfrac{\varphi}{2}$ значение $z=-1$, найдем

$$\sqrt{-1}=-(\cos\frac{\arg(-1)}{2}+i\sin\frac{\arg(-1)}{2})=-(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=-i.$$

Согласно выбору ветви имеем $\sqrt{1} = -1$ и, значит, окончательно получим $I = 2(1-i)$.

Второй способ. Положим $z = \rho\, e^{i\varphi}$, где $\rho = 1, 0 \le \varphi \le \pi$. Из условия $\sqrt{1} = -1$ следует, что $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i(\varphi/2+\pi)}$. Тогда

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}}\,d\varphi = \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i(\varphi/2+\pi)}}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi ie^{i(\varphi/2-\pi)}d\varphi = 2e^{i(\varphi/2-\pi)}\Big|_0^\pi = 2(e^{-i\pi/2} - e^{-i\pi}) = 2(1-i). \ \blacktriangle$$

1.98. Вычислить интеграл $I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z}\,dz$ по дуге окружности $|z| = 1$, где $\ln z$ – главное значение логарифма, $\ln 1 = 0$.

Δ По формуле Ньютона – Лейбница имеем $I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z}\,dz = \frac{1}{4}\ln^4 z\Big|_1^i =$ $= \frac{\ln^4 i - \ln^4 1}{4} = \frac{1}{4}\ln^4 i = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi i}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{64}$, поскольку для главной ветви логарифма $\ln i = i\pi/2$. $\blacktriangle$

1.99. Вычислить $I = \int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, где Γ – верхняя полуокружность окружности $|z| = 1$; берется та ветвь функции $w = \sqrt[4]{z^3}$, для которой $\sqrt[4]{1} = 1$.

Отв.: $2\sqrt{2} - 4 + i2\sqrt{2}$.

1.100. Вычислить $\int_{-1}^{i} \frac{\cos z}{\sqrt{\sin z}}\,dz$ по прямой, соединяющей точки $z_1 = -1$ и $z_2 = i$; берется та ветвь функции $\sqrt{\sin z}$, для которой $\sqrt{\sin(-1)} = i\sqrt{\sin 1}$.

Отв.: $\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,1} + i(\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,1} - 2\sqrt{\sin 1})$.

1.101. Вычислить интеграл $\int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$ по следующим контурам: 1) Γ – полуокружность $|z| = 1,\ y \ge 0,\ \sqrt{1} = 1$; 2) Γ – полуокружность $|z| = 1,\ y \le 0,\ \sqrt{1} = 1$; 3) Γ – окружность $|z| = 1,\ \sqrt{-1} = i$. **Отв.:** 1) $-2(1-i)$; 2) $-2(1+i)$; 3) $4i$.

1.102. Вычислить интеграл $\oint_\Gamma \mathrm{Ln}\, z\, dz$, где: 1) Γ – единичная окружность и $\mathrm{Ln}\,1 = 0$; 2) Γ – единичная окружность и $\mathrm{Ln}\, i = \pi i/2$; 3) Γ – окружность $|z| = R$ и $\mathrm{Ln}\, R = \ln \mathrm{R} + 2\pi i$. **Отв.:** 1) $2\pi i$; 2) -2π; 3) $2\pi R i$.

Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ (рис. 1.22), и на самом контуре Γ, то для любой внутренней точки $z_0 \in D$ справедлива *интегральная формула Коши* (*ИФК*):

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\,, \qquad (1.42)$$

где обход контура Γ происходит так, что область D остается слева (*положительный обход*).

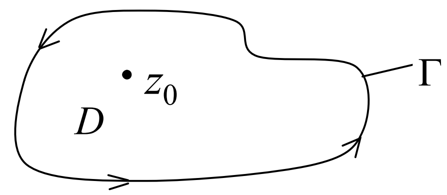


Рис. 1.22

С помощью ИФК можно вычислять некоторые интегралы, т. к., согласно (1.42),

$$\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi i f(z_0). \qquad (1.43)$$

1.103. Вычислить контурные интегралы (обход контура положительный):

а) $I=\oint\limits_{|z-1|=1}\dfrac{z^2+1}{z^2-1}dz;$ б) $I=\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{\cos z}{z^2+z-2}dz.$

Δ а) функция $\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ имеет две особые точки $z_1=1$ и $z_2=-1$ (в них знаменатель дроби обращается в нуль). Только точка z_1 лежит внутри области, ограниченной окружностью $|z-1|=1$ радиусом $R=1$ с центром в точке $z=1$. Представим подынтегральную функцию в виде
$\dfrac{z^2+1}{z^2-1}=\dfrac{z^2+1}{z+1}\cdot\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{f(z)}{z-1},\quad f(z)=\dfrac{z^2+1}{z+1}.$
По ИФК (1.43) имеем $I=2\pi i f(1)=2\pi i;$

б) подынтегральная функция

$$\frac{\cos z}{z^2+z-2}=\frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}$$

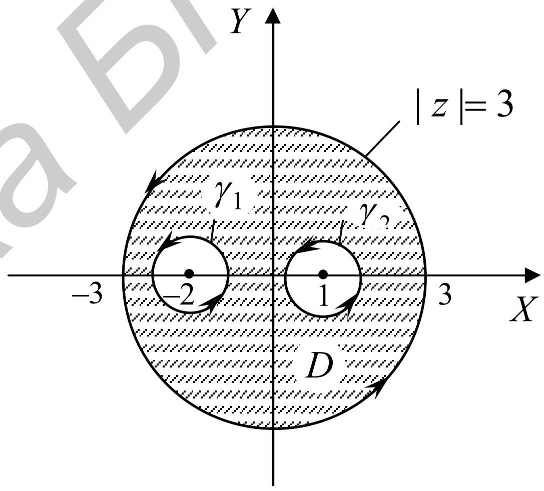


Рис. 1.23

внутри окружности $|z|=3$ имеет две особые точки $z_1=-2$ и $z_2=1$. Окружим их непересекающимися окружностями γ_1 и γ_2, лежащими внутри круга $|z|<3$. В результате получим трехсвязную область D, изображенную на рис. 1.23.

По теореме Коши для многосвязной области интеграл будет равен

$$I=\oint_{|z|=3}\frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}dz=\oint_{\gamma_1}\frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}dz+\oint_{\gamma_2}\frac{\cos z}{(z+2)(z-1)}dz.$$

Затем применяем ИФК к контурным интегралам в правой части этого равенства (1.43):

$$I=\oint_{\gamma_1}\frac{\cos z/(z-1)}{z+2}dz+\oint_{\gamma_2}\frac{\cos z/(z+2)}{z-1}dz=$$

$$= 2\pi\, i\left(\left.\frac{\cos z}{z-1}\right|_{z=-2} + \left.\frac{\cos z}{z+2}\right|_{z=1}\right) = \frac{2}{3}\pi i(\cos 1 - \cos 2). \ \blacktriangle$$

1.104. Вычислить интегралы по указанным контурам Γ (обход контура положительный):

1) $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$. а) $\Gamma: |z| = 1$; б) $\Gamma: |z| = 4$. **Отв.:** а) 0; б) $-8\pi i$.

2) $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{e^{2z}}{z-\pi i}\,dz$. а) $\Gamma: |z| = 4$; б) $\Gamma: |z| = 1$. **Отв.:** а) $2\pi i$; б) 0.

3) $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+1}$. а) $\Gamma: |z| = 1/2$; б) $\Gamma: |z-i| = 1$; в) $\Gamma: |z+i| = 1$.

Отв.: а) 0; б) π; в) $-\pi$.

4) $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z/2)}{z^2-1}\,dz$. а) $\Gamma: |z-1| = 1$; б) $\Gamma: |z| = 4$.

Отв.: а) π; б) $2\pi i$.

5) $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh}\pi(z+i)/2}{z^2-2z}\,dz$. $\Gamma: |z| = 1$. **Отв.:** π.

6) $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z}\,dz$. $\Gamma: |z| = 2$. **Отв.:** 0.

1.105. Вычислить контурный интеграл (обход контура положительный) $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+9}$, если: а) точка $3i$ лежит внутри контура Γ, а точка $-3i$ – вне его; б) точка $-3i$ лежит внутри контура Γ, а точка $3i$ – вне его; в) точки $\pm 3i$ лежат внутри контура Γ. **Отв.:** а) $\pi/3$; б) $-\pi/3$; в) 0.

1.106*. Вычислить все возможные значения интеграла $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)}$ при различных положениях контура Γ. Предполагается, что контур Γ не проходит ни через одну из точек 0; 1; –1.

Отв.: Если контур Γ содержит внутри себя точку 0 и не содержит ± 1, то $I = -2\pi i$; если содержит только одну из точек 1 или -1 и не содержит точку 0, то $I = \pi i$; во всех остальных случаях $I = 0$.

1.107. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^4-1}$, $a > 1$. **Отв.:** $\pi i/2$.

1.108. Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z\,dz}{z^2+a^2}$, если контур Γ содержит внутри себя круг $|z| \le a$. **Отв.:** $(\sin a)/a$.

Если функция $f(z)$ является аналитической в области D и на ее границе Γ, то $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$ имеет место формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \tag{1.44}$$

где $z_0 \in D,\ z \in \Gamma$. Таким образом, *аналитическая в D функция всюду в D имеет производные любого порядка $n \in \boldsymbol{N}$, т. е. она бесконечно дифференцируема в D.*

1.109. Вычислить интеграл $I = \oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{\sin z dz}{(z-i)^3}$.

Δ Так как точка $z_0 = i$ лежит внутри окружности $|z - i| = 1$, то, используя формулу (1.44) при $n = 2$, получаем

$$I = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin z\, dz}{(z-i)^{2+1}} = \frac{2\pi i}{2!} (\sin z)''_{z=i} = -\pi i \sin i = \pi \operatorname{sh} 1. \ \blacktriangle$$

1.110. Вычислить интеграл $\dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \dfrac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, если: а) точка 0 лежит внутри, а точка 1 – вне Γ; б) точка 1 лежит внутри, а точка 0 – вне Γ; в) обе точки 0 и 1 лежат внутри контура Γ. **Отв.:** а) 1; б) $-e/2$; в) $1 - e/2$.

1.111. Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} \dfrac{dz}{(z-1)^3 (z+1)^3}$, если: а) $\Gamma: |z - 1| = 1$; б) $\Gamma: |z + 1| = 1$; в) $\Gamma: |z| = R,\ R \neq 1$. **Отв.:** а) $3\pi i/8$; б) $-3\pi i/8$; в) 0.

1.112. Вычислить интегралы:

а) $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{\sin(\pi z/4)\, dz}{(z-1)^2 (z-3)}$; б) $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{1}{z^3} \cos \dfrac{\pi}{z+1} dz.$

Отв.: а) $-\dfrac{i}{8}\pi(\pi + 2)\sqrt{2}$; б) $\pi^3 i.$

1.5. Ряды в комплексной области

Числовые ряды. Абсолютная сходимость. Признаки сходимости. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и круг сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Ряды Тейлора. Основные тейлоровские разложения. Ряды Лорана.

Числовым комплексным рядом называется ряд вида

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + i y_n). \tag{1.45}$$

Здесь $z_n = x_n + i y_n$ – общий член ряда. Ряд (1.45) сходится тогда и только да, когда сходятся ряды

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}x_n \text{ и } y_1+y_2+\ldots+y_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}y_n.$$

Ряд (1.45) называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+iy_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{(x_n)^2+(y_n)^2}.$$

Основные свойства сходящихся и абсолютно сходящихся рядов с действительными членами сохраняются и для рядов с комплексными членами. Напомним эти свойства:

1°. (*Необходимый признак сходимости*). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty}z_n=0$.

2°. Если ряд (1.45) сходится абсолютно, то он сходится.

3°. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ с положительными членами, такой, что $|z_n|\le c_n$, начиная с некоторого номера $n=N$, то ряд (1.45) сходится абсолютно.

4°. (*Признак Даламбера*). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ выполнено условие $\lim_{n\to\infty}|z_{n+1}/z_n|=L$, то при $L<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ сходится абсолютно, а при $L>1$ этот ряд расходится.

5°. (*Признак Коши*). Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ выполнено условие $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}=L$, то при $L<1$ этот ряд сходится абсолютно, а при $L>1$ – расходится.

1.113. Исследовать на сходимость ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-i}{n^3+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{i\pi/n}}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!(e-i)^n}$.

Δ а) Имеем $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-i}{n^3+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n^3+1}-i\,\dfrac{1}{n^3+1}\right)$. Поскольку действительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+1}$, очевидно сходятся, являясь рядами Дирихле, то и исходный комплексный ряд сходится;

б) имеем $e^{i\pi/n}=\cos\dfrac{\pi}{n}+i\sin\dfrac{\pi}{n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\pi/n)}{n}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(\pi/n)}{n}$ сходится. Значит, исходный ряд расходится.

в) по признаку Даламбера имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^{n+1}n!(e-i)^n}{(n+1)!n^n(e-i)^{n+1}}\right| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \dfrac{1}{|e-i|} = \dfrac{e}{|e-i|} = \dfrac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1$. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. ▲

1.114. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, если

а) $z_n = \dfrac{n}{(2i)^n}$; б) $z_n = \dfrac{n!}{(in)^n}$; в) $z_n = e^{in}$; г) $z_n = \dfrac{e^{in\varphi}}{n}$;

д) $z_n = \dfrac{\cos(in)}{2^n}$; е) $z_n = \dfrac{n\sin(in)}{3^n}$; ж) $z_n = \left(\dfrac{2-i}{3}\right)^{n^2}$;

з) $z_n = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$; и) $z_n = \dfrac{\operatorname{ch}(i\pi/n)}{n^{\ln n}}$; к) $z_n = \dfrac{n}{\operatorname{tg}(i\pi n)}$.

Отв.: а) сх. абс.; б) сх. абс.; в) расх.; г) сх. неабс.; д) расх.; е) сх. абс.; ж) сх. абс.; з) сх.; и) сх.; к) расх.

Функциональным рядом (ФР) *в комплексной области* называется ряд вида

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \tag{1.46}$$

в котором $f_n(z)$ – ФКП $z = x + iy$, определенные на некотором множестве G. Множество $D \subseteq G$ точек z, в которых ФР (1.46) сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

Если ФР (1.46) сходится в D к сумме $f(z)$, то пишут $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z), z \in D.$ Выражение $r_n(z) = f(z) - S_n(z)$, где $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$, называется *n-м остатком ряда.*

Ряд (1.46) называется *равномерно сходящимся в* D к сумме $f(z)$, если

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon), \forall n \geq N : |r_n(z)| = \left|f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| < \varepsilon, \forall z \in D.$$

Справедлива

Теорема 1.6 (*Вейерштрасса*). *Если члены ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *удовлетворяют неравенствам* $|f_n(z)| \leq a_n$, $z \in D, n \in \boldsymbol{N}$, *где* $a_n > 0$, *а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится равномерно в* D.

Комплексные равномерно сходящиеся ФР обладают следующими свойствами:

1°. Если члены равномерно сходящегося в D ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются аналитическими в D функциями, то этот ряд можно почленно интегрировать вдоль любой кривой $l \in D$, причем $\int_l \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_l f_n(z)\, dz$.

2°. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ аналитических в D функций сходится в каждой точке $z \in D$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ сходится в D равномерно. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ можно почленно дифференцировать в D и $f'(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z),$ где $f(z)$ – сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

3°. Пусть члены $f_n(z)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ – аналитические в D функции и этот ряд сходится равномерно в D к сумме $f(z)$. Тогда $f(z)$ является аналитической в D.

Для определения области абсолютной сходимости комплексных ФР используются признаки Коши или Даламбера. Так, если существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(z)|} = L(z) \tag{1.47}$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = L(z), \tag{1.48}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится абсолютно при $L(z) < 1$ и расходится при $L(z) > 1$.

1.115. Исследовать на равномерную сходимость ФР $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i(z^2-2z+3)}}{n^2}$.

Δ Данный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса на всей комплексной плоскости, поскольку в этой плоскости выполняется очевидное неравенство $\left| \dfrac{e^{i(z^2-2z+3)}}{n^2} \right| \le \dfrac{1}{n^2}$, а знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ – сходящийся. ▲

1.116. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n2^{-n}}{(z-2-i)^n}$.

Δ Абсолютную сходимость этого ряда можно установить как по формуле (1.47), так и по формуле (1.48). Например, по формуле (1.48) находим

$$L(z) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)2^{-(n+1)}(z-2-i)^n}{(z-2-i)^{n+1} n \cdot 2^{-n}} \right| = \frac{1}{2\,|z-(2+i)|} < 1 \Rightarrow |z-(2+i)| > \frac{1}{2}.$$

Итак, данный ряд сходится абсолютно во внешности круга с центром в точке $z_0 = 2 + i$ и радиусом $1/2$. ▲

1.117. Найти области сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+5}{(z-2i)^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(z-2)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{ni^n 2^n}{(z+i)^{n+1}}$;

г) $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2} (n+1)i^{n+2}(z-i)^n$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{(z+i)^{2n}}{2^n(n+1)} + \dfrac{4n^2}{3^n(z+i)^n} \right)$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+i}{4n(z+1)} \right)^n$; ж)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-z^2)^n$; з)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\dfrac{z^2}{1+z^2} \right)^n$.

Отв.: а) $1 < |z-2i| < 2$; б) $|z-2| > 1$; в) $|z+i| > 2$; г) $1 < |z-i| < +\infty$; д) $1/3 < |z+i| < \sqrt{2}$; е) $|z+1| > 1/4$; ж)* $|z-1||z+1| < 1$; з)* область сходимости определяется соотношением $\left| \dfrac{z^2}{1+z^2} \right| < 1$.

Комплексным степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0) + \ldots, \qquad (1.49)$$

где $c_n = a_n + ib_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$. При $z_0 = 0$ он превращается в ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Для степенных рядов (1.49) справедлива

Теорема 1.7 (*Абеля*). *Пусть степенной ряд* (1.49) *сходится в некоторой точке* $z_1 \neq z_0$. *Тогда этот ряд сходится абсолютно в круге* $|z-z_0| < |z_1 - z_0| = R$ *и равномерно в круге* $|z-z_0| \le q < R$ (рис. 1.24). *Если же этот ряд расходится в некоторой точке* z_2, *тогда он расходится в каждой точке* z, *удовлетворяющей неравенству* $|z-z_0| > |z_2 - z_0|$.

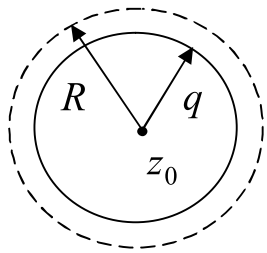


Рис. 1.24

Для каждого степенного ряда существует так называемый *круг сходимости ряда* с центром в точке $z = z_0$ и *радиусом сходимости* $R \ge 0$. Радиус сходимости ряда можно вычислить по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \; c_n \neq 0, \forall n, \qquad (1.50)$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \qquad (1.51)$$

если указанные пределы существуют.

Имеет место

Теорема 1.8 (*о почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов*). *Пусть* $R>0$ *– радиус сходимости степенного ряда* (1.49)*. Тогда этот ряд можно почленно дифференцировать в круге* $|z-z_0|<R$ *любое число раз. Получаемые при этом дифференцировании ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд. Кроме того, ряд можно почленно интегрировать вдоль любой гладкой кривой, расположенной в круге сходимости* $|z-z_0|<R$.

Почленное дифференцирование и интегрирование комплексных степенных рядов, как и в действительном анализе, позволяет иногда найти их сумму.

1.118. Найти радиус сходимости и сумму ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$.

Δ а) имеем $c_n=(-1)^{n-1}/n$. По формуле (1.51) находим радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, т. е. ряд сходится абсолютно в круге $|z|<1$ к некоторой сумме $S(z)$:

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}. \tag{1.52}$$

Продифференцировав равенство (1.52) почленно, получим $S'(z)=1-z+z^2-z^3+...=\dfrac{1}{1+z}$, $|z|<1$, откуда

$$S(z)=\int\frac{dz}{1+z}=\mathrm{Ln}(1+z)+C. \tag{1.53}$$

Из равенства (1.52) следует, что $S(0)=0$. Тогда, согласно (1.53), получаем $C=0$. Взяв главную ветвь логарифма, из соотношения (1.53) будем иметь

$$S\,(z)=\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+...,\tag{1.54}$$

где $|z|<1$;

б) Имеем $c_n=n$. По формуле (1.50) $R=1$, т.е. данный ряд сходится абсолютно в круге $|z|<1$ к некоторой сумме

$$S\,(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=z\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}\Rightarrow\frac{S(z)}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1},\ z\neq 0.$$

Интегрируя это равенство почленно, будем иметь

$$\int_0^z\frac{S(t)}{t}dt=\int_0^z\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z nt^{n-1}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\frac{z}{1-z},\ |z|<1.$$

Отсюда дифференцированием по z находим

$$\frac{S(z)}{z}=\frac{1}{(1-z)^2}\Rightarrow S(z)=\frac{z}{(1-z)^2}.\quad ▲$$

1.119. Найти круг сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n(z-2)^n}{(n+1)(n+2)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n^2}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(z-i)^n}{n^n}$; ж) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n(z+1)^n}{(n+1)(n+2)}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(z+1)^n}{\sqrt{3n-1}2^n}$; и) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n z^{n!}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos^n\left(\frac{\pi i}{\sqrt{n}}\right)z^n$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sin^n(1+in)}$; м) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos in\cdot z^n$.

Отв.: а) $|z|<e$; б) $|z|<2$; в) $|z-2|<1/\sqrt{2}$; г) $|z-1|<1$; д) $|z-1|<\sqrt{2}/3$; е) $|z-i|<e$; ж) $|z+1|<1/\sqrt{2}$; з) $|z+1|<2/5$; и) $|z|<1$; к) $|z|<1$; л) $R=\infty$; м) $|z|<1/e$.

1.120. Радиус сходимости R ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ таков, что $R>0$. Определить радиус сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^k c_n z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2^n-1)\,c_n z^n$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n c_n z^n$;

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n^k z^n$; е)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+z_0^n)\,c_n z^n$.

Отв.: а) R; б) $R/2$; в) ∞; г) 0; д) R^k; е)* R, если $|z_0|<1$, и $\frac{R}{|z_0|}$, если $|z_0|>1$.

1.121. Найти сумму ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

Отв.: а) $-\ln(1-z)$, $|z|<1$; б) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$, $|z|<1$.

Теорема 1.9. *Функция* $f(z)$*, однозначная и аналитическая в точке* $z=z_0$*, разлагается в окрестности этой точки в степенной ряд Тейлора*:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{1.55}$$

коэффициенты c_n *которого вычисляются по формулам*

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n=0,1,2,..., \tag{1.56}$$

где Γ *– окружность с центром в точке* z_0*, целиком лежащая в окрестности точки* z_0*, в которой* $f(z)$ *аналитическая.*

Эта окружность проходит через особую точку z^* функции $f(z)$, ближайшую к точке z_0, т. е. *радиус сходимости ряда Тейлора* (1.55) *равен расстоянию от точки* z_0 (*центра разложения*) *до ближайшей особой точки* z^* *функции* $f(z)$.

Приведем *разложения в ряд Тейлора основных элементарных функций,* называемые *основными тейлоровскими разложениями.*

1°. $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \ z \in \boldsymbol{C}.$ (1.57)

2°. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \ z \in \boldsymbol{C}.$ (1.58)

3°. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ z \in \boldsymbol{C}.$ (1.59)

4°. $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ z \in \boldsymbol{C}.$ (1.60)

5°. Ранее в (1.54) получено разложение

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \ldots, \quad |z| < 1. \tag{1.61}$$

6°. Для главной ветви функции $(1+z)^\alpha$ имеет место разложение

$$\begin{aligned}(1+z)^\alpha &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \ldots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots, \quad |z| < 1.\end{aligned} \tag{1.62}$$

В частности,

7°. $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots, \quad |z| < 1.$ (1.63)

8°. $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots, \quad |z| < 1.$ (1.64)

Далее,

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \ldots . \tag{1.65}$$

Ближайшей особой точкой к точке $z_0 = 0$ является точка $z^* = \pi/2$. Поэтому радиус сходимости ряда (1.65) $R = \pi/2$.

9°. $\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad |z| < 1.$ (1.66)

10°. $\arcsin z = z + \frac{2!}{2^2(1!)^2} \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad |z| < 1.$ (1.67)

Основные тейлоровские разложения применяются для разложения в ряд Тейлора других функций.

1.122. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0:

а) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3},\ z_0=0;$ б) $f(z)=\ln(2-5z),\ z_0=-3.$

Δ Разлагаем $f(z)$ на простейшие дроби:

$$\frac{z}{z^2-2z-3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z-3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-z/3}.$$

Отсюда согласно разложениям (1.63) и (1.64) получаем

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(1-z+z^2-z^3+\ldots\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\frac{z^3}{27}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{3}z+\frac{8}{9}z^2-\frac{28}{27}z^3+\ldots\right). \tag{1.68}$$

Ближайшей к точке $z_0=0$ особой точкой функции $f(z)$ является точка $z^*=-1$. Поэтому радиус сходимости полученного ряда (1.68) $R=1$;

б) Введем замену $\xi=z+3$. Тогда

$$f(z)=\ln(2-5z)=\ln(2-5(\xi-3))=\ln(17-5\xi)=$$
$$=\ln 17\left(1-\frac{5}{17}\xi\right)=\ln 17+\ln\left(1-\frac{5}{17}\xi\right)=\varphi(\xi).$$

Отсюда следует, что разложение функции $f(z)$ по степеням $z+3$ равносильно разложению функции $\varphi(\xi)$ по степеням ξ. Используя стандартное разложение (1.61) при $z=-\dfrac{5}{17}\xi$, получаем

$$\varphi(\xi)=\ln 17+\left(-\frac{5}{17}\xi-\frac{(5\xi/17)^2}{2}-\frac{(5\xi/17)^3}{3}-\ldots\right),\ \left|\frac{5}{17}\xi\right|<1.$$

Поскольку $\xi=z+3$, то отсюда имеем разложение заданной функции

$$f(z)=\ln(2-5z)=\ln 17-$$
$$-\left(\frac{5}{17}(z+3)+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{17}\right)^2(z+3)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{17}\right)^3(z+3)^3+\ldots\right),\quad \frac{5}{17}|z+3|<1,$$

т.е. $|z+3|<\dfrac{17}{5}$, или кратко, $\ln(2-5z)=\ln 17-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5}{17}\right)^n\dfrac{(z+3)^n}{n},\ |z+3|<\dfrac{17}{5}$. ▲

1.123. Используя основные разложения, а также возможность почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов, разложить функции в ряд по степеням z и указать области сходимости полученных рядов:

а) $\sqrt[3]{27-z}$; б) $\dfrac{3z+1}{(z-2)^2}$; в) $\sin 2z\cdot\cos 2z$; г) $\ln(z^2+3z+2)$;

д) $\ln(z+\sqrt{1+z^2})$; е) $\int\limits_0^z e^{-\xi^2/2}\,d\xi$; ж) $\int\limits_0^z \dfrac{\sin\xi^2}{\xi^2}\,d\xi$;

з)* $\dfrac{z\cos z-\sin z}{z^2}=\left(\dfrac{\sin z}{z}\right)'$; и) $\dfrac{z\sin z-1+\cos z}{z^2}$.

Отв.: а) $3-\dfrac{z}{27}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-4)}{n!3^{4n-1}}z^n, |z|<27$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{7n+1}{2^{n+2}}z^n, |z|<2$.

● $\dfrac{3z+1}{(z-2)^2}=-(3z+1)\left(\dfrac{1}{z-2}\right)'$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{4n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}, |z|<\infty$;

г) $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(1+2^{-n})\dfrac{z^n}{n}, |z|<1$; д) $z+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\cdot\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}, |z|<1$;

е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{2n+1}}{2^n\cdot n!(2n+1)}, |z|<\infty$; ж) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^{4n+2}}{2(2n+1)!(2n+1)}, |z|<\infty$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n\cdot z^{2n-1}}{(2n+1)!}, |z|<\infty$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(2n-1)\cdot z^{2n-2}}{(2n)!}, |z|<\infty$.

● $\dfrac{z\sin z-1+\cos z}{z^2}=\left(\dfrac{1-\cos z}{z}\right)'$.

1.124. Разложить функции в ряд по степеням $z-z_0$ и определить области сходимости рядов:

а) $\dfrac{1}{1-z}, z_0=3i$; б) $\dfrac{1}{z^2-6z+5}, z_0=3$; в)* $\dfrac{1}{z^2}, z_0=2$;

г) $e^{z^2-4z+1}, z_0=2$; д) $\sin(z^2+4z), z_0=-2$; е) $\ln(z^2+6z+12), z_0=-3$.

Отв.: а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-3i)^n}{(1-3i)^{n+1}}, |z-3i|<|1-3i|=\sqrt{10}$; б) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-3)^{2n}}{4^{n+1}}, |z-3|<2$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-1}, |z-2|<2$; г) $e^{-3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-2)^{2n}}{n!}, |z|<\infty$;

д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\dfrac{\sin 4}{(2n)!}(z+4)^{4n}+\dfrac{\cos 4}{(2n+1)!}(z+4)^{4n+2}\right), |z|<\infty$;

е) $\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(z+3)^{2n}}{n\cdot 4^n}, |z+3|<2$.

Обобщением ряда Тейлора является *ряд Лорана,* в который разлагается аналитическая функция в некотором кольце комплексной плоскости. Имеет место

Теорема 1.10. *Функция* $f(z)$, *аналитическая и однозначная в кольце* $\rho<|z-z_0|<R$, *разлагается внутри его в сходящийся ряд*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \qquad (1.69)$$

Коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz;\quad c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}f(z)(z-z_0)^{n-1}\,dz, \qquad (1.70)$$

где γ – окружность $|z-z_0|=r$, $\rho<r<R$. Это разложение единственно.

Ряд (1.69) с коэффициентами (1.70) называется *рядом Лорана* функции $f(z)$ в кольце $\rho<|z-z_0|<R$. Совокупность $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ с неотрицательными степенями $z-z_0$ называется *правильной,* или *регулярной частью ряда Лорана,* а совокупность

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

с отрицательными степенями $z-z_0$ – *главной частью ряда Лорана.*

Формулы (1.70) для коэффициентов ряда Лорана на практике применяются редко, поскольку, как правило, приводят к громоздким вычислениям. Обычно по возможности используются тейлоровские разложения элементарных функций.

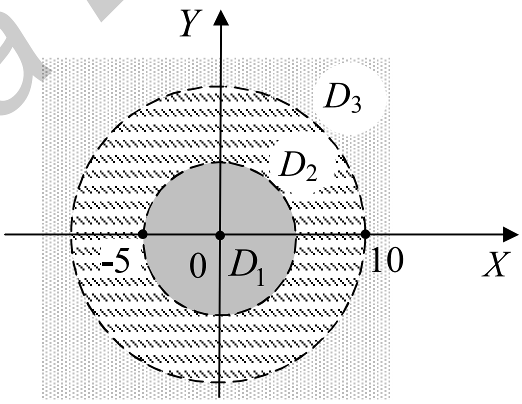


Рис. 1.25

1.125. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ в кольце $1<|z|<2$.

Δ В данном кольце $|z/2|<1$ и $|1/z|<1$. Тогда

$$\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.\ \blacktriangle$$

1.126. Найти все лорановские разложения функции $f(z)=\dfrac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$ в кольце по степеням z.

Δ Особыми точками функции $f(z)$ являются корни знаменателя $50z^2+5z^3-z^4=-z^2(z-10)(z+5)$, т. е. $z_0=0, z_1=10$ и $z_2=-5$. Пусть D_1 – кольцо $0<|z|<5$, D_2 – кольцо $5<|z|<10$, D_3 – внешность круга $|z|>10$ (рис. 1.25). Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби:

$$f(z)=\frac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z-10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+5}. \qquad (1.71)$$

В кольце $D_1 : 0 < |z| < 5 \Rightarrow |z|/5 < 1$ и $|z|/10 < 1$, поэтому из равенства (1.71) получим

$$f(z) = -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1 - z/10} +$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1 + z/5} = -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} +$$

$$+\frac{1}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{10}\right)^n + \frac{1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{5}\right)^n = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^{n+2}} + \frac{(-1)^n}{5^{n+2}}\right)z^n.$$

Итак, в кольце $0 < |z| < 5$ главная часть ряда Лорана содержит два слагаемых $\frac{2}{z^2}$ и $-\frac{1}{10z}$.

В кольце $D_2 : 5 < |z| < 10 \Rightarrow |5/z| < 1$ и $|z|/10 < 1$. Тогда из равенства (1.71) получим

$$f(z) = -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1 - z/10} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z(1 + 5/z)} =$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{10}\right)^n + \frac{1}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{z}\right)^n = \tag{1.72}$$

$$= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{10^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{n-1}}{z^{n+1}}.$$

Заметим, что в кольце $5 < |z| < 10$ главная часть ряда Лорана (1.72) содержит бесконечное множество слагаемых.

В кольце $D_3 : |z| > 10 \Rightarrow |10/z| < 1$ и $|5/z| < 1$. Тогда

$$f(z) = -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z(1 - 10/z)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z(1 + 5/z)} = -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} -$$

$$-\frac{1}{10z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{10}{z}\right)^n + \frac{1}{5z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{z}\right)^n = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{10^{n-1}}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{n-1}}{z^{n+1}} =$$

$$= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{10z} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(10^{n-1} + (-1)^{n+1}5^{n-1}\right)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Итак, в D_3 лорановское разложение функции $f(z)$ содержит только главную часть. ▲

1.127. Найти все лорановские разложения функции $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4}$ по степеням $z + 1 - 3i = z - (-1 + 3i)$.

Δ Особыми точками функции $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4}$ являются $z_1 = -2$ и $z_2 = 2$ (рис. 1.26), а центром разложения – точка $z_0 = -1 + 3i.$

Радиусы ρ и R колец разложения находятся как расстояния от z_0 до особых точек функции $f(z)$. Из рис. 1.26 имеем

$$\rho = |z_1 - z_0| = \sqrt{(-1+2)^2 + 3^2} = \sqrt{10},\ R = |z_2 - z_0| = \sqrt{(1+2)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Разложим функцию $f(z)$ на простейшие дроби: $\dfrac{2z}{z^2-4} = \dfrac{1}{z+2} + \dfrac{1}{z-2}$.

В круге $D_1 : |z+1-3i| < \sqrt{10}$ имеем $|z+1-3i|/\sqrt{10} < 1$. В этом круге функция $f(z)$ аналитическая. Представим ее в виде

$$\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z+1-3i)+(1+3i)} + \frac{1}{(z+1-3i)-(3-3i)} = \frac{1}{1+3i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z+1-3i}{1+3i}} -$$

$$-\frac{1}{3-3i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+1-3i}{3-3i}}.$$

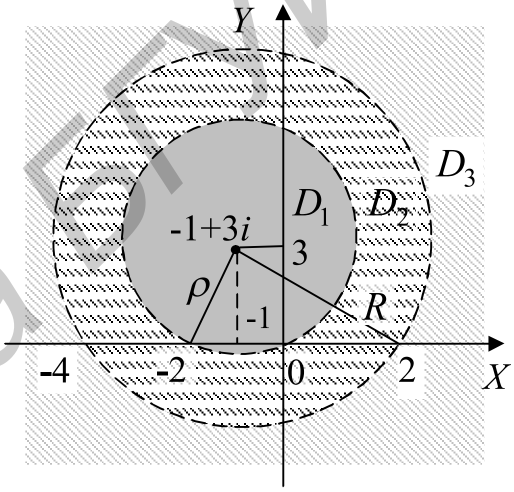


Рис. 1.26

Так как в круге D_1 выполняются неравенства

$$\left|\frac{z+1-3i}{1+3i}\right| = \frac{|z+1-3i|}{\sqrt{10}} < 1$$

и

$$\left|\frac{z+1-3i}{3-3i}\right| = \frac{|z+1-3i|}{3\sqrt{2}} < 1,$$

то, согласно формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$f(z) = \frac{1}{1+3i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z+1-3i}{1+3i}\right)^n - \frac{1}{3-3i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1-3i}{3-3i}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(1+3i)^{n+1}} - \frac{1}{(3-3i)^{n+1}}\right)(z+1-3i)^n.$$

В кольце $D_2 : \sqrt{10} < |z+1-3i| < 3\sqrt{2} \Rightarrow |z+1-3i|/3\sqrt{2} < 1$ и $\sqrt{10}/|z+1-3i| < 1$.

Тогда

$$\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z+1-3i)+(1+3i)} + \frac{1}{(z+1-3i)-(3-3i)} =$$

$$= \frac{1}{(z+1-3i)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1+3i}{z+1-3i}} - \frac{1}{3-3i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+1-3i}{3-3i}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+3i)^n}{(z+1-3i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1-3i)^n}{(3-3i)^{n+1}}.$$

В области

$D_3 : |z+1-3i| > 3\sqrt{2} \Rightarrow 3\sqrt{2}/|z+1-3i| < 1$ и $\sqrt{10}/|z+1-3i| < 1$.

Тогда

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1-3i)+(1+3i)}+\frac{1}{(z+1-3i)-(3-3i)}=$$

$$=\frac{1}{(z+1-3i)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1+3i}{z+1-3i}}+\frac{1}{(z+1-3i)}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3-3i}{z+1-3i}}=\frac{1}{(z+1-3i)}\times$$

$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+3i)^n}{(z+1-3i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-3i)^n}{(z+1-3i)^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+3i)^n+(3-3i)^n}{(z+1-3i)^{n+1}}.\quad ▲$$

1.128. Функцию $f(z)=z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$.

Δ Преобразуем функцию $f(z)$ к виду

$$f(z)=((z-1)+1)\sin\left(1-\frac{1}{(z-1)^2}\right)=(z-1)\sin\left(1-\frac{1}{(z-1)^2}\right)+$$
$$+\sin\left(1-\frac{1}{(z-1)^2}\right)=(z-1)\left(\sin 1\cdot\cos\frac{1}{(z-1)^2}-\cos 1\cdot\sin\frac{1}{(z-1)^2}\right)+ \qquad (1.73)$$
$$+\sin 1\cos\frac{1}{(z-1)^2}-\cos 1\cdot\sin\frac{1}{(z-1)^2}.$$

Используя разложения (1.58) и (1.59) для $\sin t$ и $\cos t$ при $t=1/(z-1)^2$, будем иметь

$$\cos\frac{1}{(z-1)^2}=1-\frac{1}{2!(z-1)^4}+\frac{1}{4!(z-1)^8}-\ldots,$$

$$\sin\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{3!(z-1)^6}+\frac{1}{5!(z-1)^{10}}-\ldots.$$

Отсюда с учетом (1.73) окончательно получаем

$$f(z)=\sin 1\left((z-1)-\frac{1}{2!(z-1)^3}+\frac{1}{4!(z-1)^7}-\ldots\right)-\cos 1\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^5}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5!(z-1)^9}-\ldots\right)+\sin 1\left(1-\frac{1}{2!(z-1)^4}+\frac{1}{4!(z-1)^8}-\ldots\right)-$$
$$-\cos 1\left(\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{3!(z-1)^6}+\frac{1}{5!(z-1)^{10}}-\ldots\right).\quad ▲$$

1.129. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0:

а) $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, $z_0 = 1$. **Отв.:** $\dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{z-1}$.

б) $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$, $z_0 = i$. **Отв.:** $-\dfrac{i}{2(z-i)} + \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n (z-i)^n}{(2i)^n}$.

в) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 3iz - 2}$, $z_0 = 2i$. **Отв.:** $-\dfrac{i}{z-2i} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^n}{i^n}$.

г) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}$, $z_0 = -1$. **Отв.:** $\dfrac{1/3}{(z+1)^2} - \dfrac{2/9}{z+1} - \dfrac{2}{9}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$.

д)* $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$, $z_0 = i$.

Отв.: $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z-i} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1+i}{4(1-i)^n} + \dfrac{(n+1)(1+i)}{4(1-i)^{n+1}} - \dfrac{i^{n+1}}{2^{n+3}}\right)(z-i)^n$.

е)* $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-2)^2}$, $z_0 = 2$.

Отв.: $\dfrac{1/9}{z-2} + \dfrac{3/2}{(z-2)^2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(z-2)^n}{3^{n+3}}$.

1.130. Функцию $f(z)$ разложить в ряд Лорана в указанном кольце D:

а) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2 - 4z + 3}$, $D: |z-1| > 2$. **Отв.:** $\dfrac{1}{z-1} + 5\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2^{n-2}}{(z-1)^n}$.

б) $f(z) = \dfrac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}$, $D: 1 < |z| < 2$. **Отв.:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{z^{n+1}} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}$.

в) $f(z) = \dfrac{z^5}{(z^2-4)^2}$, $D: |z| > 2$. **Отв.:** $z + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+2)4^{n+1}}{z^{2n+1}}$.

г) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$, $D: 1 < |z| < 2$.

Отв.: $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{(-1)^n}{5} z^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{5\cdot 4^{n+1}} z^{2n}$.

д) $f(z) = \dfrac{z}{(z+3)(z+2)^2}$, $D: |z+2| < 2$.

Отв.: $\dfrac{3}{z+2} - \dfrac{2}{(z+2)^2} - 3\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z+2)^n$.

е) $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$, $D: 1 < |z| < 2$.

Отв.: $\dfrac{1}{z-2}+i\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n$ при $0<|\,z-2\,|<\sqrt{5}$.

1.131. Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

а) $z\cdot e^{\frac{1}{z+i}},\ z_0=-i.$ **Отв.:** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{i}{n!}\right)(z+i)^{-n}.$

б)* $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0=2.$

Отв.: $\cos 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n-1}4^{2n-1}\sin 1}{(2n-1)!(z-2)^{4n-2}}+\dfrac{(-1)^n 4^{2n}\cos 1}{(2n)!(z-2)^{4n}}\right)$ при $0<|\,z-2\,|<\infty$.

в) $z^2\sin\dfrac{1}{z-1},\ z_0=1.$

Отв.: $(z-1)+2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n-1}(1/(2n-1)!-1/(2n+1)!)}{(z-1)^{2n-1}}+\dfrac{2(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n}}\right)$

при $0<|\,z-1\,|<\infty$.

г)* $\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z}$ в области $0<|\,z\,|<\infty$. **Отв.:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{2n}z^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_{-2n}z^{2n}$, где

$c_{2n}=c_{-2n}=(-1)^n\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)!(2n+2k+1)!},\ n=0,1,2,\ldots$.

д) $\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z},\ z_0=0.$ **Отв.:** $\dfrac{4^2}{2!2z^3}-\dfrac{4^4}{4!2z^5}+\dfrac{4^6}{6!2z^7}-\ldots$.

е)* $\left(1-z+2z^2\right)\sin\dfrac{1}{z^2},\ z_0=0.$

Отв.: $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{4n}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{4n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{4n+2}}.$

1.6. Нули и изолированные особые точки аналитических функций

Нули аналитических функций. Устранимые особые точки. Полюсы. Существенно особые точки. Поведение функции в бесконечно удаленной точке.

Нулем аналитической в области D функции $f(z)$ называется комплексное число $a\in D$, для которого $f(a)=0$. Разложение функции $f(z)$ в окрестности ее нуля в степенной ряд имеет вид

$$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n, \; c_1 \neq 0. \tag{1.74}$$

При выполнении условий (1.74) нуль a функции $f(z)$ называется *простым.*

Точка $z = a$ называется *нулем порядка* k аналитической в D функции $f(z)$, если в разложении $f(z)$ в ряд Тейлора

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_{k-1}(z-a)^{k-1} + c_k(z-a)^k + \ldots \tag{1.75}$$

в окрестности точки a коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ равны нулю, но $c_k \neq 0$, т.е. ряд (1.75) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} f(z) &= c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + c_{k+2}(z-a)^{k+2} + \ldots = \\ &= (z-a)^k (c_k + c_{k+1}(z-a) + \ldots) = (z-a)^k \sum_{p=0}^{\infty} c_{k+p}(z-a)^p. \end{aligned} \tag{1.76}$$

Если обозначить $\sum\limits_{p=0}^{\infty} c_{k+p}(z-a)^p = \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая в окрестности точки a функция, то представление (1.76) аналитической функции $f(z)$ в окрестности ее нуля a порядка k имеет вид

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z), \varphi(a) \neq 0. \tag{1.77}$$

Как и в действительном анализе, имеет место

Теорема 1.11. *Для того чтобы точка $z = a$ была нулем порядка k аналитической функции $f(z)$, необходимо и достаточно выполнения соотношений*

$$f(a) = f'(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0, \; f^{(k)}(a) \neq 0. \tag{1.78}$$

1.132. Определить порядок нуля функции:

а) $f(z) = z(1-\cos z)$; б) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1 + z^2/2}{e^{3z} - 1}$.

Δ а) разложим $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z:

$$z(1-\cos z) = z\left(1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \ldots\right) = z^3\left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \ldots\right) = z^3\varphi(z),$$

где $\varphi(z) = 1/2 - z^2/24 + \ldots$ – аналитическая в окрестности $z = 0$ функция, $\varphi(0) \neq 0$.

Согласно критерию (1.77), заключаем, что $z = 0$ – нуль 3-го порядка данной функции;

б) в точке $z = 0$ обращаются в нуль и числитель, и знаменатель данной функции. Представим их рядами Тейлора по степеням z: $f(z) =$

$$= \frac{(1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \ldots) - 1 + z^2/2}{(1 + 3z + 9z^2/2! + \ldots) - 1} = \frac{z^4/4! - z^6/6! + \ldots}{3z + 9z^2/2! + \ldots} = z^3\left(\frac{1/4! - z^2/6! + \ldots}{3 + 9z/2! + \ldots}\right).$$

Так как выражение, стоящее в скобках, при $z = 0$ не обращается в нуль и является, очевидно, аналитической функцией, то, согласно (1.77), точка $z=0$ – нуль 3-го порядка функции $f(z)$. ▲

1.133. Определить нули функции $f(z)=z^2\sin z$ и их порядок.

Δ Ясно, что нулями данной функции являются точки $z_0=0$ и $z_n=n\pi, n\in \boldsymbol{Z}$. Имеем последовательно:

$$f'(z)=2z\sin z+z^2\cos z\Rightarrow f'(0)=0;\quad f''(z)=2\sin z+$$
$$+4z\cos z-z^2\sin z\Rightarrow f''(0)=0;\quad f'''(z)=6\cos z-6z\sin z-z^2\cos z\Rightarrow$$

$\Rightarrow f'''(0)=6\neq 0$. Согласно (1.78) заключаем, что $z=0$ – нуль 3-го порядка данной функции. Поскольку $f'(\pi n)=(-1)^n n^2\pi^2\neq 0, n\in \boldsymbol{Z}$, то точки $z_n=n\pi$ – нули 1-го порядка для $f(z)$. ▲

1.134. Определить нули функций и их порядок. Для пунктов д) и е) определить порядок нуля $z_0=0$.

а) $f(z)=\dfrac{z^8}{z-\sin z}$. **Отв.:** $z=0$ – нуль 5-го порядка.

б) $f(z)=(1-\operatorname{sh} z)^2 z$. **Отв.:** $z=0$ – нуль 3-го порядка, $z_n=(4n+1)\pi i/2, n\in \boldsymbol{N}$ – нули 2-го порядка.

в) $f(z)=\cos z^3$. **Отв.:** $z_n=\sqrt[3]{(2n+1)\pi/2}, n=0,1...$ – нули 1-го порядка.

г) $f(z)=(z^2+1)^3$. **Отв.:** $z_n=n\pi i, n\in \boldsymbol{N}$, – нули 3-го порядка.

д) $f(z)=\dfrac{z^6}{(z/2)^2-\sin^2(z/2)}$. **Отв.:** $z=0$ – нуль 2-го порядка.

е) $f(z)=\dfrac{(1-\cos 2z)^2}{z-\operatorname{sh} z}$. **Отв.:** $z=0$ – нуль 1-го порядка.

Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична и однозначна всюду, кроме самой точки z_0.

Точка z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0. Так, для функций $f(z)=(e^z-1)/z$ и $g(z)=(\sin z)/z$ особой точкой является точка $z_0=0$. Поскольку $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{z\to 0}g(z)=1$, то $z_0=0$ – устранимая особая точка для функций $f(z)$ и $g(z)$.

Изолированная особая точка называется: 1) *полюсом* для функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$; 2) *существенно особой точкой* (с. о. т.), если $f(z)$ не имеет предела при $z\to z_0$.

Тип изолированной особой точки тесно связан с характером разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в круге $0<|z-z_0|<\varepsilon$ с выколотым центром z_0.

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1.12. *Изолированная особая точка* z_0 *функции* $f(z)$ *является устранимой особой точкой тогда и только тогда, когда лорановское разложение функции* $f(z)$ *в окрестности точки* z_0 *не содержит главной части, т. е. имеет вид*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\ . \tag{1.79}$$

Следовательно, *если* z_0 *– устранимая особая точка для* $f(z)$, *то, согласно* (*1.79*), $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$.

Теорема 1.13. *Изолированная особая точка* z_0 *функции* $f(z)$ *является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения функции* $f(z)$ *в окрестности точки* z_0 *содержит конечное число* k, $k\geq 1$, *отличных от нуля членов, т. е. имеет вид*

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}+\frac{c_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ c_{-k}\neq 0. \tag{1.80}$$

В этом случае число k называется *порядком полюса.* При $k=1$ полюс $z=z_0$ называется *простым.*

Если z_0 *– полюс порядка* k *функции* $f(z)$, *то в его окрестности функция* $f(z)$ *представима в виде*

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^k}\psi(z),\quad \psi(a)\neq 0, \tag{1.81}$$

где $\psi(z)=\sum\limits_{n=-k}^{\infty}c_n(z-a)^{n+k}$ – аналитическая в окрестности точки z_0 функция и $\psi(a)=c_{-k}\neq 0$.

Точка z_0 – полюс порядка k функции $f(z)$ в том и только в том случае, когда для функции $g(z)=1/f(z)$ точка z_0 – нуль порядка k.

Из теорем 1.12 и 1.13 следует, что z_0 – с. о. т. функции $f(z)$, *когда главная часть лорановского разложения в проколотой окрестности точки* z_0 *содержит бесконечно много отличных от нуля членов.*

Теорема 1.14 (*Сохоцкого*). *Если* z_0 *– существенно особая точка для однозначной аналитической функции* $f(z)$, *то для любого комплексного числа* A, *включая* $A=\infty$, *найдется последовательность точек* $\{z_n\}$, *сходящаяся к* z_0, *такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$.

1.135. Определить тип особой точки $z_0=0$ для функций:

а) $f_1(z)=\dfrac{\cos z^3-1}{\sin z-z+z^3/6}$; б) $f_2(z)=z\cos\dfrac{2}{z^3}$;

в) $f_3(z)=\dfrac{e^{3z}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.

Δ а) используя разложения в ряд Тейлора функций $\cos z^3$ и $\sin z$, получаем

$$f_1(z)=\frac{\left(1-z^6/2!+z^{12}/4!-\ldots\right)-1}{\left(z-z^3/3!+z^5/5!-z^7/7!+\ldots\right)-z+z^3/6}=\frac{-z^6/2!+z^{12}/4!-\ldots}{z^5/5!-z^7/7!+\ldots}=$$

$$=z\left(\frac{-1/2+z^6/4!-\ldots}{1/5!-z^2/7!+\ldots}\right).$$

Так как числитель и знаменатель выражения в скобках при $z=0$ в нуль не обращаются, то согласно (1.77), заключаем, что $z=0$ – простой нуль функции $f_1(z)$;

б) поступая аналогично пункту а), имеем

$$f_2(z)=z\left(1-\frac{2^2}{2!\,z^6}+\frac{2^4}{4!\,z^{12}}-\frac{2^6}{6!\,z^{18}}+\ldots\right)=z-\frac{2^2}{2!\,z^5}+\frac{2^4}{4!\,z^{11}}-\frac{2^6}{6!\,z^{17}}+\ldots.$$

Значит, $z=0$ – с. о. т.;

в) имеем

$$f_3(z)=\frac{(1+3z+9z^2/2+27z^3/6+\ldots)-1}{(1-z^2/2+z^4/4!-z^6/6!+\ldots)-1+z^2/2}=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{3+9z/2+27z^2/6+\ldots}{1/4!-z^2/6!+\ldots}.$$

Отсюда, согласно (1.81), следует, что $z=0$ – полюс третьего порядка. ▲

1.136. Доказать, что точка z_0 является устранимой особой точкой для функций:

а) $\dfrac{1}{\cos^2 z}-\dfrac{1}{(z-\pi/2)^2}$, $z_0=\pi/2$; б) $\dfrac{z}{\operatorname{tg} z}$, $z_0=0$;

в) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{\sin z}$, $z_0=0$; г) $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$.

1.137. Доказать, что точка z_0 является полюсом для функций:

а) $\dfrac{z}{1-\cos z}$, $z_0=0$; б) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $z_0=i$;

в) $\dfrac{z}{(e^z-1)^2}$, $z_0=0$; г) $\dfrac{z}{e^z+1}$, $z_0=\pi i$.

1.138. Доказать, что точка z_0 – с. о. т. для функций:

а) $\sin\dfrac{\pi}{z^2+1}$, $z_0=-i$; б) $z^2\sin\dfrac{\pi}{z}$, $z_0=0$; в) $e^{\operatorname{tg} z}$, $z_0=\pi/2$;

г) $\cos\dfrac{z}{z+1}$, $z_0=-1$; д) $(z-1)\,e^{1/(z-1)}$, $z_0=1$.

1.139. Для данных функций найти особые точки и установить их характер:

а) $\dfrac{1}{e^{-z}+1}+\dfrac{1}{z^2}$. **Отв.:** $z=0$ – полюс 2-го порядка; $z_n=\pi i n$, $n=\pm1,\pm2\ldots$, – простые полюсы.

б) $e^{-z}\cos\frac{1}{z}$. **Отв.:** $z=0$ – с. о. т.

в) $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$. **Отв.:** $z=0$ – полюс 3-го порядка;

$z_n = 2n\pi + i\ln(2+\sqrt{3}),\ n\in \boldsymbol{Z}$, – простые полюсы.

г) $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$. **Отв.:** $z=0$ – устранимая особая точка; $z_n = n\pi$, $n=\pm1, \pm 2, \ldots$, – полюсы 1-го порядка.

д) $\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}$. **Отв.:** $z=0$ – устранимая особая точка; $z=-1$ – с. о. т.

е) $\frac{1}{z(1-e^{2z})}$. **Отв.:** $z=0$ – полюс 2-го порядка; $z_n = n\pi i$, $n=\pm1, \pm 2, \ldots$, – простые полюсы.

ж) $\frac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\frac{1}{z-2}}$. **Отв.:** $z=-2$ – полюс 2-го порядка; $z=2$ – с. о. т.

з) $e^{\operatorname{tg}(1/z)}$. **Отв.:** $z_n = \frac{2}{(2n+1)\pi},\ n\in\boldsymbol{Z}$, – с. о. т.

По определению *окрестностью бесконечно удаленной точки* $z=\infty$ называется внешность круга $|z|>R$ достаточно большого радиуса R. При замене $z=1/w$ окрестность точки $z=\infty$ плоскости C_z перейдет в окрестность точки $w=0$ плоскости C_w и, значит, изучение поведения функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ сводится к изучению поведения функции $f(1/z)$ в окрестности точки $z=0$.

Говорят, что аналитическая функция $f(z)$ имеет полюс k-го порядка или существенную особенность в бесконечно удаленной точке $z=\infty$, если функция $f(1/z)$ обладает аналогичным свойством в точке $z=0$. Например, функция $\sin(1/z^3)$ имеет в точке $z=\infty$ нуль 3-го порядка, поскольку функция $\sin z^3 = z^3 - z^9/3! + z^{15}/5! - \ldots = z^3(1-z^6/3! + z^{12}/5! - \ldots)$ имеет в точке $z=0$ нуль 3-го порядка.

Разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,\ |z|>R, \tag{1.82}$$

называется *разложением функции* $f(z)$ *в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки* $z=\infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ называется *главной частью* ряда Лорана (1.82), а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$ – его *правильной частью*, т.е. главная часть ряда Лорана (1.82) содержит положительные степени z, а правильная – нулевую и отрицательные степени z.

Если главная часть в ряде (1.82) отсутствует, то точка $z=\infty$ называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$. В этом случае $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = a_0$. Точка $z=\infty$ называется *нулем порядка* k функции $f(z)$, если главная часть ее ряда Лорана (1.82) отсутствует, а для правильной части выполнено условие

$$a_0 = a_{-1} = a_{-2} = \ldots = a_{-k+1} = 0, \quad a_{-k} \neq 0, \tag{1.83}$$

т. е. в этом случае функция $f(z)$ представляется рядом

$$f(z) = \frac{1}{z^k}\left(a_{-k} + \frac{a_{-(k+1)}}{z} + \frac{a_{-(k+2)}}{z^2} + \ldots\right) = \frac{1}{z^k}\varphi(z), \tag{1.84}$$

где $\varphi(z) = a_{-k} + \frac{a_{-(k+1)}}{z} + \frac{a_{-(k+2)}}{z^2} + \ldots$ и $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z) = a_{-k} \neq 0$.

Точка $z=\infty$ называется *полюсом порядка* k функции $f(z)$, если ее разложение в окрестности $z=\infty$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{k} a_n z^n,\ a_k \neq 0, \tag{1.85}$$

т. е. в этом случае главная часть ряда Лорана содержит k слагаемых и равна $a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k$, $a_k \neq 0$.

Если же главная часть ряда Лорана содержит бесконечное множество слагаемых, то $z=\infty$ называется *существенно особой точкой* (с. о. т.) функции $f(z)$.

1.140. Установить характер особой точки $z=\infty$ для функций:

а) $\frac{z}{4+z^4}$; б) $\sin z$; в) $z^3 e^{1/z}$.

Δ а) при $|z| > \sqrt{2}$ имеем $2/|z|^2 < 1$. Тогда

$$\frac{z}{4+z^4} = z\frac{1}{z^4\left(1+(2/z^2)^2\right)} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z^2}\right)^{2n} = \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{2}{z^2} + \ldots\right).$$

Отсюда согласно (1.84) заключаем, что точка $z=\infty$ – нуль 3-го порядка для функции $\frac{z}{4+z^4}$;

б) из разложения $\sin z = z - z^3/3! + z^5/5! - \ldots$ следует, что главная часть ряда Лорана функции $\sin z$ в окрестности точки $z=\infty$ содержит бесконечное число слагаемых, т.е. $z=\infty$ – с. о. т. функции $\sin z$;

в) так как $z^3 e^{1/z} = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \ldots\right) = z^3 + z^2 + \frac{1}{2z} +$

$+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!\,z}+\ldots$, то согласно равенству (1.85) заключаем, что функция $z^3e^{1/z}$ в точке $z=\infty$ имеет полюс 3-го порядка. ▲

1.141. Определить характер бесконечно удаленной особой точки для функций:

а) $\dfrac{z^3+z^2-5z-7}{z^2}$; б) $\dfrac{3z-4}{2z^4}$; в) e^z/z^2; г) $\sin\dfrac{1}{z}$; д) e^{1/z^2};

е) $e^{2/z}-3z+4$; ж) $e^{-3z}+5z^3+z-1$.

Отв.: а) простой полюс; б) устранимая особая точка; в) с. о. т.; г) устранимая особая точка; д) устранимая особая точка; е) полюс 2-го порядка; е) с. о. т.

1.7. Вычеты и их приложения

Понятие вычета. Вычисление вычета в полюсах и в с. о. т. Вычет в бесконечно удаленной точке. Основная теорема о вычетах. Приложения вычетов к вычислению интегралов вида $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)\,dx$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}\,dx$. **Лемма Жордана.**

Пусть $z=z_0$ – изолированная особая точка однозначной аналитической функции $f(z)$. В окрестности этой точки функция $f(z)$ однозначно представима сходящимся рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

с коэффициентами c_n и c_{-n}, вычисляемыми по формуле (1.70). Среди этих коэффициентов особо выделяется коэффициент c_{-1}, называемый *вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначаемый $\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$. Согласно (1.70), вычет вычисляется по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)\,dz, \qquad (1.86)$$

где γ – замкнутый контур, ориентированный положительно. В качестве контура γ можно взять окружность с центром в точке z_0 достаточно малого радиуса, чтобы она не выходила за пределы области аналитичности функции $f(z)$ и не содержала внутри себя других особых точек этой функции. Из формулы (1.86) вытекает, что

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z), \qquad (1.87)$$

т. е. *контурный интеграл от функции* $f(z)$ *по границе* γ *достаточно малой окрестности точки* z_0 *равен вычету* $f(z)$ *в точке* z_0, *умноженному на* $2\pi i$.

В устранимой особой точке вычет функции равен нулю.

1.142. Исходя из определения найти вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 = 0$, если:

а) $f(z) = \cos z / z^4$; б) $f(z) = z^3 e^{1/z}$.

Δ а) Имеем разложение

$$\frac{\cos z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \ldots,$$

т. е. $z = 0$ – полюс 4-го порядка для $f(z)$. Так как в этом разложении коэффициент c_{-1} при z^{-1} равен нулю, то $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0$.

б) Аналогично предыдущему

$$z^3 e^{1/z} = z^3\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \frac{1}{5!\,z^5} + \ldots\right) =$$

$$= z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}z^{-1} + \frac{1}{5!}z^{-2} + \ldots \Rightarrow c_{-1} = 1/24,$$

т. е. $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1/24$. ▲

Если z_0 – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0) f(z)\right). \qquad (1.88)$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима в виде частного двух аналитических функций $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, т. е. z_0 – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (1.89)$$

Если z_0 – полюс функции $f(z)$ в точке z_0 порядка k, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z)\right). \qquad (1.90)$$

Если $z = z_0$ – с. о. т. функции $f(z)$, то для вычисления вычета в этой точке надо найти коэффициент c_{-1} разложения в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0.

1.143. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех ее изолированных особых точках:

а) $f(z) = \dfrac{1 - z}{(z + i)(z - 3)^3}$; б) $f(z) = \dfrac{z^3}{4 + z^2}$; в) $f(z) = z^2 \sin \dfrac{1}{2z^2}$.

Δ а) точка $z = -i$ – полюс первого порядка функции $f(z)$, а $z = 3$ – полюс 3-го порядка. По формулам (1.88) и (1.90) соответственно будем иметь:

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)(1-z)}{(z+i)(z-3)^3} = \lim_{z\to -i} \frac{1-z}{(z-3)^3} = \frac{-11+2i}{250};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 3} \left(\frac{(z-3)^3(1-z)}{(z+i)(z-3)^3}\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 3}\left(\frac{1-z}{z+i}\right)'' = \frac{11-2i}{125};$$

б) для функции $f(z)$ точки $\pm 2i$ – простые полюсы. По формуле (1.89) находим $\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \left.\frac{z^3}{(4+z^2)'}\right|_{z=2i} = \left.\frac{z^3}{2z}\right|_{z=2i} = -2$; $\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) = \left.\frac{z^3}{2z}\right|_{z=-2i} = -2$;

в) особой точкой функции $f(z)$ является $z=0$. В окрестности $z=0$ ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = z^2\left(\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3!2^3 z^6} + \frac{1}{5!2^5 z^{10}} - \ldots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!2^3 z^4} + \frac{1}{5!2^5 z^8} - \ldots,$$

т. е. содержит бесконечное число членов в главной части. Отсюда следует, что $z=0$ – с. о. т. функции $f(z)$. Так как в полученном разложении коэффициент c_{-1} при z^{-1} равен нулю, то $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0$. ▲

1.144. Найти вычеты функции $f(z)$ в ее особых точках:

а) $f(z) = \dfrac{z}{z^2-4z+3}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -1/2$, $\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = 3/2$.

б) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-1}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 1$, $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = -1$.

в) $f(z) = \dfrac{1}{z-z^3}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1$, $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = -1/2$, $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 1/2$.

г) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^3-6z^2+11z-6}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 1$, $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = -3$, $\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = 2$.

д) $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3+3z^2+z+3}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=\pm 2i} f(z) = -2$, $\operatorname*{Res}_{z=-3} f(z) = \dfrac{9}{10}$.

е) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)^3}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = 1$.

ж) $f(z) = \dfrac{1+z}{z(z-1)^2}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1$, $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = -1$.

з) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = 17/54e$, $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = e^3/27$.

и) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z^2+4)^2}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -1/32$, $\operatorname*{Res}_{z=\pm 2i} f(z) = 1/64$.

к) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=-5/2, \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=e$.

л) $f(z)=\dfrac{1}{z^5-z^3}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=-1, \operatorname*{Res}_{z=\pm1} f(z)=1/2$.

м) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)=2\sin 2$.

н) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2(z^2+z-2)}$. **Отв.:** $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=-1/4, \operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=2/3,$

$\operatorname*{Res}_{z=-2} f(z)=-5/12$.

1.145. Используя формулу (1.87), вычислить контурные интегралы:

а) $\oint\limits_{|z-2|=3} \dfrac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz$; б) $\oint\limits_{|z-1|=2} \dfrac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$; в) $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\operatorname{tg} z}{ze^{i/(z+2)}}dz$;

г) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\sin iz}{z^2-4z+3}dz$; д) $\oint\limits_{|z-2i|=3} \dfrac{dz}{z^2+16}$; е) $\oint\limits_{|z|=r>0} \sin\dfrac{1}{z}dz$.

Отв.: а) $-\pi i/3$; б) $\pi i/2$; в) 0; г) $\pi\operatorname{sh}1$; д) $\pi/4$; е) $2\pi i$.

Аналитическая в окрестности точки $z=\infty$ функция $f(z)$ представляется, как известно, рядом Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n . \tag{1.91}$$

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке $z=\infty$ называется коэффициент при $1/z$ разложения в ряд Лорана (1.91) этой функции, взятый с обратным знаком, т. е.

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-c_{-1}=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\bar\gamma} f(z)\,dz , \tag{1.92}$$

где γ – окружность $|z|=R$ достаточно большого радиуса R, ориентированная положительно (против часовой стрелки), а $\bar\gamma$ – та же окружность, обходимая по часовой стрелке.

1.146. Найти вычет в бесконечно удаленной точке для функций:

а) $e^{(1-z)/z}$; б) $\dfrac{1}{z-3}\cos\dfrac{1}{z}$; в) $\dfrac{1}{z^2+4}\sin\dfrac{1}{z}$.

Δ а) имеем

$$e^{(1-z)/z}=e^{-1}e^{1/z}=e^{-1}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)=$$

$$=e^{-1}+\frac{e^{-1}}{z}+\frac{e^{-1}}{2z^2}+\ldots\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-e^{-1}.$$

Заметим, что $z=\infty$ устранимая особая точка данной функции;

б) разложим данную функцию в ряд Лорана:

$$\frac{1}{z-3}\cos\frac{1}{z}=\frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)}\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-...\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+...\right)\left(1-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4!z^4}+...\right)=\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{17}{2z^3}+...,$$

т. е. для данной функции точка $z=\infty$ – простой нуль. Так как $c_{-1}=1$, то $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-1$;

в) из разложения

$$\frac{1}{z^2+4}\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z^4(1+4/z^4)}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+...\right)=$$

$$=\frac{1}{z^4}\left(1-\frac{4}{z^4}+...\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{3}{3!z^3}+...\right)=\frac{1}{z^5}-\frac{3}{z^7 3!}-\frac{4}{z^9}+...$$

следует, что $z=\infty$ – нуль 5-го порядка для данной функции. Так как $c_{-1}=0$, то $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0$. ▲

1.147. Найти вычет в бесконечно удаленной точке для функций:

а) $\sin\frac{1}{z}$; б) $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$; в) $\frac{\sin z}{z^2+9}$; г) $\frac{z^4+z}{z^6-1}$; д) $z\cos^2\frac{\pi}{z}$; е) $\frac{z^2}{z-1}\sin\frac{1}{z}$.

Отв.: а) –1; б) 0; в) $-\frac{1}{3}\operatorname{sh}3$; г) 0; д) π^2; е) –1.

Определяющей в теории вычетов является

Теорема 1.15 (*основная теорема о вычетах*). *Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитическая в односвязной области D, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, и Γ – замкнутая положительно ориентированная кривая, расположенная в D и содержащая внутри себя точки $z_1, z_2, ..., z_n$. Тогда*

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{1.93}$$

Следствие. *Если функция $f(z)$ является аналитической на всей комплексной плоскости $\overline{C}$ за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая и вычет в точке $z=\infty$, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0. \tag{1.94}$$

1.148. Вычислить $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$ для функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z+2)}$.

Δ Особыми точками функции $f(z)$ являются полюсы 1-го порядка $z_1=1$ и $z_2=-2$. По формуле (1.88) находим $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=1/3,\ \operatorname*{Res}_{z=-2} f(z)=-4/3$. Согласно формуле (1.94), $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-(1/3-4/3)=1$. ▲

Теорема 1.15 и ее следствие позволяют вычислять контурные интегралы по кривой в том случае, когда подынтегральная функция в области, ограниченной этой кривой, имеет особые точки.

1.149. Вычислить контурные интегралы:

а) $I=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}dz$; б) $I=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\sin^2 z}{z\cos z}dz$;

в) $I=\oint\limits_{|z|=0{,}3}\dfrac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2\operatorname{sh}8iz}dz$; г) $I=\oint\limits_{|z-2|=2}\left(z\sin\dfrac{i}{z-2}-\dfrac{2sh\dfrac{\pi iz}{2}}{(z-1)^2(z+1)}\right)dz$.

Δ а) особые точки подынтегральной функции – полюсы 1-го порядка $z_1=i,\ z_2=-i$ и $z_3=-3$. Из них внутри окружности $|z|=2$ расположены точки $z_{1,2}=\pm i$. Находим вычеты в этих точках:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\frac{1+3i}{20},\ \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)=\frac{1-3i}{20}.$$

По формуле (1.93)

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^2}{(z^2+1)(z+3)}dz=2\pi i\left(\frac{1+3i}{20}+\frac{1-3i}{20}\right)=\frac{\pi i}{5};$$

б) особыми точками подынтегральной функции являются $z=0$, $z=\pm\pi/2+k\pi, k\in\boldsymbol{Z}$. В круге $|z|<2$ находятся точки $z=0$ и $z=\pm\pi/2$. Так как

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin^2 z}{z\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\cos z}=0,$$

то $z=0$ – устранимая особая точка. В таком случае $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=0$. По формуле (1.89) находим

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm\pi/2} f(z)=\left.\frac{\sin^2 z}{(z\cos z)'}\right|_{z=\pm\pi/2}=\left.\frac{\sin^2 z}{\cos z-z\sin z}\right|_{z=\pm\pi/2}=-\frac{2}{\pi}.$$

По формуле (1.93) $I=2\pi i(-2/\pi-2/\pi)=-8i$;

в) особой точкой подынтегральной функции в круге $|z|<0{,}3$ является точка $z=0$. Раскладывая в ее окрестности функции e^{4z}, $\sin 4z$ и $\operatorname{sh}8iz$ в ряды Тейлора, получаем

$$\frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2\,\mathrm{sh}\,8iz}=\frac{\left(1+4z+8z^2+64z^3/3!+\ldots\right)-1-4z+64z^3/3!-\ldots}{z^2(8iz+(8iz)^3/3!+(8iz)^5/5!+\ldots)}=$$

$$=\frac{8z^2+128z^3/3!+\ldots}{8iz^3(1-64z^2/3!+\ldots)}=\frac{8+128z/3!+\ldots}{8iz(1-64z^2/3!+\ldots)}.$$

Замечаем, что $z=0$ – полюс 1-го порядка для подынтегральной функции $f(z)$. По формуле (1.89)

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z(8+128z/3!+\ldots)}{8iz(1-64z^2/3!+\ldots)}=\frac{1}{i}=-i.$$

Тогда $I=2\pi i(-i)=2\pi$;

г) особыми точками подынтегральной функции $f(z)$ являются $z_1=-1, z_2=1$ и $z_3=2$. Внутри окружности располагаются точки $z=1$ и $z=2$, причем $z=1$ – полюс 2-го порядка. Выясним характер особой точки $z=2$, для этого разложим слагаемое $z\sin\dfrac{i}{z-2}$ в ряд Лорана:

$$z\sin\frac{i}{z-2}=\left((z-2)+2\right)\left(\frac{i}{z-2}-\frac{i^3}{3!(z-2)^3}+\ldots\right)=i+\frac{2i}{z-2}-\frac{i^3}{3!(z-2)^2}+\ldots.$$

Отсюда следует, что $z=2$ – с. о. т. функции $z\sin\dfrac{i}{z-2}$ и $\operatorname*{Res}_{z=2}\left(z\sin\dfrac{i}{z-2}\right)=2i.$

Так как для слагаемого $-\dfrac{2\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi iz}{2}}{(z-1)^2(z+1)}$ особая точка $z=2$ является устранимой, то $\operatorname*{Res}_{z=2}\left(-\dfrac{2\,\mathrm{sh}(\pi iz/2)}{(z-1)^2(z+1)}\right)=0$. Таким образом, для подынтегральной функции $f(z)$ имеем $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)=2i$. Точно так же найдем, что $\operatorname*{Res}_{z=1}\left(z\sin\dfrac{i}{z-2}\right)=0$,

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left(-\frac{2\,\mathrm{sh}(\pi iz/2)}{(z-1)^2(z+1)}\right)=-\left(\frac{2sh(\pi iz/2)}{(z+1)}\right)'\Bigg|_{z=1}=\frac{i}{2}.$$

В итоге $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=i/2$. Тогда, согласно основной теореме о вычетах, $I=2\pi i(2i+i/2)=-5\pi$. ▲

1.150. Вычислить интегралы:

а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{dz}{z^2+1}$; б) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^2-1}$; в) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)}$; г) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z\,dz}{z^4-1}$;

д) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\sin\frac{1}{z}dz$; е) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\sin^2\frac{1}{z}dz$; ж) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}e^{1/z}dz$; з) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}z^2e^{3/z}\,dz$;

и) $\oint\limits_{|z|=1} \cos\frac{1}{z}e^{2/z}\,dz$; к) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin(2/z)}{e^{1/z}}dz$;

л) $\oint\limits_{|z|=2/3}\left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$; м) $\oint\limits_{\Gamma}\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz, \Gamma: \frac{x^2}{4}+y^2=1$;

н) $\oint\limits_{\Gamma}\frac{z\sin z}{(z-1)^5}dz, \Gamma: \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$; о)* $\oint\limits_{|z|=0,5} e^z\sin\frac{1}{z}dz$;

п) $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz$; р)* $\oint\limits_{|z|=n}\operatorname{tg} nz\,dz, n\in\boldsymbol{N}$;

с)* $\oint\limits_{|z|=R} z^n e^{2/z}\,dz, n\in\boldsymbol{Z}$; т) $\int\limits_{|z|=3}(1+z+z^2)(e^{1/z}+e^{1/(z-1)}+e^{1/(z-2)})\,dz$.

Отв.: а) π; б) 0; в) 0; г) 0; д) $2\pi i$; е) 0; ж) $2\pi i$; з) $9\pi i$; и) $4\pi i$; к) $4\pi i$; л) 0; м) $-\pi^2 i$; н) $\frac{\sin 1-4\cos 1}{12}\pi i$; о) $2\pi i\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!}$; п) $\big((\cos 1+\sin 1)+i(\sin 1-\cos 1)\big)\frac{\pi}{2}$; р) $-4\pi i$; с) $2\pi i\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ при $n\ge 1, 0$ при $n<-1$; т) $32\pi i$.

С помощью вычетов можно вычислять некоторые определенные интегралы, в том числе и несобственные интегралы 1-го рода.

Рассмотрим интегралы вида

$$I=\int\limits_0^{2\pi}R(\sin x,\cos x)\,dx, \tag{1.95}$$

где R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$. Вводим замену

$$e^{ix}=z\Rightarrow dx=\frac{dz}{iz},\ \sin x=\frac{z-z^{-1}}{2i},\ \cos x=\frac{z+z^{-1}}{2}. \tag{1.96}$$

В результате интеграл (1.95) преобразуется в контурный интеграл $I=\oint\limits_{|z|=1}R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i},\frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}$, вычисляемый с помощью вычетов.

1.151. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{5}\sin x+3}$.

Δ Вводим замену $z=e^{ix}$. Согласно (1.96), получим $I=2\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{5}z^2+6iz-\sqrt{5}}$. Подынтегральная функция $f(z)=\frac{1}{\sqrt{5}z^2+6iz-\sqrt{5}}$ имеет простые полюсы $z_1=-i/\sqrt{5}$ и $z_2=-i\sqrt{5}$. Так как $|z_1|=1/\sqrt{5}<1, |z_2|=\sqrt{5}>1$, то в круге $|z|<1$ имеется лишь одна особая точка $z_1 = -i/\sqrt{5}$ подынтегральной функции $f(z)$. В ней

$$\operatorname*{Res}_{z=-i/\sqrt{5}} f(z) = \lim_{z\to -i/\sqrt{5}} \frac{z+i/\sqrt{5}}{\sqrt{5}(z+i/\sqrt{5})(z+i/\sqrt{5})} = -\frac{i}{4}.$$

Тогда $I = 2\cdot 2\pi i(-i/4) = \pi$. ▲

1.152*. Вычислить $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 3x\,dx}{(5-4\cos x)^2}$.

Δ Представим интеграл в виде $I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+\cos 6x)\,dx}{(5-4\cos x)^2}$ и рассмотрим выражение $I+iK$, где $K = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 6x\,dx}{(5-4\cos x)^2} = 0$, поскольку подынтегральная функция в этом интеграле нечетная, а отрезок интегрирования $[-\pi,\pi]$ симметричен относительно начала координат. В таком случае

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 6x + i\sin 6x}{(5-4\cos x)^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1+e^{6ix}}{(5-4\cos x)^2}dx.$$

Положим

$$e^{ix} = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz},\ e^{6iz} = z^6,\ \cos x = \frac{z+z^{-1}}{2}.$$

Тогда

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{|z|=1} \frac{1+z^6}{(5-2(z+z^{-1}))^2 iz}dz = \frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=1} \frac{z+z^7}{(2z^2-5z+2)^2}dz = \frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\sigma = \pi\sigma, \qquad (1.97)$$

где σ – сумма вычетов подынтегральной функции $f(z)$ во всех ее особых точках, лежащих внутри окружности $|z|=1$. Особыми точками $f(z)$ являются нули ее знаменателя $z_1 = 1/2$ и $z_2 = 2$ – полюсы 2-го порядка. Из них только z_1 расположен внутри Γ. Для него по формуле (1.90) имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=1/2} f(z) \equiv \sigma = \lim_{z\to 1/2}\left(\frac{(z-1/2)^2(z+z^7)}{4(z-1/2)^2(z-2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{z\to 1/2}\left(\frac{z+z^7}{(z-2)^2}\right)' = \lim_{z\to 1/2}\left(\frac{1+7z^6}{(z-2)^2} - \frac{2(z+z^7)}{(z-2)^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2^6+7}{2^6\cdot 3^2}\cdot 2^2 + \frac{2^6+1}{2^6\cdot 3^3}\cdot 2^3\right) = \frac{343}{1728}.$$

Подставив найденное значение σ в (1.97), получим $I = \pi\sigma = 343\pi/1728$. ▲

Иногда интегралы от функций вида $R(\sin x, \cos x)$ бывает удобнее вычислять с помощью подстановки $e^{nxi} = z$, где $n > 1$. С другой стороны, замена $e^{ix} = z$ часто находит применение при вычислении интегралов от более сложных тригонометрических функций, чем $R(\sin x, \cos x)$.

1.153*. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^{2n}x\cos 2mx\,dx,$ если m и n – целые неотрицательные числа.

Δ В силу четности подынтегральной функции данный интеграл представим в виде $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}x\cos 2mx\,dx$. Так как $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}x\sin 2mx\,dx=0$ в силу нечетности подынтегральной функции, то

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}x\,(\cos 2mx+i\sin 2mx)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{2mxi}\cos^{2n}x\,dx.$$

Положим $e^{2ix}=z\Rightarrow dx=\dfrac{dz}{2iz},\ \cos^{2n}x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}=\left(\dfrac{e^{2ix}+1}{2e^{ix}}\right)^{2n}=\dfrac{(z+1)^{2n}}{2^{2n}z^{n}}$,

и, значит,

$$I=\frac{1}{i2^{2n+2}}\oint\limits_{|z|=1}z^{m-n-1}(z+1)^{2n}\,dz=\frac{1}{2^{2n+2}i}\cdot 2\pi i\sigma=\frac{\pi\sigma}{2^{2n+1}},\qquad(1.98)$$

где σ – сумма вычетов подынтегральной функции во всех особых точках, расположенных внутри окружности $\Gamma:|z|=1$.

Если $m>n\Leftrightarrow m-n-1\geq 0$, то подынтегральная функция является аналитической внутри Γ и, значит, в этом случае по теореме Коши $I=0$.

Если же $m\leq n$, то точка $z=0$ будет полюсом (единственным) функции $f(z)=z^{m-n-1}(z+1)^{2n}$, лежащим внутри окружности Γ. Из выражения $f(z)$ видно, что член $\dfrac{c_{-1}}{z}$ в ее разложении в ряд Лорана в окрестности $z=0$ получится в результате умножения z^{m-n-1} на тот член разложения бинома $(1+z)^{2n}$, который имеет вид $C_{2n}^{n-m}z^{n-m}$, а это значит, что $\sigma=\operatorname*{Res}\limits_{z=0}f(z)=C_{2n}^{n-m}$. Подставив σ в (1.98), получим $I=\dfrac{\pi}{2^{n+1}}C_{2n}^{n-m}$. При этом считаем, что $C_{2n}^{0}=1$. ▲

1.154. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(5-4\cos x)^2}$; б) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{a+\cos x},\ a>1$; в) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{3+2\sin x}$;

г) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{\cos^2 2x\,dx}{5-4\cos x}$; д) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{\cos^2 3x\,dx}{5+3\cos 2x}$; е)* $\int\limits_{0}^{2\pi}\cos^{2n}x\,dx$;

ж)* $\int\limits_{0}^{2\pi}e^{\cos x}\cos nx\cos(\sin x)\,dx,\ n\in\boldsymbol{Z}$;

з)* $\int\limits_{0}^{\pi}\operatorname{ctg}(x-a)\,dx$, где $\operatorname{Im}a>0$; и) $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(a+b\cos x)^2},\ a>b>0$.

Отв.: а) $10\pi/27$; б) $2\pi/\sqrt{a^2-1}$; в) $2\pi/\sqrt{5}$; г) $17\pi/48$;

д) $13\pi / 54$; е)* $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi$; ж)* $\dfrac{\pi}{|n|!}$, при $n \neq 0$, 2π при $n = 0$; з)* πi;

и) $\dfrac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$.

Пусть $R(x)$ – рациональная функция вида $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Если $Q_n(x)$ непрерывна на всей действительной оси ($Q_n(x) \neq 0$) и $n \geq m+2$, т.е. степень знаменателя по крайней мере на две единицы больше степени числителя, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i\sigma,$$

где σ – сумма вычетов функции $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости (с. о. т. у рациональных функций нет).

Итак, если $z_k, k = \overline{1,n}$, – полюсы функции $R(z)$, лежащие в верхней полуплоскости комплексной плоскости, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z), \quad \operatorname{Im} z_k > 0. \tag{1.99}$$

Аналогично, при условии $n \geq m+2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z), \quad \operatorname{Im} z_k < 0. \tag{1.100}$$

1.155. Вычислить интеграл $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$.

Δ Для функции $R(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^2+16)}$ условие $n \geq m+2$ выполнено. Следовательно, данный интеграл можно вычислить по формуле (1.99). Особыми точками функции $R(z)$ являются полюсы 1-го порядка $z = \pm 4i$ и полюсы 2-го порядка $z = \pm i$. В верхней полуплоскости расположены точки $z = 4i$ и $z = i$. В этих точках соответственно $\operatorname*{Res}_{z=4i} R(z) = \dfrac{1}{1800i}$ и $\operatorname*{Res}_{z=i} R(z) = \dfrac{13}{900i}$.

По формуле (1.99) $I = 2\pi i\left(\dfrac{1}{1800i} + \dfrac{13}{900i}\right) = \dfrac{3\pi}{100}$. ▲

1.156. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$; б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$; в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{ax^2+bx+c}, a, b, c \in \boldsymbol{R}, b^2-4ac<0, a>0$; д) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$;

е) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{(x^4+1)dx}{x^6+1}$.

Отв.: а) $3\pi/8$; б) $\pi/60$; в) $\pi/\sqrt{3}$; г) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$; д) $\pi\sqrt{2}$; е) $\dfrac{4\pi}{3}$.

Для вычисления интегралов вида $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\cos tx\,dx, \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\sin tx\,dx$, где $f(x)$ – правильная рациональная дробь, $t \in \boldsymbol{R}$, часто бывает полезной следующая

Лемма Жордана. *Пусть функция* $f(z)$ *является аналитической в области* $\operatorname{Im} z > 0$ *всюду, за исключением конечного числа особых точек. Если* $M_R = \max\limits_{z \in \Gamma_R} |f(z)| \to 0$ *при* $z \to \infty$, *где* Γ_R *– верхняя полуокружность с центром в точке* $z = 0$, *то при* $t > 0$ $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)e^{itz}\,dz = 0$.

Если $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, то при $t > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{itx}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)\,e^{itz}), \operatorname{Im} z_k > 0. \tag{1.101}$$

Аналогично при $t < 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}\,dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)\,e^{itz}), \operatorname{Im} z_k < 0. \tag{1.102}$$

Замечание. Для вычисления интегралов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos tx\,dx, \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin tx\,dx$ нужно в интеграле (1.101) выделить соответственно действительную и мнимую части.

1.157. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos x\;dx}{(x^2+16)(x^2+9)}$.

Δ Рассмотрим следующий интеграл

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+16)(x^2+9)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2+16)(x^2+9)} + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{(x^2+16)(x^2+9)}.$$

Тогда согласно замечанию $I = \operatorname{Re} I_1$. В нашем случае $t = 1 > 0$, а особыми точками функции $\dfrac{1}{(z^2+16)(z^2+9)}$ в верхней полуплоскости являются полюсы 1-го порядка $z_1 = 4i$ и $z_2 = 3i$. Так как

$$\operatorname*{Res}_{z=4i} \frac{e^{iz}}{(z^2+16)(z^2+9)} = -\frac{e^{-4}}{56i}, \quad \operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{e^{iz}}{(z^2+16)(z^2+9)} = \frac{e^{-3}}{42i},$$

то по формуле (1.101) с учетом равенства $I = \operatorname{Re} I_1$ получаем

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \; dx}{(x^2+16)(x^2+9)} = \operatorname{Re} 2\pi i \left(\frac{e^{-4}}{-56i} + \frac{e^{-3}}{42i} \right) = \frac{\pi}{7} \left(\frac{e^{-3}}{3} - \frac{e^{-4}}{4} \right). \ \blacktriangle$$

Замечание. Из равенства (1.101) можно получить следующий результат: *если* $f(x)$ *– четная функция, то*

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos tx \, dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} (f(z) e^{itz}), \ \operatorname{Im} z_k > 0; \qquad (1.103)$$

если $f(x)$ *– нечетная функция, то*

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin tx \, dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} (f(z) e^{itz}), \ \operatorname{Im} z_k > 0. \qquad (1.104)$$

1.158. Для интеграла $I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 \sin x}{(1+x^2)^2} dx$ $(t = 1 > 0)$ по формуле (1.104) имеем ($z = i$ – единственная особая точка функции $\frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ в верхней полуплоскости, являющаяся полюсом 2-го порядка)

$$I = \pi \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z e^{iz}}{(1+z^2)^2} = \left. \left(\frac{z e^{iz}}{(1+z^2)^2} \right)' \right|_{z=i} = \frac{\pi}{4e}.$$

1.159. Вычислить интегралы:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x \, dx}{x^2 - 2x + 10}$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + 4x + 20}$; в) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

г) $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x \; dx}{1+x^4}$; д) $\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x \; dx}{x^2+1}$; е) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x \; dx}{x^4 + x^2 + 1}$; ж) $\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin 3x \; dx}{(x^2+1)^2}$;

з) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$; и) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x \, dx}{x^2 + 2x + 2}$.

Отв.: а) $\frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1 - 3 \sin 1)$; б) $\frac{\pi e^{-4}}{2}(2 \cos 2 + \sin 2)$; в) $\frac{\pi e^{-12}}{12}(2e - 1)$;

г) $\frac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}(\cos \sqrt{2} - \sin \sqrt{2})$; д) $\frac{\pi e^{-3}}{2}$; е) $\frac{\pi e^{-\sqrt{3}/2}}{\sqrt{3}} \sin \frac{1}{2}$; ж) $-\frac{\pi e^{-3}}{4}$;

з) $\frac{\pi e^{-3}}{3}(3 \cos 1 + \sin 1)$; и) $\pi e^{-2} \cos 2$.

В примерах 1.156 – 1.158 подынтегральная функция $f(z)$ не имеет особых точек на действительной оси. Покажем применение леммы Жордана в том случае, когда $f(z)$ имеет на действительной оси простые полюсы.

1.160*. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\ dx}{x(x^2+b^2)},\ \ a>0, b>0.$$

Δ Введем функцию

$$g(z)=\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)},$$

совпадающую с подынтегральной функцией интеграла I при $z=x$ и имеющую простой полюс на действительной оси в точке $z=0$.

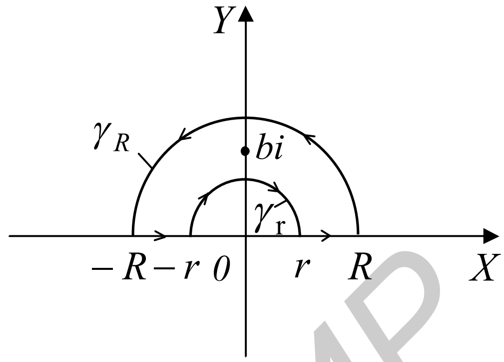


Рис. 1.27

Рассмотрим в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\geq 0$ замкнутый контур $\Gamma=[-R;r]\bigcup\gamma_r\bigcup[r;R]\bigcup\gamma_R$ (рис. 1.27), где $\gamma_r:|z|=r$ и $\gamma_R:|z|=R$. Внутри контура Γ находится лишь один полюс функции $f(z)$ – точка $z=bi, b>0$. Согласно основной теореме о вычетах,

$$\oint_{\Gamma}g(z)\,dz=\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iax}\,dx}{x(x^2+b^2)}+\int_{\gamma_r}\frac{e^{iaz}\,dz}{z(z^2+b^2)}+\int_r^R\frac{e^{iax}\,dx}{x(x^2+b^2)}+$$
$$+\int_{\gamma_R}\frac{e^{iaz}\,dz}{z(z^2+b^2)}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=bi}\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}=2\pi i\sigma, \qquad (1.105)$$

где $\sigma=\operatorname*{Res}_{z=bi}\dfrac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}=-\dfrac{e^{-ab}}{2b^2}$.

Преобразуем сумму интегралов по отрезкам $[-R;-r]$ и $[r;R]$ действительной оси. Заменив x на $-x$ в первом слагаемом правой части равенства (1.105) и объединив его с третьим слагаемым, получим

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iax}\,dx}{x(x^2+b^2)}+\int_r^R\frac{e^{iax}\,dx}{x(x^2+b^2)}=\ 2i\int_r^R\frac{e^{iax}-e^{-iax}\,dx}{2ix(x^2+b^2)}=2i\int_r^R\frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)}.$$

Обратимся ко второму слагаемому равенства (1.105). Так как $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{iaz}}{z^2+b^2}=\dfrac{1}{b^2}$, т.е. $\dfrac{e^{iaz}}{z^2+b^2}=\dfrac{1}{b^2}+h(z)$, где $\lim\limits_{z\to 0}h(z)=0$, то подынтегральная функция $g(z)$ представима в виде

$$g(z)=\frac{1}{b^2z}+\frac{h(z)}{z}\Rightarrow\int_{\gamma_r}g(z)\,dz=\frac{1}{b^2}\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z}+\int_{\gamma_R}\frac{h(z)}{z}dz.$$

Положив здесь $z=re^{i\varphi}$, получим, что

$$\frac{1}{b^2}\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z}=\frac{1}{b^2}\int_{\pi}^{0}\frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}d\varphi=-\frac{i\pi}{b^2},\ \int_{\gamma_r}\frac{h(z)}{z}dz=i\int_{\pi}^{0}h(re^{i\varphi})\,d\varphi\to 0,$$

если $r\to 0$.

Четвертое слагаемое в равенстве (1.105) при $R \to \infty$ согласно лемме Жордана стремится к нулю, т. к. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+b^2)} \to 0$ при $|z| \to \infty$. Значит,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iaz}\,dz}{z(z^2+b^2)} = 0.$$

Таким образом, при $R \to \infty$ и $r \to 0$ равенство (1.105) принимает вид

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)} - \frac{\pi i}{b^2} = -\pi i\frac{e^{-ab}}{b^2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin ax\,dx}{x(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab}). \ \blacktriangle$$

1.161. Вычислить интегралы:

а)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}dx,\ a>0,\ b>0$; б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin mx\,dx}{x(x^2+a^2)^2}$.

Отв.: а)* $\dfrac{b-a}{2}$; б) $\dfrac{\pi}{2a^4} - \dfrac{\pi e^{-ma}}{4a^3}\left(m+\dfrac{2}{a}\right)$.

Рассмотрим интегралы вида

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z)\,e^{tz}\,dz,\ \ \sigma, t \in \boldsymbol{R}, \tag{1.106}$$

в котором интегрирование в комплексной плоскости z ведется по прямой $\operatorname{Re} z = \sigma$, параллельной мнимой оси Y (рис. 1.28).

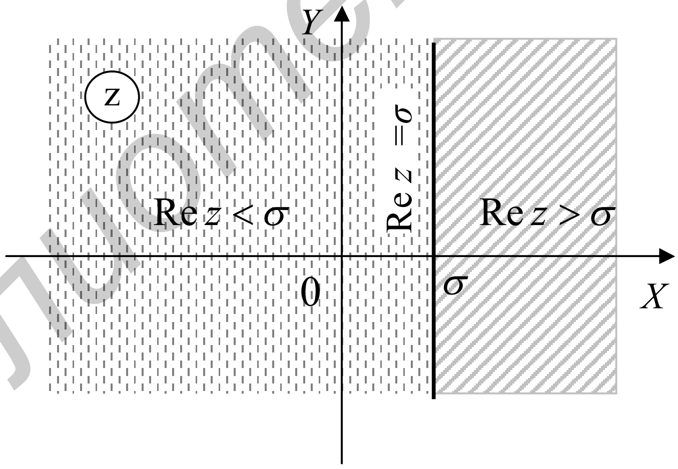


Рис. 1.28

Для интегралов (1.106) имеют место следующие формулы их вычисления:

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z)\,e^{tz}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)\,e^{tz}),\ \ t>0,\ \operatorname{Re} z_k < \sigma. \tag{1.107}$$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(z)\,e^{tz}\,dz = -2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)\,e^{tz}),\ \ t<0,\ \operatorname{Re} z_k > \sigma. \tag{1.108}$$

Здесь z_k – особые точки функции $f(z)$, лежащие в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < \sigma$ при $t > 0$ (в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > \sigma$ при $t < 0$) (см. рис. 1.28).

1.162. Вычислить интеграл $I = \int\limits_L \frac{e^{tz}}{(z+1)^2}\,dz,\quad t>0,\quad L -$прямая $\operatorname{Re} z = \sigma > -1$.

Δ Единственной особой точкой подынтегральной функции, лежащей левее прямой *L*, является полюс 2-го порядка $z=-1$, для которого $\operatorname*{Res}\limits_{z=-1} \frac{e^{tz}}{(z+1)^2} = t\,e^{-t}$. По формуле (1.107) $I = 2\pi i t e^{-t}$. ▲

1.163. Вычислить интегралы $(a>0)$:

а) $\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2+4}dz$; б) $\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tz}}{(z+1)(z-3)}dz$; в) $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2}dz$; г) $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z}dz$;

д)* $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^{n+1}}dz,\ n\in \boldsymbol{N}$; е) $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{(z-\alpha)^{n+1}}dz,\ n\in \boldsymbol{N}$; ж) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{ze^{tz}}{z^2+1}dz$;

з) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2(z^2+1)}\,dz$; и) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}\,dz$.

Отв.: а) $\pi i \sin 2t$; б) $-\pi i e^{-t}/2$; в) 0, если $t<0$, $2\pi i t$, если $t>0$; г) 0, если $t<0$; $2\pi i$, если $t>0$; д) $\frac{2\pi i}{n!}t^n$; е) $2\pi i \frac{e^{\alpha t}t^n}{n!}$; ж) $\cos t$; з) $t-\sin t$;

и) $\frac{e^{\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{e^{\beta t}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{e^{\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$.

2. Операционное исчисление

2.1. Преобразование Лапласа

Оригиналы и их изображения. Линейность преобразования Лапласа. Смещение в области изображения и оригинала. Теоремы смещения и запаздывания. Изображение графических оригиналов. Теорема подобия. Изображение периодического оригинала. Свертка оригиналов. Теорема Бореля (умножение изображений). Дифференцирование и интегрирование оригиналов. Дифференцирование и интегрирование изображений. Несобственные интегралы от оригиналов и изображений. Интеграл Дюамеля. Предельные соотношения. Таблица основных оригиналов и их изображений.

Пусть $f(t)$ – функция действительной переменной t, определенная на полубесконечной прямой $0 < t < \infty$, и пусть существует несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt, \tag{2.1}$$

зависящий от комплексного параметра $p = \sigma + i\omega$. Формула (2.1) называется *интегральным преобразованием Лапласа*, или L*-преобразованием функции* $f(t)$ *в функцию* $F(p)$. При этом функция $F(p)$ называется *изображением* функции $f(t)$ по Лапласу, а $f(t)$ – *функцией-оригиналом*, или просто *оригиналом.*

Операционное исчисление рассматривает преобразование Лапласа, его свойства и приложения к решению ряда важных задач.

Если $F(p)$ – изображение по Лапласу функции $f(t)$, то будем писать

$$F(p) \fallingdotseq f(t) \text{ или } F(p) = L\{f(t)\}.$$

Если $f(t)$ – оригинал для $F(p)$, то этот факт обозначается в виде

$$f(t) \risingdotseq F(p) \text{ или } f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

В операционном исчислении рассматривается *множество функций-оригиналов*, которое будем обозначать V. Будем говорить, что $f(t) \in V$, если:

1°. $f(t)$ определена при $t \in \boldsymbol{R}$, $f(t) = 0$, $t < 0$, $f(0) = f(+0)$, $f(+0) = \lim\limits_{t \to +0} f(t)$.

2°. $f(t)$ – кусочно-непрерывная функция на любом конечном интервале оси t.

3°. Существуют такие числа $M > 0$, σ, что

$$|\, f(t)\,| \le M\, e^{\sigma t}, \quad t \ge 0. \tag{2.2}$$

При этом нижняя грань σ_0 всех чисел σ, для которых выполняется неравенство (2.2), называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая *единичная* *функция Хевисайда* $1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Очевидно, условия $1° - 3°$ для функции Хевисайда выполнены. График функции $1(t)$ приведен на рис. 2.1. Так как $|1(t)| = 1 = e^{0t}$, $\forall t \geq 0$, то показатель роста $\sigma_0 = 0$. Оригинал соответствует физическому сигналу, который отсутствовал в прошлом при $t < 0$ и плавно появился в момент $t = 0$.

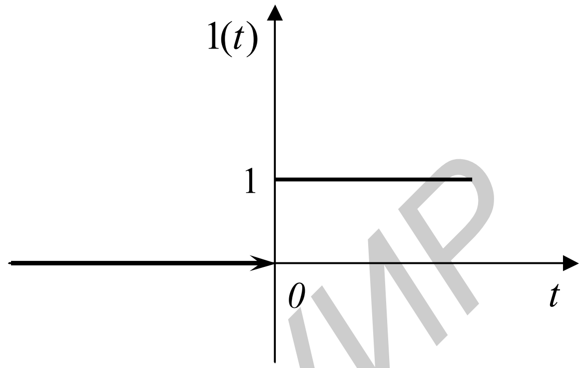


Рис. 2.1

2.1. Предполагая, что $f(t) \equiv 0$, $\forall t < 0$, указать, какие из функций являются оригиналами; найти их показатели роста:

а) $f(t) = \sin t$; б) $f(t) = \dfrac{t^2}{t^3 - 1}$;

в) $f(t) = \dfrac{1}{t}$; г) $f(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Δ а) Так как $|\sin t| \leq 1 = e^{0t}$, $\forall t \in \boldsymbol{R}$, и, значит, $\forall t \geq 0$, то функция $\sin t$ есть оригинал с показателем роста $\sigma_0 = 0$.

б) Функция $\dfrac{t^2}{t^3 - 1}$ не является оригиналом, т. к. при $t = 1$ она имеет разрыв 2-го рода.

в) Функция $1/t$ не является оригиналом, т. к. $\lim\limits_{t \to +0} 1/t = +\infty$.

г) Так как $t^n = o(e^{\sigma t}), t \to +\infty, \forall \sigma > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{t \to \infty} (t^n / e^{\sigma t}) = 0$, и, значит, для любого $\sigma > 0$ существует константа $M = M(\sigma) > 0$ такая, что $t^n \leq Me^{\sigma t}$, $\forall t > 0$, т.е. t^n – оригинал с показателем роста $\sigma_0 = 0$. ▲

2.2. Определить, какие из функций являются оригиналами, и найти их показатели роста σ_0 ($f(t) \equiv 0, \forall t < 0$): а) $e^{(2+3i)t}$; б) e^{t^2}; в) e^{-t^2}; г) $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$; д) $\sin\dfrac{1}{t}$; е) $e^{1/t}$; ж) $t\sin\dfrac{1}{t}$; з) $\ln(t+1)$.

Отв.: а) да, $\sigma_0 = 2$; б) нет; в) да, $\sigma_0 = 0$; г) нет; д) нет; е) нет; ж) да, $\sigma_0 = 0$; з) да, $\sigma_0 = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 2.1 (*о существовании изображения*). *Всякий оригинал* $f(t)$ *имеет изображение* $F(p)$*, являющееся аналитической функцией в полуплоскости* $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$*, где* σ_0 *– показатель роста оригинала* $f(t)$ (рис. 2.2).

Следствие. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0, \qquad (2.3)$$

где p *находится в области* $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Замечание. Теорема 2.1 и ее следствие утверждают, что не всякая функция $F(p)$ может служить изображением некоторого оригинала. Например, функция $\operatorname{tg} p$ имеет бесконечное множество полюсов $p_k = \pi / 2 + k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому в комплексной плоскости p нет такой области $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$, в которой $\operatorname{tg} p$ является аналитической функцией. Функция $(4p^2 - 3p + 1)/(2p^2 + 1)$ также не

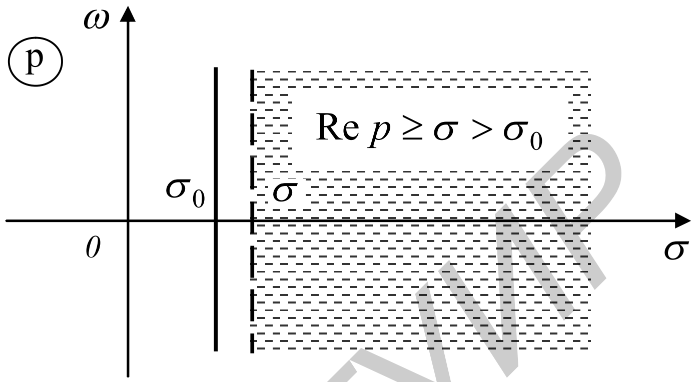


Рис. 2.2

является изображением, т. к. $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to +\infty} \dfrac{4p^2 - 3p + 1}{2p^2 + 1} = 2 \neq 0$, что не соответствует соотношению (2.3).

С помощью единичной функции Хевисайда всякую функцию $f(t)$, удовлетворяющую условиям 1° и 3°, можно превратить в оригинал

$$f(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Например, функция $\sin t$, $t \in \boldsymbol{R}$, не удовлетворяет условию 2° оригинала. Функция же $\sin t \cdot 1(t)$ (рис. 2.3) уже является оригиналом (пример 2.1, а). Ниже рассматриваются только оригиналы, поэтому для простоты их записи множитель $1(t)$ опускается.

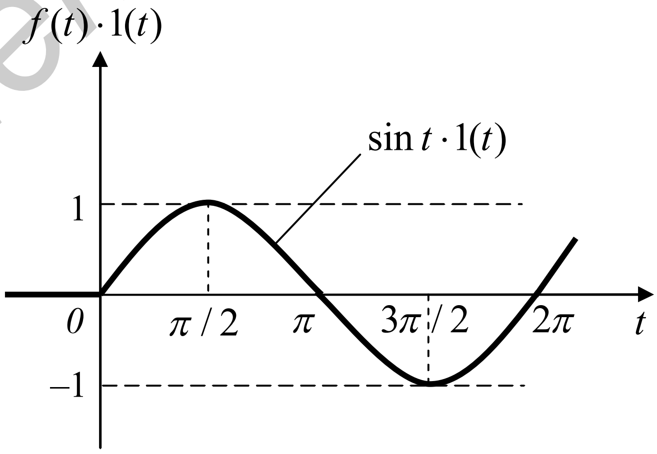


Рис. 2.3

2.3. Пользуясь определением, найти изображения оригиналов: а) 1; б) $e^{\alpha t}$; в) t; г) t^n.

Δ а) По формуле (2.1)

$$F(p) = L\{1(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \lim_{A \to +\infty} \int_0^{A} e^{-pt} dt = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) \Bigg|_0^A = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pA} \right).$$

Если $\operatorname{Re} p > 0$, то $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-pA} = 0$, и в этом случае будем иметь $F(p) = 1/p$.

Итак,

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p}. \qquad (2.4)$$

б) $L\{e^{\alpha t}\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \left.\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{-(p-\alpha)}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha}$, если $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Следовательно,

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}. \qquad (2.5)$$

в) $L\{t\} = \int\limits_0^{+\infty} te^{-pt} dt = |$ интегрируем по частям $| = \left.\left(\frac{-te^{-pt}}{p}\right)\right|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}$,

$\operatorname{Re} p > 0$, т. к. $\lim\limits_{t \to +\infty} te^{-pt} = 0$. Значит,

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}. \qquad (2.6)$$

г) По индукции можно доказать, что

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}. \ \blacktriangle \qquad (2.7)$$

Оригиналы и изображения обладают следующими свойствами.

1°. ***Линейность преобразования Лапласа.***

Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – оригиналы с показателями роста σ_1 и σ_2 соответственно, то линейная комбинация $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{C}$, – оригинал с показателем роста $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Тогда

$$L\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 L\{f_1(t)\} + \alpha_2 L\{f_2(t)\}. \qquad (2.8)$$

2.4. Пользуясь свойством линейности, найти изображения оригиналов:
а) $\sin \beta t$; б) $\cos \beta t$; в) $\operatorname{sh} \beta t$; г) $\operatorname{ch} \beta t$.

Δ а) так как $\sin \beta t \risingdotseq \frac{1}{2i}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})$, то согласно формулам (2.8) и (2.5) будем иметь $\sin \beta t \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\beta} - \frac{1}{p+i\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$. Итак,

$$\sin \beta t \risingdotseq \frac{\beta}{p^2+\beta^2}; \qquad (2.9)$$

б) аналогично, согласно равенству $\cos \beta t = \frac{1}{2}(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t})$, получим

$$\cos \beta t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\beta^2}; \qquad (2.10)$$

в), г) так как $\operatorname{sh} \beta t = \frac{1}{2}(e^{\beta t} - e^{-\beta t})$ и $\operatorname{ch} \beta t = \frac{1}{2}(e^{\beta t} + e^{-\beta t})$, то

$$\operatorname{sh}\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{p^2-\beta^2}, \quad \operatorname{ch}\beta t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\beta^2}. \ \blacktriangle \tag{2.11}$$

Следующие свойства 2° и 3° операционного исчисления позволяют без непосредственного вычисления интеграла (2.1) находить изображения по Лапласу многих функций.

2°. *Смещение в области изображения.* Имеет место

Теорема 2.2 (*смещения*). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то* $\forall \alpha \in \boldsymbol{C}$

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha). \tag{2.12}$$

2.5. По теореме смещения в силу равенств (2.7), (2.9) – (2.11) получим:

$$e^{\alpha t} t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}},\ n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}, \quad e^{\alpha t}\cos\beta t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}, \tag{2.13}$$

$$e^{\alpha t}\operatorname{sh}\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}, \quad e^{\alpha t}\operatorname{ch}\beta t \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}. \tag{2.14}$$

3°. *Смещение в области оригинала.* *Если* $f(t)$ – оригинал, то и $f(t-a)$, $a > 0$, также оригинал с аргументом, запаздывающим на величину a. График $f(t-a)$ получается сдвигом графика $f(t)$ вправо на величину a (рис. 2.4, а, б).

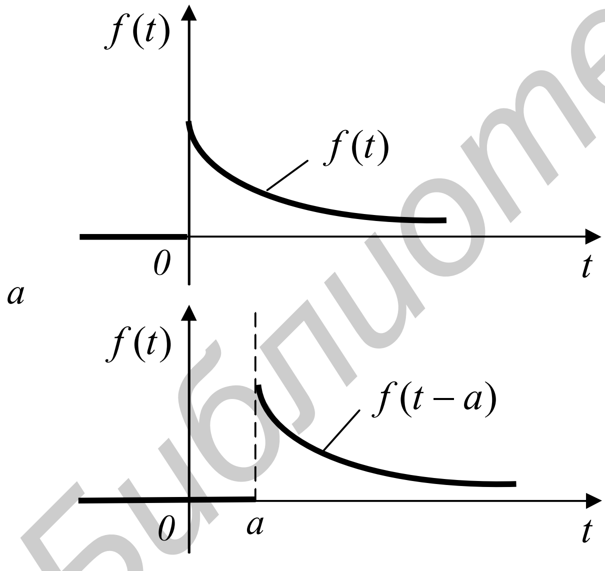


Рис. 2.4

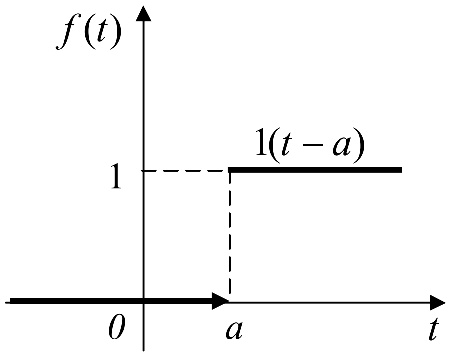


Рис. 2.5

Это означает, что оригинал $f(t-a)$ имеет вид

$$f(t-a) = f(t-a)\cdot 1(t-a). \tag{2.15}$$

Справедлива

Теорема 2.3 (*запаздывания*). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и* $a > 0$, *то*

$$f(t-a) \risingdotseq e^{-ap}F(p). \tag{2.16}$$

При $a > 0$ имеет место ***теорема опережения:***

$$f(t+a) \risingdotseq e^{ap}\left(F(p)-\int_0^a f(t)e^{-pt}dt\right). \qquad (2.17)$$

2.6. Найти изображения оригиналов: а) $\sin(t-\pi/2), t>\pi/2$; б) $\sin(t+1)$.

Δ а) по формуле (2.16)

$$L\{\sin(t-\pi/2)\} = e^{-\pi p/2}L\{\sin t\} = \frac{e^{-\pi p/2}}{p^2+1}.$$

Заметим, что в данном примере оригинал

$$\sin(t-\pi/2) = \sin(t-\pi/2)\cdot 1(t-\pi/2).$$

Если этого не учесть, то, т. к. $\sin(t-\pi/2) = -\cos t$, получим $L\{\sin(t-\pi/2)\} = = -L\{\cos t\} = -\dfrac{p}{p^2+1}$, что неверно, т. к. теперь оригиналом является $(-\cos t)\cdot 1(t)$. Поэтому «сдвинутый» оригинал следует представить в виде (2.15);

б) по формуле опережения (2.17)

$$L\,\{\sin(t+1)\} = e^p\left(L\{\sin t\} - \int_0^1 e^{-pt}\sin t\,dt\right) =$$

$$= e^p\left(\frac{1}{p^2+1} + \left(e^{-pt}\,\frac{p\sin t+\cos t}{p^2+1}\right)\Bigg|_0^1\right) = \frac{p\sin 1+\cos 1}{p^2+1}. \ \blacktriangle$$

2.7. Найти изображение оригинала $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где

$$f_1(t) = \begin{cases}\sin\omega t, & \omega \ge 0;\\ 0, & \omega < 0;\end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases}\sin(\omega t-\pi), & \omega t \ge \pi;\\ 0, & \omega t < \pi.\end{cases}$$

Δ Графики функций $f_1(t), f_2(t)$ и $f(t)$ изображены на рис. 2.6. Имеем

$$f(t) = \begin{cases}\sin\omega t, & 0 < t < \pi/\omega;\\ 0, & t<0, \quad t > \pi/\omega.\end{cases}$$

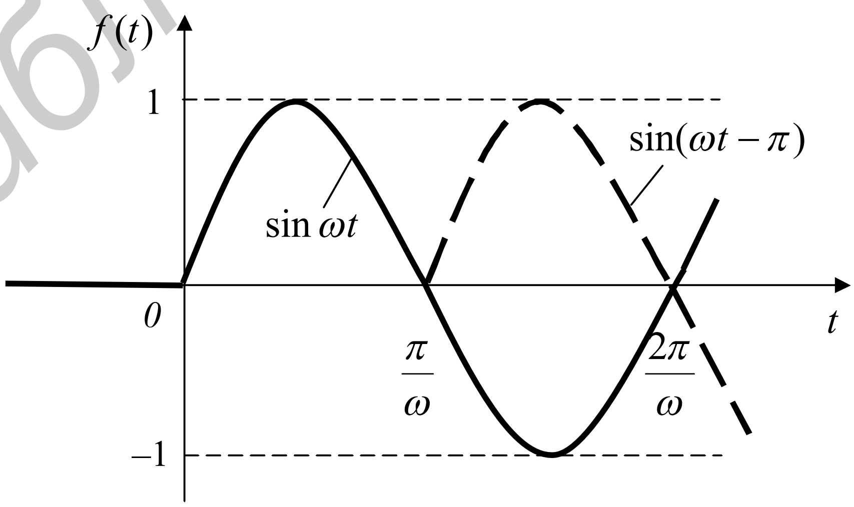


Рис. 2.6

Со- гласно

(2.15), $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \sin\omega t + \sin\omega(t - \pi/\omega)\cdot 1(t - \pi/\omega)$.

По теореме запаздывания с учетом формулы (2.9) получим

$$L\{f(t)\} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} +$$

$$+ e^{-\pi p/\omega}\,\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}(1+e^{-\pi p/\omega}). \quad \blacktriangle$$

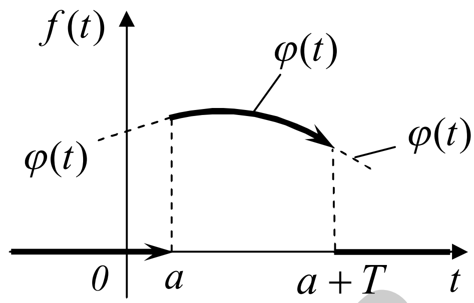


Рис. 2.7

Часто требуется найти изображение кусочно-гладкого оригинала, заданного графически. Если оригинал $f(t)$, изображенный на рис. 2.7, равен

$$f(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, a+T); \\ 0 \quad \text{вне} & [a, a+T), \end{cases}$$

то аналитически этот оригинал записывается в виде

$$f(t) = \begin{cases} \varphi(t)[1(t-a) - 1(t-(a+T)], & t \in [a, a+T); \\ 0, \quad \text{вне} & [a, a+T). \end{cases} \tag{2.18}$$

Если график оригинала состоит из нескольких примыкающих друг к другу кусков, то каждый из них необходимо записать в виде (2.18) и полученные результаты сложить.

2.8. Записать аналитически оригинал, изображенный на рис. 2.8, и найти его изображение.

Δ На $(0, a)$ функция $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = \dfrac{t-a}{a}$. Следовательно, на этом интервале, согласно (2.18), оригинал $f_1(t) = \dfrac{t-a}{a}\big[1(t) - 1(t-a)\big]$. На интервале $(a, 2a)$ функция $\varphi(t) = 1$. Согласно (2.18), оригинал $f_2(t) = 1(t-a) - 1(t-2a)$. Наконец, на интервале $(2a, 3a)$

$$\varphi(t) = \frac{3a-t}{a} \Rightarrow f_3(t) = \frac{3a-t}{a}[1(t-2a) - 1(t-3a)].$$

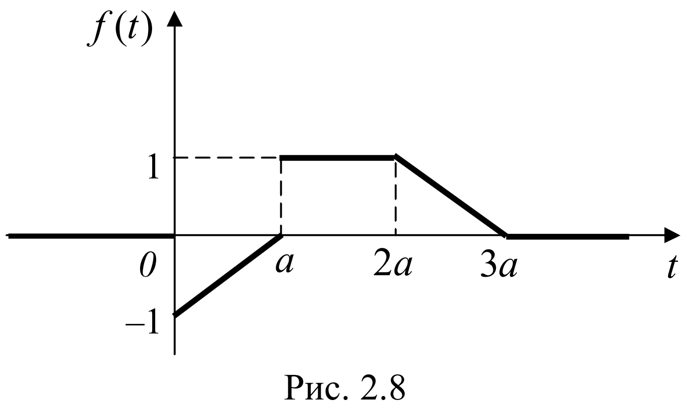


Рис. 2.8

В результате для оригинала $f(t)$, изображенного на рис. 2.8, получаем следующую аналитическую запись:

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)=\frac{t-a}{a}[1(t)-1(t-a)]+$$
$$+[1(t-a)-1(t-2a)]+\frac{3a-t}{a}[1(t-2a)-1(t-3a)].$$

В этом равенстве приведем подобные члены, чтобы каждое слагаемое в окончательном выражении содержало произведения вида $h(t-a)\cdot 1(t-a)$, где $h(t)$ – некоторая функция, а $a-const$. Получим

$$f(t)=\frac{1}{a}t\cdot 1(t)-1(t)-\frac{1}{a}(t-a)\cdot 1(t-a)+$$
$$+1(t-a)-\frac{1}{a}(t-2a)\cdot 1(t-2a)+\frac{1}{a}(t-3a)\cdot 1(t-3a).$$

Отсюда по теореме запаздывания будем иметь

$$f(t)\risingdotseq F(p)=\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{p}-\frac{e^{-ap}}{ap^2}+\frac{e^{-ap}}{p}-\frac{e^{-2ap}}{ap^2}+\frac{e^{-3ap}}{ap^2}=\frac{e^{-ap}-1}{p}+$$
$$+\frac{1-e^{-ap}-e^{-2ap}+e^{-3ap}}{ap^2}. \blacktriangle$$

2.9. Найти изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$, заданного графически (рис. 2.9):

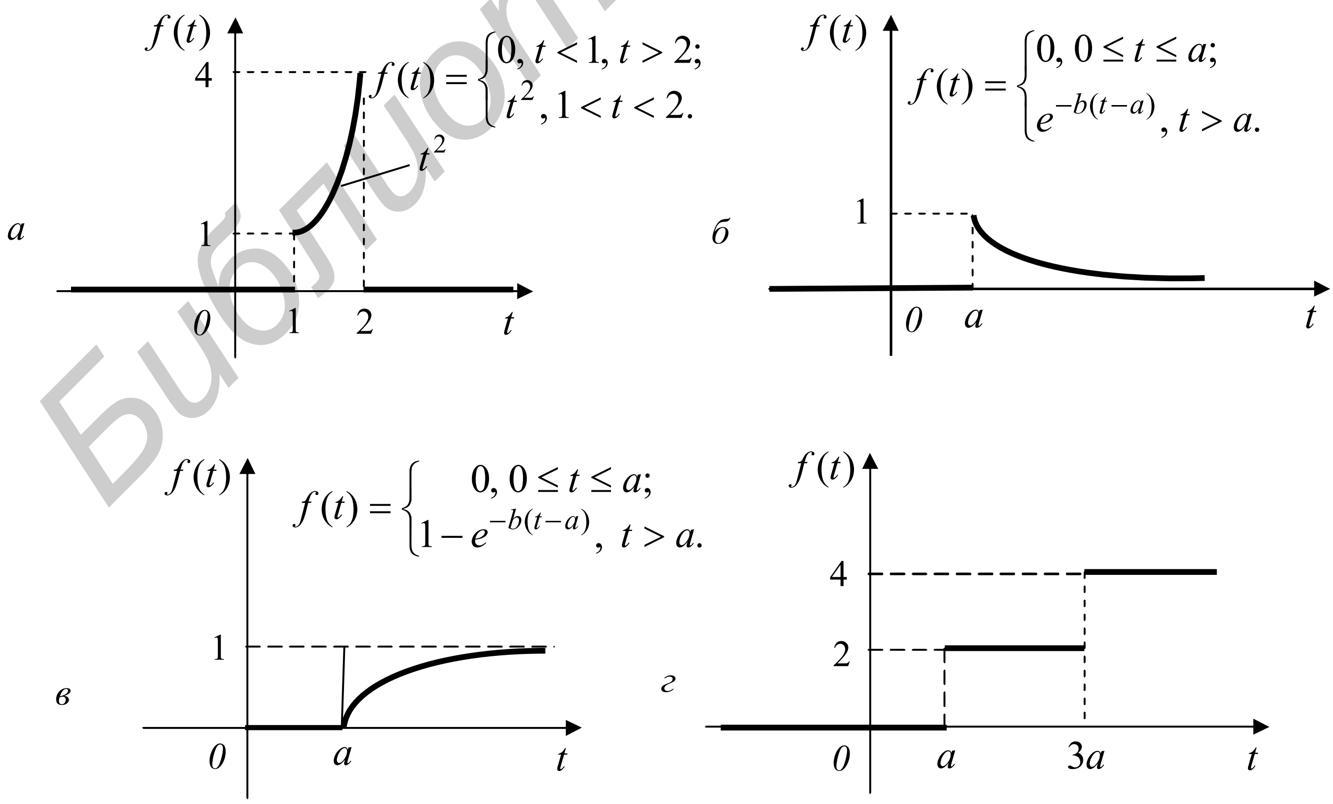


Рис. 2.9

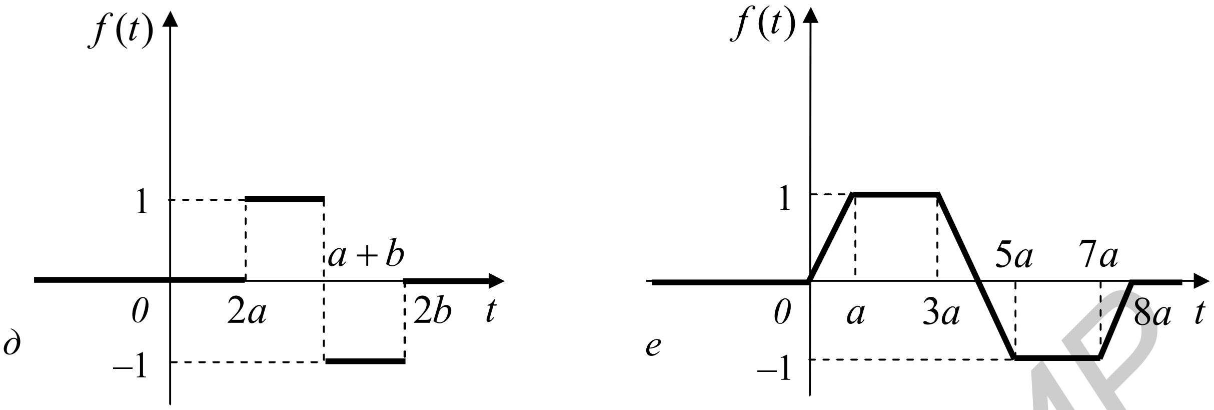


Рис. 2.9. Окончание (начало см. на с. 92)

Отв.: а) $\left(\dfrac{2}{p^3}+\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{1}{p}\right)e^{-p}-\left(\dfrac{2}{p^3}+\dfrac{4}{p^2}+\dfrac{4}{p}\right)e^{-2p}$; б) $\dfrac{e^{-ap}}{p+b}$; в) $\dfrac{be^{-ap}}{p(p+b)}$; г) $\dfrac{2}{p}e^{-ap}(1+e^{-2ap})$; д) $\dfrac{1}{p}(e^{-ap}-e^{-bp})^2$; е) $\dfrac{1}{ap^2}(1-e^{-ap})(1-e^{-3ap})(1-e^{-4ap})$.

4°. Теорема 2.4 (*подобия*). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и* $\lambda > 0$, *то*

$$f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{2.19}$$

2.10. Найти изображение оригинала $f(t)=\sin^4 t$.

Δ Имеем

$$\sin^4 t=\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2t+(1+\cos 4t)/2}{4}=\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t.$$

Используя свойство линейности и учитывая, что $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$, по формуле (2.19) получаем

$$L\{\sin^4 t\}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{p}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\frac{p/2}{(p/2)^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\frac{p/4}{(p/4)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{p}-\frac{3p}{p^2+4}+\frac{p}{p^2+16}\right). \ \blacktriangle$$

2.11. Используя свойство линейности преобразования, теоремы подобия и смещения, найти изображения следующих функций-оригиналов: а) $\sin^2 t$; б) $\cos^2 2t$; в) $e^t\cos^2 t$; г) $\sin^3 t$; д) $\cos^3 t$; е) $\sin 2t\cdot\cos 3t$; ж) $\cos 2t\cdot\cos 3t$; з) $e^{-3t}\sin t\cos 3t$; и) $e^{-4t}\sin t\cos 3t$; к) $\operatorname{sh} 3t\cos 2t$; л) $t\operatorname{ch} 2t$; м) $\sin t - t\cos t$; н) $te^{-t}\sin t$.

Отв.: а) $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$; б) $\dfrac{p^2+2}{p(p^2+16)}$; в) $\dfrac{p^2-2p+3}{(p-1)(p^2-2p+5)}$;

г) $\dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$; д) $\dfrac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}$; е) $\dfrac{2(p^2-5)}{(p^2+13)^2-144}$;

ж) $\dfrac{p(p^2+13)}{(p^2+13)^2-144}$; з) $\dfrac{2}{(p+3)^2+16}-\dfrac{1}{(p+3)^2+4}$;

и) $\dfrac{2}{(p+4)^2+16}-\dfrac{1}{(p+4)^2+4}$; к) $\dfrac{3(p^2-13)}{(p^2+13)^2-36p^2}$;

л) $\dfrac{p^2+4}{(p^2-4)^2}$; м) $\dfrac{2}{(p^2+1)^2}$; н) $\dfrac{2(p+1)}{(p^2+2p+2)^2}$.

5°. Теорема 2.5 (*изображение периодического оригинала*). *Если* $f(t)$ *– оригинал периода* $T>0$, *то*

$$f(t) \risingdotseq \frac{\int_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}} = F(p). \tag{2.20}$$

2.12. Найти изображение оригинала $|\sin\beta t|$.

Δ Функция $|\sin\beta t|$ периодична с периодом $T=\pi/\beta$. По формуле (2.20) ее изображение $F(p)=\dfrac{\int_0^{\pi/\beta}|\sin\beta t|\,e^{-pt}dt}{1-e^{-\pi p/\beta}}=\dfrac{1+e^{-\pi p/\beta}}{1-e^{-\pi p/\beta}}$. ▲

2.13. Найти изображение периодичного импульса периода $T>0$, действующего в течение времени $t=a$ (рис. 2.10).

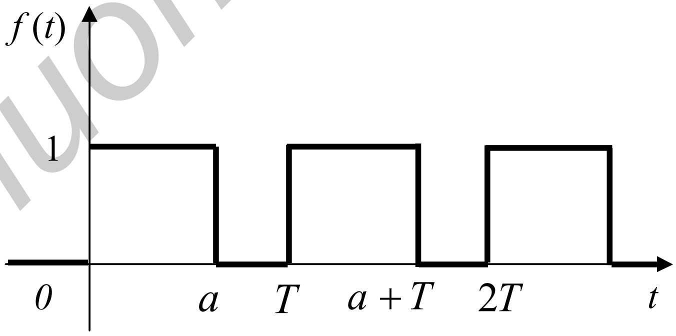


Рис. 2.10

Δ Вычисляем интеграл $\int_0^T f(t)e^{-pt}dt=\int_0^a 1\cdot e^{-pt}dt=\dfrac{1-e^{-ap}}{p}$. По формуле (2.20) искомое изображение $F(p)=\dfrac{1-e^{-ap}}{p(1-e^{-pT})}$. ▲

2.14. Найти изображения графических периодических оригиналов, представленных на рис. 2.11:

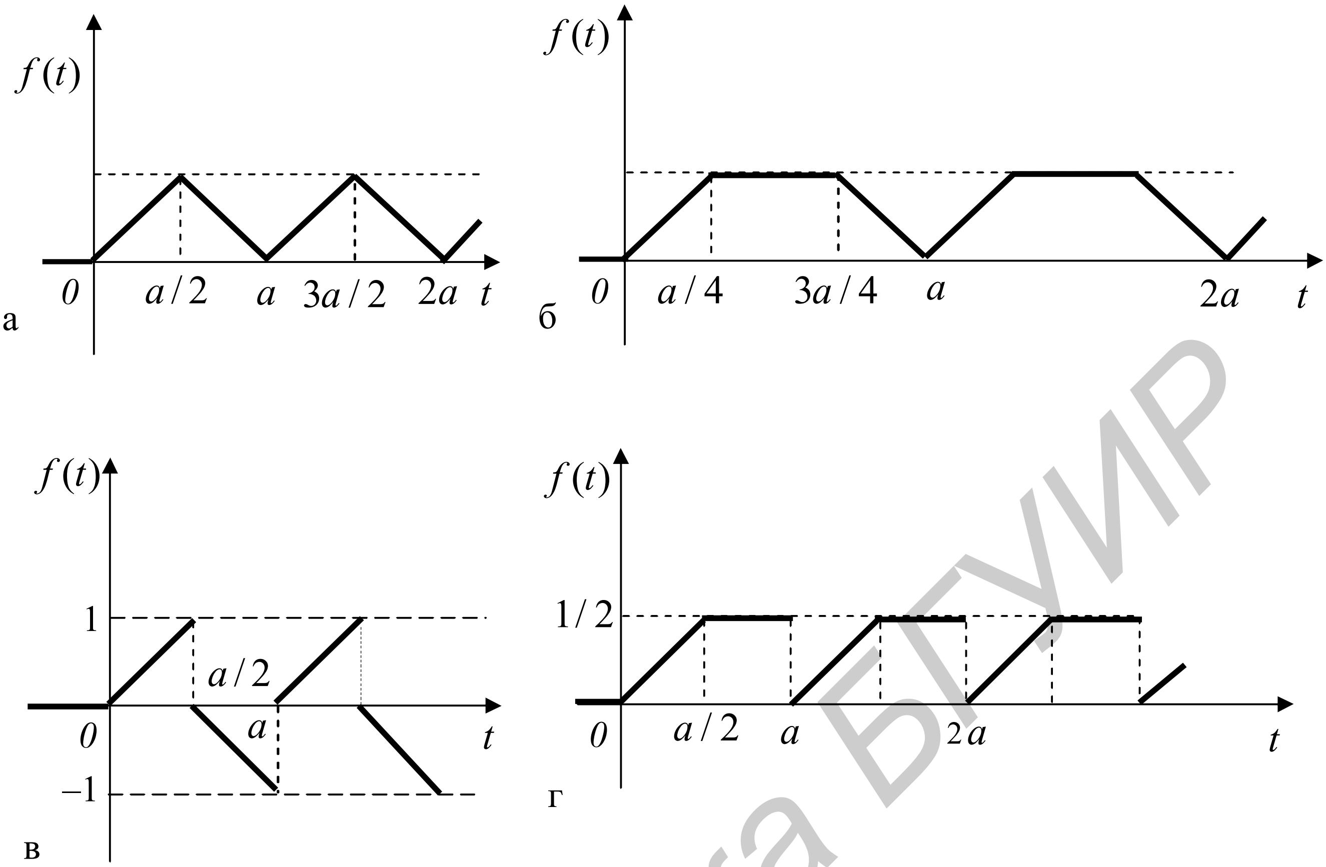


Рис. 2.11

Отв.: а) $\dfrac{2}{ap^2}\,\mathrm{th}\,\dfrac{ap}{4}$; б) $\dfrac{e^{ap}(a^2p^2+32)-8ae^{ap/4}p-32e^{3ap/4}}{16ap^2(e^{ap}-1)}$;

в) $\dfrac{2e^{ap/2}-2-ap}{ap^2(1+e^{ap/2})}$; г) $\dfrac{1-e^{-ap/2}-(ape^{-ap})/2}{ap^2(1-e^{-ap})}$.

2.15. Найти изображение оригинала $f(t)$ с периодом T, заданного на интервале-периоде следующим образом:

а) $f(t)=\begin{cases} 2t/T, & 0<t<T/4; \\ 1/2, & T/4\le t<T/2; \\ 0, & T/2\le t<T. \end{cases}$ б) $f(t)=\begin{cases} \dfrac{4t}{T}-1, & 0<t<T/2; \\ -\dfrac{4t}{T}+3, & T/2\le t<T. \end{cases}$

Отв.: а) $\dfrac{4e^{3pT/4}-4e^{pT}+e^{pT/2}pT}{2p^2T(1-e^{pT})}$; б) $\dfrac{4e^{pT/2}-4-pT-e^{pT/2}pT}{p^2T(1+e^{pT/2})}$.

Сверткой двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция, обозначаемая $f_1(t)*f_2(t)$ и равная

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau. \qquad (2.21)$$

Свертка обладает следующими свойствами:

1) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (коммутативность).

2) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (ассоциативность).

3) $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * f_3 = \alpha_1 (f_1 * f_3) + \alpha_2 (f_2 * f_3)$ (линейность).

Свертка двух оригиналов есть также оригинал.

6°. (*Изображение свертки*).

Теорема 2.6 (*Бореля*). *Если* $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, *то*

$$f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p) \cdot F_2(p). \tag{2.22}$$

Равенство (2.22) называется *формулой умножения изображений.*

2.16. Найти изображение функции $f(t) = \int_0^t e^{-2\tau} \cos(t - \tau)\, d\tau$.

Δ Данная функция есть свертка оригиналов $f_1(t) = e^{-2t}$ и $f_2(t) = \cos t$. Так как $e^{-2t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+2}$, $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$, то по теореме Бореля $f(t) \risingdotseq \dfrac{p}{(p+2)(p^2+1)}$. ▲

2.17. Найти изображения следующих оригиналов: а) $\int_0^t e^{\tau}(t - \tau)\, d\tau$;

б) $\int_0^t \operatorname{sh}\tau \sin(t - \tau)\, d\tau$; в) $\int_0^t \tau \sin \tau e^{t-\tau}\, d\tau$; г) $\int_0^t \sin(t - \tau) \cos 2\tau\, d\tau$.

Отв.: а) $\dfrac{1}{p^2(p-1)}$; б) $\dfrac{1}{p^4 - 1}$; в) $\dfrac{2p}{(p^2+1)^2(p-1)}$; г) $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

Теорема Бореля часто применяется для восстановления оригинала по его изображению.

2.18. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p) = p/(p^2+1)^2$.

Δ Так как $F(p) = \dfrac{p}{p^2+1} \cdot \dfrac{1}{p^2+1}$ и $\dfrac{p}{p^2+1} \fallingdotseq \cos t$, $\dfrac{1}{p^2+1} \fallingdotseq \sin t$, то по формуле (2.22)

$$\frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \fallingdotseq \cos t * \sin t = \int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (\sin t + \sin(t - 2\tau))\, d\tau = \frac{1}{2}\left(\tau \sin t + \frac{1}{2}\cos(t - 2\tau)\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t \sin t}{2} = f(t). \quad ▲$$

2.19. С помощью формулы умножения изображений восстановить оригинал по заданному изображению:

а) $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$; б) $\dfrac{1}{p^3 + 2p^2 + p}$; в) $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$; г) $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

Отв.: а) $\dfrac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$; б) $1 - e^{-t}(1+t)$; в) $t - \sin t$; г) $\dfrac{1}{9}(e^{-2t} + e^t(3t-1))$.

7°. Теорема 2.7 ***(дифференцирование оригинала).*** *Если* $f(t)$, $f'(t)$ – *оригиналы и* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \tag{2.23}$$

где под $f(0)$ *понимается* $f(+0)$.

В частности, если $f(0) = 0$, то $f'(t) = pF(p)$.

Следствие. *Если* $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ *– оригиналы, то*

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{2.24}$$

В частности, если $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, *то*

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p). \tag{2.25}$$

2.20. Пусть $f(t)$ – оригинал и $f(t) \risingdotseq F(p)$. Найти изображение дифференциального выражения $f''(t) + 2f'(t) + f(t)$, если $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

Δ По формуле (2.24) имеем $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0) = pF(p) - 1$; $f''(t) \risingdotseq$ $\risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) = p^2 F(p) - p - 2$. Тогда $f''(t) + 2f'(t) + f(t) \risingdotseq$ $\risingdotseq (p^2 + 2p + 1)F(p) - p - 4$. ▲

2.21. Найти преобразование Лапласа *многочлена Лагерра* $L_n(t) = e^t \dfrac{d^n (t^n e^{-t})}{dt^n}$.

Δ Так как $t^n \risingdotseq n!/p^{n+1}$, то по теореме смещения $t^n e^{-t} \risingdotseq n!/(p+1)^{n+1}$. Для $f(t) = e^{-t} t^n$ очевидно, что $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Тогда по формуле (2.25) получаем $L\{f^{(n)}(t)\} = \dfrac{n!\, p^n}{(p+1)^{n+1}}$, и, значит, по теореме смещения

$$L_n(t) \risingdotseq \frac{n!(p-1)^n}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n. \ ▲$$

2.22. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t) = \cos^2 2t$.

Δ Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$. Но $f(0) = 0$, а $f'(t) = -4\sin 2t \cos 2t = -2\sin 4t \risingdotseq -\dfrac{8}{p^2 + 16}$. Значит, $-\dfrac{8}{p^2+16} = pF(p) - 1$, откуда $F(p) = \dfrac{p^2 + 8}{p(p^2 + 16)}$. ▲

2.23. Найти изображения заданных дифференциальных выражений при указанных начальных условиях, считая, что $x = x(t)$ – оригинал и $x(t) \risingdotseq X(t)$.

а) $x'' + 3x' + 2x + 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = -2$;

б) $x^{IV}+4x'''+2x''-3x'-5$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=-3$, $x'''(0)=5$;
в) $x'''+6x''+x'-2x$, $x(0)=-3$, $x'(0)=7$, $x''(0)=1$.

Отв.: а) $L\{x''+3x'+2x+1\}=(p^2+3p+2)X(p)+\dfrac{p^2+5p+1}{p}$; б) $L\{x^{IV}+$ $+4x'''+2x''-3x'-5\}=(p^4+4p^3+2p^2-3p)X(p)-p^3-3p^2+5p-12-5/p$;

в) $L\{x'''+6x''+x'-2x\}=(p^3+6p^2+p-2)X(p)+3p^2+11p-40$.

2.24. Найти $L\{f'(t)\}$, если:

а) $f(t)=e^{-at}\sin t$; б) $f(t)=e^{-at}\operatorname{ch}\lambda t$; в) $f(t)=e^{-at}\operatorname{sh}\lambda t$.

Отв.: а) $\dfrac{1}{(p+a)^2+1}$; б) $\dfrac{p(p+a)}{(p+a)^2-\lambda^2}-1$; в) $\dfrac{\lambda p}{(p+a)^2-\lambda^2}$.

2.25. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображения следующих функций: а) $\sin^4 t$; б) $\sin^2 t$; в) $\sin^3 t$; г) $\cos^3 t$; д) $\cos^4 t$; е) $t^2\sin 3t$; ж)* $t\operatorname{ch}2t\cos 2t$; з) $t(e^{4t}+\cos 3t)$.

Отв.: а) $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{p}+\dfrac{p}{p^2+16}-\dfrac{4p}{p^2+1}\right)$; б) $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$; в) $\dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$;

г) $\dfrac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}$; д) $\dfrac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$; е) $\dfrac{18(p^2-3)}{(p^2+9)^3}$; ж)* $\dfrac{p^2(p^4-192)}{(p^4+64)^2}$;

з) $\dfrac{1}{(p-4)^2}+\dfrac{p^2-9}{(p^2+9)^2}$.

8°. Теорема 2.8 (*дифференцирование изображения*). *Если* $f(t)\risingdotseq F(p)$, то

$$F'(p)\fallingdotseq -tf(t), \tag{2.26}$$

или в общем случае

$$F^{(n)}(p)\fallingdotseq(-1)^n t^n f(t). \tag{2.27}$$

2.26. Найти изображения оригиналов: а) $t^2\sin t$; б) $t^n e^{qt}$.

Δ а) так как $\sin t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2+1}$, то $t^2\sin t\risingdotseq(-1)^2\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)''=\dfrac{6p^2-2}{(p^2+1)^2}$;

б) так как $e^{qt}\risingdotseq\dfrac{1}{p-q}$, то $t^n e^{qt}\risingdotseq(-1)^n\left(\dfrac{1}{p-q}\right)^{(n)}=\dfrac{n!}{(p-q)^{n+1}}$, поскольку

$\left(\dfrac{1}{p-q}\right)^{(n)}=\left((p-q)^{-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(p-q)^{n+1}}$. ▲

2.27. Используя теорему о дифференцировании изображения, найти изображения следующих функций: а) $t\sin\omega t$; б) $t^2\cos\omega t$; в) $t\operatorname{sh}\lambda t$; г) $t^2\operatorname{ch}\lambda t$; д) $(t^2-t+1)e^{3t}$; е) $t\operatorname{sh}t\sin t$.

Отв.: а) $\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$; б) $\dfrac{2p^2(p-3\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^3}$; в) $\dfrac{2p\lambda}{(p^2-\lambda^2)^2}$; г) $\dfrac{2p(p^2+3\lambda^2)}{(p^2-\lambda^2)^3}$;
д) $\dfrac{p^2-7p+14}{(p-3)^3}$; е) $\dfrac{6p^4-8}{(p^4+4)^2}$.

9°. Теорема 2.9 ***(интегрирование оригинала).*** *Если* $f(t) \doteqdot F(p)$, *то*

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}. \qquad (2.28)$$

2.28. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p-1)}$.

Δ Так как $1/(p-1) \doteqdot e^t$, то $\dfrac{1}{p(p-1)} \doteqdot \int_0^t e^\tau d\tau = e^t-1$. Тогда $\dfrac{1}{p^2(p-1)}=$
$=\dfrac{1}{p(p(p-1))} \doteqdot \int_0^t (e^\tau-1)\,d\tau = e^t-t-1=f(t)$. ▲

2.29. Пользуясь теоремой об интегрировании оригинала, найти изображения следующих функций: а) $\int_0^t(\tau+1)\cos 3\tau\ d\tau$; б) $\int_0^t \tau\,\mathrm{sh}\,2\tau\ d\tau$; в) $\int_0^t \cos^2 2\tau\ d\tau$;
г) $\int_0^t \tau^2 e^{-\tau}\ d\tau$; д) $\int_0^t \tau\,\mathrm{ch}\,2\tau\ d\tau$; е) $\int_0^t \tau^2\cos\tau\ d\tau$.

Отв.: а) $\dfrac{p^3+p^2+9p-9}{p(p^2+9)^2}$; б) $\dfrac{4}{(p^2-4)^2}$; в) $\dfrac{p^2+8}{p^2(p^2+16)}$;
г) $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$; д) $\dfrac{p^2+4}{p(p^2-4)^2}$; е) $\dfrac{2p^2-6}{(p^2+1)^3}$.

10°. Теорема 2.10 ***(интегрирование изображения).*** *Если* $f(t) \doteqdot F(p)$ *и интеграл* $\int_0^\infty F(s)\,ds$ *сходится, то*

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^\infty F(s)\,ds. \qquad (2.29)$$

2.30. Найти изображения оригиналов: а) $\dfrac{\sin\beta t}{t}$; б) $\int_0^t \dfrac{\cos\tau-\cos 2\tau}{\tau}d\tau$.

Δ а) согласно формуле (2.29), имеем

$$L\left\{\frac{\sin\beta t}{t}\right\}=\int_p^\infty L\{\sin\beta t\}\Big|_{p=s}\,ds=\int_p^\infty \frac{\beta}{s^2+\beta^2}\,ds=$$
$$=\mathrm{arctg}\frac{s}{\beta}\Bigg|_{s=p}^{s=\infty}=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{p}{\beta}=\mathrm{arcctg}\frac{p}{\beta}; \qquad (2.30)$$

б) согласно теоремам 2.8 и 2.9, будем иметь

$$L\left\{\int_0^t \frac{\cos\tau - \cos 2\tau}{\tau}\, d\tau\right\} = \frac{1}{p}\int_p^{\infty} L\{\cos t - \cos 2t\}\big|_{\,p=s} ds = \frac{1}{p}\int_p^{\infty}\left(\frac{s}{s^2+1} - \right.$$

$$\left. - \frac{s}{s^2+4}\right) ds = \frac{1}{2p}\left(\ln(s^2+1) - \ln(s^2+4)\right)\Bigg|_{s=p}^{s=\infty} = -\frac{1}{2p}\ln\frac{s^2+4}{s^2+1}\Bigg|_p^{\infty} = \frac{1}{2p}\ln\frac{p^2+4}{p^2+1}. \quad \blacktriangle$$

2.31. Найти изображение интегрального синуса $\operatorname{Si} t = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau$.

Δ Так как, согласно равенству (2.30) при $\beta = 1$, $\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \operatorname{arcctg} p$, то на основании теоремы 2.9 об интегрировании оригинала получим $\operatorname{Si} t = \int_p^t \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau = \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$. $\blacktriangle$

2.32. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $\frac{\sin^2 2t}{t}$; б) $\frac{1-e^{-t}}{t}$; в) $\frac{e^t - 1 - t}{t}$; г) $\frac{e^t - e^{-t}}{t}$; д) $\frac{e^{-2t}\sin 3t}{t}$; е) $\frac{e^{-3t}\sin^2 2t}{t}$.

Отв.: а) $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+16}}{p}$; б) $\ln\frac{p+1}{p}$; в) $\ln\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p}$; г) $\ln\frac{p+1}{p-1}$; д) $\operatorname{arctg}\frac{3}{p+2}$; е) $\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+6p+25}{(p+3)^2}$.

С помощью теоремы об интегрировании изображения легко вычисляются некоторые несобственные интегралы.

Теорема 2.11. *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то*

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt \risingdotseq \int_0^{\infty} F(p)\, dp, \tag{2.31}$$

если оба интеграла сходятся.

Следствие. *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то*

$$\int_0^{\infty} t^n f(t)\, dt \risingdotseq (-1)^{n+1}\int_0^{\infty} F^{(n+1)}(p)\, dp. \tag{2.32}$$

2.33. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt, \quad a > 0, b > 0;$

б) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t}\sin\beta t}{t}\, dt, \quad \alpha \ge 0, \beta > 0;$ в) $\int_0^{\infty} t^2 e^{-\alpha t}\, dt, \quad \alpha > 0.$

Δ а) так как $e^{-at} - e^{-bt} \risingdotseq \frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b}$, то по формуле (2.31)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b} \right) \, dp = \ln \left| \frac{p+a}{p+b} \right| \Bigg|_0^{\infty} = \ln \frac{b}{a};$$

б) имеем

$$e^{-\alpha t} \sin \beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin \beta t}{t} dt = \beta \int_0^{\infty} \frac{dp}{(p+\alpha)^2 + \beta^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{p+\alpha}{\beta} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arcctg} \frac{\alpha}{\beta};$$

в) так как $e^{-\alpha t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+\alpha}$, то по формуле (2.32)

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-\alpha t} \, dt = (-1)^{2+1} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{p+\alpha} \right)'''_p dp = 6 \int_0^{\infty} \frac{dp}{(p+\alpha)^4} = \frac{2}{\alpha^3}. \ \blacktriangle$$

2.34. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$; б) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \sin mt \, dt$, $\alpha > 0, \beta > 0, m > 0$;

в)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + De^{-\delta t}}{t} dt$, $A + B + C + D = 0, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0,$ $\delta > 0$; г) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin at \sin bt}{t} dt$, $a > 0, b > 0$.

Отв.: а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) $-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{m} + \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{m}$; в) $A\ln\dfrac{\delta}{\alpha} + B\ln\dfrac{\delta}{\beta} + C\ln\dfrac{\delta}{\gamma}$; г) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|$.

Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – непрерывно дифференцируемые оригиналы, а $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – их изображения. Тогда $f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p) \cdot F_2(p)$. Отсюда по теореме дифференцирования оригинала

$$pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq \frac{d}{dt}(f_1 * f_2) = \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) \, d\tau. \qquad (2.33)$$

Равенство (2.33) называется *интегралом Дюамеля.* Выполняя в нем дифференцирование, получаем

$$pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq f_1(t) \, f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau) \, d\tau. \qquad (2.34)$$

В силу коммутативности свертки получаем также

$$pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq f_2(t) \, f_1(0) + \int_0^t f_2(\tau) f_1'(t-\tau) \, d\tau. \qquad (2.35)$$

2.35. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

Δ Представим $F(p)$ в виде $p\cdot\dfrac{p}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$. Так как $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$, то по формулам (2.33) и (2.34)

$$p\cdot\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1} \fallingdotseq \frac{d}{dt}(\cos t * \sin t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \cos\tau \sin(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \cos t \sin 0 + \int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t) = f(t).\ \blacktriangle$$

2.36. Применяя формулу Дюамеля, найти оригиналы по их изображениям:

а) $\dfrac{1}{(p^2+1)p^3}$; б) $\dfrac{p^2}{(p-1)(p^2+1)}$; в) $\dfrac{p^3}{(p^2-1)(p^2+1)}$; г) $\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$;

д)* $\dfrac{p}{p^4+a^4}$; е) $\dfrac{p}{p^4-a^4}$; ж) $\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$; з) $\dfrac{p}{(p-a)^3}$.

Отв.: а) $\dfrac{t^2}{2}+\cos t-1$; б) $\dfrac{1}{2}(e^t+\cos t+\sin t)$; в) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} t+\cos t)$;

г) $\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$; д) $\dfrac{1}{a^2}\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\dfrac{at}{\sqrt{2}}$; е) $\dfrac{1}{2a^2}(\operatorname{ch} at-\cos at)$;

ж) $\dfrac{t}{2a}\sin at$; з) $\left(t+\dfrac{1}{2}at^2\right)e^{at}$.

При проверке правильности вычислений в операционном исчислении полезны *предельные соотношения.* Они позволяют по виду изображения судить о поведении оригинала при $t=0$ и при $t\to+\infty$.

Теорема 2.12 (*о начальном и предельном значении оригинала*). *Если $f(t)$, $f'(t)$ – оригиналы и $f(t)\risingdotseq F(p)$, $f'(t)\risingdotseq \Phi(p)$, то*

1) $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty} pF(p) = \lim\limits_{t\to+0} f(t) = f(0);$ (2.36)

2) $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ (2.37)

при условии, что последний предел существует и конечен.

2.37. Проверить справедливость предельного соотношения (2.37) для оригинала $\sin t$.

Δ Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\sin t$ не существует, то равенство (2.37) не имеет места, хотя $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) = \lim\limits_{p\to 0}\dfrac{p}{p^2+1} = 0.$ $\blacktriangle$

2.38. Определить начальное значение оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p) = 1/(p+\alpha)^2$. **Отв.:** 0.

2.39. Определить предельное значение оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p) = 1/(p+\alpha)^2$. **Отв.:** 0.

2.40. Справедливы ли предельные соотношения (2.36) и (2.37) для функций $1(t)$, $\cos t$, $e^{\alpha t}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$?

Отв.: Соотношение (2.36) справедливо для всех функций. Соотношение (2.37) справедливо для функций $1(t)$ и $e^{\alpha t}$ и не справедливо для функции $\cos t$.

Приведем теперь *таблицу основных оригиналов и их изображений,* наиболее часто встречающихся при решении задач. В ней $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Таблица оригиналов и их изображений

Оригинал	Изображение
1. 1	$1/p$
2. $e^{\alpha t}$	$1/(p-\alpha)$
3. t	$1/p^2$
4. t^n	$n!/p^{n+1}$
5. $\sin \beta t$	$\beta/(p^2+\beta^2)$
6. $\cos \beta t$	$p/(p^2+\beta^2)$
7. $\operatorname{sh} \beta t$	$\beta/(p^2-\beta^2)$
8. $\operatorname{ch} \beta t$	$p/(p^2-\beta^2)$
9. $e^{\alpha t} f(t)$	$F(p-\alpha)$
10. $f(t-\alpha), \alpha > 0$	$e^{-\alpha p} F(p)$
11. $f(t+\alpha), \alpha > 0$	$e^{\alpha p}\left(F(p) - \int\limits_0^{\alpha} f(t) e^{-pt}\, dt\right)$
12. $f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda} F(\frac{p}{\lambda})$
13. $f(t+T), T$ – период	$\left(\int\limits_0^T f(t) e^{-pt}\, dt\right) / \left(1 - e^{-pT}\right)$
14. $f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
15. $f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
16. $f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
17. $\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau$	$F(p)/p$
18. $t^n f(t), n \in \boldsymbol{N}$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
19. $f(t)/t$	$\int\limits_p^{\infty} F(s)\, ds$
20. $\frac{d}{dt}(f_1(t) * f_2(t))$	$pF_1(p) \cdot F_2(p)$

2.2. Восстановление оригинала по изображению

Элементарный метод. Обращение преобразования Лапласа. Формула Меллина. Оригиналы для рациональных изображений. Формулы разложения.

Элементарный метод отыскания оригинала по его изображению состоит в использовании свойств преобразования Лапласа и таблицы изображений.

При преобразовании изображения широко используется разложение рациональной дроби (функции) на сумму простейших дробей.

2.41. Найти оригинал по заданному изображению $F(p)$:

а) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p^3-8}$; в) $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$;

г) $F(p)=\dfrac{p^2e^{-2p}}{p^3+1}$.

Δ а) имеем

$$F(p)=\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{(p-1)+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}+\frac{1}{(p-1)^2+2^2}.$$

Согласно строкам (2), (5), (6) таблицы, получаем $f(t)=e^t\cos 2t+\dfrac{1}{2}e^t\sin 2t$;

б) разложим данную дробь в сумму простейших дробей

$$F(p)=\frac{1}{p^3-8}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}\Rightarrow 1\equiv A(p^2+2p+4)+(Bp+C)(p-2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|l} p^2 & A+B=0, \\ p & 2A-2B+C=0, \\ p^0 & 4A-2C=1. \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\}\Rightarrow\begin{cases} A=1/12, \\ B=-1/12, \\ C=-1/3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$F(p)=\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+4}{p^2+2p+4}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-$$

$$-\frac{1}{12}\cdot\frac{(p+1)+3}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

Согласно строкам (2), (5), (6), (9) таблицы, отсюда получаем, что

$$f(t)=\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-t}(\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t);$$

в) разлагаем $F(p)$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}=\frac{A}{(p-1)^3}+\frac{B}{(p-1)^2}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{(p+2)^2}+\frac{E}{p+2}.$$

По схеме, изложенной выше, находим коэффициенты:

$$A=1/9,\ B=1/27,\ C=-1/27,\ D=2/27,\ E=1/27.$$

Следовательно, $F(p)=\dfrac{1}{27}\left(\dfrac{3}{(p-1)^3}+\dfrac{1}{(p-1)^2}-\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{2}{(p+2)^2}+\dfrac{1}{p+2}\right).$

Используя строки (2), (3), (4) таблицы, получаем

$$f(t)=\frac{1}{27}\left(\frac{3}{2}t^2e^t+te^t-e^t+2te^{-2t}+e^{-2t}\right)=\frac{3t^2+2t-2}{54}e^t+\frac{2t+1}{27}e^{-2t};$$

г) разложим дробь $\dfrac{p^2}{p^3+1}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{p^2}{p^3+1}=\frac{p^2}{(p+1)(p^2-p+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{2p-1}{p^2-p+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1}+2\frac{p-1/2}{(p-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\right)\risingdotseq\frac{1}{3}\left(e^{-t}+2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Наличие сомножителя e^{-2p} в изображении $F(p)$ указывает на то, что нужно применить теперь теорему запаздывания (строка (10) таблицы). Получим окончательно:

$$\frac{p^2e^{-2p}}{p^3+1}\risingdotseq\frac{1}{3}1(t-2)\left(e^{-(t-2)}+2e^{(t-2)/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)\right).\ ▲$$

2.42. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$:

а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$. **Отв.:** $f(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)$.

б) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$. **Отв.:** $f(t)=e^{-2t}\sin 2t$.

в) $F(p)=\dfrac{1}{p^3+2p^2+p}$. **Отв.:** $f(t)=1-e^{-t}-te^{-t}$.

г) $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$. **Отв.:** $f(t)=\dfrac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$.

д) $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$. **Отв.:** $f(t)=e^{-t}(1-t^2)$.

е) $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

Отв.: $f(t)=\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{15}e^{-t}-\dfrac{1}{10}\cos 2t-\dfrac{2}{5}\sin 2t$.

ж) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

Отв.: $f(t)=3(t-2)\cdot 1(t-2)+\frac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\cdot 1(t-1)$.

з) $F(p)=\frac{1}{p-2}+\frac{e^{-p}}{p}+\frac{3e^{-4p}}{p^2+9}$.

Отв.: $f(t)=e^{2t}+1(t-1)+1(t-4)\cdot\sin 3(t-4)$.

и) $F(p)=\frac{p}{p^2+4}-\frac{2pe^{-p}}{p^2-4}$. **Отв.:** $f(t)=\cos 2t-2\cdot 1(t-1)\cdot \operatorname{ch} 2(t-1)$.

2.43. Пользуясь теоремой умножения (изображение свертки), найти оригиналы, соответствующие следующим изображениям: а) $\frac{1}{(p-1)(p-2)}$;

б) $\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$; в) $\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$; г) $\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

Отв.: а) $e^{2t}-e^{t}$; б) $e^{-t}-e^{-2t}-te^{-2t}$; в) $\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$; г) $\frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)$.

Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста σ_0, то при $\sigma>\sigma_0$ его можно восстановить с помощью *обратного преобразования Лапласа* по формуле

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}\,dp, \qquad (2.38)$$

называемой *формулой Меллина*, где $F(p)\doteqdot f(t)$.

Для вычисления интеграла Меллина (2.38) используется формула

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}(F(p)\,e^{pt}), \quad \operatorname{Re}p_k<\sigma_0, \qquad (2.39)$$

т.е. все особые точки p_k функции $F(p)$ должны лежать левее прямой $\operatorname{Re}p=\sigma_0$ на комплексной плоскости переменной $p=\sigma+i\omega$.

2.44. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)$:

а) $F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+1)}$; б) $F(p)=\frac{1}{(p-1)^3}$.

Δ а) функция $F(p)\to 0$ при $\operatorname{Re}p\to+\infty$. Поэтому формула (2.39) может быть применена. Функция $F(p)$ имеет полюс $p=0$ 2-го порядка и простые полюсы $p=-i$ и $p=i$. Поэтому $F(p)$ аналитична в любой полуплоскости $\operatorname{Re}p>0$. Находим вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в этих полюсах (процесс вычисления опускаем): $\operatorname*{Res}_{p=0}(F(p)e^{pt})=t$, $\operatorname*{Res}_{p=-i}(F(p)e^{pt})=\frac{e^{-it}}{2i}$, $\operatorname*{Res}_{p=i}(F(p)e^{pt})=-\frac{e^{it}}{2i}$.

По формуле (2.39) искомый оригинал $f(t)=t-\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=t-\sin t$;

б) особой точкой функции $F(p)$ является полюс 3-го порядка $p=1$. Вычет в ней равен $\operatorname*{Res}_{p=1}\dfrac{e^{pt}}{(p-1)^3}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{p\to 1}\left(\dfrac{(p-1)^3e^{pt}}{(p-1)^3}\right)''_{pp}=\dfrac{t^2}{2}e^t$. Значит, $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2e^t$. ▲

2.45. Восстановить оригинал по его известному изображению, используя формулу (2.39).

а) $\dfrac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$. **Отв.:** $-\dfrac{1}{6}e^{-t}+e^{-2t}-\dfrac{3}{2}e^{-3t}+\dfrac{2}{3}e^{-4t}$.

б) $\dfrac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$. **Отв.:** $2e^t-4t-3$.

в) $\dfrac{1}{p^4-6p^3+11p^2-6p}$. **Отв.:** $-\dfrac{1}{6}+\dfrac{e^t}{2}-\dfrac{e^{2t}}{2}+\dfrac{e^{3t}}{6}$.

г) $\dfrac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}$. **Отв.:** $\dfrac{(2t^2-6t+3)e^t}{8}-\dfrac{e^{-t}}{24}+\dfrac{2\sin(\sqrt{3}t/2+\pi/6)}{3}$.

д) $\dfrac{1}{p^2(p^2-1)}$. **Отв.:** $-t+\operatorname{sh}t$.

е) $\dfrac{1}{p^2(p-1)}$. **Отв.:** e^t-t-1.

ж) $\dfrac{p}{(p^2-1)^2}$. **Отв.:** $\dfrac{t}{2}\operatorname{sh}t$.

Пусть изображение $F(p)$ представляет собой правильную дробь $F(p)=$ $=\dfrac{A(p)}{B(p)}=\dfrac{a_0p^m+a_1p^{m-1}+\ldots+a_{m-1}p+a_m}{b_0p^n+b_1p^{n-1}+\ldots+b_{n-1}p+b_n}$, $m<n$. Если $p_1, p_2, \ldots, p_l$ – корни знаменателя $B(p)$ кратностью $k_1, k_2, \ldots, k_l$ соответственно ($k_1+k_2+\ldots+k_l=n$), т. е. $p=p_i$, $i=\overline{1,l}$, – полюсы порядка k_i функции $F(p)$, то в этом случае для вычисления оригинала $f(t)$ справедлива *основная формула разложения*:

$$f(t)=\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(k_i-1)!}\lim_{p\to p_i}\frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}}\Big((p-p_i)^{k_i}F(p)e^{pt}\Big). \tag{2.40}$$

В ней $\sigma>\sigma_0$, где σ_0 – показатель роста оригинала $f(t)$.

Если $p=p_k$, $k=\overline{1,n}$, – простые полюсы функции $F(p)$, то равенство (2.40) приобретает вид

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\lim_{p\to p_k}[(p-p_k)F(p)]\,e^{p_kt}. \tag{2.41}$$

Аналогично, если p_k – простые полюсы функции $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$, то в этом случае $\operatorname*{Res}_{p=p_k} \dfrac{A(p)}{B(p)} = \dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)}$, и равенство (2.39) принимает вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{2.42}$$

Формулы (2.41) и (2.42) также называются *формулами разложения.*

2.46. Найти оригинал по данному изображению:

а) $F_1(p) = \dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$; б) $F_2(p) = \dfrac{1}{p(p^3+1)}$;

в) $F_3(p) = \dfrac{6p^2}{(p+2)(p-1)(p^2+1)}$.

Δ а) знаменатель $(p^2+4p+8)^2 = B(p)$ имеет двукратные корни $-2+2i$ и $-2-2i$. Находим вычеты функции $F_1(p)e^{pt}$ в этих точках:

$$\operatorname*{Res}_{p=-2+2i}(F_1(p)e^{pt}) = \lim_{p\to-2+2i}\left(\frac{2pe^{pt}(p+2-2i)^2}{(p+2-2i)^2(p+2+2i)^2}\right)'_p = \frac{e^{(-2+2i)t}(1-2t(1+i))}{-8i};$$

$$\operatorname*{Res}_{p=-2-2i}(F_1(p)e^{pt}) = \lim_{p\to-2-2i}\left(\frac{2pe^{pt}(p+2+2i)^2}{(p+2-2i)^2(p+2+2i)^2}\right)'_p = \frac{e^{(-2-2i)t}(1-2t(1-i))}{8i}.$$

По формуле (2.40) искомый оригинал

$$f_1(t) = \frac{e^{(-2+2i)t}(1-2t(1+i))}{-8i} +$$

$$+\frac{e^{(-2-2i)t}(1-2t(1-i))}{8i} = \frac{e^{-2t}}{4}((2t-1)\sin 2t + 2t\cos 2t);$$

б) знаменатель $B(p) = p(p^3+1)$ имеет простые корни

$$p_1 = 0,\ p_2 = -1,\ p_{3,4} = (1 \pm i\sqrt{3})/2.$$

Так как $\operatorname*{Res}_{p=p_k}\dfrac{A(p)}{B(p)} = \dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)} = \dfrac{1}{4p_k^3+1}$, то $\operatorname*{Res}_{p=0}\dfrac{A(p)}{B(p)} = \dfrac{1}{4p^3+1}\Big|_{p=0} = 1$,

$$\operatorname*{Res}_{p=-1}\frac{A(p)}{B(p)} = \frac{1}{4p^3+1}\Big|_{p=-1} = -\frac{1}{3},\quad \operatorname*{Res}_{p=(1\pm i\sqrt{3})/2}\frac{A(p)}{B(p)} = \frac{1}{4p^3+1}\Big|_{p=(1\pm i\sqrt{3})/2} = -\frac{1}{3}.$$

По формуле (2.39)

$$f_2(t) = 1\cdot e^{0\cdot t} - \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}\left(e^{t(1+i\sqrt{3})/2} + e^{t(1-i\sqrt{3})/2}\right) = 1 - \frac{1}{3}e^{-t} - 2\frac{e^{t/2}}{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t;$$

в) функция $F_3(p)$ имеет простые полюсы $p_1 = -2,\ p_2 = 1,\ p_{3,4} = \pm i$. В этом случае удобнее воспользоваться формулой разложения (2.41). Имеем

$$f_3(t)=\left.\frac{6p^2e^{pt}}{(p-1)(p^2+1)}\right|_{p=-2}+\left.\frac{6p^2e^{pt}}{(p+2)(p^2+1)}\right|_{p=1}+\left.\frac{6p^2e^{pt}}{(p+2)(p-1)(p+i)}\right|_{p=i}+$$

$$+\left.\frac{6p^2e^{pt}}{(p+2)(p-1)(p-i)}\right|_{p=-i}=-\frac{8}{5}e^{-2t}+e^t+\frac{3}{1+3i}e^{it}+\frac{3}{1-3i}e^{-it}=$$

$$=-\frac{8}{5}e^{-2t}+e^t+\frac{3}{5}(\cos t+3\sin t).$$

Замечание. В процессе решения данного примера использованы формулы Эйлера $e^{(\alpha\pm i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t\pm i\sin\beta t)$. ▲

2.47. Найти оригинал по его известному изображению:

а) $\dfrac{p^2+p+1}{(p-1)(p+1)^2}$. **Отв.:** $\dfrac{3}{4}e^t+\dfrac{1}{4}e^{-t}-\dfrac{1}{2}te^{-t}$.

б) $\dfrac{1}{(p+1)^3(p^2-2p+2)}$. **Отв.:** $\dfrac{5t^2-20t+32}{250}e^{-t}+e^t\sin t$.

в) $\dfrac{p^2-p+2}{p^3-p^2-6p}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{15}\left(8e^{3t}+12e^{-2t}-5\right)$.

г) $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$. **Отв.:** $\dfrac{1}{9}\left(e^{-2t}-e^{-t}+3te^t\right)$.

д) $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)^3}$. **Отв.:** $\dfrac{(t-1)e^t}{27}+\dfrac{e^{2t}}{18}\left(t^2+\dfrac{4t}{3}+\dfrac{2}{3}\right)$.

е) $\dfrac{1}{(p+1)(p+3)^3}$. **Отв.:** $\dfrac{e^{-t}}{8}-\dfrac{e^{-3t}}{8}(2t^2+2t+1)$.

ж) $\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$. **Отв.:** $e^t+e^{-t}(\cos 2t+\dfrac{3}{2}\sin 2t)$.

з) $\dfrac{1}{(p-1)^2(p^3+1)}$. **Отв.:** $\dfrac{e^{-t}-9e^t+6te^t}{12}+\dfrac{2}{3}e^{t/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$.

и) $\dfrac{3p^2+3p+2}{(p-2)(p^2+4p+8)}$. **Отв.:** $e^{2t}+e^{-2t}\left(2\cos 2t-\dfrac{\sin 2t}{2}\right)$.

к)* $\dfrac{p+c}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$, $a,b,c\in\boldsymbol{R}$.

Отв.: $\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt+c\,(\dfrac{\sin at}{a}-\dfrac{\sin bt}{b}))$.

В некоторых случаях можно восстановить оригинал $f(t)$, если его изображение $F(p)$ разложимо в ряд Лорана по степеням $1/p$. Справедлива

Теорема 2.13 (*разложения*). *Если* $F(p)$ *– аналитическая функция в ок-*

рестности бесконечно удаленной точки $p=\infty$, $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$, *и ее ряд Лорана имеет вид*

$$F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n}, \tag{2.43}$$

то оригиналом $f(t)\risingdotseq F(p)$ *является функция*

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(n-1)!}t^{n-1}, \tag{2.44}$$

причем этот ряд сходится для всех $t\ge 0$.

2.48. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

Δ Очевидно, $F(p)\to 0,\ p\to\infty$. Разложим $F(p)$ в биноминальный ряд

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)\cdot\ldots\cdot(-1/2-n+1)}{n^2p^{2n}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^np^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)2^np^{2n+1}n!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\cdot\frac{1}{p^{2n+1}}. \tag{2.45}$$

Так как $\dfrac{(2n)!}{p^{2n+1}}\fallingdotseq t^{2n}$, то по теореме разложения (2.13) из ряда (2.45) согласно (2.44) будем иметь $\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}\fallingdotseq\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\dfrac{t}{2}\right)^{2n}=J_0(t)$, где $J_0(t)$ – функция Бесселя. Итак, $J_0(t)\risingdotseq\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$. Так как $J_1(t)=-J_0'(t)$ и $J_0(0)=0$, то $J_1(t)=-J_0'(t)\risingdotseq-(pF(p)-J_0(0))=-\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}+1=\dfrac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$. По индукции можно получить общую формулу $J_n(t)\risingdotseq\dfrac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$, $\quad n=0,1,2,\ldots$. ▲

2.49. Пользуясь теоремой разложения, найти оригиналы для следующих функций:

а) $\dfrac{1}{p}e^{-1/p}$. **Отв.:** $J_0(2\sqrt{t})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{(n!)^2}$.

б) $\dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$. **Отв.:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{((2n)!)^2}$.

в) $\sin\dfrac{1}{p}$. **Отв.:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{t^{2n}}{(2n+1)!(2n)!}$.

г) $\dfrac{1}{2p}\ln\dfrac{p+1}{p-1}$. **Отв.:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}=\int\limits_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.

д) $\dfrac{1}{p}e^{1/p^2}$. **Отв.:** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{n!(2n)!}$.

е*) $\dfrac{1}{p-1}e^{-1/(p-1)}$. **Отв.:** $e^t J_0(2\sqrt{t})$.

2.3. Приложения операционного исчисления

Решение линейных дифференциальных уравнений (ДУ) с постоянными коэффициентами. Применение формулы Дюамеля к решению ДУ. Решение систем ДУ с постоянными коэффициентами. Решение некоторых ДУ с переменными коэффициентами. Приложения операционного исчисления к расчету электрических цепей.

Пусть дано линейное ДУ с постоянными коэффициентами

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(t), \tag{2.46}$$

где $y=y(t), t\ge 0$, $L[y]$ – линейный дифференциальный оператор, и

$$y(0)=y_0,\, y'(0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)} \tag{2.47}$$

есть начальные условия для рассматриваемого ДУ. Требуется решить задачу Коши (2.46) – (2.47).

Если $f(t)$ – оригинал, то и решение $y=y(t)$ ДУ (2.46) также является оригиналом. Пусть $y(t)\risingdotseq Y(p)$, $f(t)\risingdotseq F(p)$. Преобразуем ДУ (2.46) по формуле Лапласа. Согласно формуле (2.24) изображения производных с учетом начальных условий (2.47) будем иметь

$$y^{(n)}(t)\risingdotseq p^nY(p)-p^{n-1}y_0-p^{n-2}y_0'-\ldots-y_0^{(n-1)};$$

$$a_1y^{(n-1)}(t)\risingdotseq a_1(p^{n-1}Y(p)-p^{n-2}y_0-p^{n-3}y_0'-\ldots-y_0^{(n-2)});$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1}y'(t)\risingdotseq a_{n-1}(pY(p)-y_0);$$

$$a_ny(t)\risingdotseq a_nY(p).$$

Сложив эти равенства, получим преобразование Лапласа левой части ДУ (2.46):

$$L[y]\risingdotseq(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n)Y(p)-$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}(p^k+a_1p^{k-1}+\ldots+a_{k-1}p+a_k)y_0^{(n-1-k)}$$

или

$$L\,[y] \fallingdotseq L(p)Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1}(p^k + a_1 p^{k-1} + \ldots + a_{k-1}p + a_k)y_0^{(n-1-k)}, \qquad (2.48)$$

где

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n. \qquad (2.49)$$

Заметим, что $L(p)$ получено формальной заменой $y^{(k)}$ на p^k, $k = \overline{0,n}$, в дифференциальном операторе $L\,[y]$, т. е. $L\,(p)$ – характеристический многочлен от p ДУ (2.46).

Таким образом, с учетом (2.48) преобразованное ДУ принимает вид

$$L(p)Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1}(p^k + a_1 p^{k-1} + \ldots + a_k)y_0^{(n-1-k)} = F(p). \qquad (2.50)$$

Уравнение (2.50) называется *операторным.* Из него находим изображение $Y(p)$ решения $y(t)$:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{L(p)} + \frac{1}{L(p)}\sum_{k=0}^{n-1}(p^k + a_1 p^{k-1} + \ldots + a_k)y_0^{(n-1-k)}. \qquad (2.51)$$

По изображению $Y(p)$ теперь остается восстановить оригинал $y(t)$ – искомое решение задачи Коши (2.46) – (2.47).

2.50. Решить задачу Коши:

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}(\cos t + t); \;\; y(0) = y'(0) = 2. \qquad (2.52)$$

Δ Пусть решение $y(t) \fallingdotseq Y(p)$. Учитывая начальные условия, преобразуем ДУ по формуле Лапласа:

$$y'(t) \fallingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p) - 2; \; y''(t) \fallingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) =$$
$$= p^2Y(p) - 2p - 2.$$

Для правой части ДУ получаем $e^{-t}(\cos t + t) \fallingdotseq \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1} + \dfrac{1}{(p+1)^2}$. Тогда для ДУ (2.52) операторное уравнение имеет вид

$$p^2Y(p) - 2p - 2 + 2pY(p) - 4 + Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p^2 + 2p + 1)Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + 2(p+1) + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)} + \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{2}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2}.$$

Находим теперь оригинал решения $y(t)$. Имеем:

$$\frac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)} = \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1} \fallingdotseq e^{-t} - e^{-t}\cos t;$$

$$\frac{1}{(p+1)^4} \fallingdotseq e^{-t}\frac{t^3}{3!}; \; \frac{2}{p+1} \fallingdotseq 2e^{-t}; \; \frac{4}{(p+1)^2} \fallingdotseq 4te^{-t}.$$

Итак, искомое решение задачи Коши (2.52) есть

$$y(t) = e^{-t} \cdot \frac{t^3}{3!} + 2e^{-t} + 4te^{-t} + e^{-t} - e^{-t}\cos t = e^{-t}\left(\frac{t^3}{6} + 4t - \cos t + 3\right). \ \blacktriangle$$

Если в задаче Коши за начальный момент выбрано значение $t = t_0 \neq 0$, то заменой $\tau = t - t_0$ ее можно свести к задаче Коши при $\tau = 0$.

2.51. Решить задачу Коши:

$$y'' + y = -\sin 2t;\ y(\pi) = y'(\pi) = 1. \qquad (2.53)$$

Δ Вводим замену $\tau = t - \pi \Rightarrow t = \tau + \pi \Rightarrow y'_t = y'_\tau,\ y''_{tt} = y''_{\tau\tau}$. В результате задача Коши (2.53) сводится к задаче

$$y'' + y = -\sin 2(\tau + \pi) = -\sin 2\tau;\ \ y(0) = y'(0) = 1, \qquad (2.54)$$

где уже $y = y(\tau)$.

Пусть $y(\tau) \risingdotseq Y(p) = Y$. Перейдя к изображениям в уравнении (2.54), получим операторное уравнение

$$(p^2+1)\,Y - p - 1 = -\frac{2}{p^2+4} \Rightarrow Y = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} - \frac{2}{(p^2+4)(p^2+1)} =$$

$$= \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{3(p^2+1)} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p^2+4} \fallingdotseq \cos\tau + \frac{1}{3}\sin\tau + \frac{1}{3}\sin 2\tau =$$

$$= \cos(t-\pi) + \frac{1}{3}\sin(t-\pi) + \frac{1}{3}\sin 2(t-\pi) = -\cos t - \frac{1}{3}\sin t + \frac{1}{3}\sin 2t = y(t) -$$

искомое решение задачи Коши. $\blacktriangle$

2.52*. Проинтегрировать ДУ $x'' + x = f(t)$ при нулевых начальных условиях $x(0) = x'(0) = 0$, если $f(t) = \begin{cases} 2t/\pi, & 0 \le t < \pi/2, \\ 2(\pi - t)/\pi, & \pi/2 \le t < \pi, \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases}$

Δ График правой части $f(t)$ приведен на рис. 2.11.

Запишем $f(t)$ с помощью функции Хевисайда: $f(t) = \left(1(t) - 1(t - \frac{\pi}{2})\right)\frac{2}{\pi}t -$

$$-\left(1(t-\frac{\pi}{2}) - 1(t-\pi)\right)\frac{2}{\pi}(t-\pi) = \frac{2}{\pi}\left(t\cdot 1(t) - 2\,(t-\frac{\pi}{2})\cdot 1\,(t-\frac{\pi}{2}) + (t-\pi)\cdot 1(t-\pi)\right).$$

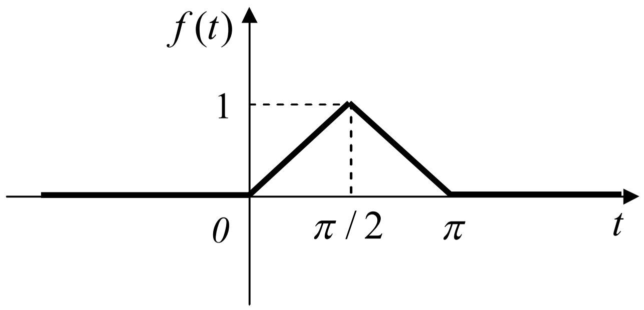


Рис. 2.12

Пользуясь теоремой запаздывания, отсюда имеем изображение $f(t) \fallingdotseq F(p) = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{1 - 2e^{-\pi p/2} + e^{-\pi p}}{p^2}$. Положив $x(t) \fallingdotseq X(p)$, с учетом нулевых начальных условий приходим к операторному уравнению

$$(p^2+1)X(p) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - 2e^{-\pi p/2} + e^{-\pi p}}{p^2} \Rightarrow X(p) = \frac{2}{\pi}\left(1 - 2e^{-\pi p/2} + e^{-\pi p}\right)\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}\right).$$

Поскольку $\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2+1} \risingdotseq t - \sin t$, то снова применив теорему запаздывания, получим $x(t) = \dfrac{2}{\pi}[(t - \sin t) - 2 \cdot 1(t - \dfrac{\pi}{2})((t - \dfrac{\pi}{2}) - \sin(t - \dfrac{\pi}{2})) + 1(t-\pi)((t-\pi) - {}$ $- \sin(t-\pi))]$, т.е. $x(t) = \begin{cases} 2(t - \sin t)/\pi, \ 0 \le t < \pi/2, \\ 2(-\sin t - 2\cos t + \pi - t)/\pi, \ \pi/2 \le t < \pi, \\ -4\cos t/\pi, \ t \ge \pi. \end{cases}$ ▲

2.53. Решить задачу Коши ($x = x(t)$):

а) $x''' + x = 0$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 2$;

б) $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$; $x(0) = x'(0) = 0$;

в) $x'' + 4x = t$; $x(0) = 1, x'(0) = 0$;

г) $x''' + x' = e^t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$;

д) $x^{IV} - x'' = 1$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$;

е) $x'' - x' = te^t$; $x(0) = x'(0) = 0$;

ж) $x'' - x' = 4\sin^2 t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;

з) $x'' + 4x = \sin t$; $x(0) = x'(0) = 0$.

Отв.: а) $e^{-t} - e^{t/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$;

б) $\dfrac{3}{25} - \dfrac{t}{5} - \dfrac{1}{25}e^t(3\cos 2t - 4\sin 2t)$;

в) $\dfrac{t}{4} + \cos 2t - \dfrac{1}{8}\sin 2t$; г) $-1 + \dfrac{1}{2}(e^t + \cos t + 3\sin t)$; д) $\operatorname{ch} t - \dfrac{t^2}{2} - 1$;

е) $\dfrac{1}{2}e^t(t^2 - 2t + 2) - 1$; ж) $-1 + \dfrac{3}{5}e^t - 2t + \dfrac{2}{5}\cos(2t) + \dfrac{1}{5}\sin(2t)$;

з) $\dfrac{1}{3}(\sin t - \cos t \sin t)$.

2.54. Решить задачу Коши ($x = x(t)$):

а) $x'' + x' = 2t$, $x(1) = 1$, $x'(1) = -1$;

б) $x'' - x = -2t$, $x(2) = 8$, $x'(2) = 6$;

в) $x'' + x = -2\sin t$, $x(\pi/2) = 0$, $x'(\pi/2) = 1$;

г) $x'' + 2x' + x = 2e^{1-t}$, $x(1) = 1$, $x'(1) = -1$.

Отв.: а) $(t-1)^2 + e^{1-t}$; б) $4e^{-2+t} + 2t$; в) $(t-1-\pi/2)\cos t$; г) $(t^2 - 2t + 2)\,e^{1-t}$.

2.55. Найти частные решения следующих уравнений:

а) $x'' + 2x' + x = f(t)$, где $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2, \\ 3, & t > 2, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 0$;

б) $x'' + x = f(t)$, где $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a, \\ 1, & a < t < b, \\ 0, & t > b, \end{cases}$ $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$;

в) $x'' + x = f(t)$, где $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 2-t, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2, \end{cases}$ $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

г) $x'' - x = f(t)$, где $f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 < t < 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 0$;

д) $x'' + 4x = f(t)$, где $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a, \\ 5e^{-(t-a)}, & t > 1, \end{cases}$ $x(0) = A$, $x'(0) = B$.

Отв.: а) $1 - e^{-t}(1+t) + 2\left[1 - e^{-(t-2)}(1 + (t-2)\right] \cdot 1(t-2)$;
б) $2\sin t + 1(t-a)(1 - \cos(t-a)) - 1(t-b)(t - b - \cos(t-b))$;
в) $t - 2[(t-1) - -\sin(t-1)] \cdot 1(t-1) + [(t-2) - \sin(t-2)] \cdot 1(t-2)$;
г) $t - 1 + e^{-t} + 1(t-1)(sh(t-1) - (t-1))$;
д) $\left[e^{-(t-a)} - \cos 2(t-a) + \dfrac{1}{2}\sin 2(t-a)\right] \cdot 1(t-a)$.

С помощью интеграла Дюамеля легко доказывается следующее утверждение: *если* $z = z(t)$ *– решение ДУ* $z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} z' + a_n z = 1$ *с постоянными коэффициентами* $a_i, i = \overline{1, n}$, *при нулевых начальных условиях* $z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-1)}(0) = 0$, *то решением ДУ* $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$ *при тех же начальных условиях является функция*

$$y(t) = \int_0^t z_t'(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = z(t) f(0) + \int_0^t z(\tau) f_t'(t-\tau)\, d\tau. \qquad (2.55)$$

Данное утверждение позволяет находить решение ЛДУ с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях, не находя изображения правой части этого уравнения.

2.56. Решить задачу Коши:

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}, \quad y(0) = y'(0) = 0. \qquad (2.56)$$

Δ Решим сначала вспомогательную задачу Коши: $z'' + 4z' + 4z = 1$,

$z(0)=0,\quad z'(0)=0$. Пусть $z(t) \risingdotseq Z(p)$. Перейдя к изображениям в этом уравнении, получим $(p^2+4p+4)\,Z(p)=\dfrac{1}{p} \Rightarrow Z(p)=\dfrac{1}{p(p+2)^2}$. Разложим $Z(p)$ в сумму простейших дробей:

$$Z(p)=\frac{1}{4p}-\frac{1}{2(p+2)^2}-\frac{1}{4(p+2)} \Rightarrow z(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}te^{-2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}.$$

Так как $f(t)=\dfrac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$, по формуле (2.55) записываем искомое решение задачи Коши:

$$y(t)=\int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}-\frac{(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}}{2}-\frac{e^{-2(t-\tau)}}{4}\right)d\tau=$$

$$=\int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2}(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}\,d\tau=e^{-2t}\int_0^t \frac{(t-\tau)}{(1+2\tau)^2}\,d\tau=\frac{1}{4}e^{-2t}\big(2t-\ln(1+2t)\big).\ \blacktriangle$$

2.57. С помощью интеграла Дюамеля решить задачу Коши ($x=x(t)$) с нулевыми начальными условиями:

а) $x''-x'=\dfrac{1}{1+e^t}$; б) $x''=\operatorname{arctg} t$; в) $x''+x=\dfrac{1}{2+\cos t}$;

г)* $x''+x=\dfrac{1}{4+\operatorname{tg}^2 t}$; д) $x''+x=\dfrac{1}{1+\cos^2 t}$; е) $x'''=\dfrac{1}{t^2+1}$.

Отв.: а) $(e^t+1)\ln(e^t+1)-\ln 2(e^t+1)-1-t+e^t-te^t$; б) $\dfrac{t^2-1}{2}\operatorname{arctg} t-$ $-\dfrac{t}{2}\ln(1+t^2)+\dfrac{t}{2}$; в) $\cos t\big(\ln(2+\cos t)-\ln 3\big)+\sin t\left(t-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}tg\,\dfrac{t}{2}\right)\right)$;

г)* $\dfrac{1}{3}-\dfrac{9-2\pi\sqrt{3}}{27}\cos t+\dfrac{\sqrt{3}}{36}\sin t\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}\sin t-2}{\sqrt{3}\sin t+2}\right|-$

$-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}-2tg\,\dfrac{t}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}+2tg\,\dfrac{t}{2}\right)\right)\cos t$;

д) $\cos t\operatorname{arctg}(\cos t)-\dfrac{\pi}{4}\cos t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\ln\left|\dfrac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right|$;

е) $\dfrac{1}{2}\big((t^2-1)\operatorname{arctg} t-t\ln(t^2+1)+t\big)$.

Схема решения систем ЛДУ с постоянными коэффициентами та же, что и для ЛДУ. Каждое из уравнений системы преобразуется по формуле Лапласа, а затем получившаяся система линейных алгебраических уравнений решается относительно изображения искомого решения.

2.58. Решить задачу Коши для системы ЛДУ:

$$\begin{cases} x' - 2x - 3y = 5t, \\ y' - 3x - 2y = 8\ \ e^t, \end{cases} \quad x(0) = 0,\ y(0) = 1. \tag{2.57}$$

Δ Пусть $x = x(t) \risingdotseq X(p)$, $y = y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда операторная система относительно $X(p)$ и $Y(p)$ с учетом начальных условий для системы (2.57) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &pX(p) - 2X(p) - 3Y(p) = 5/p^2, \\ &pY(p) - 1 - 3X(p) - 2Y(p) = 8/(p-1), \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &(p-2)X(p) - 3Y(p) = 5/p^2, \\ &-3X(p) + (p-2)Y(p) = 8/(p-1) + 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.58}$$

Систему (2.58) решим по формулам Крамера. Для этого вначале находим определители $\Delta, \Delta_X, \Delta_Y$ данной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -3 \\ -3 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 4p - 5 = (p-5)(p+1);$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 5/p^2 & -3 \\ 8/(p-1)+1 & p-2 \end{vmatrix} = \frac{3p^3 + 26p^2 - 15p + 10}{p^2(p-1)};$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-2 & 5/p^2 \\ -3 & 8/(p-1)+1 \end{vmatrix} = \frac{p^4 + 5p^3 - 14p^2 + 15p - 15}{p^2(p-1)}.$$

Отсюда по формулам Крамера находим

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{3p^3 + 26p^2 - 15p + 10}{(p^2-1)(p-5)p^2};\ Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{p^4 + 5p^3 - 14p^2 + 15p - 15}{(p^2-1)(p-5)p^2}.$$

Применив формулу разложения (2.39), получим

$$x(t) = \operatorname*{Res}_{p=0}\left(X(p)\,e^{pt}\right) + \operatorname*{Res}_{p=-1}\left(X(p)\,e^{pt}\right) + \operatorname*{Res}_{p=1}\left(X(p)\,e^{pt}\right) + \operatorname*{Res}_{p=5}\left(X(p)\,e^{pt}\right) =$$

$$= -\frac{13}{5} + 4e^{-t} - 3e^t + \frac{8}{5}e^{5t} + 2t.$$

Аналогично найдем, что $y(t) = \dfrac{12}{5} - 3t + e^t - 4e^{-t} + \dfrac{8}{5}e^{5t}$. ▲

2.59. Операционным методом решить задачи Коши для систем ЛДУ:

а) $\begin{cases} x' - 4x + 3y = \sin t, \\ y' - 2x + y = -2\cos t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

б) $\begin{cases} x'' - 3y'' - x = 0, \\ x' - 3y' - 2y = 0, \end{cases}$ $x(0) = -\dfrac{4}{3},\ y(0) = 1,\ x'(0) = 0,\ y'(0) = -\dfrac{2}{3}.$

в) $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3.$

г) $\begin{cases} x' = 2y - z, \\ y' = z - 2x, \\ z' = 2x - y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 0.$

Отв.: а) $x = -4e^t + 3e^{2t} + \cos t - 2\sin t$, $y = -4e^t + 2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t$;

б) $x = -\dfrac{16}{15}e^{-t/2} - \dfrac{4e^{2t}}{15}$, $y = \dfrac{16}{15}e^{-t/2} - \dfrac{e^{2t}}{15}$; в) $x = e^{3t} - e^{-2t}$,

$y = e^{-2t} - \dfrac{e^{-t}}{2} + \dfrac{3e^{3t}}{2}$, $z = e^{-2t} + \dfrac{e^{-t}}{2} + \dfrac{3e^{3t}}{2}$.

г) $x = 4e^t - 3e^{-3t}$, $y = 2e^t$, $z = 4e^{2t} - 4e^t$.

2.60*. Проинтегрировать при нулевых начальных условиях системы ДУ:

а) $x'' - y' = f_1(t), \quad y' + x = f_2(t)$, где

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & t \ge \pi; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \pi/2, \\ \pi - t, & \pi/2 \le t < \pi, \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases}$$

б) $\begin{cases} x'' - y = 0, \\ y'' - x = f(t), \end{cases}$ где $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ -1, & \pi \le t < 2\pi, \\ 0, & t \ge 2\pi. \end{cases}$

Отв.: а) $x(t) = (1 + t - \sin t - \cos t) - 2[(t - \pi/2) - \sin(t - \pi/2)] \cdot 1(t - \pi/2) +$
$+ [-1 + (t - \pi) + \cos(t - \pi) - \sin(t - \pi)] \cdot 1(t - \pi)$, $y(t) = (1 - t + \sin t - \cos t) -$
$- 2[1 - \cos(t - \pi/2)] \cdot 1(t - \pi/2) + [1 + (t - \pi) - \cos(t - \pi) - \sin(t - \pi)] \cdot 1(t - \pi)$;

б) $x(t) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t - 2) - [\operatorname{ch}(t - \pi) + \cos(t - \pi) - 2] \cdot 1(t - \pi) +$

$+ \dfrac{1}{2}[\operatorname{ch}(t - 2\pi) + \cos(t - 2\pi) - 2] \cdot 1(t - 2\pi)$, $y(t) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t) -$

$- [\operatorname{ch}(t - \pi) - \cos(t - \pi)] \cdot 1(t - \pi) + \dfrac{1}{2}[\operatorname{ch}(t - 2\pi) - \cos(t - 2\pi)] \cdot 1(t - 2\pi)$.

Операционным методом можно решать некоторые обыкновенные ДУ с переменными коэффициентами специального вида.

Пусть дано ДУ

$$a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t), \qquad (2.59)$$

где $x = x(t)$, $f(t)$ – оригиналы, а коэффициенты $a_i(t), i = \overline{0, n}$, являются многочленами от t. Уравнение (2.59) можно преобразовать по формуле Лапласа, если воспользоваться теоремой 2.8 о дифференцировании изображений, на основании которой, если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то

$$tx(t) \risingdotseq -X'(p),\ t^2x(t) \risingdotseq X''(p),\ \ldots,\ t^n x(t) \risingdotseq (-1)^n X^{(n)}(p). \qquad (2.60)$$

Для нахождения изображений функций $tx'(t), tx''(t), \ldots, tx^{(n)}(t)$; $t^2x'(t)$,

$t^2x''(t),...,t^2x^{(n)}(t)$ и т. д., нужно воспользоваться тем, что дифференцирование изображения приводит к умножению оригинала на (– *t*). Например,

$$tx'(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}L\{x'\} = -\big(pX(p) - x(0)\big)'_p = -\big(pX'(p) + X(p)\big);$$

$$tx''(t) \risingdotseq -\frac{d}{dp}L\{x''\} = -\Big(p^2X(p) - px(0) - x'(0)\Big)'_p =$$

$$= -\Big(2pX(p) + p^2X'(p) - x(0)\Big); \qquad (2.61)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t^2x'(t) \risingdotseq (-1)^2\frac{d^2}{dp^2}L\{x'\} = (-1)^2\big(pX(p) - x(0)\big)''_{pp} = pX''(p) + 2X(p),$$

и т.д. Преобразуя ДУ (2.59) с учетом соотношений (2.60) и (2.61), приходим к ЛДУ относительно $X(p)$, порядок которого равен наивысшей степени t, имеющейся в коэффициентах $a_i(t)$ исходного ДУ. Преобразованное ДУ обычно оказывается более простым, чем исходное ДУ.

2.61. Решить задачу Коши

$$tx'' + x' + tx = 0, \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0. \qquad (2.62)$$

Δ Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Согласно формулам (2.60) и (2.61), из (2.62) получаем операторное уравнение

$$-\Big(p^2X(p) - px(0) - x'(0)\Big)'_p + pX(p) - x(0) - X'(p) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p^2+1)X'(p) + pX(p) = 0.$$

Это ДУ с разделяющимися переменными, разделив которые, получим $\dfrac{dX(p)}{X(p)} + \dfrac{p}{p^2+1}dp = 0 \Rightarrow \ln|X(p)| + \dfrac{1}{2}\ln(p^2+1) = \ln|C| \Rightarrow X(p) = \dfrac{C}{\sqrt{p^2+1}}$.

Для отыскания C воспользуемся теоремой 2.12 о предельном соотношении (формула (2.36)), согласно которой $1 = x(0) = \lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty} pX(p) = \lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty}\dfrac{pC}{\sqrt{p^2+1}} = C.$

Итак, $C = 1$, т.е. $X(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}} \fallingdotseq J_0(t) = x(t)$, где $J_0(t)$ – функция Бесселя. ▲

2.62. Решить ДУ: а) $tx'' + (2t-1)x' + (t-1)x = 0$; б) $tx'' + 2x' = 0$; в) $x'' + (t+1)x' + tx = 0$; $x(0) = 1, x'(0) = -1$; г) $x'' + (t+b)x' = 0$; $x(0) = -1, x'(0) = 0, \; b \in \boldsymbol{R}$; д) $x'' + tx' - (t+1)x = 0$; $x(0) = x'(0) = 1$.

Отв.: а) $x(t) = (c_1 + c_2t^2)e^{-t}$; б) $x(t) = -\dfrac{c_1}{t} + c_2$; в) $x(t) = e^{-t}$; г) $x(t) \equiv -1$; д) $x(t) = e^t$.

Операционное исчисление находит применение в расчетах электрических цепей.

Пусть в электрическую цепь (рис. 2.13), состоящую из последовательно соединенных индуктивности L, сопротивления R и емкости C (RLC-цепь), в начальный момент времени $t=0$ включена ЭДС $u=u(t)$. В этом случае сила тока $i=i(t)$ в цепи удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{q}{C}=u, \qquad (2.63)$$

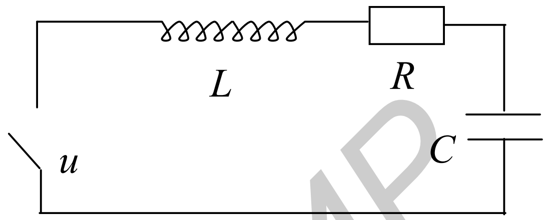


Рис. 2.12

где заряд конденсатора $q=q(t)$ и сила тока $i(t)$ связаны соотношением $i=\frac{dq}{dt}$. Предположим, что $q(0)=0$ и $i(0)=0$. Тогда $q=\int\limits_0^t i(\tau)\,d\tau$, и, значит, уравнение (2.63) принимает вид

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)\,d\tau=u. \qquad (2.64)$$

Перейдем в уравнении (2.64) к изображениям, считая, что $i(t)$ и $u(t)$ – оригиналы. Пусть $i(t)\risingdotseq I(p)$, $u(t)\risingdotseq U(p)$. Так как $i(0)=0$, то из (2.64) получаем операторное уравнение относительно $I(p)$:

$LpI(p)+RI(p)+\frac{1}{Cp}I(p)=U(p)$, откуда

$$I(p)=\frac{U(p)}{Lp+R+1/Cp}=\frac{U(p)}{Z(p)}, \qquad (2.65)$$

где $Z(p)=Lp+R+\frac{1}{Cp}$.

Величины $I(p)$, $U(p)$, $Z(p)$ и $1/Z(p)$ называются соответственно *операторным током, напряжением, сопротивлением и проводимостью.* Величина $Z(p)$, кроме того, называется *обобщенным сопротивлением* или *импедансом,* а величина $1/Z(p)$ – *обобщенной проводимостью цепи.*

Равенство (2.65) показывает, что для изображений тока и напряжения справедлив *закон Ома.* Они также удовлетворяют *первому и второму законам Кирхгофа:*

$$\sum_{k=1}^{n}I_k(p)=0;\ \sum_{k=1}^{n}U_k(p)=\sum_{k=1}^{n}I_k(p)Z_k(p).$$

При параллельном соединении двух цепей токи $i_1\risingdotseq I_1(p)$ и $i_2\risingdotseq I_2(p)$ в них связаны с током $i\risingdotseq I(p)$ в неразветвленной части равенством $i=i_1+i_2\Rightarrow$

$\Rightarrow I(p)=I_1(p)+I_2(p)$ или $\frac{U(p)}{Z(p)}=\frac{U(p)}{Z_1(p)}+\frac{U(p)}{Z_2(p)}\Rightarrow\frac{1}{Z(p)}=\frac{1}{Z_1(p)}+\frac{1}{Z_2(p)}$, т. е. *обобщенная проводимость параллельной цепи равна сумме обобщенных проводимостей ее ветвей.*

При последовательном соединении цепей выполняется равенство $Z(p) = Z_1(p) + Z_2(p)$, т.е. *обобщенное сопротивление последовательно соединенной цепи равно сумме обобщенных сопротивлений ее участков.*

2.63. В RLC-цепь (рис. 2.12) в начальный момент времени $t = 0$ включена постоянная ЭДС u_0. Ток в цепи и заряд конденсатора в начальный момент равны нулю. Найти силу тока $i(t)$ в цепи.

Δ Поскольку $q(0) = 0$ и $i(0) = 0$, то операторное сопротивление $Z(p) = Lp + R + \dfrac{1}{Cp}$, а операторное напряжение $U(p) = \dfrac{u_0}{p}$. Находим операторный ток по закону Ома:

$$I(p) = \frac{u_0}{p(Lp + R + 1/Cp)} = \frac{u_0}{L\left(p^2 + \dfrac{R}{L}p + \dfrac{1}{LC}\right)} =$$

$$= \frac{u_0}{L\left(\left(p + \dfrac{R}{2L}\right)^2 + \dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}\right)} = \frac{u_0}{L((p+\alpha)^2 + \omega^2)},$$

где $\alpha = \dfrac{R}{2L}, \omega^2 = \dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}$.

Пользуясь формулами $\dfrac{1}{p^2} \doteqdot t$, $\dfrac{1}{p^2+\beta^2} \doteqdot \dfrac{1}{\beta}\sin\beta t$, $\dfrac{1}{p^2-\beta^2} \doteqdot \dfrac{1}{\beta}\operatorname{sh}\beta t$

и теоремой смещения, получаем: 1) $i(t) = \dfrac{u_0}{\omega L}e^{-\alpha t}\sin\omega t$, если $\omega^2 > 0$;

2) $i(t) = \dfrac{u_0}{\gamma L}e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\gamma t$, если $\omega^2 = -\gamma^2 < 0$; 3) $i(t) = \dfrac{u_0}{L}e^{-\alpha t}t$, если $\omega = 0$.

Так как $\omega^2 = \dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}$, то первый результат будет при $R < 2\sqrt{L/C}$, второй – при $R > 2\sqrt{L/C}$, и третий – при $R = 2\sqrt{L/C}$. В первом случае в цепи происходит затухающий колебательный процесс. Число α называется *коэффициентом затухания.* При наличии R он не равен нулю, и чем он больше, тем быстрее уменьшается ток. Число ω называется *круговой частотой.* Она равна числу колебаний, происходящих за 2π секунд. ▲

2.64. В схеме (рис. 2.14) действует ЭДС $u(t) = u_0\sin(\omega t + \psi)$. В момент $t = 0$ рубильник K накоротко замыкает цепь LR_2. Найти выражения переходных токов.

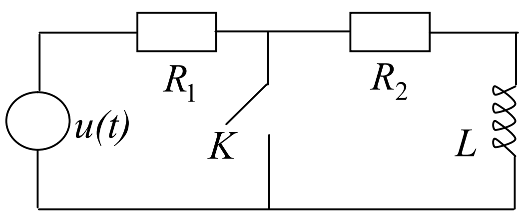


Рис. 2.14

Δ До замыкания рубильника, согласно уравнению (2.63), имеем ($C = 0$):

$$L\frac{di(t)}{dt} + (R_1 + R_2)\, i(t) = u_0 \sin(\omega\, t + \psi)\,. \qquad (2.66)$$

Пусть $i(t) \risingdotseq I(p)$. Перейдя в уравнении (2.66) к изображениям, получим

$$LpI(p) + (R_1 + R_2)I(p) = u_0\,\frac{\omega\cos\psi + p\sin\psi}{p^2 + \omega^2}\,. \qquad (2.67)$$

Обозначим $R = R_1 + R_2$, $R/L = \alpha > 0$. Тогда из (2.67) найдем, что

$$I(p) = \frac{u_0(\omega\cos\psi + p\sin\psi)}{L(p+\alpha)(p^2+\omega^2)} = \frac{u_0}{L(\alpha^2+\omega^2)}\times$$

$$\times\left[\frac{(\alpha\sin\psi - \omega\cos\psi)\,p}{p^2+\omega^2} + \frac{\omega(\omega\sin\psi + \alpha\cos\psi)}{p^2+\omega^2} + \frac{w\cos\psi - \alpha\sin\psi}{p+\alpha}\right].$$

Возвращаясь к оригиналам, будем иметь

$$i(t) = \frac{u_0}{L(\alpha^2+\omega^2)}((\alpha\sin\psi - w\cos\psi)\cos wt + (w\sin\psi + \alpha\cos\psi)\sin wt +$$

$$+ (w\cos\psi - \alpha\sin\psi)e^{-\alpha t}).$$

Введем вспомогательный угол φ, положив $\operatorname{tg}\varphi = \omega/\alpha$. Получим

$$i(t) = \frac{u_0}{L\sqrt{\alpha^2 + w^2}}(e^{-\alpha t}\sin(\varphi - \psi) + \sin(wt - \varphi + \psi))\,. \qquad (2.68)$$

Отсюда при $t \to \infty$ (установившийся колебательный процесс) из (2.68) будем иметь $i(t) = \dfrac{u_0}{L\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\sin(\omega t - \varphi + \psi)$.

После замыкания рубильника уравнение (2.66) переходит в уравнение

$$L\frac{di(t)}{dt} + R_2 i(t) = 0 \quad \text{и} \quad i(0) = \frac{u_0\sin(\psi - \varphi)}{L\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\,.$$

Решив это уравнение операционным методом, найдем

$i(t) = \dfrac{u_0\sin(\psi-\varphi)}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega L)^2}}\, e^{-R_2 t/L}$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L}{R_1+R_2}$. ▲

2.65. В цепь (см. рис. 2.12) в момент $t = 0$ включается ЭДС $u(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < t_0, \\ 2, & t > t_0. \end{cases}$ Определить силу тока в цепи, считая, что $R < 2\sqrt{L/C}$ (колебательный случай) и $q(0) = 0$ и $i(0) = 0$.

Отв.: $i(t) = \dfrac{1}{\omega L}\left[e^{-\alpha t}\sin\omega\, t + 1(t - t_0)\, e^{-\alpha(t - t_0)}\cdot\sin\omega(t - t_0)\right]$, где $1(t)$ – единичная функция Хевисайда, $\alpha = \dfrac{R}{2L}, \omega^2 = \dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}$.

2.66. В цепи (рис. 2.15) конденсатор C заряжен до напряжения u_0. В момент $t=0$ цепь замыкается ключом K и конденсатор разряжается через индуктивность L и сопротивление R. Определить ток $i(t)$, если $i(0)=0$.

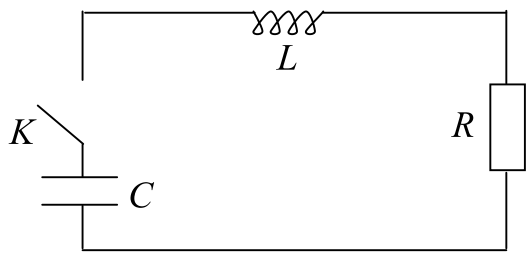


Рис. 2.15

Отв.: $i(t) = -\dfrac{u_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t$, если $R < 2\sqrt{L/C}$; $i(t) = -\dfrac{u_0}{L} t e^{-\alpha t}$, если $R = 2\sqrt{L/C}$; $i(t) = -\dfrac{u_0}{\gamma L} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \gamma t$, если $R > 2\sqrt{L/C}$, где $\gamma^2 = -\omega^2$, $\alpha = \dfrac{R}{2L}$, $\omega^2 = \dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}$. ● Начальный заряд $q(0) = Cu_0$.

Самостоятельная работа

«Функции комплексной переменной. Операционное исчисление».

Структура

1. Найти все значения корня.
2. Представить число в алгебраической форме.
3. Вычислить интеграл от ФКП.
4. Найти все лорановские разложения по степеням z.
5. Разложить в ряд Лорана по степеням $z - z_0$.
6. Определить тип особой точки $z_0 = 0$ для функции.
7. Вычислить интеграл пп. а) – д).
8. Найти изображение по формуле Лапласа функции $f(t)$.
9. Найти изображение по формуле Лапласа, используя свойства преобразования Лапласа.
10. Найти оригинал $f(t)$ по данному изображению $F(p)$.
11. Решить задачу Коши для ДУ $(y = y(t))$.
12. Решить задачу Коши для системы ДУ $(x = x(t),\ y = y(t))$.
13. Найти изображение по Лапласу функции, заданной графически.

Вариант 1

1. $\sqrt[4]{-1}$. **2.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2i\right)$. **3.** $\int\limits_{AB} \overline{z}^2 dz;\ AB : \{y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$.

4. $\dfrac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}$. **5.** $z \cos\dfrac{1}{z-2},\ z_0 = 2$. **6.** $\dfrac{e^{9z} - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

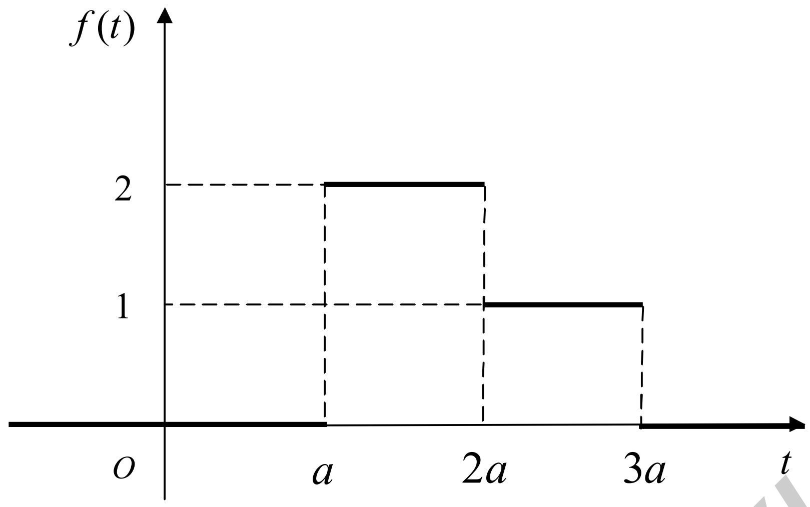
7. а) $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{dz}{z(z^2+1)}$; **б)** $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz$; **в)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{(2 + \sqrt{3}\cos t)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}, a > 0$; **д)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}$. **8.** $f(t) = \sin^3 t$.

9. $\int\limits_0^t (\tau + 1)\cos 3\tau d\tau$. **10.** $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)^3}$. **11.** $\begin{cases} y'' + y = 6e^{-t}; \\ y(0) = 3, y'(0) = 1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, x(0) = -1, \\ \dot{y} = x - y + 1, y(0) = 2. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **2.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{ch} 2 + i \operatorname{sh} 2)$. **3.** $\dfrac{14}{15} - \dfrac{i}{3}$.

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k-1} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{k-1},\ 0 < |z| < \dfrac{1}{2}; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^{k+1} z^{k+2}} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{k-1},\ \dfrac{1}{2} < |z| < 1; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^{k+1} z^{k+2}} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{z^{k+2}},\ |z| > 1. \end{cases}$ **5.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!(z-2)^{2k-1}} \left(1 + \dfrac{2}{z-2}\right)$.

6. Полюс 4-го порядка.

7. **а)** $2\pi i$; **б)** 0; **в)** 4π; **г)** $\dfrac{\pi}{2a}$; **д)** $\dfrac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3 \sin 1)$.

8. $\dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$. **9.** $\dfrac{p^3 + p^2 + 9p - 9}{p(p^2+9)^2}$. **10.** $t - 3 + 3e^{-t} + 2te^{-t} + \dfrac{1}{2} t^2 e^{-t}$.

11. $y = 3e^{-t} + 4 \sin t$. **12.** $\begin{cases} x = -\dfrac{5}{4} - \dfrac{13}{8} e^{-2t} + \dfrac{15}{8} e^{2t}, \\ y = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{13}{8} e^{-2t} + \dfrac{5}{8} e^{2t}. \end{cases}$ **13.** $F(p) = \dfrac{e^{-ap}}{p} (2 - e^{-ap} - e^{-2ap})$.

Вариант 2

1. $\sqrt[4]{(-1 + i\sqrt{3})/2}$. **2.** $\operatorname{Arctg}\left(\dfrac{-2\sqrt{3} + 3i}{3}\right)$. **3.** $\oint\limits_{\Gamma} z \operatorname{Re} z dz;\ \Gamma : |z| = 1$ (обход положительный). **4.** $\dfrac{z-4}{z^4 + z^3 - 2z^2}$. **5.** $\sin \dfrac{z}{z-1},\ z_0 = 1$. **6.** ze^{7/z^2}.

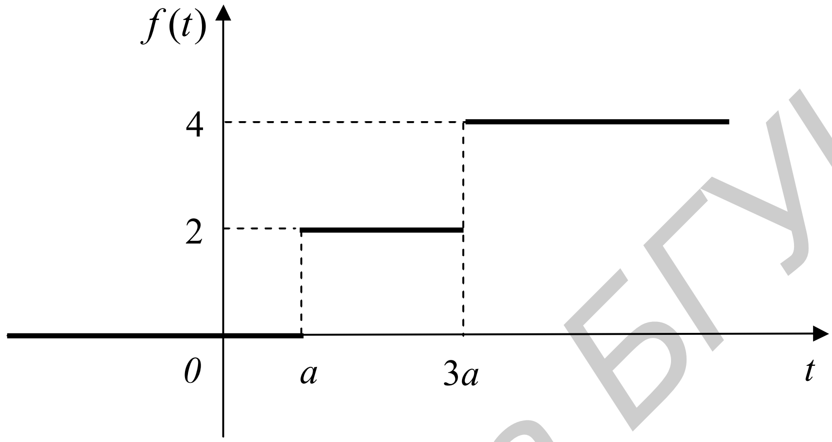
7. **а)** $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{2 - z^2 + 3z^3}{8z^3 \pi i} dz$; **б)** $\oint\limits_{|z-1-i|=5/4} \dfrac{2}{z^2(z-1)} dz$; **в)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{(4 + \sqrt{15} \cos t)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)^2},\ a>0, b>0;$ **д)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x \sin x}{x^2+4x+20}\,dx.$

8. $f(t)=\cos^3 t.$ **9.** $\int\limits_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau.$ **10.** $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}.$

11. $\begin{cases} y''-y'=t^2; \\ y(0)=0, y'(0)=1. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=-x+3y+1, x(0)=1, \\ \dot{y}=x+y, y(0)=2. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right), \pm\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right).$ **2.** $-\dfrac{\pi}{3}+k\pi+\dfrac{\ln 4}{2}i,\ k\in \boldsymbol{Z}$ **3.** 0.

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{k-2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2^k} z^{k-2},\ 0<|z|<1; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^{k+3}} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2^k} z^{k-2},\ 1<|z|<2; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^{k+3}} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{2^{k+1}}{z^{k+3}},\ |z|>2. \end{cases}$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}}\left(\sin 1+\dfrac{\cos 1}{(2n+1)(z-1)}\right).$ **6.** Существенно особая точка.

7. **а)** $-\dfrac{1}{4};$ **б)** $4\pi i;$ **в)** $8\pi;$ **г)** $\dfrac{\pi}{2\,(b^2-a^2)^3}\left(\dfrac{b^2-5a^2}{a^3}+\dfrac{5b^2-a^2}{b^3}\right);$

д) $\dfrac{\pi}{2}e^{-4}\left(2\cos 2+\sin 2\right).$ **8.** $\dfrac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}.$ **9.** $\dfrac{4}{(p^2-4)^2}.$ **10.** $\dfrac{1}{2}\left(\sin t - t\cos t\right).$

11. $y=3e^t-\dfrac{t^3}{3}-t^2-2t-3.$ **12.** $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4}-\dfrac{9}{8}e^{-2t}+\dfrac{15}{8}e^{2t}, \\ y=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}e^{-2t}+\dfrac{15}{8}e^{2t}. \end{cases}$

13. $F(p)=\dfrac{2}{p}e^{-ap}\left(1+e^{-2ap}\right).$

Вариант 3

1. $\sqrt[3]{1}$. **2.** $\operatorname{Arcth}\left(\dfrac{3-4i}{5}\right)$. **3.** $\oint\limits_{\Gamma} |z|\,dz$; где Γ – верхняя полуокружность $x^2+y^2=1, z=-1$ – начальная точка, $z=1$ – конечная.

4. $\dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$. **5.** $ze^{z/(z-5)}, z_0=5$. **6.** $\dfrac{\sin 8z-8z}{\cos z-1+z^2/2}$.

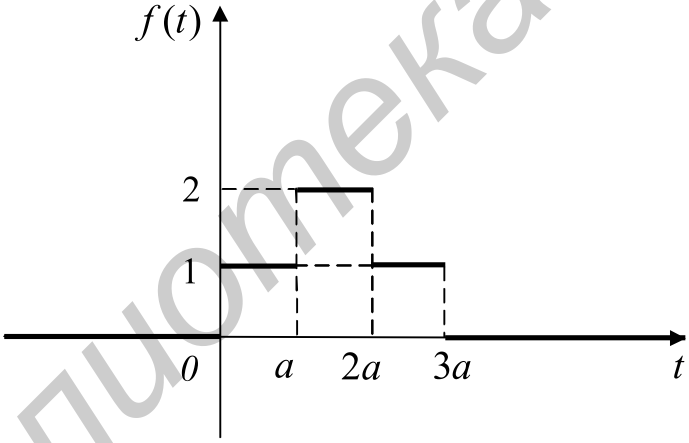
7. а) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{(z+1)}{z^3-6z^2+11z-6}dz$; **б)** $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)}dz$; **в)** $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{(5+2\sqrt{6}\cos t)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, a>0,\ b>0$; **д)** $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^4+5x^2+4}dx$.

8. $f(t)=\cos^6 t$. **9.** $\int\limits_0^t \cos^2 2\tau d\tau$. **10.** $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

11. $\begin{cases} y''+y'=t^2+2t; \\ y(0)=0,\ \ y'(0)=-2. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=x+4y,\ \ x(0)=1, \\ \dot{y}=2x-y,\ \ y(0)=0. \end{cases}$

13.



Отв.: 1. $1, -\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\dfrac{1}{2}\ln 2+i\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right), k\in \boldsymbol{Z}$. **3.** 2.

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k z^{k-1}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{z^{k-1}}{3^k}, 0<|z|<\dfrac{3}{2}; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k+1}\dfrac{1}{z^{k+2}}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{3^k}z^{k-1}, \dfrac{3}{2}<|z|<3; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k+1}\dfrac{1}{z^{k+2}}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{3^{k+1}}{z^{k+2}}, |z|>3. \end{cases}$

5. $e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{5^n}{n!(z-5)^{n-1}}\left(1+\dfrac{5}{z-5}\right)$.

6. Полюс 1-го порядка.

7. **а)** 0; **б)** $-\dfrac{\pi i}{2e}$; **в)** 10π; **г)** $\dfrac{\pi}{ab(a+b)}$; **д)** $\dfrac{\pi}{12}e^{-2}(2e-1)$.

8. $\dfrac{1}{32}\left(\dfrac{p}{p^2+36}+\dfrac{6p}{p^2+16}+\dfrac{15p}{p^2+4}+\dfrac{10}{p}\right)$. **9.** $\dfrac{p^2+8}{p^2(p^2+16)}$.

10. $\dfrac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$. **11.** $y=\dfrac{t^3}{3}+2e^{-t}-2$. **12.** $\begin{cases} x=\operatorname{ch}3t+\dfrac{1}{3}\operatorname{sh}3t, \\ y=\dfrac{2}{3}\operatorname{sh}3t. \end{cases}$

13. $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(1+e^{-ap}\right)\left(1-e^{-2ap}\right)$.

Вариант 4

1. $\sqrt[3]{i}$. **2.** $\operatorname{sh}\left(2+\dfrac{\pi i}{4}\right)$. **3.** $\int\limits_{AB}(z^2+7z+1)dz$, AB – отрезок прямой, $z_A=1$, $z_B=1-i$.

4. $\dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$. **5.** $\sin\dfrac{2z-7}{z+2}$, $z_0=-2$. **6.** $\dfrac{\cos 7z-1}{\operatorname{sh} z-z-z^3/6}$.

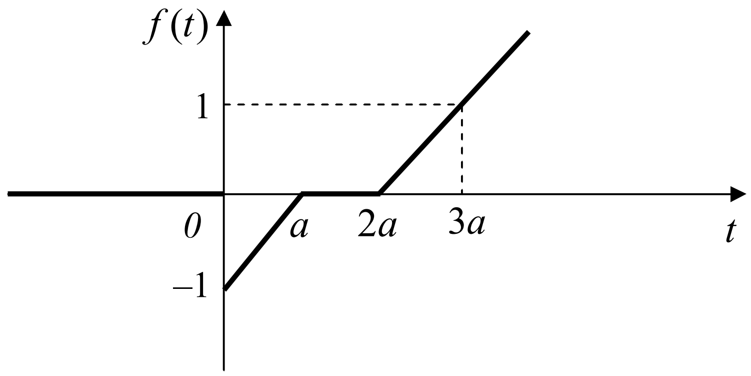
7. а) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$; **б)** $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\sin z^3}{1-\cos z}dz$; **в)** $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{(6+\sqrt{35}\cos t)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^3}$; **д)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos x}{x^2+9}dx$.

8. $f(t)=\sin 2t\cos 3t$. **9.** $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau$. **10.** $F(p)=\dfrac{1}{p^4-1}$.

11. $\begin{cases} y''-y'=\cos 3t; \\ y(0)=1, y'(0)=1. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=x+2y+1, x(0)=0, \\ \dot{y}=4x-y, y(0)=1. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $-i$, $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}$. **2.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sh}2+i\operatorname{ch}2)$. **3.** $-\dfrac{9}{2}-i\dfrac{26}{3}$.

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{(-1)^k}{2^{2k}}\right)z^{k-2}, \ 0<|z|<2; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2^{k+1}}{z^{k+3}}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2^{2k}}z^{k-2}, \ 2<|z|<4; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2^{k+1}}{z^{k+3}}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{2^{2k+2}}{z^{k+3}}, \ |z|>4. \end{cases}$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(11)^{2n}}{(2n)!(z+2)^{2n}}\left(\sin 2-\dfrac{11\cos 2}{(2n+1)(z+2)}\right).$ **6.** Полюс 3-го порядка.

7. **а)** 2π; **б)** 0; **в)** 12π; **г)** $\dfrac{3\pi}{8}$; **д)** $\dfrac{\pi}{3}e^{-3}$.

8. $\dfrac{2(p^2-5)}{(p^2+1)(p^2+25)}$. **9.** $\dfrac{1}{(p-1)(p^2+1)}$. **10.** $\dfrac{1}{2}(\operatorname{sh} t-\sin t)$.

11. $y=\dfrac{11}{10}e^t-\dfrac{1}{10}\cos 3t-\dfrac{1}{30}\sin 3t.$ **12.** $\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}\operatorname{sh}3t, \\ y=\operatorname{ch}3t-\dfrac{1}{3}\operatorname{sh}3t. \end{cases}$

13. $F(p)=\dfrac{1-e^{-ap}+e^{-2ap}}{ap^2}-\dfrac{1}{p}.$

Вариант 5

1. $\sqrt[4]{1}$. **2.** $\operatorname{ch}\left(2+\dfrac{\pi i}{2}\right)$. **3.** $\int\limits_{ABC}|z|\,dz$, ABC – ломаная, $z_A=0, z_B=-1+i, z_C=1+i$.

4. $\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$. **5.** $\cos\dfrac{3z}{z-i}, z_0=i.$ **6.** $\dfrac{\operatorname{sh}6z-6z}{\operatorname{ch}z-1-z^2/2}$.

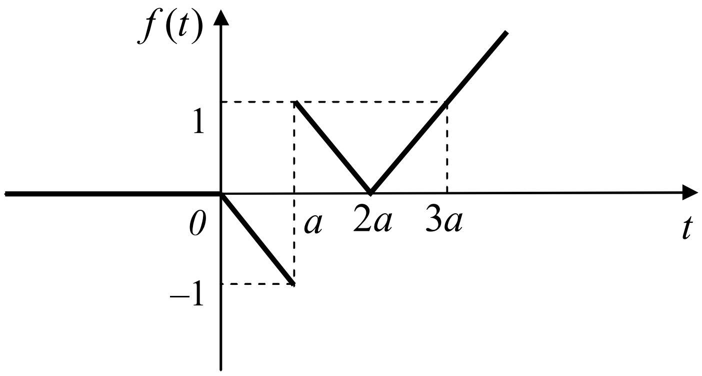
7. **а)** $\oint\limits_{|z-3|=1/2}\dfrac{e^z}{\sin z}dz$; **б)** $\oint\limits_{|z|=1/3}\dfrac{1-2z+3z^2+4z^3}{4z^2\pi i}dz$; **в)** $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{(7+4\sqrt{3}\cos t)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$, $n\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}$; **д)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx.$

8. $f(t)=\cos 2t\cos 3t.$ **9.** $\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau}d\tau.$ **10.** $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}.$

11. $\begin{cases} y''+y'+y=7e^{2t}; \\ y(0)=1, y'(0)=4. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=2x+5y, x(0)=1, \\ \dot{y}=x-2y+2, y(0)=1. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $\pm 1, \pm i.$ **2.** $i\,\mathrm{sh}\,2.$ **3.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(i-1)+2\ln(\sqrt{2}+1).$

4. $\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{k}+\frac{(-1)^{k}}{5^{k}}\right)z^{k-1},\ 0<|z|<\frac{5}{2}; \\ \displaystyle -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}\cdot\frac{1}{z^{k+2}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{5^{k}}z^{k-1},\ \frac{5}{2}<|z|<5; \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}+(-1)^{k}5^{k+1}\right)\frac{1}{z^{k+2}},|z|>5. \end{cases}$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(3i)^{2n}}{(2n)!(z-i)^{2n}}\left(\cos 3-\frac{3i\sin 3}{(2n+1)(z-i)}\right).$ **6.** Полюс 1-го порядка.

7. а) $-2\pi i e^{\pi}$; **б)** –1; **в)** 14π; **г)** $\dfrac{(2n)!}{(n!)^{2}}\pi 2^{-2n}$; **д)** $\pi e^{-2}\cos 2$.

8. $\dfrac{p\,(p^{2}+13)}{(p^{2}+1)(p^{2}+25)}.$ **9.** $\dfrac{2}{p(p+1)^{3}}.$ **10.** $\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$

11. $y=e^{2t}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t.$ **12.** $\begin{cases} x=-\dfrac{10}{9}-\dfrac{1}{9}e^{-3t}+\dfrac{20}{9}e^{3t}, \\ y=\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}e^{-3t}+\dfrac{4}{9}e^{3t}. \end{cases}$

13. $F(p)=\dfrac{2e^{-2ap}-1}{ap^{2}}+\dfrac{2e^{-ap}}{p}.$

Вариант 6

1. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}.$ **2.** $\mathrm{Ln}(1+i).$ **3.** $\displaystyle\int_{AB}(12z^{5}+4z^{3}+1)dz,\ AB$ – отрезок прямой, $z_A=1,\ z_B=i.$ **4.** $\dfrac{3z-36}{z^{4}+3z^{3}-18z^{2}}.$ **5.** $\sin\dfrac{5z}{z-2i},\ z_0=2i.$ **6.** $\dfrac{\mathrm{ch}\,5z-1}{e^{z}-1-z}.$

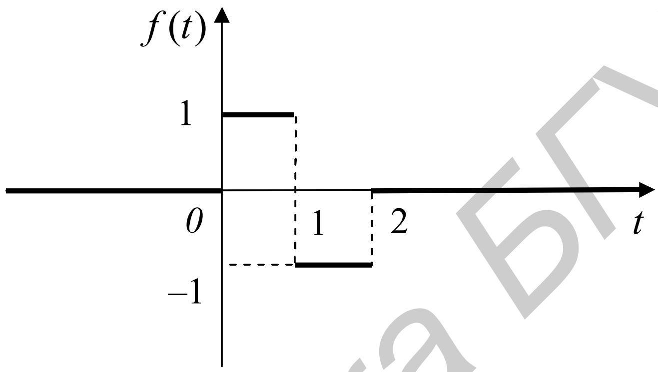
7. **а)** $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$; **б)** $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}dz$; **в)** $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(5-4\cos t)^2}$;

г) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$; **д)** $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos xdx}{x^2+16}$.

8. $f(t)=\sin^4 t$. **9.** $\displaystyle\int\limits_0^t \tau \operatorname{ch} 2\tau d\tau$. **10.** $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

11. $\begin{cases} y''+y'-2y=-2(t+1), \\ y(0)=1, y'(0)=1. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=-2x+5y+1, x(0)=0, \\ \dot{y}=x+2y+1, y(0)=2. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $\pm\dfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}), \pm\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$. **2.** $\dfrac{1}{2}\ln 2+i\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)$. **3.** $i-5$.

4. $\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}+\frac{(-1)^k}{6^k}\right)z^{k-2}, 0<|z|<3; \\ \displaystyle -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{z^{k+3}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{6^k}z^{k-2}, 3<|z|<6; \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[-3^{k+1}+(-1)^k 6^{k+1}\right]}{z^{k+3}}, |z|>6. \end{cases}$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(10i)^{2n}}{(2n)!(z-2i)^{2n}}\left(\sin 5+\frac{10i\cos 5}{(2n+1)(z-2i)}\right)$. **6.** Устранимая особая точка.

7. **а)** $-4\pi^2 i$; **б)** 0; **в)** $\dfrac{10}{27}\pi$; **г)** $-\dfrac{\pi}{27}$; **д)** $\dfrac{\pi e^{-4}}{8}$.

8. $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{p}+\dfrac{p}{p^2+16}-\dfrac{4p}{p^2+1}\right)$. **9.** $\dfrac{p^2+4}{p(p^2-4)^2}$. **10.** $\dfrac{1}{2}t\sin t$.

11. $y=\dfrac{3}{2}+t-\dfrac{1}{3}e^t-\dfrac{1}{6}e^{-2t}$. **12.** $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}e^{-3t}+2e^{3t}, \\ y=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}e^{-3t}+2e^{3t}. \end{cases}$

13. $F(p)=\dfrac{1}{p}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right).$

Вариант 7

1. $\sqrt[3]{-1}.$ **2.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+i\right).$

3. $\int\limits_{AB}\bar{z}^{-2}dz$, AB – отрезок прямой, $z_A=0,\ z_B=1+i.$

4. $\dfrac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}.$ **5.** $\sin\dfrac{3z-i}{3z+i},\ z_0=-\dfrac{i}{3}.$ **6.** $z\sin\dfrac{6}{z^2}.$

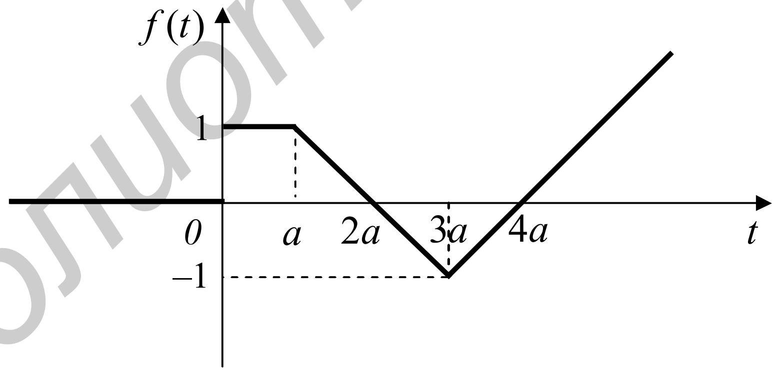
7. а) $\oint\limits_{|z-1|=3}\dfrac{ze^z}{\sin z}dz;$ **б)** $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{3z^4-2z^3+5}{2\pi iz^4}dz;$ **в)** $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{(5-3\cos t)^2};$

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x^2+1)dx}{x^6+1};$ **д)** $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos 3x dx}{1+x^2}.$

8. $f(t)=\cos^4 t.$ **9.** $\dfrac{\sin^2 2t}{t}.$ **10.** $F(p)=\dfrac{1}{p^2-p+7}.$

11. $\begin{cases} y''-9y=\sin t-\cos t, \\ y(0)=-3,\ y'(0)=2. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=3x+y,\ x(0)=2, \\ \dot{y}=-5x-3y+2,\ y(0)=0. \end{cases}$

13.



Отв.: 1. $-1, \dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **2.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}1+\dfrac{i}{2}\operatorname{sh}1.$ **3.** $2\dfrac{1-i}{3}.$

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\left(\dfrac{2}{7}\right)^k+\dfrac{(-1)^k}{7^k}\right)z^{k-1},\ 0<|z|<\dfrac{7}{2}, \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{7}{2}\right)^{k+1}\cdot\dfrac{1}{z^{k+2}}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{7^k}z^{k-1},\ \dfrac{7}{2}<|z|<7, \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\left(\dfrac{7}{2}\right)^{k+1}+(-1)^k\cdot 7^{k+1}\right)\cdot\dfrac{1}{z^{k+2}}, |z|>7. \end{cases}$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2i)^{2n}}{(2n)!(3z+i)^{2n}}\left(\sin 1-\dfrac{2i\cos 1}{(2n+1)(3z+i)}\right)$. **6.** Существенно особая точка.

7. а) $-2\pi^2 ie^{\pi}$; **б)** -2; **в)** $\dfrac{5\pi}{32}$; **г)** π; **д)** $\dfrac{\pi e^{-3}}{2}$.

8. $\dfrac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$. **9.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{p^2+16}}{p}$. **10.** $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t\cdot e^{t/2}$.

11. $y=0{,}1(\cos t-\sin t)-1{,}2e^{3t}-1{,}9e^{-3t}$. **12.** $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}e^{-2t}+\dfrac{11}{4}e^{2t}, \\ y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}e^{-2t}-\dfrac{11}{4}e^{2t}. \end{cases}$

13. $F(p)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{2e^{-3ap}-e^{-ap}}{ap^2}$.

Вариант 8

1. $\sqrt[3]{-i}$. **2.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+i\right)$. **3.** $\int\limits_{ABC} z^3e^{z^4}dz$, ABC – ломаная, $z_A=i, z_B=1, z_C=0$.

4. $\dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$. **5.** $z\cos\dfrac{3z}{z-1}, z_0=1$. **6.** $\dfrac{e^{z^2}-1}{\sin z-z+z^3/6}$.

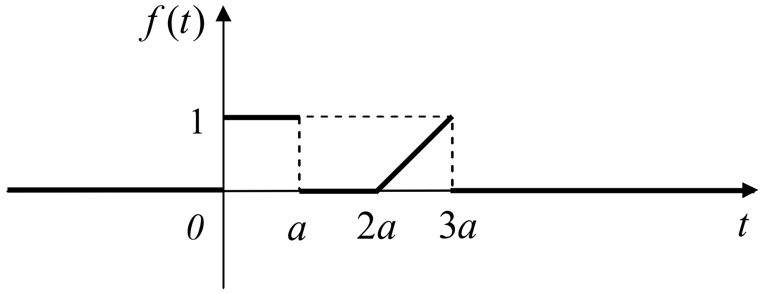
7. а) $\oint\limits_{|z+3/2|=2}\dfrac{2z(z-1)}{\sin z}dz$; **б)** $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{1-\sin(1/z)}{2\pi iz}dz$; **в)** $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{(8-3\sqrt{7}\cos t)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}$, $m-1\ge 1$; **д)** $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{x\sin x dx}{1+x^2+x^4}$.

8. $f(t)=e^{-3t}\sin t\cos 3t$. **9.** $t\,\mathrm{ch}\,2t\cos 2t$. **10.** $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

11. $\begin{cases} y''+2y=2+e^t, \\ y(0)=1,\ y'(0)=2. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=-3x-4y+1,\ x(0)=0, \\ \dot{y}=2x+3y,\ y(0)=2. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $i,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$. **2.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}1-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh}1$. **3.** $\dfrac{1-e}{4}$.

4. $$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{2k}}+\dfrac{(-1)^k}{2^{3k}}\right)z^{k-2},\ 0<|z|<4;\\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2^{2k+2}}{z^{k+3}}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2^{3k}}z^{k-2},\ 4<|z|<8;\\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-2^{2k+2}+(-1)^k2^{2k+3}\right)\dfrac{1}{z^{k+3}},\ |z|>8.\end{cases}$$

5. $\left(1+\dfrac{1}{z-1}\right)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n3^{2n}}{(2n)!(z-1)^{2n-1}}\left(\cos3-\dfrac{3\sin3}{(2n+1)(z-1)}\right)$.

6. Полюс 3-го порядка.

7. **а)** $-4\pi^2(\pi-1)i$; **б)** 1; **в)** 16π; **г)** $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{2m+1}{n}\pi}$; **д)** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}/2}\sin\dfrac{1}{2}$.

8. $\dfrac{2}{(p+3)^2+16}-\dfrac{1}{(p+3)^2+4}$. **9.** $\dfrac{p^2(p^4-192)}{(p^4+64)^2}$. **10.** $e^{-t}(1-t^2)$.

11. $y=1+\dfrac{e^t}{3}-\dfrac{1}{3}\cos(\sqrt{2}\,t)+\dfrac{5}{3\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,t)$. **12.** $\begin{cases}x=3+2e^{-t}-5e^t,\\ y=-2-e^{-t}+5e^t.\end{cases}$

13. $F(p)=\dfrac{1-e^{-ap}}{p}+\dfrac{e^{-2ap}-e^{-3ap}-a\,e^{-3ap}p}{ap^2}$.

Вариант 9

1. $\sqrt[4]{-16}$. **2.** $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right)$. **3.** $\int\limits_{ABC}\operatorname{Re}\left(\dfrac{\bar z}{z}\right)dz,\ AB:\{|z|=1,\operatorname{Im}z\ge0\},BC$ – отрезок, $z_B=1,\ z_C=2$. **4.** $\dfrac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$. **5.** $z\sin\dfrac{z}{z-1},\ z_0=1$.

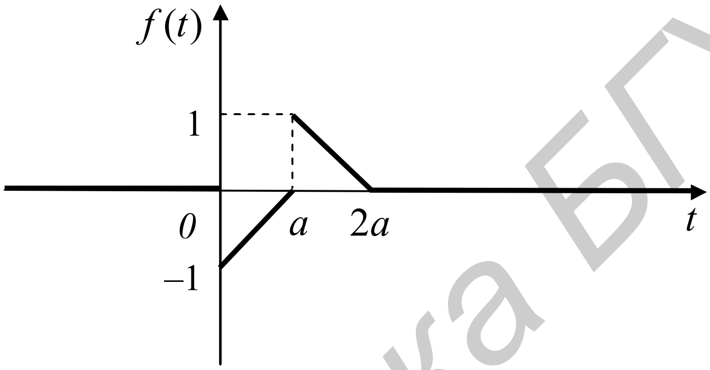
6. $\dfrac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + z^2/2}$. **7. а)** $\oint\limits_{|z-1/4|=1/3} \dfrac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z} dz$; **б)** $\oint\limits_{|z|=1/2} \dfrac{e^{2z^2}-1}{2\pi i z^3} dz$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{(5+2\sqrt{6}\cos t)^2}$; **г)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^6+1}$; **д)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos 2x dx}{(1+x^2)(x^2+9)}$.

8. $f(t) = e^{-4t} \sin t \cos 3t$. **9.** $\int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$. **10.** $F(p) = \dfrac{p}{p^3+1}$.

11. $\begin{cases} 2y'' - y' = \sin 3t, \\ y(0) = 2, \ \ y'(0) = -1. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \ \ x(0) = 0, \\ \dot{y} = 2x + 2y, \ \ y(0) = 1. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $2(\pm 1 \pm i)$. **2.** $\ln 2 + i\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$. **3.** $\dfrac{1}{3}$.

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\left(\dfrac{2}{9}\right)^k + \dfrac{(-1)^k}{3^{2k}}\right) z^{k-1}, \ 0 < |z| < \dfrac{9}{2}, \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{9}{2}\right)^{k+1} \dfrac{1}{z^{k+2}} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{3^{2k}} z^{k-1}, \ \dfrac{9}{2} < |z| < 9, \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-\left(\dfrac{9}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k 3^{2k+2}\right) \dfrac{1}{z^{k+2}}, |z| > 9. \end{cases}$

5. $\left(1 + \dfrac{1}{z-1}\right) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n-1}} \left(\sin 1 + \dfrac{\cos 1}{(2n+1)(z-1)}\right)$.

6. Устранимая особая точка.

7. а) $-\dfrac{9i}{8}$; **б)** 2; **в)** 10π; **г)** $\dfrac{2\pi}{3}$; **д)** $\dfrac{\pi}{24e^6}\left(3e^4 - 1\right)$.

8. $\dfrac{2}{p^2+8p+32} - \dfrac{1}{p^2+8p+20}$. **9.** $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$.

10. $-\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{e^{t/2}}{3}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right).$

11. $y=\dfrac{1}{111}\cos 3t-\dfrac{2}{37}\sin 3t-\dfrac{62}{37}e^{t/2}+\dfrac{11}{3}.$ **12.** $\begin{cases} x=\dfrac{1}{8}-\dfrac{5}{16}e^{-4t}+\dfrac{13}{16}e^{4t}, \\ y=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{16}e^{-4t}+\dfrac{13}{16}e^{4t}. \end{cases}$

13. $F(p)=-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{ap^2}(1+(ap-2)e^{-ap}+e^{-2ap}).$

Вариант 10

1. $\sqrt[4]{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{32}}.$ **2.** $\operatorname{sh}\left(1+i\dfrac{\pi}{2}\right).$

3. $\int\limits_{ABC}\left(z^2+\cos z\right)dz$, ABC – ломаная, $z_A=0$, $z_B=1$, $z_C=i$.

4. $\dfrac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}.$ **5.** $(z-3)\cos\pi\dfrac{z-3}{z}$, $z_0=0$. **6.** $\dfrac{\cos z^2-1}{\operatorname{sh}z-z-z^3/6}.$

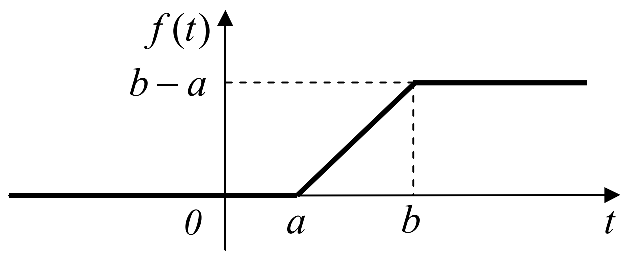
7. **а)** $\oint\limits_{|z-1/2|=1}\dfrac{iz(z-i)^2}{\sin\pi z}dz$; **б)** $\oint\limits_{|z|=1/3}\dfrac{3-2z+4z^4}{z^3}dz$;

в) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{(4-\sqrt{7}\cos t)^2}$; **г)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$; **д)** $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{x^3\sin 3x dx}{(1+x^2)^2}.$

8. $f(t)=e^{-6t}\cos 5t\cos 2t.$ **9.** $t\operatorname{ch}2t\cos 2t.$ **10.** $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$

11. $\begin{cases} y''+2y'=\sin(t/2), \\ y(0)=-2,\ y'(0)=4. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=2x+3y+1,\ x(0)=0, \\ \dot{y}=4x-2y,\ y(0)=5. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $\pm\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+i\right), \pm\dfrac{1}{4}\left(1-i\sqrt{3}\right).$ **2.** $i\operatorname{ch}1.$ **3.** $\sin i-\dfrac{i}{3}.$

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^k + \frac{(-1)^k}{10^k}\right) z^{k-2},\ 0<|z|<5; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty} 5^{k+1}\frac{1}{z^{k+3}} + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{10^k} z^{k-2},\ 5<|z|<10; \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-5^{k+1} + (-1)^k 10^{k+1}\right)\frac{1}{z^{k+3}}, |z|>10. \end{cases}$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3\pi)^{2n}}{(2n)!\,z^{2n-1}}\left(1-\frac{3}{z}\right).$ **6.** Полюс 1-го порядка.

7. а) $-4i$; б) 0; в) $\frac{8}{27}\pi$; г) $\frac{\pi}{2}$; д) $-\frac{\pi}{4}e^{-3}$.

8. $\frac{1}{2}\left(\frac{p+6}{p^2+12p+85}+\frac{p+6}{p^2+12p+45}\right)$. **9.** $\frac{p^2(p^4-192)}{(p^4+64)^2}$.

10. $\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{-t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t.$

11. $y=-\frac{4}{17}\sin\frac{t}{2}-\frac{16}{17}\cos\frac{t}{2}+1-\frac{35}{17}e^{-2t}$. **12.** $\begin{cases} x=-\frac{1}{8}-\frac{31}{16}e^{-4t}+\frac{33\,e^{4t}}{16}, \\ y=-\frac{1}{4}+\frac{31\,e^{-4t}}{8}+\frac{1133\,e^{4t}}{8}. \end{cases}$

13. $F(p)=\frac{1}{p^2}\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right).$

Вариант 11

1. $\sqrt[3]{8}$. **2.** $\operatorname{ch}(1-\pi i)$. **3.** $\int\limits_{\Gamma}\frac{\bar z}{z}dz$, Γ – граница области $D=\{1<|z|<2, \operatorname{Re} z>0\}$.

4. $\frac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}$. **5.** $z^2\sin\pi\frac{z+1}{z},\ z_0=0.$ **6.** $\frac{e^{5z}-1}{\operatorname{ch} z-1-z^2/2}$.

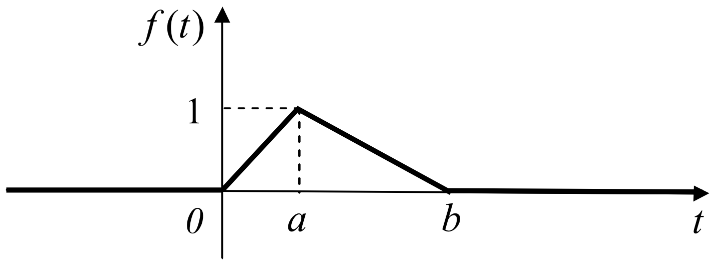
7. а) $\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z-\sin z}{4\pi i z^4}dz$; в) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{(3-\sqrt{5}\cos t)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4dx}{(a+bx^2)^4}, a>0, b>0$; д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^3+5x)\sin x dx}{x^4+10x^2+9}$. **8.** $f(t)=e^t\cos^2 t$.

9. $\frac{e^{-3t}\sin^2 2t}{t}$. **10.** $F(p)=\frac{2p+3}{p(p^2+4p+5)}$. **11.** $\begin{cases} y''+y=\operatorname{sh} t, \\ y(0)=0, y'(0)=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \ x(0) = 0, \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \ y(0) = 5. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $2, -1 \pm i\sqrt{3}$. **2.** $-\operatorname{ch}1$. **3.** $4i$.

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\left(\dfrac{2}{11} \right)^k + \dfrac{(-1)^k}{11^k} \right) z^{k-1}, \ 0 < |z| < \dfrac{11}{2}; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{11}{2} \right)^{k+1} \dfrac{1}{z^{k+2}} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{11^k} z^{k-1}, \ \dfrac{11}{2} < |z| < 11; \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-\left(\dfrac{11}{2} \right)^{k+1} + (-1)^k 11^{k+1} \right) \dfrac{1}{z^{k+2}}, \ |z| > 11. \end{cases}$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \pi^{2n+1}}{(2n+1)! z^{2n-1}}$. **6.** Полюс 3-го порядка.

7. **а)** $\dfrac{4i}{\pi}$; **б)** $\dfrac{1}{12}$; **в)** $\dfrac{3}{4}\pi$; **г)** $\dfrac{\pi}{16 a^{3/2} b^{5/2}}$; **д)** $\dfrac{\pi}{2}(e^{-1} + e^{-3})$.

8. $\dfrac{p^2 - 2p + 3}{(p-1)(p^2 - 2p + 5)}$. **9.** $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{p^2 + 6p + 25}{(p+3)^2}$. **10.** $\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5} e^{-2t} \cos t + \dfrac{4}{5} e^{-2t} \sin t$.

11. $y = 2\cos t + \dfrac{1}{2}(\sin t + \operatorname{sh} t)$. **12.** $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} - 2e^{-t} + \dfrac{8}{3} e^{3t}, \\ y = \dfrac{1}{3} + 2e^{-t} + \dfrac{8}{3} e^{3t}. \end{cases}$

13. $F(p) = \dfrac{1 - e^{-ap}}{ap^2} + \dfrac{e^{-bp} - e^{-ap}}{(b-a)p^2}$.

Вариант 12

1. $\sqrt[3]{8i}$. **2.** $\operatorname{Ln}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$. **3.** $\int\limits_{ABC} (\operatorname{ch} z + \cos iz) dz$, ABC – ломаная $z_A = 0, \ z_B = -1, \ z_C = i$.

4. $\dfrac{6z - 144}{z^4 + 6z^3 - 72z^2}$. **5.** $z \cos \dfrac{z}{z + 2i}, z_0 = -2i$. **6.** $\dfrac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$.

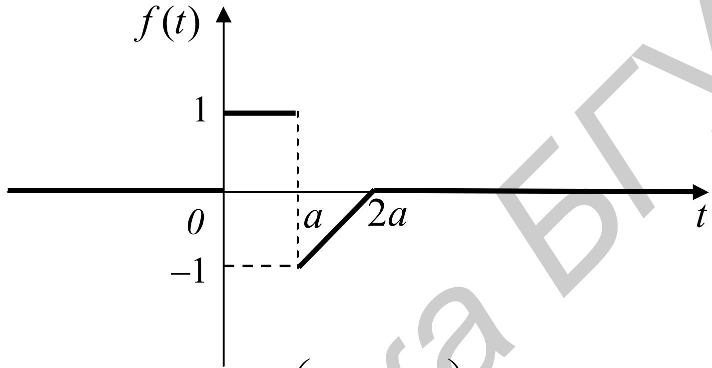
7. **а)** $\oint\limits_{|z-1/2|=1} \dfrac{e^z+1}{z(z-1)}dz$; **б)** $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{z^3-3z^2+1}{4\pi i z^4}dz$; **в)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{(3-2\sqrt{2}\cos t)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(1+x^2)^3}$; **д)** $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^2\cos x dx}{(1+x^2)^2}$.

8. $f(t)=\int\limits_0^t \mathrm{sh}(t-\tau)\sin\tau d\tau$. **9.** $-\int\limits_t^{+\infty} \dfrac{\cos\tau}{\tau}d\tau$. **10.** $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

11. $\begin{cases} y''+4y'+29y=e^{-2t}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=2x-2y,\ x(0)=3, \\ \dot{y}=-4x,\ y(0)=1. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $-2i, \pm\sqrt{3}+i$. **2.** $\ln 2+i\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)$. **3.** $2i\sin 1$.

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\left(\dfrac{1}{6}\right)^k+\dfrac{(-1)^k}{12^k}\right)z^{k-2},\ 0<|z|<6; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty}6^{k+1}\dfrac{1}{z^{k+3}}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{12^k}z^{k-2},\ 6<|z|<12; \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-6^{k+1}+(-1)^k 12^{k+1}\right)\dfrac{1}{z^{k+3}},\ |z|>12. \end{cases}$

5. $\left(1-\dfrac{2i}{z+2i}\right)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2i)^{2n}}{(2n)!(z+2i)^{2n-1}}\left(\cos 1+\dfrac{2i\sin 1}{(2n+1)(z+2i)}\right)$.

6. Устранимая особая точка.

7. **а)** $2\pi(e-1)i$; **б)** $\dfrac{1}{2}$; **в)** 6π; **г)** $\dfrac{3\pi}{8}$; **д)** 0.

8. $\dfrac{1}{p^4-1}$. **9.** $\dfrac{1}{p}\ln\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$. **10.** $\cos(6-3t)\cdot 1(t-2)+\dfrac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\cdot 1(t-1)$.

11. $y=\dfrac{1}{25}e^{-2t}(1-\cos 5t+5\sin 5t)$. **12.** $\begin{cases} x=\dfrac{4}{3}e^{-2t}+\dfrac{5}{3}e^{4t}, \\ y=\dfrac{8}{3}e^{-2t}-\dfrac{5}{3}e^{4t}. \end{cases}$

13. $F(p)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1-2ap}{ap^2}e^{-ap}-\dfrac{1}{ap^2}e^{-2ap}.$

Вариант 13

1. $\sqrt[4]{16}.$ **2.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-5i\right).$ **3.** $\int\limits_L |z|\,\bar{z}dz, L:\{|z|=4, \operatorname{Re} z\geq 0\}.$

4. $\dfrac{13z-338}{2z^3+13z^2-169z}.$ **5.** $\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}, z_0=2.$ **6.** $z^4\cos\dfrac{5}{z^2}.$

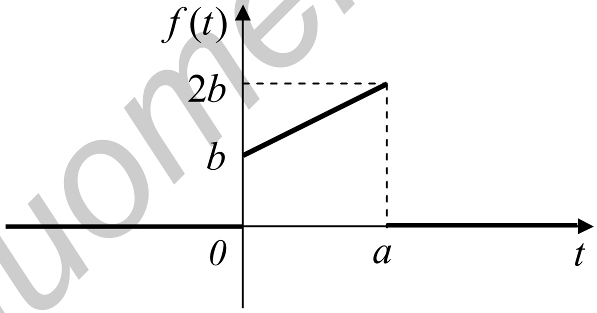
7. а) $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{(e^{iz}+2)z}{\sin 3iz}dz;$ **б)** $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{4z^5-3z^3+1}{2\pi iz^6}dz;$ **в)** $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dt}{(4-2\sqrt{3}\cos t)^2};$

г) $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+2x+x^2};$ **д)** $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx, a>0, b>0.$

8. $f(t)=\int\limits_0^t\dfrac{\sin\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}d\tau.$ **9.** $\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} t\sin t+\operatorname{sh} t\cos t).$ **10.** $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}.$

11. $\begin{cases} y''-3y'+2y=0, \\ y(0)=1, y'(0)=0. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=-x-2y+1, x(0)=1, \\ \dot{y}=-\dfrac{3}{2}x+y, y(0)=0. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $\pm 2, \pm 2i.$ **2.** $\operatorname{ch} 5.$ **3.** $64\pi i.$

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2\left(\left(\dfrac{2}{13}\right)^k+\dfrac{(-1)^k}{13^k}\right)z^{k-1}, 0<|z|<\dfrac{13}{2}; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{13}{2}\right)^{k+1}\dfrac{1}{z^{k+2}}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{13^k}z^{k-1}, \dfrac{13}{2}<|z|<13; \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-\left(\dfrac{13}{2}\right)^{k+1}+(-1)^k 13^{k+1}\right)\dfrac{1}{z^{k+2}}, |z|>13. \end{cases}$

5. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k 4^{2k}}{(2k)!\,(z-2)^{4k}}\left(\sin 1-\dfrac{4\cos 1}{(2k+1)(z-2)^2}\right).$

6. Существенно особая точка.

7. **а)** 0; **б)** 4; **в)** π; **г)** 1; **д)** $\dfrac{b-a}{2}\pi$. **8.** $\dfrac{\sqrt{\sqrt{1+p^2}-p}}{2p\sqrt{p^2+1}}$.

9. $\dfrac{p^2}{p^4+4}$. **10.** $2e^t - e^{t/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{5}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. **11.** $y = e^t(2-e^t)$.

12. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8}e^{-2t} + \dfrac{3}{8}e^{2t}, \\ y = \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{16}e^{-2t} - \dfrac{9}{16}e^{2t}. \end{cases}$ **13.** $F(p) = \dfrac{b}{ap^2}\left(1-e^{-ap}\right) + \dfrac{b}{p}\left(1-2e^{-ap}\right).$.

Вариант 14

1. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$. **2.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2i\right)$. **3.** $\int\limits_L (\operatorname{ch} z + z)dz,\ L:\{|z|=1, \operatorname{Im} z \le 0\}$.

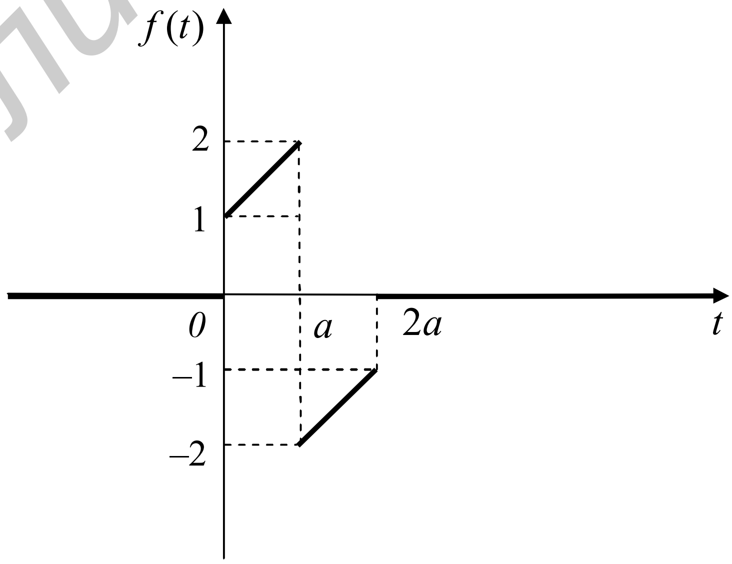
4. $\dfrac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$. **5.** $\sin\dfrac{z+i}{z-i},\ z_0 = i$. **6.** $\dfrac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.

7. **а)** $\oint\limits_{|z-2|=3} \dfrac{\cos^2 z + 1}{z^2-\pi^2}dz$; **б)** $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{e^{2z}-z}{2\pi i z^2}dz$; **в)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{(5-\sqrt{21}\cos t)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{xdx}{x^4+x^2+1}$; **д)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos xdx}{(x^2+9)(x^2+16)}$. **8.** $f(t) = e^{-t}\sin 2t$. **9.** $\int\limits_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.

10. $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$. **11.** $\begin{cases} 2y'' + 3y' + y = 3e^t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2,\ x(0) = 0, \\ \dot{y} = 3x + y + 1,\ y(0) = 2. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $\pm\dfrac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right), \pm\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}-i\right)$. **2.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch} 2 + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh} 2$. **3.** $2\operatorname{sh} 1$.

4. $\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\left(\dfrac{1}{7}\right)^k + \dfrac{(-1)^k}{14^k}\right) z^{k-2},\ 0<|z|<7; \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{7^{k+1}}{z^{k+3}} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{14^k} z^{k-2},\ 7<|z|<14; \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k 14^{k+1} - 7^{k+1}\right)\dfrac{1}{z^{k+3}}, |z|>14. \end{cases}$

5. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (2i)^{2k}}{(2k)!(z-i)^{2k}} \left(\sin 1 + \dfrac{2i\cos 1}{(2k+1)(z-i)}\right)$. **6.** Полюс 3-го порядка.

7. а) $2i$; **б)** 1; **в)** $\dfrac{5\pi}{4}$; **г)** 0; **д)** $\dfrac{\pi\,(4e-3)}{84e^4}$.

8. $\dfrac{2}{p^2+2p+5}$. **9.** $\dfrac{1}{p}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{p}$. **10.** $e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t}$. **11.** $y = \operatorname{sh} t$.

12. $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{21}{16}e^{-2t} + \dfrac{25}{16}e^{6t}, \\ y = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{21}{16}e^{-2t} + \dfrac{15}{16}e^{6t}. \end{cases}$

13. $F(p) = \dfrac{1}{ap^2}\left(1 - e^{-2ap}\right) + \dfrac{1}{p}\left(1 - 4e^{-ap} + e^{-2ap}\right)$.

Вариант 15

1. $\sqrt[3]{-8}$. **2.** $\operatorname{Ln}(-1+i)$. **3.** $\int\limits_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz,\ L: \{|z| = R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$.

4. $\dfrac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$. **5.** $\sin\dfrac{z}{z-3}, z_0 = 3$. **6.** $\dfrac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2}$.

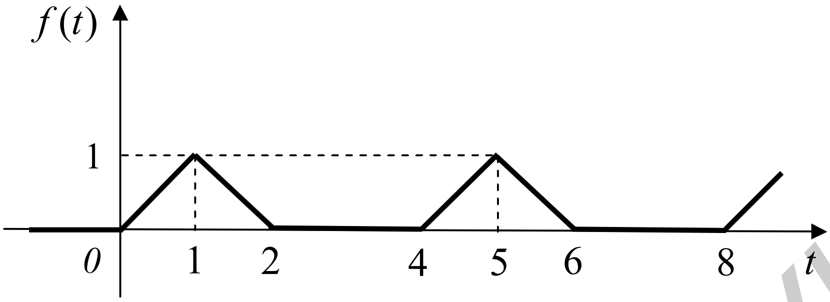
7. а) $\oint\limits_{|z-1|=3/2} \dfrac{\ln(z+2)}{\sin z} dz$; **б)** $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{1-z^2+6z^4}{4\pi i z^5} dz$; **в)** $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{(6-4\sqrt{2}\cos t)^2}$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\,dx}{(x^2+25)(9x^2+1)}$; **д)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(2x^3+13x)\sin x}{x^4+13x^2+36} dx$.

8. $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^n f(\tau) d\tau$. **9.** $\begin{cases} \sin\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right),\ t > \dfrac{\pi}{8}, \\ 0,\ t < \dfrac{\pi}{8}. \end{cases}$

10. $F(p)=\dfrac{p^2+3p+4}{p(p-1)(p-2)}$. **11.** $\begin{cases} y''-2y'-3y=2t, \\ y(0)=1,\, y'(0)=1. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} \dot{x}=3x+2y, x(0)=0, \\ \dot{y}=\dfrac{5}{2}x-y+2, y(0)=1. \end{cases}$

13.



Отв.: **1.** $-2{,}1\pm i\sqrt{3}$. **2.** $\dfrac{1}{2}\ln 2+i\left(\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right)$. **3.** $2\dfrac{R^4}{3}$.

4. $\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{15}\right)^k+\frac{(-1)^k}{15^k}\right)z^{k-1},\ 0<|z|<\frac{15}{2}; \\ \displaystyle -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{15}{2}\right)^{k+1}\frac{1}{z^{k+2}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{15^k}z^{k-1},\ \frac{15}{2}<|z|<15; \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{15}{2}\right)^{k+1}+(-1)^k 15^{k+1}\right)\frac{1}{z^{k+2}},\ |z|>15. \end{cases}$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 3^{2k}}{(2k)!(z-3)^{2k}}\left(\sin 1+\frac{3\cos 1}{(2k+1)(z-3)}\right)$. **6.** Полюс 1-го порядка.

7. **а)** $2\pi i\ln 2$; **б)** 3; **в)** $\dfrac{3\pi}{2}$; **г)** 0. **д)** $\pi\,(e^{-2}+e^{-3})$.

8. $\dfrac{n!\,F(p)}{p^{n+1}}$, где $F(p)\fallingdotseq f(t)$. **9.** $-\dfrac{2e^{-\pi p/8}}{p^2+4}$. **10.** $2-8e^t+7e^{2t}$.

11. $y=-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{9}e^{3t}$. **12.** $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{4t}, \\ y=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}e^{4t}. \end{cases}$ **13.** $F(p)=\dfrac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}$.

Литература

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика: Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной : учеб. пособие / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ «Обозрение», 1997. – 570 с.

2. Жевняк, Р. М. Высшая математика: Операционное исчисление. Теория вероятностей. Математическая статистика. Случайные процессы : учеб. пособие / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ «Обозрение», 1997. – 445 с.

3. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа : учеб. пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – М.: Наука, 1986. – 368 с.

4. Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие для вузов / Л. И. Волковысский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – М.: Наука, 1970. – 370 с.

5. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики : учеб. пособие для втузов / под ред. Г. И. Кручковича. – М.: Высш. шк., 1970. – 512 с.

6. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М.: Наука, 1981. – 304 с.

7. Соломенцев, Е. Д. Функции комплексного переменного и их применения / Е. Д. Соломенцев. – М.: Высш. шк. – 1988. – 168 с.

8. Шахно, К. У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления : учеб. пособие / К. У. Шахно. – Минск : Выш. шк., 1975. – 400 с.

9. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. / Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Содержание

Учебное издание

Карпук Андрей Андреевич
Цегельник Владимир Владимирович
Олешкевич Дмитрий Николаевич и др.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 10-ти частях

Часть 10

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *Г. С. Корбут*

Корректор *Е. Н. Батурчик*

Компьютерная верстка *Г. М. Кореневская*

Подписано в печать 21.04.2010. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 8,72. Уч.-изд. л. 8,2. Тираж 400 экз. Заказ 197.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ № 02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП № 02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П.Бровки, 6