Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

Методическое пособие
для студентов специальностей 1-45 01 01 «Многоканальные системы телекоммуникаций», 1-45 01 02 «Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения», 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» заочной формы обучения

Минск БГУИР 2011

УДК 517.9(076)
ББК 22.16я73
С71

Авторы:
В. В. Цегельник, З. Н. Четыркина, В. А. Ранцевич,
Н. В. Спичекова, З. Н. Примичева

Рецензент:
заведующий кафедрой информатики
учреждения образования «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники», доктор физико-математических наук,
профессор Л. И. Минченко

С71 **Специальные** математические методы и функции : метод. пособие для студ. спец. 1-45 01 01 «Многоканальные системы телекоммуникаций», 1-45 01 02 «Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения», 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» заоч. формы обуч. / В. В. Цегельник [и др.]. – Минск : БГУИР, 2011. – 76 с.
ISBN 978-985-488-708-1.

Дано краткое изложение теоретического материала, а также примеры решений типовых задач с использованием специальных математических методов. Содержит 10 вариантов контрольной работы, методические указания к ее выполнению и список литературы.

Для самостоятельного изучения специальных математических методов и функций студентами-заочниками. Может быть использовано и при проведении занятий со студентами дневной формы обучения, где изучается указанная дисциплина.

УДК 517.9(076)
ББК 22.16я73

ISBN 978-985-488-708-1

Содержание

Введение

Радиоинженеру традиционно приходится иметь дело с сигналами. С математической точки зрения сигнал представляет собой временную функцию. Поэтому для успешной обработки сигнала необходимо понять, что такое сигнал; какие у него могут быть математические характеристики; что значит «два сигнала близки друг к другу»; как понять «расстояние» между сигналами. Для того чтобы найти связь между указанными характеристиками, а также выяснить границы их применимости, необходимо освоить ряд вспомогательных математических понятий и методов исследования, которые не входят в классический курс «Высшая математика». Поэтому на кафедре высшей математики разработана дисциплина «Специальные математические методы и функции», относящаяся к разделу «Специальные главы высшей математики».

Раздел 1. Основные элементы функционального анализа. Функциональные пространства

§1.1. Линейное пространство

В математике важную роль играет понятие пространства, т. е. множества, между элементами которого аксиоматически заданы некоторые соотношения. В этом случае говорят, что на множестве задана структура соответствующего пространства.

Определение 1.1. *Линейным* (или *векторным*) *пространством* L называется всякая совокупность объектов (элементов)

$$L = \{\bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{z}, ..., \bar{u}, ...\},$$

условно называемых *векторами*, над которым определены две операции – *сложения* $\oplus$: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in L$, $\bar{x} \oplus \bar{y} = \bar{z} \in L$, и *умножения на число* $\otimes$: $\forall \bar{x} \in L$, $\forall \lambda \in P$ (P – некоторое числовое множество), $\lambda \otimes \bar{x} = \bar{u} \in L$, подчиняющиеся следующим аксиомам:

1º. $\bar{x} \oplus \bar{y} = \bar{y} \oplus \bar{x}$ – коммутативность сложения;

2º. $(\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z} = \bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z})$ – ассоциативность сложения;

3º. существует *нуль-вектор*: $\bar{x} \oplus \bar{0} = \bar{x}$ для любого $\bar{x} \in L$;

4º. для каждого вектора $\bar{x}$ существует противоположный $\bar{x}'$, такой, что $\bar{x} \oplus \bar{x}' = \bar{0}$;

5º. $1 \otimes \bar{x} = \bar{x}$ – умножение на единицу;

6º. $(\alpha + \beta) \otimes \bar{x} = \alpha \otimes \bar{x} \oplus \beta \otimes \bar{x}$, где α и β – действительные или комплексные числа;

7º. $\alpha \otimes (\bar{x} \oplus \bar{y}) = \alpha \otimes \bar{x} \oplus \alpha \otimes \bar{y}$;

8º. $\alpha \otimes (\beta \otimes \bar{x}) = (\alpha\beta) \otimes \bar{x}$ – ассоциативный закон относительно произведения чисел.

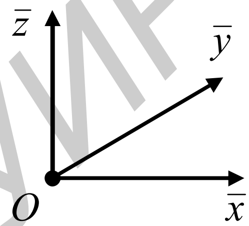
Из аксиом 5º – 8º следует, что $0 \otimes \bar{x} = \bar{0}$ для $\forall \bar{x} \in L$, $\alpha \otimes \bar{0} = \bar{0}$ для $\forall \alpha \in P$.

В зависимости от того, какому из множеств принадлежат числа $\forall \lambda \in P$ – множеству действительных чисел $\boldsymbol{R}$ или множеству комплексных чисел $\boldsymbol{C}$, пространство L называется соответственно *действительным* или *комплексным линейным пространством*. Элементы линейного пространства называются *векторами*, а само пространство – *векторным*.

Пример 1.1. Исследовать на линейность множество векторов трехмерного пространства $\boldsymbol{R}^3$, исходящих из точки O.

Р е ш е н и е.

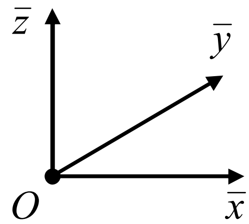
Так как сумма двух таких векторов есть вектор, выходящий из точки O, и произведение вектора на любое действительное число также является вектором заданного множества, то операции сложения и умножения на число определены на множестве векторов, исходящих из точки O трехмерного пространства $\boldsymbol{R}^3$, которые, можно показать, удовлетворяют аксиомам 1º – 8º, и, следовательно, пространство $\boldsymbol{R}^3$ будет линейным пространством.



Пример 1.2. Доказать, что совокупность всех многочленов степени не выше n $\left\{ a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n \right\}$ образует линейное пространство L относительно обычных операций сложения и умножения на число.

Р е ш е н и е.

Сумма многочленов степени не выше n является многочленом степени не выше n. Произведение любого многочлена из данного множества на число (действительное или комплексное) не изменит степень многочлена. Таким образом, операции сложения и умножения на число определены на множестве многочленов степени не выше n и удовлетворяют аксиомам 1º – 8º. Данное множество является линейным пространством.



Аналогично можно доказать, что линейными пространствами являются:

1) множество всех решений $\{y(x)\}$ линейного однородного дифференциального уравнения

$$L(y(x)) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0;$$

2) множество $C[a,b] = \{f(x), g(x), \ldots\}$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с обычными операциями сложения и умножения на число;

3) множество всех матриц $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \cdots\cdots \\ b_{m1} \cdots b_{mn} \end{pmatrix}, \ldots \right\}$ размерности $m \times n$ с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.

§1.2. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис и размерность линейного пространства

Пусть V – линейное векторное пространство.

Определение 1.2. Вектор $\bar{b} \in V$ называется *линейной комбинацией векторов* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m$, если найдется такой набор чисел $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$, при котором справедливо равенство

$$\bar{b} = \beta_1 , \bar{a}_1 \oplus \beta_2 , \bar{a}_2 \oplus ... \oplus \beta_m , \bar{a}_m .$$

Определение 1.3. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m$ называется *линейно зависимой*, если равенство

$$\beta_1 , \bar{a}_1 \oplus \beta_2 , \bar{a}_2 \oplus ... \oplus \beta_m , \bar{a}_m = \bar{0}$$

может быть выполнено хотя бы для одного ненулевого набора чисел

$$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) \neq (0, 0, ..., 0).$$

Определение 1.4. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ... \bar{a}_m$ называется *линейно независимой*, если равенство

$$\beta_1 , \bar{a}_1 \oplus \beta_2 , \bar{a}_2 \oplus ... \oplus \beta_m , \bar{a}_m = \bar{0}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$.

Определение 1.5. Базисом линейного пространства V называется упорядоченная система максимального числа линейно независимых векторов.

Количество базисных векторов определяет размерность пространства $\bar{e}_n$, которая обозначается $\dim V$. Если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ – базис линейного пространства V, то оно называется n-мерным и обозначается V_n, а всякий его вектор $\bar{x}$ можно представить в виде

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n .$$

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называют *координатами* вектора $\bar{x}$ в данном базисе.

Например, в трехмерном пространстве в декартовой системе координат базис образуют векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Тогда любой вектор $\bar{x}$ представляется в виде их линейной комбинации

$$\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k} .$$

Числа x_1, x_2, x_3 – координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе.

В линейном пространстве многочленов степени не выше n в качестве базисных векторов можно взять набор многочленов $B = \{x^n, x^{n-1}, ..., x, 1\}$. Тогда любой многочлен $P(x)$ представляет собой линейную комбинацию элементов множества B:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \cdot 1.$$

Коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ являются координатами многочлена $P(x)$ в базисе B.

Для множества матриц $M = \{(a_{ij}), ...\}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, базисными будут матрицы

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots & 0 \end{pmatrix}, ..., E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ & \\ i & \end{array}\!\!\!\begin{pmatrix} 0...0\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots... & \\ 0\ldots1\ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots.. & \\ 0...0\ldots & 0 \end{pmatrix}, ..., E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & 0\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

В матрице E_{ij} единица стоит на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, а все остальные элементы – нули. Тогда любая матрица (a_{ij}) представляется в виде суммы:

$$(a_{ij}) = a_{11}E_{11} + ... + a_{ij}E_{ij} + ... + a_{mn}E_{mn}.$$

Определение 1.6. Линейное пространство V называется *бесконечномерным,* если в нем существуют системы из *любого* числа линейно независимых векторов.

Примером такого бесконечномерного линейного пространства может служить множество всех аналитических (бесконечное число раз дифференцируемых) функций $V = C^{\infty} = \{f(x), \varphi(x), ...\}$. В качестве базиса в этом пространстве можно взять набор простейших многочленов $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$.

Замечание 1. Все линейные пространства размерности n имеют одинаковые свойства. Поэтому достаточно изучить свойства арифметического линейного пространства A_n, элементы которого представляют собой упорядоченный набор n вещественных чисел:

$$A_n = \{\bar{x}(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \boldsymbol{R}\}.$$

Векторы $\bar{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \bar{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \bar{e}_n = (0, 0, ..., 0, 1)$ образуют базис пространства A_n.

§1.3. Евклидово пространство

Определение 1.7. Действительное линейное пространство L называется *евклидовым*, если каждой паре векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из L ставится в соответствие вещественное число $(\bar{x}, \bar{y})$ и выполняются аксиомы:

1°. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in L;$

2°. $(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \bar{y}) + (\bar{x}_2, \bar{y}),\ \forall \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y} \in L;$

3°. $(\alpha \otimes \bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}),\ \forall \alpha \in \boldsymbol{R}, \forall \bar{x}, \bar{y} \in L;$

4°. $(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}^2 \geq 0, \forall \bar{x} \in L; (\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}.$

Число $(\bar{x}, \bar{y})$ называется *скалярным произведением* векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$,

$(\bar{x}, \bar{x})$ – *скалярным квадратом* вектора $\bar{x}$ (обозначается $\bar{x}^2$).

Аксиома 1° требует, чтобы скалярное произведение было коммутативно, т. е. не зависело от порядка сомножителей. Аксиомы 2° и 3° указывают на линейность этой операции по каждому аргументу.

Как известно, в декартовой системе координат в трехмерном векторном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ скалярное произведение векторов $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$ может быть найдено по формуле:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a} \hat{,} \bar{b}).$$

С помощью скалярного произведения для каждого вектора $\bar{a}$ естественным образом находится длина

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

и для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ легко определяется угол φ между ними:

$$\varphi = \arccos \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}.$$

Пространство $\boldsymbol{R}^3$ и операция скалярного произведения в этом пространстве были известны еще во времена Евклида, который жил в IV веке до нашей эры. Поэтому $\boldsymbol{R}^3$ с введенной операцией скалярного произведения называется *евклидовым пространством* и обозначается E_3.

С помощью скалярного произведения в евклидовом пространстве по аналогии с трехмерным евклидовым пространством E_3 определяются следующие понятия:

1) *норма* вектора $\bar{x}$ (*норма* является аналогом длины вектора в обычном пространстве $\boldsymbol{R}^3$): $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$;

2) *угол* между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$: $\cos(\bar{x} \hat{,} \bar{y}) = \dfrac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$;

3) *расстояние* между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$:

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y})}.$$

Определение 1.8. Два вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Определение 1.9. Базис $\{\bar{e}_1*, \bar{e}_2*, ..., \bar{e}_n*\}$ называется ортонормированным, если все векторы данного базиса имеют единичную длину (норму): $1 = \|\bar{e}_1*\| = \|\bar{e}_2*\| = ... = \|\bar{e}_n*\|$, и попарно ортогональны друг к другу: $(\bar{e}_i*, \bar{e}_j*) = 0$, если $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$.

По любому базису можно построить ортонормированный базис, следуя нижеизложенному алгоритму.

Процесс ортогонализации.

1. Пусть имеется базис $\{\overline{g}_1, \overline{g}_2, ..., \overline{g}_n\}$.

2. Векторы нового ортогонального базиса $\{\overline{f_1}, \overline{f_2}, ..., \overline{f_n}\}$ определяются по формулам:

$$\overline{f_1} = \overline{g_1}; \overline{f_2} = \overline{g_2} + \lambda_1^2 \overline{f_1}, \quad \lambda_1^2 = -\frac{(\overline{f_1}, \overline{g_2})}{\left\|\overline{f_1}\right\|^2}; \ldots;$$

$$\overline{f_k} = \overline{g_k} + \lambda_1^k \overline{f_1} + \lambda_2^k \overline{f_2} + \ldots + \lambda_{k-1}^k \overline{f_{k-1}}, \quad \lambda_j^k = -\frac{(\overline{f_j}, \overline{g_k})}{\left\|\overline{f_j}\right\|^2}, \quad j = \overline{1, k-1}, \quad k = \overline{2, n}. \tag{1.1}$$

3. Нормирование полученных векторов (деление каждого из векторов на его норму).

Для различных евклидовых пространств скалярные произведения определяются по-разному.

В арифметическом пространстве A_n с базисом

$$\{\overline{e}_1(1, 0, ..., 0), \overline{e}_2(0, 1, 0, ..., 0), ..., \overline{e}_n(0, 0, ..., 0, 1)\}$$

для векторов $\overline{x}(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\overline{y}(y_1, y_2, ..., y_n)$ скалярное произведение определяется по формуле

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Скалярное произведение двух непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ вычисляется по формуле

$$(f(x), \varphi(x)) = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

или в более общем виде: $(f(x), \varphi(x)) = \int_a^b \rho(x) f(x) \varphi(x)\,dx$, где $\rho(x) > 0$ – *весовая функция*.

§1.4. Метрические пространства

В данном параграфе рассмотрим понятие метрического пространства-множества, для элементов которого определено понятие расстояния. С помощью расстояния можно ввести одну из важнейших операций анализа – ***операцию предельного перехода***.

Пусть $M = \{x, y, ...\}$ – произвольное непустое множество (необязательно, чтобы его элементы $x, y, ...$ образовывали линейное пространство). Говорят, что на множестве M определена *структура метрического пространства*, если для любых элементов x, $y \in M$ задана функция $\rho(x, y)$, удовлетворяющая следующим аксиомам (аксиомам расстояния):

1º. $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2º. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in M$, (*аксиома симметрии*);

3º. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in M$, (аксиома (*неравенство*) *треугольника*).

Функция $\rho(x, y)$ называется *метрической*, а число $\rho(x, y)$ называется *метрикой* или *расстоянием* между x и y.

Метрическое пространство символически записывается (M, ρ), где M – множество, а ρ – метрическая функция на нем.

Существуют разные способы задания метрики в зависимости от самого множества M.

Рассмотрим примеры некоторых множеств и введения на них метрики.

1. Множество изолированных точек *X*.

Функция расстояния $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = y, \\ 1, \text{ если } x \neq y. \end{cases}$

2. Пространство действительных чисел *R*.

Функция расстояния $\rho(x, y) = |x - y|$.

3. Евклидово пространство. В евклидовом пространстве E_n для векторов $\bar{x}\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\bar{y}\,(y_1, y_2, ..., y_n)$ расстояние определяется по формуле $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(\bar{y} - \bar{x}, \bar{y} - \bar{x})} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$.

Такая метрика $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ называется *евклидовой метрикой*.

Для нее выполняются аксиомы 1º – 3º.

Заметим, что в пространстве E_n для любых векторов $\bar{x}\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\bar{y}\,(y_1, y_2, ..., y_n)$ справедливо *неравенство Коши-Буняковского*:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}.$$

4. Пространство матриц размерности m×n. Для матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размерности $m \times n$ расстояние можно определить таким образом:

$$\rho\,(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2}\,.$$

Нахождение евклидовой метрики в этом случае является трудоемким процессом.

5. Пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $C[a, b]$.

На множестве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций расстояние ρ между элементами $f(x)$ и $\varphi(x)$ вычисляется по формуле

$$\rho\,(f, \varphi) = \max_{x \in [a, b]} |\, f(x) - \varphi(x)\,|.$$

Такая метрика называется *равномерной метрикой*, при этом метрическая функция $\rho(f,\varphi)$ показывает *максимальное уклонение* функции $f(x)$ от функции $\varphi(x)$ на заданном отрезке.

6. Множество $C^n[a,b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций до n-го порядка включительно.

На $C^n[a, b]$ метрическая функция

$$\rho(f,\varphi) = \max_{x\in[a,b]}\{|f(x)-\varphi(x)|, |f'(x)-\varphi'(x)|, ..., |f^{(n)}(x)-\varphi^{(n)}(x)|\}.$$

Здесь просматриваются зазоры не только между значениями функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, но и между всеми соответствующими производными от этих функций до n-го порядка включительно, и выбирается максимальный из них.

7. Пространство $L_p[a,b]$ интегрируемых на отрезке $[a,b]$ со степенью p функций.

Метрика задается формулой $\rho(f,\varphi) = \left(\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

8. Метрика Хэмминга. Информация, передаваемая по каналам связи с одного компьютера на другой, обычно записывается в виде вектора $\bar{x}(x_1, x_2, ..., x_n)$, где x_i, $i=\overline{1,n}$, равно либо 0, либо 1. Рассмотрим линейное пространство V_n векторов $\bar{x}$ над множеством двух чисел 0 и 1. Операции $\oplus$ и $\otimes$ над этими числами таковы:

$$\begin{array}{ll} 0\oplus 0 = 0, & 0\otimes 0 = 0, \\ 0\oplus 1 = 1, & 1\otimes 0 = 0, \\ 1\oplus 0 = 1, & 0\otimes 1 = 0, \\ 1\oplus 1 = 0, & 1\otimes 1 = 1. \end{array}$$

В роли числа, противоположного 1, выступает 1.

Это алгебра выключателя света: если дважды нажать на выключатель, то свет вначале зажжется, а затем погаснет.

Например, $\bar{x}(0,1,0,0,0,0,0,1)$ – вектор из V_8, а $\bar{x}(1,0,1,1)$ – вектор из V_4.

Расстояние между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ обозначается $\operatorname{dist}(\bar{x},\bar{y})$ (сокращенно от англ. *distance*), равно числу различий в координатах векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и называется *метрикой Хэмминга*.

Пусть, например, $\bar{x} = (1,0,1,1)$, $\bar{y} = (0,1,1,0)$. У этих векторов третьи координаты одинаковы, а остальные различны, поэтому $\operatorname{dist}(\bar{x},\bar{y}) = 3$. Если же $\bar{x} = (1,0,0,0,0,0,1,0)$, $\bar{y} = (0,1,1,0,0,1,0,1)$, то $\operatorname{dist}(\bar{x},\bar{y}) = 6$.

Выясним, чему равна норма $\|\bar{x}\|$ вектора $\bar{x}$. $\|\bar{x}\|$ – это фактически норма разности вектора $\bar{x}$ и нулевого вектора или, другими словами, расстояние от вектора $\bar{x}$ до нулевого вектора. Поэтому $\|\bar{x}\|$ равна числу ненулевых координат вектора $\bar{x}$. Например, $\|\bar{x}(0,1,0,1,1,1,0,0,0)\| = 4$.

§1.5. Полнота метрического пространства (X, ρ)

Пусть $\{x_n\}, x_n \in X, n \in \boldsymbol{N},$ – последовательность точек в метрическом пространстве (X, ρ).

Определение 1.10. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся к точке $x \in X$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Точка x называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Из определения предела последовательности следует его единственность.

Определение 1.11. Последовательность $\{x_n\}$ метрического пространства (X, ρ) называется *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши*, если $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при n и $m \to \infty$, если $n, m \in \boldsymbol{N}$.

Определение 1.12. Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к пределу, являющемуся элементом этого пространства.

Пространства $\boldsymbol{R}, E_n, C[a, b]$ являются полными.

Рассмотрим множество $X = (0, +\infty)$, на котором задана метрика $\rho(x, y) = |x - y|$.

Определим последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Эта последовательность фундаментальна, так как

$$\rho(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \le \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0$$

при $n, m \to \infty$, но ее предел, равный числу 0, не принадлежит X. Следовательно, множество $X = (0, +\infty)$ не является полным.

Множество X можно пополнить, включив в него число 0.

§1.6. Пространство Гильберта

В физических задачах часто приходится рассматривать бесконечномерные пространства функций. Одним из таких пространств является пространство Гильберта. Оно обобщает понятие евклидова пространства на бесконечномерный случай.

Определение 1.13. Будем говорить, что на комплексном линейном пространстве H задана операция *скалярного произведения*, если каждой паре векторов x и y из H сопоставляется комплексное число (x, y) так, что для $\forall x, y, z \in H$ и $\forall \alpha \in \boldsymbol{C}$ выполняются аксиомы:

1º. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (черта означает комплексное сопряжение);

2º. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

3º. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

4º. $(x, x) = x^2 \geq 0, \ (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Как и в случае действительного линейного пространства, число (x, y) называется *скалярным произведением* векторов x и y, (x, x) – *скалярным квадратом* вектора x.

Так как для произвольного вещественного числа s справедливо равенство $s = \bar{s}$ и $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$, система аксиом для евклидового пространства является частным случаем системы аксиом определения 1.13.

По аналогии с евклидовым пространством в комплексном линейном пространстве H с введенной операцией скалярного произведения определяется норма вектора, расстояние между векторами и понятие ортогональности векторов:

1) *норма* вектора x: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$;

2) *расстояние* между векторами x и y:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

Метрика, задаваемая данной формулой, называется метрикой, порожденной скалярным произведением.

Определение 1.14. Комплексное линейное пространство H называется *пространством Гильберта*, если выполнены следующие условия: 1) на H задано скалярное произведение; 2) H – полное метрическое пространство относительно метрики, порожденной скалярным произведением.

Гильбертовы пространства играют большую роль при изучении дифференциальных и интегральных уравнений, теории вероятности, квантовой механики и других областей физики и математики.

Примеры пространств Гильберта.

1. Евклидово пространство E_n (как частный случай) со скалярным произведением, заданным по формуле $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i x_i$.

2. Бесконечномерное пространство векторов со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i x_i$.

3. Пространство $L_2[a, b]$.

Для функций $g \in L_2[a, b]$ и $f \in L_2[a, b]$ скалярное произведение определено как $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$.

4. Для комплексных функций, интегрируемых с квадратом, скалярное произведение определяется таким образом:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

Так как в радиотехнике сигналы описываются математическими функциями действительных или комплексных переменных из пространств $L_2[a,b]$ или $L_2[-\infty,\infty]$, то норма сигнала $s(t)$ определяется по формулам

$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_a^b s^2(t)\,dt} \text{ или } \|s(t)\| = \sqrt{\int_a^b s(t)\,\overline{s(t)}\,dt}\,.$$

Напомним, что в *n*-мерном евклидовом пространстве система векторов $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$ называется *полной*, если каждый вектор пространства может быть представлен в виде $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$.

По аналогии систему функций $\{f_i(x)\}$ назовем *полной* в пространстве H, если для любой функции $f(x)$ из H выполняется равенство

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

т. е. частичная сумма сходится к функции $f(x)$.

Возникает, во-первых, вопрос о точности аппроксимации любой функции с помощью базиса. Во многих приложениях для одних и тех же множеств функций рассматриваются различные понятия «близости» в зависимости от выбора метрики.

Напомним основные виды сходимости:

1. Если при $n \to \infty$ $|f(x) - S_n(x)| \to 0$ для $x \in [a, b]$, то *сходимость поточечная*.

2. Если при $n \to \infty$ $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - S_n(x)| \to 0$, то *сходимость равномерная*, а число $\max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - S_n(x)|$ называют равномерным уклонением функции $f(x)$ на $[a, b]$.

3. Если при $n \to \infty$ $\int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 dx \to 0$, то *сходимость в среднем квадратичном смысле*.

Число, равное $\sqrt{\int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2 dx}$, называется соответственно среднеквадратичным уклонением функции $f(x)$ на $[a, b]$.

4. Если при $n \to \infty$ $\int_a^b u(x) S_n(x) dx \to \int_a^b u(x) f(x) dx$ для $\forall u(x)$ из некоторого множества U так называемых пробных функций, то *сходимость в обобщенном смысле*. Следовательно, вопрос о точности приближения решается относительно одной из приведенных метрик.

Во-вторых, это вопрос о существовании полных систем функций, обеспечивающих аппроксимацию.

§1.7. Обобщенный ряд Фурье

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – ортогональная система функций из $L_2[a,b]$.

Определение 1.15. Выражение вида

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$$

называется обобщенным рядом Фурье по данной системе функций, а числа c_i – коэффициентами Фурье.

Чтобы найти коэффициенты c_i, предположим, что разложение

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots$$

имеет место и ряд сходится равномерно к $f(x)\in L_2[a,b]$. Тогда

1) умножим скалярно левую и правую часть данного равенства на $\varphi_k(x)$

$$\left(f,\varphi_k(x)\right)=c_0(\varphi_0,\varphi_k)+c_1(\varphi_1,\varphi_k)+\ldots+c_k(\varphi_k,\varphi_k)+\ldots;$$

2) в силу ортогональности системы $\{\varphi_n(x)\}$ получаем

$$\left(f,\varphi_k(x)\right)=c_k(\varphi_k,\varphi_k);$$

3) $c_k=\dfrac{\left(f,\varphi_k(x)\right)}{\left(\varphi_k,\varphi_k\right)}=\dfrac{\left(f,\varphi_k(x)\right)}{\|\varphi_k\|^2}$;

4) подставим значения коэффициентов c_k в обобщенный ряд Фурье и получим его запись в виде $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(f,\varphi_k(x)\right)\varphi_k(x)}{\|\varphi_k\|^2}$.

Если система $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормированная, то $c_k=\left(f(x),\varphi_k(x)\right)$, а ряд соответственно будет иметь вид $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$.

Таким образом, найдя по полученной формуле коэффициенты c_k, мы можем формально для $\forall f(x)\in L_2[a,b]$ составить обобщенный ряд Фурье.

Но это лишь формальная запись и не больше. Важен вопрос: насколько верно этот ряд будет отражать свойства $f(x)$ и при каких x?

Установлено, что отклонение в среднем квадратичном данного ряда от функции при такой формуле для коэффициентов $c_k=\dfrac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}$ будет минимальным и выражается равенством $\rho^2=\|f\|^2-\sum\limits_{k=1}^{n}c_k^2\|\varphi_k\|^2$.

Вывод: Чтобы среднеквадратичное уклонение функции было минимальным, нужно $f(x)$ аппроксимировать *n*-й частичной суммой обобщенного ряда Фурье. В этом смысле говорят об <u>экстремальном свойстве коэффициентов Фурье.</u>

Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$ будет сходиться, причем $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \le \|f\|^2$.

Неравенство $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 (\varphi_k, \varphi_k) \le (f, f) = \int_a^b f^2(x)\,dx$ называется *неравенством Бесселя*.

Именно с этим неравенством и связан ответ на вопрос о сходимости рядов Фурье. Ряд Фурье будет сходиться к $f(x)$ тогда и только тогда, когда при $n \to \infty$ $\rho^2(f, S_n) \to 0$, т. е. неравенство Бесселя превращается в равенство $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$, которое называется *равенством Парсеваля-Стеклова* или *уравнением замкнутости*.

Если система функций ортонормирована, т. е. $\|\varphi_n\| = 1$, то равенство Парсеваля-Стеклова имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$, а неравенство Бесселя соответственно $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \le \|f\|^2$.

Заметим, что если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ сходится, то выполняется необходимый признак сходимости числового ряда, т. е. $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, поэтому коэффициенты ряда Фурье по ортонормированной системе функций стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Теорема 1.1. Для того чтобы ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ функции $f(x) \in L_2[a,b]$ сходился к $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ в среднем квадратичном, необходимо и достаточно, чтобы неравенство Бесселя для $f(x)$ обращалось в равенство Парсеваля-Стеклова, т. е. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2$.

Теорема 1.2. Если обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k$ функции $f(x)$ сходится на отрезке $[a,b]$ равномерно к функции $f(x) \in L_2[a,b]$, то он сходится к $f(x)$ на $[a,b]$ и в среднем квадратичном.

Определение 1.16. Ортогональная система функций $\{\varphi_k(x)\}$, для которой выполняется равенство Парсеваля-Стеклова, называется замкнутой в $L_2[a,b]$.

Из теоремы 1.2 следует, что любая функция $f(x) \in L_2[a,b]$ может быть представлена рядом Фурье, сходящимся к ней в среднем квадратичном по ортогональной системе функций $\{\varphi_k(x)\}$, которая является замкнутой в $L_2[a, b]$.

Определение 1.17. Ортогональная система функций $\{\varphi_k(x)\}$ называется полной, если не существует ни одной отличной от нулевой функции, ортогональной ко всем функциям $\varphi_k(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Теорема 1.3. Если система $\{\varphi_k(x)\}$ ортогональных функций на отрезке $[a,b]$ замкнута, то она полна.

Рассмотрим примеры ортогональных систем в гильбертовом пространстве.

§1.8. Ортогональные системы функций

1. Основная тригонометрическая система функций

Примером ортогональной системы функций является основная тригонометрическая система функций

$$\left(1;\, \cos\frac{\pi x}{l};\, \sin\frac{\pi x}{l};\, \cos\frac{2\pi x}{l};\, \sin\frac{2\pi x}{l};\, \ldots;\, \cos\frac{n\pi x}{l};\, \sin\frac{n\pi x}{l};\, \ldots\right).$$

Теорема 1.4. Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длиной $2l$ (например, на $[-l;l]$), при этом норма $\varphi_0 = 1$ равна $\sqrt{2l}$, а норма любой другой функции этой системы равна $\sqrt{l}$.

Частные случаи основной тригонометрической системы функций

	Ортогональная система функций	Отрезок	Нормы элементов
1	$1; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \ldots$	$[-\pi;\pi]$	$\lVert 1\rVert = \sqrt{2\pi}$; $\lVert \sin nx\rVert = \lVert \cos nx\rVert = \sqrt{\pi}$
2	$1; \cos\frac{\pi x}{l}; \cos\frac{2\pi x}{l}; \ldots; \cos\frac{n\pi x}{l}; \ldots$	$[0;\, l]$	$\lVert 1\rVert = \sqrt{l}$; $\left\lVert \cos\frac{n\pi x}{l}\right\rVert = \sqrt{\frac{l}{2}}$
3	$\sin\frac{\pi x}{l}; \sin\frac{2\pi x}{l}; \ldots; \sin\frac{n\pi x}{l}; \ldots$	$[0;\, l]$	$\left\lVert \sin\frac{\pi n x}{l}\right\rVert = \sqrt{\frac{l}{2}}$
4	$1; \cos x; \cos 2x; \ldots; \cos nx; \ldots$	$[0;\pi]$	$\lVert 1\rVert = \sqrt{\pi}$; $\lVert \cos nx\rVert = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
5	$\sin x; \sin 2x; \ldots; \sin nx; \ldots$	$[0;\pi]$	$\lVert \sin nx\rVert = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Теорема 1.5. Основная тригонометрическая система функций на $[-l, l]$ $\{\varphi_n(x)\} = \left(1;\, \cos\frac{\pi x}{l};\, \sin\frac{\pi x}{l};\, \ldots;\, \cos\frac{n\pi x}{l};\, \sin\frac{n\pi x}{l};\, \ldots\right)$ замкнута.

Определение 1.18. Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

называется тригонометрическим рядом Фурье для периодической функции $f(x)\in L_2[-l;l]$, коэффициенты которого определяются по формулам:

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\,dx, \\[2ex] a_n=\dfrac{\left(f(x),\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right)}{\left(\cos\dfrac{n\pi x}{l},\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right)}=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n\in\boldsymbol{N}, \\[2ex] b_n=\dfrac{\left(f(x),\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)}{\left(\sin\dfrac{n\pi x}{l},\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right)}=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,dx, \ n\in\boldsymbol{N}. \end{cases}$$

Равенство Парсеваля-Стеклова имеет вид

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f^2(x)\,dx.$$

Основные свойства рядов Фурье изучены в основном курсе высшей математики, поэтому они детально не рассматриваются.

Рассмотрим другие аналогичные ортогональные системы функций.

Теорема 1.6. Система функций $\left\{1;e^{\pm i\frac{\pi x}{l}};e^{\pm i\frac{2\pi x}{l}};e^{\pm i\frac{3\pi x}{l}};\ldots\right\}$ ортогональна и полна на $[-l;l]$.

Каждую функцию можно представить с помощью формулы Эйлера: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Так как тригонометрическая система функций полна, то и данная система функций тоже полна.

Ортогональность следует из равенства

$$\int\limits_{-l}^{l}e^{\frac{in\pi x}{l}}e^{\frac{-ik\pi x}{l}}dx=\left[\begin{array}{ll}0, & n\neq k\\ 2l, & n=k.\end{array}\right.$$

Ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$ является комплексной формой ряда Фурье функции $f(x)$ с комплексными коэффициентами Фурье c_n, определяемыми по формуле

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{l}}\, dx, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Полиномы Лежандра

Установлено, что система функций 1, $x, x^2, x^3, \ldots$ является полной на отрезке $[-1; 1]$. Но как видно при непосредственном вычислении, эта система не является ортогональной.

Ортогональную систему образуют многочлены Лежандра, определяемые по формуле $P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Вычислим, например, шесть первых из них:

$P_0(x) = 1;$

$P_1(x) = x;$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$

Проверим выполнение ортогональности на $[-1; 1]$, т. е. $\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_k(x)\, dx = 0$, $n \neq k$. Для этого рассмотрим несколько частных случаев:

$$\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_1(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} P_2(x)\, P_1(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x\,(3x^2 - 1)\, dx = 0,$$

учитывая свойство интеграла от нечетных функций по симметричному промежутку.

Найдем норму многочленов Лежандра.

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx.$$

Если применить n раз формулу интегрирования по частям и заметить, что все внеинтегральные выражения обращаются в нуль, то через n шагов приходим к выражению

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\,dx.$$

Так как

$$\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^{2n} - nx^{2n-2} + ...) = (2n)!$$

и

$$(-1)^n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = 2\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)},$$

то после подстановки в интеграл приходим к равенству

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1} \Rightarrow \quad \|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Чтобы пронормировать систему, нужно многочлены Лежандра разделить на соответствующие им нормы.

В этом случае ряд Фурье для функции $f(x)$ на $[-1;1]$ будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots,$$

где коэффициенты $c_k = \dfrac{(f(x), P_k(x))}{\|P_k(x)\|^2} = \dfrac{2k+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,P_k(x)\,dx$.

Пример 1.3. Разложить в ряд Фурье по многочленам Лежандра функцию $f(x) = x^3 - 2x^2,\; x \in [-1;1]$.

Р е ш е н и е . Найдем

$$c_0 = \frac{(f(x), P_0(x))}{\|P_0(x)\|^2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2)\cdot 1\,dx = -\frac{2}{3};$$

$$c_1 = \frac{(f(x), P_1(x))}{\|P_1(x)\|^2} = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_1(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2)\cdot x\,dx = \frac{3}{5};$$

$$c_2 = \frac{(f(x), P_2(x))}{\|P_2(x)\|^2} = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_2(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2)\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = -\frac{4}{3};$$

$$c_3 = \frac{(f(x), P_3(x))}{\|P_3(x)\|^2} = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_3(x)\,dx = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2)\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x)\,dx = \frac{2}{5}.$$

Так как функция является многочленом третьей степени, то все остальные коэффициенты не имеют смысла и равны нулю.

Окончательно получим

$$x^3 - 2x^2 = -\frac{2}{3}P_0(x) + \frac{3}{5}P_1(x) - \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{2}{5}P_3(x).$$

Раздел 2. Линейные операторы. Функционалы

§2.1. Введение

Отображения обычно используются при анализе и обработке данных, представляющих информацию разной природы. Вычисление, кодирование, трансляция, распознавание – процессы, использующие исходное множество цифр, шаблонов, текстов, идентификаторов, по которым конкретная отображающая функция находит пронумерованный объект, строит закодированный текст, выделяет идентифицированный фрагмент, получает зашифрованное сообщение.

Отображения – ключевой механизм информатики. Построение любой информационной системы сопровождается определением и реализацией большого числа отображений.

Говорят, что отображение существует, если задана пара множеств и отображающая функция, для которой первое множество – область определения, а второе – область значения.

При определении отображений прежде всего должны быть ясны следующие вопросы:

– что представляет собой отображающая функция;

– как организовано данное, представляющее отображаемое множество;

– каким способом выделяются элементы отображаемого множества, передаваемые в качестве аргументов отображающей функции.

Это позволяет задать порядок перебора множества и метод передачи аргументов для вычисления отображающей функции.

Можно сказать, что отображения – это эффективный механизм абстрагирования, моделирования, проектирования и формализации крупномасштабной обработки информации.

Примеры отображений:

1. Отображение одного вектора в другой, например, по закону $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$, является оператором;

2. Операция (оператор) дифференцирования $D[f(t)] = f'(t)$ относит каждой дифференцируемой функции $f(t)$ ее производную $f'(t)$;

3. Операция вычисления определенного интеграла $I = \int_a^b f(t)dt$ относит каждой интегрируемой функции $f(t)$ действительное число;

4. Отнеся каждой функции $f(t)$ ее произведение $\varphi(t)\, f(t)$ на фиксированную функцию $\varphi(t)$, снова получаем оператор.

Определение 2.1. Любое отображение A пространства U в V называется оператором, если каждому вектору $\bar{x} \in U$ ставится в соответствие по определенному закону вектор $\bar{y} \in V$ (т. е. аналог определения функции).

Теория операторов как часть функционального анализа посвящена изучению свойств операторов и применению их к решению различных задач. Понятие оператора – одно из самых общих математических понятий.

Общая теория операторов возникла в результате развития теории интегральных уравнений. Еще до возникновения общего понятия оператора операторные методы широко применялись при решении различных типов обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Теория операторов представляет собой основной математический аппарат квантовой механики. Чаще всего встречаются операторы, действующие в линейных нормированных пространствах. Этот класс операторов охватывает такие важнейшие понятия, как числовые функции, линейные преобразования евклидова пространства, дифференциальные и интегральные операторы (см. ниже) и т. д. Наиболее изученными и важными для приложений являются линейные операторы.

§2.2. Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах и их матрицы

Пусть U и V – линейные пространства размерности n и m соответственно.

Определение 2.2. Отображение $\boldsymbol{A}: U \to V$ называется линейным оператором (ЛО), если для любых двух векторов и чисел выполняются равенства:

1) $\boldsymbol{A}(\bar{x}+\bar{y}) = \boldsymbol{A}(\bar{x}) + \boldsymbol{A}(\bar{y}),\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in U$;

2) $\boldsymbol{A}(\alpha\, \bar{x}) = \alpha\, \boldsymbol{A}(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in U, \forall \alpha \in \boldsymbol{R}$.

Из определения следует более общее равенство

$$\boldsymbol{A}(\lambda_1 \bar{x}_1 + \lambda_2 \bar{x}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{x}_n) = \lambda_1 \boldsymbol{A}(\bar{x}_1) + \lambda_2 A(\bar{x}_2) + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{A}(\bar{x}_n),\ \lambda_i \in \boldsymbol{R},\ i = \overline{1, n}.$$

Вектор $\bar{y} = \boldsymbol{A}\bar{x} \in V$ называется *образом* вектора $\bar{x} \in U$ при отображении $\boldsymbol{A}$.

Областью или *множеством значений линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ называется множество $\operatorname{im} \boldsymbol{A} = \{\bar{y} \in V \mid \bar{y} = \boldsymbol{A}\,\bar{x}, \bar{x} \in U\}$.

Примеры линейных операторов:

1. Нулевой оператор, т. е. $\boldsymbol{A}(\bar{x}) = \bar{0}, \forall \bar{x} \in U$.

2. Тождественный оператор $\boldsymbol{A}(\bar{x}) = \bar{x}, \forall \bar{x} \in U$. Обозначается E.

3. Оператор подобия $\boldsymbol{A}(\bar{x}) = \alpha\, \bar{x}, \forall \bar{x} \in U, \forall \alpha \in \boldsymbol{R}$.

Определение 2.3. Размерность области значений $\dim \operatorname{im} \boldsymbol{A}$ называется *рангом оператора* $\boldsymbol{A}$ и обозначается $\operatorname{rang} \boldsymbol{A}$, т. е. $\operatorname{rang} \boldsymbol{A} = \dim \operatorname{im} \boldsymbol{A}$.

Определение 2.4. *Ядром ненулевого линейного оператора* $\boldsymbol{A}$ называется подпространство всех векторов $\bar{x} \in U$, для которых $\boldsymbol{A}\,\bar{x} = \bar{0}$, и обозначается $\ker \boldsymbol{A}$, т. е.

$$\ker \boldsymbol{A} = \{\bar{x} \in U \mid \boldsymbol{A}\,\bar{x} = \bar{0}\}.$$

Определение 2.5. Размерность ядра оператора называется *дефектом оператора* и обозначается $\operatorname{def} \boldsymbol{A}$, т. е. $\operatorname{def} \boldsymbol{A} = \dim \ker \boldsymbol{A}$.

Если $\dim U = n$, то $\dim \operatorname{im} \boldsymbol{A} + \dim \ker \boldsymbol{A} = n \Leftrightarrow \operatorname{rang} \boldsymbol{A} + \operatorname{def} \boldsymbol{A} = n$.

Матрица линейного оператора. Пусть U – линейное пространство с базисом $\{\bar{u}\} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$, а V – линейное пространство с базисом $\{\bar{v}\} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m\}$.

Если $\boldsymbol{A} : U \to V$ – линейный оператор, то он полностью определяется матрицей размерности $m \times n$ в заданном базисе:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\,\bar{u}_1 & \boldsymbol{A}\,\bar{u}_2 & ... & \boldsymbol{A}\,\bar{u}_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Столбцами матрицы $\boldsymbol{A}$ служат координаты векторов $\boldsymbol{A}\,\bar{u}_1, \boldsymbol{A}\,\bar{u}_2, ..., \boldsymbol{A}\,\bar{u}_n$ в базисе $\{\bar{v}\}$ пространства V. Строки этой матрицы образуют коэффициенты разложения координат вектора $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$ по координатам вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, $\bar{y} = \boldsymbol{A}\,\bar{x}$, т. е.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ .... \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Матрица линейного оператора позволяет найти образ любого вектора по единому алгоритму.

Пример 2.1. Исследовать на линейность оператор

$$\boldsymbol{A}\,\bar{x} = (x_1 - 3x_2,\, 2x_1 + x_2 - x_3,\, 3x_1 - x_3).$$

Решение.

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{R}^3$.

Тогда $\boldsymbol{A}\,\bar{y} = (y_1 - 3y_2,\, 2y_1 + y_2 - y_3,\, 3y_1 - y_3)$. Для любых $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ имеем:

$$\boldsymbol{A}(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}) = [(\alpha x_1 + \beta y_1) - 3(\alpha x_2 + \beta y_2),\, 2(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) -$$
$$- (\alpha x_3 + \beta x_3),\, 3(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_3 + \beta y_3)] = \alpha\,(x_1 - 3x_2,\, 2x_1 + x_2 - x_3,\, 3x_1 - x_3) +$$
$$+ \beta\,(y_1 - 3y_2,\, 2y_1 + y_2 - y_3) = \alpha\,\boldsymbol{A}(\bar{x}) + \beta\,\boldsymbol{A}(\bar{y}),$$

т. е. оператор $\boldsymbol{A}$ является линейным.

Матрица линейного оператора имеет вид $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

На множестве линейных операторов, действующих из U в V, суммой линейных операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется оператор, обозначаемый $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, такой, что

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\,\overline{x} = \boldsymbol{A}\overline{x} + \boldsymbol{B}\overline{x},\ \ \forall \overline{x} \in U,$$

а *произведением ЛО* $\boldsymbol{A}$ на число $\alpha \in \boldsymbol{R}$ называется оператор, обозначаемый $\alpha\,\boldsymbol{A}$ и удовлетворяющий условию

$$(\alpha\,\boldsymbol{A})\,\overline{x} = \alpha\,(\boldsymbol{A}\overline{x}),\ \ \forall \overline{x} \in U.$$

Операторы $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ и $\alpha\,\boldsymbol{A}$ также линейные.

Пусть U, V, W – линейные пространства размерности k, n, m соответственно. *Произведением* или *композицией двух линейных операторов* $\boldsymbol{A}: V \to W$ и $\boldsymbol{B}: U \to V$ называется оператор $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, такой, что

$$\boldsymbol{C}\,\overline{x} = (\boldsymbol{AB})\,\overline{x} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\overline{x}),\ \ \forall x \in U.$$

Действиям над линейными операторами соответствуют действия над их матрицами.

Справедливы следующие свойства линейного оператора:

1º. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

2º. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

3º. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{O}$ – нулевой оператор.

4º. $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$.

5º. $\alpha\,(\beta\,\boldsymbol{A}) = (\alpha\,\beta)\,\boldsymbol{A}$.

6º. $(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{A} = \alpha\,\boldsymbol{A} + \beta\,\boldsymbol{A};\ \ \alpha\,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \alpha\,\boldsymbol{A} + \alpha\,\boldsymbol{B}$.

7º. $\alpha\,(\boldsymbol{AB}) = (\alpha\,\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}$.

8º. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

9º. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$.

10º. $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{BC})$.

Если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, то имеем n-кратное действие оператора $\boldsymbol{A}$.

Результат последовательного применения n-раз одного и того же оператора $\boldsymbol{A}$ есть n-я степень A^n этого оператора. Например, n-я степень оператора дифференцирования есть оператор n-кратного дифференцирования

$$D^n\,[f(t)] = f^{(n)}(t).$$

Определение 2.6. Линейный оператор $\boldsymbol{A}: U \to V$ называется *невырожденным*, если его ядро состоит только из нулевого вектора, т. е. $\boldsymbol{A}\,\overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} = \overline{0}$, в противном случае оператор называется *вырожденным*.

Для вырожденного оператора равенство $\boldsymbol{A}\,\overline{x} = \overline{0}$ возможно и при некотором $\overline{x} \ne \overline{0}$.

Определение 2.7. Оператор, определяющий вектор $\bar{x}$ для данного $\bar{y}$ из соотношения $\bar{y} = A\bar{x}$, называется *обратным* оператору $\boldsymbol{A}$ и обозначается $\boldsymbol{A}^{-1}$, т. е. $\bar{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\bar{y}$.

Справедливы равенства $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$ – тождественный оператор, для которого $\boldsymbol{E}\,\bar{x} = \bar{x},\ \forall \bar{x} \in U$.

Обратному оператору $\boldsymbol{A}^{-1}$ отвечает матрица A^{-1}, обратная к матрице A, а тождественному оператору $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица E.

Ядро оператора $\boldsymbol{A}$ совпадает с множеством векторов $\bar{x} \in U$, для которых $\boldsymbol{A}\,\bar{x} = \bar{0}$, т. е. $\ker \boldsymbol{A} = \{\bar{x} \in U \mid \boldsymbol{A}\,\bar{x} = \bar{0}\}$.

Если пространства U и V нормированы, а отношение нормы $A(x)$ к норме x $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ ограничено, то линейный оператор $\boldsymbol{A}$ называется ограниченным, а верхнюю грань отношения $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ называют его нормой.

Ограниченность линейного оператора равносильна его непрерывности.

Пусть U – евклидово пространство. Линейный оператор $\boldsymbol{A}^*$ называется *сопряженным* линейному оператору $\boldsymbol{A}$, если $(\boldsymbol{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \boldsymbol{A}^*\bar{y}),\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in U$.

Теорема 2.1. Каждый линейный оператор $\boldsymbol{A}$ имеет единственный сопряженный оператор $\boldsymbol{A}^*$. В ортонормированном базисе (ОНБ) матрица $\boldsymbol{A}^*$ сопряженного оператора $\boldsymbol{A}^*$ является транспонированной матрицей A^T этого исходного оператора, т. е. $\boldsymbol{A}^* = A^T$.

Сопряженные операторы обладают следующими свойствами:

1°. $\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E}$;

2°. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*$;

3°. $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$;

4°. $(\alpha\,\boldsymbol{A})^* = \alpha\,\boldsymbol{A}^*$;

5°. $(\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}$;

6°. $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ называется *самосопряженным*, если $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$, т. е. если $(\boldsymbol{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \boldsymbol{A}\bar{y}),\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in U$.

Теорема 2.2. В ОНБ матрица $\boldsymbol{A}$ самосопряженного оператора совпадает со своей транспонированной $A = A^T$, т. е. матрица самосопряженного оператора в ОНБ является симметрической.

Линейный оператор $\boldsymbol{A} : U \to U$ называется *ортогональным*, если

$$(\boldsymbol{A}\bar{x}, \boldsymbol{A}\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y}),\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in U.$$

Матрица A ортогонального оператора $\boldsymbol{A}$ называется *ортогональной*. Признаком ортогональности матрицы A является попарная ортогональность ее вектор-столбцов и вектор-строк. При этом длина каждого вектор-столбца (вектор-строки) равна единице.

Если $\boldsymbol{A}$ – ортогональный оператор, то сопряженный ему оператор $\boldsymbol{A}^*$ удовлетворяет равенству

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

Это равенство в ОНБ в матричной записи имеет вид

$$A^T = A^{-1}.$$

§2.3. Интегральные и дифференциальные операторы. Функционалы

1. Интегральные операторы

<u>Преобразование Фурье</u>

Пусть $f(t)$ является кусочно-гладкой, т. е. имеет конечное число точек разрыва первого рода, и абсолютно интегрируемой на $(-\infty, \infty)$, т. е. интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ сходится. Тогда поставим в соответствие функции $f(t)$ функцию

$$F(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt\,. \qquad (2.1)$$

Данная функция называется прямым преобразованием Фурье (функцией спектральной плотности). Прямое преобразование Фурье является в общем случае комплекснозначной функцией**.** Когда функция $f(t)$ является функцией времени и представляет физический сигнал, преобразование Фурье имеет стандартную интерпретацию как спектра сигнала. Модуль комплексной функции $F(i\omega)$ представляет амплитуды соответствующих частот ω, в то время как фазовые сдвиги получаются как аргумент этой комплексной функции.

Тогда функцию

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \qquad (2.2)$$

называют обратным преобразованием Фурье.

Формулы (2.1) и (2.2) иногда записывают в симметричной форме :

$$F(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt\,,\;\; f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega t} d\omega\,.$$

Таким образом, между функциями $f(t)$ и $F(i\omega)$ установлено взаимное соответствие. Для обозначения данного соответствия будем применять символ $\risingdotseq$, т. е. $f(t) \risingdotseq F(i\omega)$.

Свойства преобразования Фурье:

1. Однородность.

Если $f(t) \risingdotseq F(i\omega)$, то $\lambda f(t) \risingdotseq \lambda F(i\omega)$.

2. Аддитивность.

Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(i\omega)$ и $f_2(t) \risingdotseq F_2(i\omega)$, то $f_1(t) + f_2(t) \risingdotseq F_1(i\omega) + F_2(i\omega)$.

Из данных двух свойств следует, что преобразование Фурье есть линейное преобразование.

3. Подобие (изменение масштаба).

Если $f(t) \risingdotseq F(i\omega)$, то $f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F(\frac{i\omega}{\lambda})$.

4. Дифференцирование.

Если $f(t) \risingdotseq F(i\omega)$, то $f'(t) \risingdotseq i2\pi\omega F(i\omega)$.

5. Интегрирование функции $f(t)$.

Если $f(t) \risingdotseq F(i\omega)$, то $\int\limits_0^t f(t)\,dt \risingdotseq \frac{F(i\omega)}{i2\pi\omega}$.

6. Запаздывание (задержка во времени).

Если $f(t) \risingdotseq F(i\omega)$, то $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-i2\pi\omega\tau} F(i\omega)$.

7. Теорема смещения.

Если $f(t) \risingdotseq F(i\omega)$, то $e^{i2\pi\omega_0 t} f(t) \risingdotseq F(i\omega - i\omega_0)$.

8. Свертка.

Если $f(t) \risingdotseq F(i\omega)$ и $g(t) \risingdotseq G(i\omega)$, то $f * g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du \risingdotseq F(i\omega)G(i\omega)$.

9. Произведение.

Если $f(t) \risingdotseq F(i\omega)$ и $g(t) \risingdotseq G(i\omega)$, то $f(t)g(t) \risingdotseq \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega-u)du$.

Следует отметить, что преобразование Фурье сохраняет свойства четности и нечетности функций.

Преобразование Гильберта. Прямое преобразование Гильберта произвольной действительной функции $f(u)$, $-\infty < u < \infty$, результат которого будем обозначать со знаком тильды над исходной функцией, задается сверткой $f(u)$ с функцией $1/(\pi u)$:

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{t-u}\, du = H(f).$$

Прямое преобразование Гильберта позволяет по данному сигналу $f(u)$ построить сопряженный сигнал $\widetilde{f}(t)$.

Используя теорему умножения спектральных функций, несложно восстановить сигнал $f(u)$ по сопряженному сигналу $\widetilde{f}(t)$:

$$f(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{f}(u)}{t-u}\,du = H^{-1}(f).$$

Данное преобразование называется обратным преобразованием Гильберта. Оператор H^{-1} называется оператором обратного преобразования Гильберта.

Замечание. Прямое

$$\widetilde{f}(t) = H(f(t)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{t-u}\,du$$

и обратное

$$f(t) = H^{-1}(\widetilde{f}(t)) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{f}(u)}{t-u}\,du$$

преобразования Гильберта – это *интегральные преобразования с ядром* $\dfrac{1}{t-u}$.

Несобственные интегралы в преобразовании Гильберта обычно понимают в смысле главного значения вблизи особой точки $u = t$:

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{\pi}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{f(u)}{t-u}\,du + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(u)}{t-u}\,du\right],$$

$$f(t) = -\frac{1}{\pi}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{\widetilde{f}(u)}{t-u}\,du + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{\widetilde{f}(u)}{t-u}\,du\right].$$

Преобразование Гильберта для любого произвольного сигнала представляет собой идеальный широкополосный фазовращатель, который осуществляет поворот начальных фаз всех частотных составляющих сигнала на угол, равный 90° (сдвиг на $\pi/2$). Применение преобразования Гильберта позволяет выполнять квадратурную модуляцию сигналов, в каждой текущей координате модулированных сигналов производить определение огибающей и мгновенной фазы и частоты сигналов.

2. Дифференциальные операторы

Левую часть линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y(x)}{dx^{n-2}} + ... + a_n(x)y(x) = \varphi(x)$$

можно рассматривать как результат применения некоторого оператора, ставящего в соответствие функции $y(x)$ функцию $\varphi(x)$. Такой оператор носит название линейного дифференциального оператора. Простейшим частным случаем линейного дифференциального оператора является оператор дифференцирования, градиент, ротор, оператор Лапласа, оператор дивергенции.

3. Линейные операторы в гильбертовом пространстве

Наиболее полно теория операторов разработана для случая линейных операторов в *гильбертовом пространстве*. В частности, теория линейных функционалов.

Определение 2.8. Линейным *функционалом* в гильбертовом пространстве H называется линейный оператор, отображающий H во множество чисел (вещественных или комплексных).

Построение наиболее важного примера линейного функционала: если x_0 – фиксированный вектор гильбертова пространства H, то формула $f(x) = (x, x_0)$ задает линейный функционал на H.

Иными словами, это линейное отображение из некоторого пространства функций во множество чисел действительных или комплексных.

Раздел 3. Специальные функции и их приложения

§3.1. Определенные интегралы, зависящие от параметра, и их свойства

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике

$$P = \{(x, y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}.$$

Предположим, что при каждом фиксированном y из $[c, d]$ существует $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$.

Ясно, что каждому значению y из $[c, d]$ будет отвечать свое, вполне определенное значение этого интеграла. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx$ представляет собой функцию переменной (параметра) y, определенную в промежутке $[c, d]$.

Введем обозначение

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx, \quad y \in [c, d]. \tag{3.1}$$

Наша задача будет состоять в том, чтобы, зная свойства функции $f(x, y)$, получить информацию о свойствах функции $I(y)$. Эти свойства, как будет показано ниже, имеют широкое применение, в особенности при вычислении интегралов.

Допустим также, что при каждом фиксированном x из промежутка $[a, b]$ существует $\int\limits_c^d f(x, y)\,dy$. Тогда этот интеграл будет представлять собой функцию переменной (параметра) x, определенную в промежутке $[a, b]$. Обозначим ее через $I(x)$ так, чтобы

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{3.2}$$

Таким образом, интегралы (3.1) и (3.2) являются интегралами по параметру.

Свойства интегралов по параметру

Теорема 3.1 (о допустимости предельного перехода по параметру под знаком интеграла).

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике P (т. е. принадлежит пространству $C(P)$) и пусть y_0 – любое из $[c, d]$. Тогда

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x, y_0)\, dx, \quad y_0 \in [c, d].$$

И, если $f(x, y) \in C(P)$ и x_0 – любое из $[a, b]$, то

$$\lim_{x \to x_0} \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d \lim_{x \to x_0} f(x, y)\, dy = \int_c^d f(x_0, y)\, dy, \quad x_0 \in [a, b].$$

Теорема 3.2 (о непрерывности интеграла как функции параметра).

Пусть $f(x, y) \in C(P)$ и $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \quad y \in [c, d]$.

Тогда $I(y) \in C\,[c, d]$.

Теорема 3.3 (о дифференцировании по параметру под знаком интеграла).

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в P и имеет непрерывную частную производную $f'_y(x, y)$ в нем. Тогда:

1) функция $I(y)$ имеет в промежутке $[c, d]$ производную $I'(y)$;

2) $I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\, dx, \quad y \in [c, d]$;

3) $I'(y) \in C([c, d])$, где $C([c, d])$ – пространство непрерывных на $[c, d]$.

Теорема 3.4 (об интегрировании по параметру под знаком интеграла).

Пусть функция $f(x, y) \in C(P)$. Тогда

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx.$$

Случаи зависимости пределов интегрирования от параметра

Теорема 3.5 (о непрерывности интеграла как функции параметра).

Пусть функция $f(x, y) \in C(D)$ и пусть $I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx,\ y \in [c, d]$.

Тогда $I(y) \in C([c, d])$.

Теорема 3.6 (о дифференцировании по параметру). Предположим, что функция $f(x, y)$ непрерывна в P и имеет там непрерывную частную производную $f'_y(x, y)$. Пусть функции $\alpha(y), \beta(y)$ определены в промежутке $[c, d]$ и имеют в нем производные $\alpha'(y), \beta'(y)$. Обозначим

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx, \;\; y \in [c, d].$$

Тогда для любого $y \in [c, d]$ существует $I'(y)$, причем

$$I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\, dx + f(b(y), y) \cdot b'(y) - f(\alpha(y), y) \cdot \alpha'(y).$$

§3.2. Эйлеровы функции $\Gamma(x)$ и $B(x, y)$

Выделяют особый класс функций, представленных в виде собственного либо несобственного интеграла, который зависит не только от формальной переменной, но и от параметра. К их числу относятся гамма- и бета-функции Эйлера.

Гамма-функция относится к числу самых простых и значимых специальных функций, знание свойств которой необходимо для изучения многих других специальных функций, например цилиндрических, гипергеометрических и др.

Благодаря ее введению значительно расширяются возможности при вычислении интегралов.

Эйлеровы интегралы представляют собой хорошо изученные неэлементарные функции. Задача считается решенной, если она приводится к вычислению эйлеровых интегралов.

1. Гамма-функция Эйлера $\Gamma(x)$. Интегральное представление *гамма-функции* $\Gamma(x)$ определяется равенством

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0. \tag{3.3}$$

Этот интеграл сходится при $x > 0$, так как при $t \to \infty$ он сходится из-за наличия множителя e^{-t}, а при $t \to 0$ выполняется $\left| e^{-t} t^{x-1} \right| \sim t^{x-1}$. Отсюда следует, что интеграл существует при $x - 1 > -1$, т. е. при $x > 0$.

Производная функции $\Gamma(x)$ имеет вид

$$\Gamma'(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t\, dt, \; x > 0.$$

Свойства и основные соотношения Г-функции

1. Значение $\Gamma(1)=\int\limits_0^1 e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=1;$

2. Значение

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^1 e^{-t}t^{-1/2}dt=\begin{vmatrix}\sqrt{t}=s,\, dt=2s\,ds\\ t=0\Rightarrow s=0\\ t=\infty\Rightarrow s=\infty\end{vmatrix}=\int\limits_0^{\infty}2e^{-s^2}ds=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}\,.$$

Формула приведения. Если в формуле (3.3) x заменить на $x+1$ и произвести интегрирование по частям:

$$\Gamma(x+1)=\int\limits_0^1 t^x e^{-t}dt=\begin{vmatrix}u=t^x,\, du=xt^{x-1}\,ds\\ dv=e^{-t}dt,\, v=-e^{-t}\end{vmatrix}=-t^x e^{-t}\Big|_0^{\infty}+x\int\limits_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=x\Gamma(x),$$

то получим формулу приведения

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\,. \tag{3.4}$$

Применяя ее k раз, придем к соотношению

$$\begin{gathered}\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)=(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)=\ldots=\\ =(x-1)(x-2)\ldots(x-k)\Gamma(x-k),\end{gathered} \tag{3.5}$$

справедливому для комплексных x при $\operatorname{Re}x>k$.

В частности, для случая $x=n,\, n\in\boldsymbol{N}$,

$$\begin{gathered}\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=n\,(n-1)\,\Gamma(n-1)=\ldots=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=n!,\\ \Gamma(1)=0!=1.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Формула дополнения. При $0<x<1$ справедлива *формула дополнения*

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}. \tag{3.7}$$

Заменив x на $x+1$ в формуле (3.7), получим

$$\Gamma(x+1)\,\Gamma(-x)=\frac{\pi}{\sin\pi(x+1)}.$$

Справедливо также равенство

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)x\Gamma(x)\,. \tag{3.8}$$

Отсюда при $x=\dfrac{1}{2}$ имеем

$$\begin{gathered}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\\ =\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Формула удвоения. $\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x).$

2. Бета-функция Эйлера. $B(x, y)$ определяется несобственным интегралом

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,\; x > 0, y > 0, \tag{3.10}$$

зависящим от двух параметров – x и y. Функция $B(x, y)$ является аналитической двух комплексных переменных (x и y) в области $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$.

Свойства функции $B(x, y)$:

1. $B(x, y)$ – симметричная функция, т. е. $B(x, y) = B(y, x)$.

Действительно, положив $\tau = 1 - t$, получим

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^1 \tau^{y-1}(1-\tau)^{x-1}\,d\tau = B(y, x).$$

2. Между бета- и гамма-функциями существует зависимость

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{3.11}$$

Применение интегралов Эйлера к вычислению определенных интегралов

Некоторые интегралы могут быть вычислены с помощью рассматриваемых функций. Приведем без доказательства некоторые полезные формулы:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\,dx = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}. \tag{3.12}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{3.13}$$

Раздел 4. Решетчатые функции. *Z*-преобразование и его приложения

§ 4.1. Решетчатые функции. Z-преобразование и его свойства

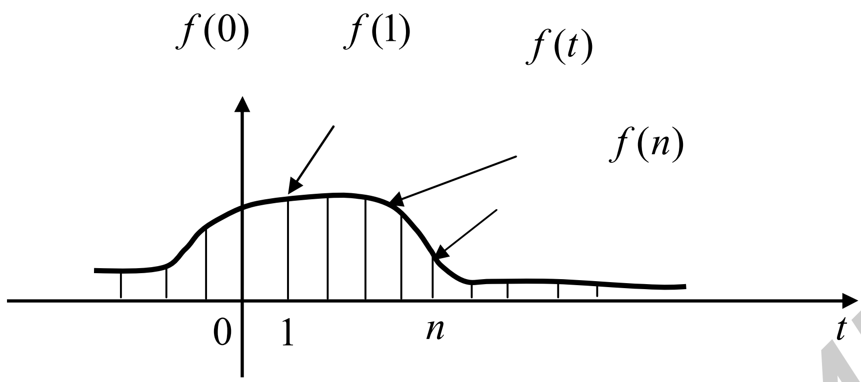
Решетчатые функции. В приложениях часто рассматриваются функции $f(t)$, определенные в дискретных точках t_1, t_2, ..., t_n, $t_{n+1}, \ldots$ промежутка T, причем $t_{n+1} > t_n$. Такие функции называются *решетчатыми.* На рисунке ниже изображен график непрерывной функции $f(t), t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Обозначив $f(t_n) = f_n$, получим последовательность значений функции:

$$\{f(n)\} = \{\ldots, f(-n), \ldots, f(-1), f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots\}.$$

Если значения этого множества изобразить в виде отрезков, исходящих из точек n оси t, то получим картину, напоминающую решетку. Поэтому

$\{f(n)\}$ называется *решетчатой* функцией.



Применение преобразования Лапласа к решетчатым оригиналам

Z**-преобразование.** Пусть $f(n)$ – решетчатая функция (последовательность чисел), причем $f(n) \equiv 0$ при $n < 0$. Функция $F(z)$ комплексной переменной z, определяемая равенством

$$F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \ldots + \frac{f(n)}{z^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n}, \tag{4.1}$$

называется Z-преобразованием решетчатой функции $f(n)$. Функцию $F(z)$ также называют изображением $f(n)$.

Если $f(n)$ – решетчатая функция, а $F(z)$ – ее Z-преобразование, то представим это в виде $f(n) \leftrightarrow F(z)$.

Правую часть равенства (4.1) можно рассматривать как ряд Лорана функции $F(z)$.

Теорема 4.1. Пусть существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f(n)|} = R$. Тогда ряд (4.1) сходится абсолютно в области $|z| > R$. Ряд (4.1) сходится равномерно в области $|z| \geq R_1 > R$.

Свойства *Z*-преобразования

1. *Свойство линейности преобразования.* Оператор F – линейный, т. е. если $f_1 \leftrightarrow F_1(z), f_2 \leftrightarrow F_2(z)$, то $c_1 f_1 + c_2 f_2 \leftrightarrow c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$, где c_1, c_2 – произвольные числа.

2. *Свойство запаздывания аргумента.*

Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, то $f(n-k) \leftrightarrow \dfrac{F(z)}{z^k}$.

3. *Свойство опережения аргумента.* Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, то

$$f(n+k) \leftrightarrow z^k \left[F(z) - \left(f(0) + \frac{f(1)}{z} + \ldots + \frac{f(k-1)}{z^{k-1}} \right) \right].$$

4. *Свойство подобия*. Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, то $\dfrac{f(n)}{a^n} \leftrightarrow F(az)$.

5. *Свойство дифференцирования Z-преобразования*.
Если $f(n) \leftrightarrow F(z)$, то $n f(n) \leftrightarrow -zF'(z)$.

6. *Z-преобразование свертки решетчатых функций*. *Сверткой* двух решетчатых функций $f(n)$ и $\varphi(n)$ называется решетчатая функция $f(n) * \varphi(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(k)\varphi(n-k)$. Если $f(n) \leftrightarrow F(z), \varphi(n) \leftrightarrow \Phi(z)$, то $f(n) * \varphi(n) \leftrightarrow F(z)\Phi(z)$.

Краткая таблица *Z*-преобразования

$f(n)$	$F(z)$
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
1	$\dfrac{z}{z-1}$
$(-1)^n$	$\dfrac{z}{z+1}$
$e^{j\beta n}$	$\dfrac{z}{z-e^{j\beta}}$
$\cos\beta n$	$\dfrac{z(z-\cos\beta n)}{z^2-2z\cos\beta+1}$
$\sin\beta n$	$\dfrac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$
$n\cdot 1^n$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$

Восстановление решетчатой функции по ее *Z*-преобразованию. При восстановлении решетчатой функции в простейших случаях можно использовать таблицу основных *Z*-преобразований. В общем случае справедлива

Теорема 4.2. Пусть $f(n) \leftrightarrow F(z)$. Тогда

$$f(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} F(z)\, z^{n-1}dz,\ n=0,1,\ldots, \tag{4.2}$$

где γ – любая окружность радиусом $|z| = R_1 > R$ (R – радиус сходимости ряда (4.1)), проходимая против часовой стрелки.

К интегралу, стоящему в правой части формулы (4.2), можно применить теорию вычетов. Поэтому справедлива

Теорема 4.3. Если $a_1, a_2, ..., a_m$ – особые точки функции $F(z)$ в области $|z| \le R_1$, то

$$f(n) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=a_k} F(z)\, z^{n-1}. \tag{4.3}$$

Замечание. Если, в частности, $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ – несократимая дробь и $a_1, a_2, ..., a_m$ – простые корни знаменателя $Q(z)$, то

$$f(n) = \sum_{k=1}^{m} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} a_k^{n-1}.$$

Напомним, что

а) если a – простой полюс, то

$$\operatorname*{Res}_{z=a} F(z)\, z^{n-1} = \lim_{z \to a} F(z)\, z^{n-1}(z-a);$$

б) если a – полюс кратности l, то

$$\operatorname*{Res}_{z=a} F(z) z^{n-1} = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{l-1}\left[F(z)\, z^{n-1}(z-a)^l\right]}{dz^{l-1}}.$$

Пример 4.1. Дана функция $F(z) = \dfrac{z+1}{z^2+2z+3} = \dfrac{z+1}{(z-1)(z+3)}$. Найти $f(n)$.

Р е ш е н и е. Точки $z_1 = 1, z_2 = -3$ – простые полюса. Поэтому

$$f(n) = \operatorname*{Res}_{z=1} F(z)\, z^{n-1} + \operatorname*{Res}_{z=-3} F(z)\, z^{n-1} = \lim_{z \to 1} \frac{(z+1)\, z^{n-1}}{z+3} +$$
$$+ \lim_{z \to -3} \frac{(z+1)\, z^{n-1}}{z-1} = \frac{1}{2} + \frac{(-3)^{n-1}}{2}.$$

Пример 4.2. Дана функция $F(z) = \dfrac{z+3}{(z-1)^3}$. Найти $f(n)$.

Р е ш е н и е. Здесь $z = 1$ – особая точка, полюс 3-го порядка. Поэтому

$$f(n) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 1} \left[F(z) z^{n-1}(z-1)^3\right]'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \left[(z+3) z^{n-1}\right]'' =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \left[z^n + 3z^{n-1}\right]'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} \left[n(n-1) z^{n-2} + 3(n-1)(n-2)\, z^{n-3}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}(n-1)(n+3n-6) = (n-1)(2n-3).$$

§4.2. Разностные уравнения. Решение разностных уравнений с помощью *Z*-преобразования

Разностные уравнения. *Z*-преобразование используется для решения линейных разностных уравнений. Линейные разностные уравнения получаются из линейных дифференциальных уравнений для решетчатых функций. Например, пусть даны уравнения

$$y' = f(x), \tag{4.4}$$

$$y'' + ay' + by = f(x). \tag{4.5}$$

Полагая, что $y(x)$ – решетчатая функция, т. е. она задается таблицей значений в равноотстоящих узлах с шагом $h = 1$, строим разделенные разности первого и $\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, ..., \Delta^2 y_n$ второго порядков:

x_n	$y(x_n)$	$y'(x_n)$	$y''(x_n)$
0	y_0		
1	y_1	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) =$
2	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$= y_2 - 2y_1 + y_0$
3	y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	
…	…	…	…
n	y_{n-1}	$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$	
$n-1$	y_n		$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = (y_{n+1} - y_n) -$
$n+1$	y_{n+1}	$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$	$-(y_n - y_{n-1}) = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}$

Разности первого порядка $\Delta y_0, \Delta y_1, ..., \Delta y_n$ при шаге $h = 1$ приближают производные первого порядка, а разности второго – производные 2-го порядка.

Уравнение (4.1) в узле n перепишется так:

$$y(n+1) - y(n) = f(n), \tag{4.6}$$

при этом (4.6) – линейное разностное уравнение первого порядка.

Дифференциальное уравнение (4.5) в n-м узле имеет вид

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) + a\,[y(n+1) - y(n)] + by(n) = f(n), \tag{4.7}$$

где (4.7) – линейное разностное уравнение второго порядка.

В общем случае линейное дифференциальное уравнение k-го порядка всегда можно свести к соответствующему линейному разностному уравнению k-го порядка, которое имеет вид

$$A_0 y(n+k) + A_1 y(n+k-1) + A_2 y(n+k-2) + ... + A_k y(n) = f(n).$$

Соответствующие начальные условия задаются так:

$$y(0) = y_0, y(1) = y_1, ..., y(n-1) = y_{n-1},$$

где $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ – заданные числа.

Решение линейных разностных уравнений с помощью *Z*-преобразования.

Рассмотрим следующую задачу.

Пусть дано линейное разностное уравнение

$$L[y] = A_0 y(n+k) + A_1 y(n+k-1) + A_2 y(n+k-2) + \ldots + A_k y(n) = f(n) \qquad (4.8)$$

при начальных условиях

$$y(0) = y_0, y(1) = y_1, \ldots, y(n-1) = y_{n-1},$$

где $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ – заданные числа.

Требуется найти всю бесконечную последовательность значений $y(n), y(n+1), y(n+2), \ldots$.

Решение. Приступая к решению этой задачи, полагаем, что $f(n) \leftrightarrow F(z)$, $y(n)$ – решетчатый оригинал, а $Y(z)$ – его *Z*-изображение. Тогда

$$\begin{aligned}
&y(n) \leftrightarrow Y(z),\\
&y(n+1) \leftrightarrow z\,[Y(z) - y_0],\\
&y(n+2) \leftrightarrow z^2[Y(z) - (y_0 + y_1/z)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y(n+k-1) \leftrightarrow z^{k-1}[Y(z) - (y_0 + y_1/z + y^2/z^2 + \ldots + y_{k-2}/z^{k-2})],\\
&y(n+k) \leftrightarrow z^k[Y(z) - (y_0 + y_1/z + y_2/z^2 + \ldots + y_{k-1}/z^{k-1})].
\end{aligned}$$

Теперь, комбинируя оригиналы, стоящие слева, с коэффициентами $A_k, \ldots, A_0$, в силу линейности Z-преобразования получим комбинацию их Z-изображений с теми же коэффициентами:

$$\begin{aligned}
L[y] \leftrightarrow Y(z)(A_0 z^k + A_1 z^{k-1} + A_{k-1} z + A_k) - y_0(A_0 z^k + A_1 z^{k-1} + A_{k-1} z) -\\
- y_1(A_0 z^{k-1} + A_1 z^{k-2} + A_{k-2} z) - \ldots - y_{k-1} A_0 z.
\end{aligned}$$

Так как должно быть тождество (4.5) решетчатых оригиналов, то должны совпадать и их Z-изображения. Итак, получаем операторное *Z*-изображение:

$$\begin{aligned}
L[y] \leftrightarrow Y(z)(A_0 z^k + A_1 z^{k-1} + A_{k-1} z + A_k) - y_0(A_0 z^k + A_1 z^{k-1} + A_{k-1} z) -\\
- y_1(A_0 z^{k-1} + A_1 z^{k-2} + A_{k-2} z) - \ldots - y_{k-1} A_0 z \equiv F(z).
\end{aligned} \qquad (4.9)$$

Уравнение (4.9) легко решается относительно $Y(z)$. Запишем его так:

$$Y(z)\varphi(z) - \psi(z) \equiv F(z),$$

$$Y(z) = \frac{F(z) + \psi(z)}{\varphi(z)}.$$

Остается только стандартным путем через вычеты восстановить решетчатый оригинал $y(n)$.

Аналогично решаются системы линейных разностных уравнений.

Раздел 5. Элементы вариационного исчисления

§5.1. Первоначальные понятия

Вариационное исчисление – это раздел математики, рассматривающий задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функционалов (см. определение 2.8).

Функционал – это обобщение понятия функции. Отличие его от функции состоит в том, что в качестве области определения функционал имеет не числовое множество, а множество D произвольной природы – например, множество функций.

В качестве множеств функций, на которых определены функционалы, будем рассматривать следующие пространства:

1) $C\,[a,b]$ – пространство непрерывных функций $f(x)$ на $[a,b]$.

Норма

$$\|f(x)\|_C = \max|f(x)|,\ \ x\in[a,b]; \tag{5.1}$$

2) $C^1\,[a,b]$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций на $[a,b]$.

Норма

$$\|f(x)\|_{C^{(1)}} = \max|f(x)| + \max|f'(x)|,\ \ x\in[a,b]; \tag{5.2}$$

3) $C^n\,[a,b]$ – пространство функций, имеющих непрерывные производные до n-го порядка на $[a,b]$.

Норма

$$\|f(x)\|_{C^{(n)}} = \max|f(x)| + \max|f'(x)| + \max\left|f^{(n)}(x)\right|,\ \ x\in[a,b]. \tag{5.3}$$

Нормы нужны для оценки близости двух элементов пространства.

Под ε-окрестностью элемента y_0 нормированного пространства E понимают множество всех элементов из E, для которых выполняется неравенство

$$\rho(y,y_0) = \|y-y_0\| < \varepsilon.$$

В случае нормы (5.1) в ε-окрестность функции y_0 попадут все функции, которые по своим ординатам отличаются меньше чем на ε.

В случае нормы (5.2) в ε-окрестность функции y_0 попадут все функции , которые не только по своим ординатам отличаются меньше чем на ε, но и по значениям своих первых производных.

В случае нормы (5.3) в ε-окрестность функции y_0 попадут все функции , которые близки не только по значениям ординат, но и по значениям своих производных.

Эти понятия используют для определения непрерывности функционала.

Функционал $I(y)$ называется непрерывным в y_0, если значения $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ такие, что $|I(y_0)-I(y)|<\varepsilon$, как только $\rho(y,y_0)=\|y-y_0\|<\delta$.

Из определения функционала следует, что его непрерывность зависит не только от аналитического выражения, но от нормированного пространства, на котором он задан. То есть один и тот же функционал может быть непрерывен на одном нормированном пространстве и прерываем на другом.

Примеры вариационных задач

Задача 1. Нахождение плоской линии, соединяющей две заданные точки и имеющей наименьшую длину.

Исследуемый функционал – *длина* линии.

Решением данной задачи является отрезок прямой, соединяющей эти точки. Уравнение такой прямой находится однозначно по заданным точкам.

Задача 2. Нахождение плоской линии, соединяющей две заданные точки, по которой материальная точка скатывается под действием силы тяжести в кратчайшее время.

Исследуемый функционал – *время* движения точки.

Кривая, дающая минимум этому функционалу, называется *брахистохроной*. Именно эта задача была первой задачей вариационного исчисления.

§5.2. Простейшая задача вариационного исчисления

1. Постановка задачи

Дан функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx, \tag{5.4}$$

сопоставляющий каждой кривой $\cup AB \quad y = y(x),\, x \in [a, b]$ некоторое число $J[y(x)]$.

Функция $F(x, y, y')$ предполагается гладкой, т. е. ее частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам x, y, y' непрерывны в области

$$D: \begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ -\infty < y < +\infty \\ -\infty < y' < +\infty \end{Bmatrix}.$$

Среди функций $y(x) \in C^2[a, b]$, где $C^2[a, b]$ – пространство функций, имеющих непрерывные производные до второго порядка на $[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям (концы кривой закреплены)

$$y(a) = y_A, y(b) = y_B, \tag{5.5}$$

требуется найти функцию $y^*(x)$, на которой функционал (5.4) достигает экстремума, т. е. максимума, если $J[y^*(x)] > J[y(x)]$, или минимума, если $J[y^*(x)] < J[y(x)]$, где $\forall y(x) \ne y^*(x)$.

Решение задачи проводится в рамках необходимых условий, сформулированных в теореме 5.1.

Теорема 5.1. Если функция $y = y(x)$ удовлетворяет условиям (5.5) и доставляет функционалу (5.4) экстремум, то она является решением уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0. \tag{5.6}$$

В подробной записи уравнение (5.6) имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0.$$

Кривые $\cup AB$ $y = y^*(x), x \in [a, b]$, являющиеся графиками функций – решений уравнения Эйлера, называются *экстремалями*.

Уравнение Эйлера играет фундаментальную роль во всем вариационном исчислении.

Таким образом, решение простейшей задачи вариационного исчисления свелось к решению дифференциального уравнения (5.6) Эйлера при краевых условиях (5.5).

2. Частные случаи уравнения Эйлера

<u>1-й случай.</u> Пусть функция $F = F(x, y)$ не зависит от y'. Тогда уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{5.7}$$

или

$$\psi(x, y) = 0. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.8) определяет некоторую кривую, которая будет единственной экстремалью для данного функционала. Для произвольных краевых условий (5.5) непрерывного решения, вообще говоря, нет.

<u>2-й случай.</u> Пусть $F = F(y')$ не зависит ни от x, ни от y. Тогда (5.6) имеет вид $y'' = 0$.

Из общего решения $y = c_1 x + c_2$ находится единственное решение при краевых условиях (5.5).

<u>3-й случай.</u> Пусть $F = F(x, y')$ не зависит от y. Тогда уравнение (5.6) принимает вид $-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ и имеет промежуточный интеграл $\frac{\partial F}{\partial y'} = c_1$.

<u>4-й случай.</u> Пусть $F = F(y, y')$ не зависит от x. В этом случае уравнение (5.6) примет вид

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = c_1. \tag{5.9}$$

§5.3. Задача Бернулли о брахистохроне

Эта задача была поставлена в 1696 г. Иоганном Бернулли как задача об отыскании кривой «наибыстрейшего спуска» – «брахистохроне». Эта задача формулируется так: из точки A в точку B (рис. 5.1) под действием силы тяжести без начальной скорости движется точка $M(x, y(x))$. Какой должна быть кривая $AB: y = y^*(x), x \in [a,b]$, чтобы время спуска по ней было минимальным?

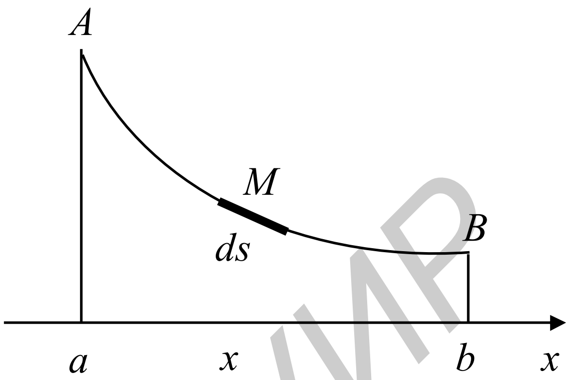


Рис. 5.1

Решение.

1. По закону сохранения энергии имеем $\dfrac{mv^2}{2} = mgy$, откуда $v = \sqrt{2gy}$.

2. Тогда время пробега участка ds кривой AB находится из равенства $v = \dfrac{ds}{dt}$ и, значит,

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + (dy(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}} = \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx.$$

3. Время спуска вдоль всей кривой AB определится интегралом

$$t = \int_a^b \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx.$$

4. Имеем функционал

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{a=0}^{b=1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

и краевые условия $y(a) = y_A,\ y(b) = y_B$.

5. Подынтегральная функция здесь не зависит от x, т. е. имеет место 4-й случай. Применим формулу (5.9). Согласно (5.4), $F(x, y, y') = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$.

Найдем

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}},$$

тогда

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^2}} = c_1.$$

6. Упростив левую часть последнего выражения, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

или $y\,(1+y'^2)=\tilde{c}_1$.

7. Чтобы решить это дифференциальное уравнение, введем замену $y'=\operatorname{ctg} t$.

Тогда получим

$$y=\frac{\tilde{c}_1}{1+y'^2}=\frac{\tilde{c}}{1+\operatorname{ctg}^2 t}=\tilde{c}\sin^2 t$$

или

$$y=\frac{\tilde{c}_1}{2}(1-\cos 2t).$$

8. Найден y как функция от t. Теперь надо отыскать x как функцию от t. Из замены $y'=\operatorname{ctg} t$ следует, что

$$dx=\frac{dy}{\operatorname{ctg} t}=\frac{\tilde{c}_1\sin 2t dt}{\operatorname{ctg} t}=\frac{2\tilde{c}_1\sin t\cos t d\,t}{\dfrac{\cos t}{\sin t}}=2\tilde{c}_1\sin^2 t dt$$

или $dx=\tilde{c}_1(1-\cos 2t)\,dt$.

9. Интегрируя по t, получим $x=\tilde{c}_1\left(t-\dfrac{\sin 2t}{2}\right)+\tilde{c}_2$ или

$$x=\frac{\tilde{c}_1}{2}(2t-\sin 2t)+\tilde{c}_2.$$

10. Полагая теперь $2t=\varphi$, придем к функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\tilde{c}_1}{2}(\varphi-\sin\varphi)+\tilde{c}_2, \\ y=\dfrac{\tilde{c}_1}{2}(1-\cos\varphi). \end{cases}$$

Система задает кривую, называемую *циклоидой*. Обозначив $\mathrm{x}=x-\tilde{c}_2$ и $r=\dfrac{\tilde{c}_1}{2}$, получим уравнение циклоиды

$$\begin{cases} \mathrm{x}=r\,(\varphi-\sin\varphi), \\ y=r\,(1-\cos\varphi), \end{cases}$$

которое после исключения параметра φ принимает в декартовых координатах вид

$$\mathrm{x}=r\arccos\frac{r-y}{r}-\sqrt{2ry-y^2}\,.$$

Подставив краевые условия $y(a-\widetilde{c}_2)=y_A$ и $y(b-\widetilde{c}_2)=y_B$, получаем систему уравнений для определения констант $\widetilde{c}_1$ и $\widetilde{c}_2$.

Раздел 6. Уравнения математической физики

§6.1. Понятия дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными и его решения

Решение многих задач механики, физики, широкого круга инженерно-технических задач приводит к необходимости исследовать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, являющихся частным случаем так называемых уравнений математической физики.

Определение 6.1. Дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $u(x,y)$, $(x,y)\in D, D\subset \boldsymbol{R}^2$, называется функциональная зависимость

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \qquad (6.1)$$

между независимыми переменными x и y, неизвестной функцией $u(x,y)$ и ее частными производными до второго порядка включительно.

Определение 6.2. Дифференциальное уравнение в частных производных называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \qquad (6.2)$$

где коэффициенты a, b, c есть функции x и y.

Если коэффициенты a, b, c зависят не только от x и y, а являются, подобно F_1, функциями $x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$, то такое уравнение называется квазилинейным.

Определение 6.3. Дифференциальное уравнение в частных производных называется линейным, если оно линейно как относительно старших производных $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, так и относительно функции u и ее первых производных, т. е. имеет вид

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+gu=f, \qquad (6.3)$$

где коэффициенты a, b, c, d, e, g, f есть функции только x и y.

Если коэффициенты уравнения (6.3) не зависят от x и y, то оно представляет собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Определение 6.4. Линейное уравнение (6.3) называется однородным, если $f(x, y) = 0$ для $\forall (x, y) \in D$.

Определение 6.5. Решением уравнения (6.1) называется определенная в области D действительная функция $u(x, y)$, непрерывная в этой области вместе со своими частными производными, входящими в уравнение, и обращающая его в тождество в области D.

§6.2. Классификация и приведение к каноническому виду линейных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными в окрестности точки

Рассмотрим линейное уравнение

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad (6.4)$$

в котором коэффициенты a, b, c есть функции x и y, имеющие непрерывные частные производные до второго порядка включительно в области D.

Предположим, что a, b, c не обращаются одновременно в нуль и что функция $u\,(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в этой области.

Определение 6.6. Уравнение (6.4) называется в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$, $M_0 \in D$, уравнением

1) гиперболического типа, если в точке M_0 выполнено условие $b^2 - ac > 0$;

2) параболического типа, если в точке M_0 справедливо равенство $b^2 - ac = 0$;

3) эллиптического типа, если в точке M_0 выполнено неравенство $b^2 - ac < 0$.

Определение 6.7. Кривая $\varphi\,(x, y) = c$ называется характеристикой уравнения (6.4) в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей этой кривой, если выполнены следующие условия:

1) $\dfrac{\partial^2 \varphi\,(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi\,(x_0, y_0)}{\partial y^2} \neq 0;$

2) $a(x_0, y_0)\dfrac{\partial^2\varphi(x_0, y_0)}{\partial x^2} + 2b(x_0, y_0)\dfrac{\partial^2\varphi(x_0, y_0)}{\partial x\partial y} +$

$+ c(x_0, y_0)\dfrac{\partial^2\varphi(x_0, y_0)}{\partial y^2} = 0.$

Функция $u = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в том и только в том случае, когда кривая $\varphi(x, y) = c$ есть общий интеграл дифференциального уравнения

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0. \qquad (6.5)$$

Определение 6.8. Уравнение (6.5) называется характеристическим для уравнения (6.4).

Пусть G – некоторая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, в которой уравнение (6.4) имеет один и тот же тип. В силу достаточной гладкости в области G коэффициентов a, b, c всегда существует такое невырожденное преобразование

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \qquad (6.6)$$

переменных x, y, при помощи которого уравнение (6.4) в этой области приводится к уравнению вида

$$\bar{a}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{b}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta} + \bar{c}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0, \qquad (6.7)$$

где

$$\begin{cases} \bar{a}(\xi, \eta) = a\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2, \\ \bar{c}(\xi, \eta) = a\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2, \\ \bar{b}(\xi, \eta) = a\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + b\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) + c\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}, \end{cases} \qquad (6.8)$$

причем $\bar{b}^2 - \bar{a}\bar{c} = (b^2 - ac)\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2$, т. е. преобразование (6.6) не меняет типа уравнения.

Выясним, какое преобразование (6.6) приводит в некоторой окрестности G точки $M_0(x_0, y_0)$ уравнение (6.4) к уравнению (6.7) наиболее простой формы в каждом из трех указанных случаев.

Пусть сначала $b^2 - ac > 0$ в области G. Будем считать, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ либо $a \neq 0$, либо $c \neq 0$. В противном случае этого можно достигнуть заменой переменных $x = x' + y'$, $y = x' - y'$.

Рассмотрим уравнение

$$a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{6.9}$$

Предположим, что $a \neq 0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, тогда в силу условия $b^2 - ac > 0$ уравнению (6.9) удовлетворяют решения каждого из уравнений:

$$\begin{cases} a\,\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \left(-b - \sqrt{b^2 - ac}\right)\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \\ a\,\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \left(-b + \sqrt{b^2 - ac}\right)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}. \end{cases} \tag{6.10}$$

Кривые $\varphi_1(x, y) = c$, $\varphi_2(x, y) = c$ представляют собой действительные и различные характеристики уравнения (6.4) гиперболического типа.

Так как $a \neq 0$, то из (6.10) следует, что в некоторой окрестности G точки $M_0(x_0, y_0)$ выполнены условия $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \neq 0$, $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \neq 0$, и, значит, преобразование $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$ в этой окрестности является невырожденным.

Указанное преобразование приводит в окрестности G точки $M_0(x_0, y_0)$ уравнение (6.4) к уравнению (6.7), в котором $\bar{a} = \bar{c} = 0$, $\bar{b} \neq 0$, т. е. к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{6.11}$$

Пусть $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, тогда уравнение (6.11) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = F_4\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right), \tag{6.12}$$

который называется каноническим видом уравнения гиперболического типа.

Пусть теперь $b^2 - ac = 0$ в области G. Тогда хотя бы один из коэффициентов a, c отличен от нуля в этой области. Предположим, например, что $a \neq 0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, следовательно, оба уравнения (6.10) совпадают и обращаются в уравнение

$$a\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{6.13}$$

Если функция $\varphi_1(x, y)$ – решение уравнения (6.13), имеющее непрерывные частные производные второго порядка, и первые производные этой функции не обращаются в нуль одновременно в области G, то кривая $\varphi_1(x, y) = c$ является действительной характеристикой уравнения (6.4) параболического типа.

Положим

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y), \tag{6.14}$$

где $\varphi_2(x, y)$ – любая дважды непрерывно дифференцируемая в области G функция, такая, что преобразование (6.14) является невырожденным в этой области.

Тогда уравнение (6.4) приводится к уравнению (6.7), где $\bar{a} = \bar{b} = 0, \ \bar{c} \neq 0$ в G, т. е. к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_5\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

которое называется каноническим видом уравнения параболического типа.

Пусть, наконец, в области G выполнено условие $b^2 - ac < 0$. Предположим, что все коэффициенты a, b, c есть аналитические в этой области функции от x и y. Тогда коэффициенты уравнений (6.10) – также аналитические функции от x и y в области G. Пусть $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ есть аналитическое решение первого из уравнений (6.10) и $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right| \neq 0$ в этой области. Тогда кривые $\varphi_1(x, y) \pm i\varphi_2(x, y) = c$ являются комплексно-сопряженными характеристиками уравнения (6.4) эллиптического типа. Полагая $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$, получим невырожденное в G преобразование, которое приводит уравнение (6.4) к уравнению (6.7), где $\bar{a} = \bar{c}, \ \bar{b} = 0$, т. е. к уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_6\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

и называется каноническим видом уравнения эллиптического типа.

§6.3. Уравнение малых поперечных колебаний струны. Граничные и начальные условия. Корректность постановки задачи

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи, связанные с процессами колебаний, например, задачи о колебаниях струны, мембраны, газа, электромагнитных колебаниях. Характерной особенностью процессов, описываемых такими уравнениями, является конечная скорость их распространения.

Рассмотрим задачу о колебаниях струны. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости (x, u) и вектор смещения $\bar{u}$ перпендикулярен в любой момент к оси x. Тогда процесс колебания можно описать одной функцией $u(x, t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны.

Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить и, значит, считать, что струна не сопротивляется изгибу.

Величина натяжения T_0 в каждой точке не меняется со временем. Пусть $\rho = \rho\,(x)$ – линейная плотность струны и внешняя сила непрерывно распределена с плотностью $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины.

В случае постоянной плотности $\rho = \text{const}$ указанные колебания струны описываются уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{6.15}$$

где $a = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}$, $f(x, t) = \dfrac{F(x, t)}{\rho}$ есть плотность силы, отнесенная к единице массы. Если внешняя сила отсутствует, то получаем однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.16}$$

характеризующее свободные колебания струны, которое является простейшим примером уравнения гиперболического типа.

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют, вообще говоря, бесконечное множество решений. Для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

Если рассматриваются поперечные колебания струны, закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l$ в области $0 \le x \le l$, то должны выполняться граничные условия

$$u\,(0, t) = u\,(l, t) = 0. \tag{6.17}$$

Так как процесс колебаний струны зависит от ее начальной формы и распределения скоростей, то следует указать начальные условия

$$\begin{cases} u\,(x, t_0) = \varphi\,(x), \\ \dfrac{\partial u\,(x, t_0)}{\partial t} = \psi\,(x), \end{cases}$$

где $\varphi\,(x), \psi\,(x)$ есть заданные функции.

Если концы струны движутся по определенному закону, то граничные условия (6.17) принимают вид

$$\begin{cases} u\,(0, t) = \mu_1\,(t), \\ u\,(l, t) = \mu_2\,(t), \end{cases} \tag{6.18}$$

в котором $\mu_1\,(t)$ и $\mu_2\,(t)$ есть заданные функции времени t.

Определение 6.9. Краевая задача для уравнения (6.15) – задача нахождения функции $u\,(x, t)$, определенной в области $0 \le x \le l,\ t \ge 0$, и удовлетворяющей уравнению (6.15) для $0 < x < l,\ t > 0$, граничным условиям (6.18) при $t \ge 0$ и начальным условиям

$$\begin{cases} u\,(x,0) = \phi\,(x), \\ \dfrac{\partial u\,(x,0)}{\partial t} = \psi\,(x) \end{cases} \tag{6.19}$$

при $0 \le x \le l$.

Если колебания происходят в течение малого промежутка времени, то влияние границ еще несущественно; поэтому вместо краевой задачи можно рассматривать предельную задачу с начальными условиями для неограниченной области.

Определение 6.10. Задача Коши – это задача нахождения функции $u\,(x,t)$, определенной в области: $-\infty < x < +\infty,\ t \ge 0$, удовлетворяющей уравнению (6.15) для $-\infty < x < +\infty,\ t > 0$, и начальным условиям (6.19) при $-\infty < x < +\infty$.

Решения краевой задачи и задачи Коши зависят от функций, входящих в начальные и граничные условия, которые на практике являются результатом некоторых измерений, поэтому неизбежны погрешности в их определении. Эти погрешности влияют на погрешности решений. Малые ошибки в начальных и граничных условиях могут повлечь за собой большую ошибку в решении. Различают корректно и некорректно поставленные задачи.

Определение 6.11. Краевая задача (6.15), (6.18), (6.19) называется корректно поставленной, если решение $u\,(x,t)$ всегда существует для любых $f\,(x,t),\ \mu_1\,(t),\ \mu_2\,(t),\ \varphi(x), \psi(x)$, однозначно определено и непрерывно зависит от исходных данных этой задачи.

Задачи, не удовлетворяющие перечисленным условиям, называются некорректно поставленными.

§6.4. Решение уравнений свободных колебаний однородной струны методом Даламбера

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.20}$$

$$\begin{cases} u\,(x,0) = \varphi\,(x), \\ \dfrac{\partial u\,(x,0)}{\partial t} = \psi\,(x), \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty, \tag{6.21}$$

описывающую свободные колебания однородной струны.

Учитывая, что $x - a\,t = c_1,\quad x + a\,t = c_2$ – характеристики уравнения (6.20), введем новые переменные

$$\xi = x - at,\ \ \eta = x + at.$$

Тогда уравнение (6.20) примет вид $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ или $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0$.

Отсюда $\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=g(\eta)$, где $g(\eta)$ – некоторая функция только переменной η и, значит, $u(\xi,\eta)=\int g(\eta)\,d\eta+f_1(\xi)=f_1(\xi)+f_2(\eta)$, в котором $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ есть функции только переменных ξ и η соответственно.

Следовательно,

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$$

является решением уравнения (6.20).

Определяя функции f_1 и f_2 через заданные функции φ и ψ, в силу начальных условий (6.21) получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\,d\tau. \qquad (6.22)$$

Формула (6.22) называется формулой Даламбера и дает решение задачи Коши (6.20), (6.21), если $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\psi(x)$ – до первого.

Задача Коши (6.20), (6.21) является корректно поставленной.

Пример 6.1. Задача Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=\sin x,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=x+\cos x.$$

Р е ш е н и е. В нашем случае $\varphi(x)=\sin x$, $\psi(x)=x+\cos x$. Тогда

$$\varphi(x+at)=\sin(x+at)=\sin x\cos at+\cos x\sin at,$$
$$\varphi(x-at)=\sin(x-at)=\sin x\cos at-\cos x\sin at,$$

и, значит,

$$\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]=\sin x\cos at.$$

Найдем $\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\,d\tau$, получим

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\,d\tau=\int\limits_{x-at}^{x+at}(\tau+\cos\tau)\,d\tau=\left(\frac{\tau^2}{2}+\sin\tau\right)\Bigg|_{x-at}^{x+at}=\frac{1}{2}(x+at)^2+$$

$$+\sin(x+at)-\frac{1}{2}(x-at)^2-\sin(x-at)=2axt+2\cos x\sin at.$$

Отсюда в силу формулы (6.22) решение искомой задачи Коши имеет вид $u(x,t)=\sin x\cos at+xt+\dfrac{1}{a}\cos x\sin at$.

§6.5. Решение уравнений колебаний струны методом Фурье

6.5.1. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{6.23}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \ \ t \ge 0, \tag{6.24}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \end{cases} \quad 0 \le x \le l, \tag{6.25}$$

описывающую свободные колебания однородной струны с закрепленными концами.

Будем сначала искать частные решения уравнения (6.23), не равные тождественно нулю, в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)\, T(t), \tag{6.26}$$

удовлетворяющие граничным условиям (6.24). Подставляя (6.26) в уравнение (6.23), получим

$$T''(t)\ X(x) = a^2\, T(t)\ X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2\, T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{6.27}$$

Левая часть последнего равенства зависит только от t, а правая – только от x, и равенство (6.27) возможно лишь в том случае, если левая и правая его части не зависят ни от x, ни от t, т. е. представляют собой одну и ту же постоянную, которую обозначим через $(-\lambda)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2\, T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{6.28}$$

Из соотношения (6.28) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \tag{6.29}$$

$$T''(t) + a^2\, \lambda\, T(t) = 0. \tag{6.30}$$

В силу граничных условий (6.24) получим

$$u(0, t) = X(0)\, T(t) = 0, \ \ t \ge 0.$$

$$u(l, t) = X(l)\, T(t) = 0, \ \ t \ge 0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{6.31}$$

так как в противном случае $T(t) \equiv 0$, и, значит, $u(x, t) \equiv 0$, что противоречит задаче о нахождении нетривиального решения.

Найдем теперь те значения λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases} \qquad (6.32)$$

Возможны следующие случаи: 1) $\lambda < 0$; 2) $\lambda = 0$; 3) $\lambda > 0$.

1. При $\lambda < 0$ общее решение уравнения (6.29) имеет вид

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные. В силу условий (6.31) получим

$$c_1 + c_2 = 0, \ \ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} = 0.$$

Отсюда $c_1 = c_2 = 0$, и, значит, $X(x) \equiv 0$.

2. При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (6.29) запишется в виде

$$X(x) = c_1 + c_2 x.$$

Тогда в силу (6.31) имеем $c_1 = 0, \ c_1 + c_2 l = 0$, т. е. $c_1 = c_2 = 0$, и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (6.29) имеет вид

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x.$$

Учитывая условия (6.31), получим

$$c_1 = 0, \ \ c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, l + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0.$$

Если $X(x) \not\equiv 0$, то $c_2 \neq 0$, поэтому $\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$, т. е. $\sqrt{\lambda} = \dfrac{\pi n}{l}, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Следовательно, нетривиальные решения задачи (6.32) возможны лишь при значениях $\lambda = \lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2, \ n \in \boldsymbol{Z}, \ n \neq 0$.

Этим значениям соответствуют функции $X_n = \sin\left(\dfrac{\pi n}{l} x\right), \ n \in \boldsymbol{Z}, \ n \neq 0$, определяемые с точностью до произвольного множителя, который положим равным единице.

В дальнейшем для n достаточно брать только целые положительные значения, так как $\lambda_{-n} = \lambda_n$, а функции X_{-n} и X_n отличаются лишь постоянным множителем.

При $\lambda = \lambda_n$, $n \in \boldsymbol{N}$, общее решение уравнения (6.30) имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} a t\right), \qquad (6.33)$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$u_n(x,t)=X_n(t)\,T_n(t)=$$
$$=\left(A_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}\,a\,t\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}\,a\,t\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}\,x\right) \qquad (6.34)$$

являются частными решениями уравнения (6.23), удовлетворяющими граничным условиям (6.24).

В силу линейности и однородности уравнения (6.23) сумма частных решений

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}a\,t\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}\,a\,t\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\,x\right) \quad (6.35)$$

также является решением уравнения (6.23), удовлетворяющим граничным условиям (6.24), если ряд (6.35) равномерно сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t.

Определим коэффициенты A_n и B_n из условия, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям (6.25).

Продифференцируем ряд (6.35) по переменной t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}\,a\left(-A_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}a\,t\right)+B_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}a\,t\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\,x\right). \quad (6.36)$$

Полагая в (6.35) и (6.36) $t=0$, получим в силу начальных условий (6.25):

$$\begin{cases}\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}\,x\right),\\ \psi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi n}{l}\,a\,B_n\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}\,x\right).\end{cases} \qquad (6.37)$$

Формулы (6.37) представляют собою разложения заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,l)$. Отсюда

$$\begin{cases}A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)dx,\\ B_n=\dfrac{2}{\pi n a}\displaystyle\int_0^l\psi(x)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)dx,\end{cases} \quad n\in\boldsymbol{N}. \qquad (6.38)$$

Таким образом, решение краевой задачи (6.23) – (6.25) определяется рядом (6.35), где коэффициенты A_n и B_n вычисляются по формулам (6.38).

Если функция $\varphi(x)$ на отрезке $[0,l]$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\varphi''(0)=\varphi''(l)=0$, а функция $\psi(x)$ на этом отрезке непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0)=\psi(l)=0$, то функция $u(x,t)$, определяемая рядом (6.35), имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению (6.23), граничным условиям (6.24) и начальным условиям (6.25). При этом возможно почленное дифференцирование ряда (6.35) по x и t два раза, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0 \le x \le l$ и любом $t \ge 0$.

Пример 6.2. Решите краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{8} \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Решение. В нашем случае $\varphi(x) = \frac{1}{8} \sin \frac{3\pi x}{l}$, $\psi(x) \equiv 0$. Найдем коэффициенты A_n и B_n по формулам (6.38). Так как $\psi(x) \equiv 0$, то $B_n = 0$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$. Определим теперь A_n.

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x\, dx = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{1}{8} \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{3-n}{l} \pi x \right) - \cos\left(\frac{3+n}{l} \pi x \right) \right) dx = \begin{cases} \frac{1}{8}, \text{ если } n = 3, \\ 0, \text{ если } n \ne 3. \end{cases}$$

Следовательно, учитывая формулу (6.35), решение искомой краевой задачи имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{8} \cos\left(\frac{3\pi}{l} a t \right) \sin\left(\frac{3\pi}{l} x \right).$$

6.5.2. Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{6.39}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{6.40}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \end{cases} \quad 0 \le x \le l, \tag{6.41}$$

описывающую вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах.

Решение этой задачи будем искать в виде суммы

$$u = v + w, \tag{6.42}$$

где v есть решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{6.43}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{6.44}$$

и начальным условиям

$$v(x, 0) = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{6.45}$$

а w есть решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{6.46}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{6.47}$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} w(x, 0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \end{cases} \quad 0 \le x \le l. \tag{6.48}$$

Решение w представляет свободные колебания однородной струны, закрепленной на концах, и, значит, в силу формул (6.35), (6.38) имеет вид

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right)\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \tag{6.49}$$

где

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx, \\ B_n = \dfrac{2}{\pi n a} \displaystyle\int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx, \end{cases} \quad n \in \boldsymbol{N}. \tag{6.50}$$

Решение v представляет вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах, с отсутствующими начальными возмущениями.

Как и в случае свободных колебаний, решение v будем искать в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \tag{6.51}$$

и, значит, граничные условия (6.44) выполняются, если ряд (6.51) сходится равномерно.

Определим теперь функции $T_n(t)$ так, чтобы ряд (6.51) удовлетворял уравнению (6.43) и начальным условиям (6.45).

Подставляя ряд (6.51) в уравнение (6.43), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n(t)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=f(x,t). \tag{6.52}$$

Разложив функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,l)$, рассматривая t как параметр, получим

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{6.53}$$

где

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx, \quad n\in \boldsymbol{N}. \tag{6.54}$$

Сравнивая разложения (6.52) и (6.53) для одной и той же функции $f(x,t)$, составим дифференциальные уравнения

$$T_n''(t)+\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t), \quad n\in \boldsymbol{N}, \tag{6.55}$$

определяющие функции $T_n(t)$.

Чтобы решение v, определяемое рядом (6.51), удовлетворяло и начальным условиям (6.45), достаточно потребовать выполнения равенств

$$T_n(0)=T_n'(0)=0, \quad n\in \boldsymbol{N}. \tag{6.56}$$

Решение уравнения (6.55), удовлетворяющее начальным условиям (6.56), имеет вид

$$T_n(t)=\frac{l}{\pi na}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\frac{\pi na}{l}(t-\tau)\right)d\tau, \quad n\in \boldsymbol{N}. \tag{6.57}$$

Подставляя найденные выражения для $T_n(t)$ в ряд (6.51), получим решение задачи (6.43) – (6.45), если ряд (6.51) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и t до двух раз включительно, равномерно сходятся. Последнее возможно, если непрерывная функция $f(x,t)$ имеет непрерывные частные производные по x до второго порядка и при всех $t\ge 0$ выполнены условия

$$f(0,t)=f(l,t)=0.$$

Таким образом, решение искомой задачи (6.39) – (6.41) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\right.\\ &\left.+B_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\right.\\ &\left.+B_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\frac{l}{\pi na}\int_0^t f_n(\tau)\sin\left(\frac{\pi na}{l}(t-\tau)\right)d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \end{aligned} \tag{6.58}$$

где коэффициенты A_n, B_n, $f_n(t)$ вычисляются по формулам (6.50) и (6.54).

Пример 6.3. Решите краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \sin\frac{\pi}{l} x,$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \ \ t \geq 0,$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sin\dfrac{3\pi}{l} x, \ \ 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . В нашем случае $\varphi(x) \equiv 0, \psi(x) = \sin\dfrac{3\pi}{l} x, \ \ f(x,t) = e^{-t} \sin\dfrac{\pi}{l} x$.

Тогда

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = 0, \ \ n \in \boldsymbol{N}.$$

Найдем теперь B_n, получим

$$B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \sin\left(\frac{3\pi}{l} x\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n a}\int_0^l \cos\left(\frac{3-n}{l}\pi x\right) - \cos\left(\frac{3+n}{l}\pi x\right) dx = \begin{cases} \dfrac{l}{3\pi a}, \text{ если } n = 3. \\ 0, \quad \text{если } n \neq 3. \end{cases}$$

Определим коэффициенты $f_n(t)$, $n \in \boldsymbol{N}$, по формуле

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \frac{2}{l}\int_0^l e^{-t}\sin\left(\frac{\pi}{l} x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx =$$

$$= \frac{2e^{-t}}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = \begin{cases} e^{-t}, \text{ если } n = 1. \\ 0, \quad \text{если } n \neq 1. \end{cases}$$

Тогда в силу формулы (6.58) имеем

$$u(x,t) = \frac{l}{3\pi a}\sin\left(\frac{3\pi}{l} a t\right)\sin\left(\frac{3\pi}{l} x\right) + \frac{l}{\pi a}\int_0^t e^{-\tau}\sin\left(\frac{\pi a}{l}(t-\tau)\right) d\tau \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Вычислим сначала полученный интеграл

$$I = \int_0^t e^{-\tau}\sin\left(\frac{\pi a}{l}(t-\tau)\right) d\tau = \left[\begin{array}{l} u = e^{-\tau}, du = -e^{-\tau} d\tau, \\ v = \dfrac{l}{\pi a}\cos\left(\dfrac{\pi a}{l}(t-\tau)\right) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{l}{\pi a} e^{-\tau}\cos\left(\frac{\pi a}{l}(t-\tau)\right)\Bigg|_0^t + \int_0^t \frac{l}{\pi a} e^{-\tau}\cos\left(\frac{\pi a}{l}(t-\tau)\right) d\tau =$$

$$=\begin{bmatrix} u=e^{-\tau}, du=-e^{-\tau}d\tau, \\ v=-\dfrac{l}{\pi a}\sin\left(\dfrac{\pi a}{l}(t-\tau)\right) \end{bmatrix}=\frac{l}{\pi a}\left(e^{-t}-\cos\left(\frac{\pi a}{l}t\right)\right)+$$

$$+\frac{l}{\pi a}\left(-\frac{l}{\pi a}e^{-\tau}\sin\left(\frac{\pi a}{l}(t-\tau)\right)\Bigg|_0^t-\frac{l}{\pi a}\int_0^t e^{-\tau}\sin\left(\frac{\pi a}{l}(t-\tau)\right)d\tau\right)=$$

$$=\frac{l}{\pi a}\left(e^{-t}-\cos\left(\frac{\pi a}{l}t\right)\right)+\frac{l^2}{\pi^2 a^2}\sin\left(\frac{\pi a}{l}t\right)-\frac{l^2}{\pi^2 a^2}I.$$

Отсюда

$$I=\frac{l\pi a\left(e^{-t}-\cos\left(\dfrac{\pi a}{l}t\right)\right)+l^2\sin\left(\dfrac{\pi a}{l}t\right)}{l^2+\pi^2 a^2}.$$

Значит, решение искомой краевой задачи имеет вид

$$u(x,t)=\frac{l}{3\pi a}\sin\left(\frac{3\pi}{l}at\right)\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right)+$$

$$+\frac{l^2\left(e^{-t}-\cos\left(\dfrac{\pi a}{l}t\right)\right)+\dfrac{l^3}{\pi a}\sin\left(\dfrac{\pi a}{l}t\right)}{l^2+\pi^2 a^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right).$$

6.5.3. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{6.59}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=\mu_1(t), \\ u(l,t)=\mu_2(t), \end{cases} \quad t\ge 0, \tag{6.60}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x), \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \end{cases} \quad 0\le x\le l, \tag{6.61}$$

описывающую вынужденные колебания однородной струны, концы которой $x=0$ и $x=l$ движутся по определенному закону (6.60).

Р е ш е н и е . Задачу (6.59) – (6.61) можно свести к задаче с однородными граничными условиями.

Введем новую вспомогательную функцию

$$w(x,t)=\mu_1(t)+(\mu_2(t)-\mu_1(t))\frac{x}{l}. \tag{6.62}$$

Тогда

$$\begin{cases} w(0,t)=\mu_1(t), \\ w(l,t)=\mu_2(t), \end{cases} \quad t \geq 0. \tag{6.63}$$

Решение задачи (6.59) – (6.61) будем искать в виде суммы

$$u = v + w, \tag{6.64}$$

где v есть новая неизвестная функция.

В силу граничных условий (6.60) и (6.63) функция $v(x,t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \ \ t \geq 0. \tag{6.65}$$

Учитывая начальные условия (6.61), получим

$$\begin{cases} v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) - (\mu_2(0) - \mu_1(0))\dfrac{x}{l} = \varphi_1(x), \\ \dfrac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} - \dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \mu_1'(0) - (\mu_2'(0) - \mu_1'(0))\dfrac{x}{l} = \psi_1(x), \end{cases} \tag{6.66}$$

где $0 \leq x \leq l$.

Подставляя (6.64) в уравнение (6.59), имеем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(x,t)$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(x,t), \tag{6.67}$$

где $g(x,t) = f(x,t) - \mu_1''(t) - (\mu_2''(t) - \mu_1''(t))\dfrac{x}{l}$.

Таким образом, функция $v(x,t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(x,t),$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \ \ t \geq 0,$$

$$\begin{cases} v(x,0) = \varphi_1(x), \\ \dfrac{\partial v(x,0)}{\partial t} = \psi_1(x), \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l,$$

и, следовательно, в силу (6.58), (6.50), (6.54) функция имеет вид

$$\begin{aligned} v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(& A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} a t\right) + \\ & + \frac{l}{\pi n a} \int_0^t g_n(\tau) \sin\left(\frac{\pi n a}{l}(t-\tau)\right) d\tau \Bigg) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \end{aligned} \tag{6.68}$$

где

$$
\begin{cases}
A_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi_1(x)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)dx,\\
B_n = \dfrac{2}{\pi n a}\int\limits_0^l \psi_1(x)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)dx, \quad n\in \boldsymbol{N}.\\
g_n(t) = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l g(x,t)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)dx.
\end{cases} \tag{6.69}
$$

Отсюда решение искомой краевой задачи (6.59) – (6.61) запишется в виде

$$
u(x,t)=\mu_1(t)+(\mu_2(t)-\mu_1(t))\frac{x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\right.
$$

$$
\left.+B_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\frac{l}{\pi n a}\int\limits_0^t g_n(\tau)\sin\left(\frac{\pi n a}{l}(t-\tau)\right)d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{6.70}
$$

в котором коэффициенты $A_n, B_n, g_n(t),\ n\in \boldsymbol{N}$, определяются по формулам (6.69).

Пример 6.4. Решите краевую задачу

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},
$$

$$
u\,(0,t)=e^{-t},\ \ u\,(l,t)=0,\ \ t\ge 0,
$$

$$
\begin{cases}
u\,(x,0)=0,\\
\dfrac{\partial u\,(x,0)}{\partial t}=\dfrac{x}{l},
\end{cases}\quad 0\le x\le l.
$$

Решение. В нашем случае

$$
\varphi(x)\equiv 0,\ \ \psi(x)=\frac{x}{l},\ \ f(x,t)\equiv 0,\ \ \mu_1(t)=e^{-t},\ \ \mu_2(t)\equiv 0.
$$

Найдем по формулам (6.69) коэффициенты $A_n, B_n, g_n(t), n\in \boldsymbol{N}$. Учитывая, что

$$
\varphi_1(x)=\frac{x}{l}-1,\ \ \psi_1(x)=1,\ \ g\,(x,t)=e^{-t}\left(\frac{x}{l}-1\right),
$$

получим

$$
A_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\left(\frac{x}{l}-1\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=\begin{bmatrix} u=\dfrac{x}{l}-1,\ du=\dfrac{1}{l}dx\\ v=-\dfrac{l}{\pi n}\cos\dfrac{\pi n}{l}x\end{bmatrix}=
$$

$$=\frac{2}{l}\left(-\frac{l}{\pi n}\left(\frac{x}{l}-1\right)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\Bigg|_0^l+\frac{1}{\pi n}\int_0^l\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}+\frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{l}x\Bigg|_0^l=-\frac{2}{\pi n};$$

$$B_n=\frac{2}{\pi n a}\int_0^l\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=-\frac{2l}{\pi^2 n^2 a}\left((-1)^n-1\right)=\frac{2l}{\pi^2 n^2 a}\left(1+(-1)^{n+1}\right);$$

$$g_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l e^{-t}\left(\frac{x}{l}-1\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=\frac{-2e^{-t}}{\pi n}.$$

Тогда в силу формулы (6.70) имеем

$$u(x,t)=e^{-t}-e^{-t}\frac{x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{l}a t\right)+\frac{2l}{\pi^2 n^2 a}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}a t\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{l}{\pi n a}\int_0^t\frac{-2e^{-\tau}}{\pi n}\cdot\sin\left(\frac{\pi n a}{l}(t-\tau)\right)d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Вычислим полученный интеграл. Обозначим

$$I=\int_0^t e^{-\tau}\cdot\sin\left(\frac{\pi n a}{l}(t-\tau)\right)d\tau,$$

тогда

$$I=\frac{l\pi n a\left(e^{-t}-\cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\right)+l^2\sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)}{l^2+(\pi n a)^2}.$$

Таким образом, решение искомой задачи имеет вид

$$u(x,t)=-e^{-t}\left(\frac{x}{l}-1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{l}a t\right)+\frac{2l}{\pi^2 n^2 a}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}a t\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{(\pi n)^2 a}\cdot\frac{l^2\pi n a\left(e^{-t}-\cos\left(\frac{\pi n}{l}a t\right)\right)+l^3\sin\left(\frac{\pi n}{l}a t\right)}{l^2+(\pi n a)^2}\right.\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Методические указания к выполнению контрольной работы

Задача 1. В пространстве $\boldsymbol{R}^3$ задан базис:

$$\bar{g}_1 = (1; -1; 1), \bar{g}_2 = (2; -3; 4), \bar{g}_3 = (2; 2; 6).$$

Построить по данному базису ортонормированный.

Р е ш е н и е.

Следуя процессу ортогонализации Грамма–Шмидта (1.1), положим

$$\bar{f}_1 = \bar{g}_1 = (1; -1; 1), \ \bar{f}_2 = \bar{g}_2 + \lambda_1^{(2)} \bar{f}_1,$$

где

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(\bar{f}_1, \bar{g}_2)}{\left\|\bar{f}_1\right\|^2} = -\frac{1\cdot 2 + (-1)(-3) + 1\cdot 4}{(\sqrt{3})^2} = -3 \Rightarrow \bar{f}_2 = (-1; 0; 1).$$

Далее $\bar{f}_3 = \bar{g}_3 + \lambda_1^{(3)} \bar{f}_1 + \lambda_2^{(3)} \bar{f}_2$, где

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(\bar{f}_1, \bar{g}_3)}{\left\|\bar{f}_1\right\|^2} = -2; \lambda_2^{(3)} = -\frac{(\bar{f}_2, \bar{g}_3)}{\left\|\bar{f}_2\right\|^2} = -2,$$

тогда $\bar{f}_3 = (2; 4; 2)$. Нормируя теперь векторы $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$, получаем ОНБ:

$$\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \bar{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \bar{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Чтобы убедиться в правильности вычислений, нужно найти попарные скалярные произведения полученных векторов. Все они должны быть нулевыми.

Задача 2. Найти прямое преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

В соответствии с формулой (2.1) находим

$$F(i\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = -\left.\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+i\omega}.$$

Задача 3.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^3 x\, dx$.

Р е ш е н и е.

По формуле (3.12) имеем

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^3 x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5+3}{2}+1\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 1}{4!} = \frac{1}{24}.$$

Задача 3.2. Вычислить интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(1+x)^7}}\,dx.$

Р е ш е н и е.

По формуле (3.13), учитывая (3.9), имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(1+x)^7}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{(1+x)^{7/2}}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{5/2-1}}{(1+x)^{5/2+1}}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{2}{5}.$$

Задача 3.3. Вычислить интеграл $\int_0^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx, \quad p > -1.$

Р е ш е н и е.

$$\int_0^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx = \left|\begin{array}{l} \text{сделаем замену} \\ \ln\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = e^{-t}, dx = -e^{-t}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = \infty \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array}\right| = -\int_{\infty}^{0} t^p e^{-t}\,dt = \int_0^{\infty} t^p e^{-t}\,dt = \Gamma(p+1).$$

Задача 4.1. Решить линейное разностное уравнение второго порядка

$$y(n+2) - y(n) = 2^n \tag{1}$$

при начальных условиях $y(0) = y(1) = 0$.

Р е ш е н и е.

Пусть

$$y(n) \leftrightarrow Y(z). \tag{2}$$

Тогда

$$y(n+2) \leftrightarrow z^2[Y(z) - (y_0 + y_1/z)]. \tag{3}$$

Комбинируя соотношения (2) и (3) с коэффициентами -1, 1 уравнения (1) и учитывая, что выражение $y_0 + y_1/z$ равно нулю в силу начальных условий, получим

– для левой части (1): $y(n+2) - y(n) \leftrightarrow Y(z)(z^2 - 1)$;

– для правой части (1): $2^n \leftrightarrow \dfrac{z}{z-2}$.

Операторное уравнение

$$Y(z)(z^2-1)=\frac{z}{z-2}$$

имеет решение

$$Y(z)=\frac{z}{(z^2-1)(z-2)}.$$

Здесь особые точки $z_1=1, z_2=-1, z_3=2$. Тогда по формуле (4.3) находим

$$y(n)=\operatorname*{Res}_{z=1}Y(z)\,z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=-1}Y(z)\,z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=2}Y(z)\,z^{n-1}=-\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{6}+\frac{2^n}{3}.$$

Задача 4.2. Решить линейное разностное уравнение второго порядка

$$y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=1 \tag{4}$$

при начальных условиях $y(0)=1,\ y(1)=-1$.

Р е ш е н и е.

Пусть

$$y(n)\leftrightarrow Y(z). \tag{5}$$

Тогда

$$y(n+1)\leftrightarrow z\,[Y(z)-y_0]=z\,[Y(z)-1]; \tag{6}$$

$$y(n+2)\leftrightarrow z^2[Y(z)-y_0-y_1/z]=z^2[Y(z)-1+1/z]. \tag{7}$$

Умножая соотношения (5) – (7) соответственно на 6, –5, 1, получим

$$y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)\leftrightarrow Y(z)[z^2-5z+6]-(z^2-5z)+z.$$

Для правой части уравнения (4) будем иметь $1\leftrightarrow \dfrac{z}{z-1}$.

Операторное уравнение

$$Y(z)[z^2-5z+6]-(z^2-5z)+z=\frac{z}{z-1}$$

имеет решение

$$Y(z)=\frac{z^3-7z^2+7z}{(z-1)(z^2-5z+6)}=\frac{z^3-7z^2+7z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Функция $Y(z)$ представляет собой несократимую дробь, знаменатель которой имеет простые корни $z_1=1,\ z_2=2,\ z_3=3$. Тогда по формуле (4.3) находим

$$y(n)=\operatorname*{Res}_{z=1}Y(z)z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=2}Y(z)z^{n-1}+\operatorname*{Res}_{z=3}Y(z)z^{n-1}=\frac{1}{2}+3\cdot 2^n-\frac{5}{2}\cdot 3^n.$$

Проверим, выполняются ли начальные условия

$$y(0)=\frac{1}{2}+3-\frac{5}{2}=1,\ y(1)=\frac{1}{2}+6-\frac{15}{2}=-1.$$

Значит, функция $y(n)=\frac{1}{2}+3\cdot 2^n-\frac{5}{2}\cdot 3^n$ является решением исходной задачи.

Задача 5.1. Найти экстремальные кривые функционала

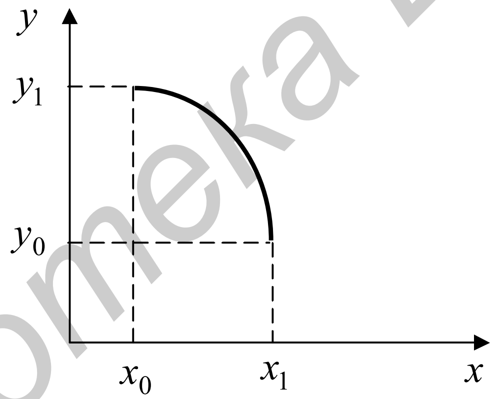
$$I\ [y(x)]=\int_0^{\pi/2}((y'(x))^2-y^2(x))\,dx$$

при условиях $y(0)=0,\quad y(\pi/2)=1.$

Решение.

Находим $\frac{\partial F}{\partial y}=-2y,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=2.$ Отсюда уравнение Эйлера в данном конкретном случае будет иметь вид $y''+y=0$. Экстремальные кривые $y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x$, а решение нашей задачи $y(x)=\sin x$.

Задача 5.2. Найти экстремальные кривые, соответствующие минимальной длине кривой.



Решение.

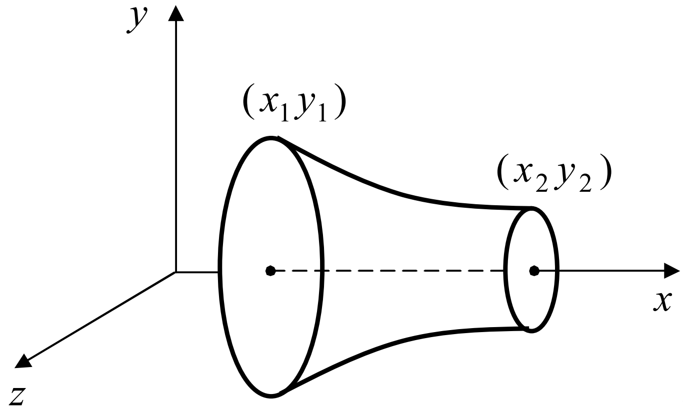
$I\ [y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)}dx$ при условиях $y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1.$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}-\frac{y'^2(x)}{\sqrt{(1+y'^2(x))^3}}=\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2(x))^3}}.$$

Уравнение Эйлера $y''(x)\cdot\frac{\partial F}{\partial y'^2}=0\Rightarrow y=c_1x+c_2$. Учитывая граничные условия, найдем c_1, c_2: $c_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$; $c_2=\frac{x_1y_0-x_0y_1}{x_1-x_0}$.

Задача 5.3. Найти экстремальную кривую, соответствующую минимальной площади поверхности вращения.



Р е ш е н и е.

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

Так как $F = F(y, y')$, *уравнение Эйлера* имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0.$$

Если уравнение Эйлера умножить на y', получим $\dfrac{d}{dx}\left(F - y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$.

Это уравнение имеет первый интеграл

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \Rightarrow y\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Подстановка $y' = \operatorname{ch} t$ дает

$$y = C_1 \cdot \operatorname{ch} t \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} = C_1 \Rightarrow \{x = C_1 t + C_2,\, y = C_1 \cdot \operatorname{ch} t\}.$$

Или после исключения t уравнение цепной линии $y = C_1 \operatorname{ch}\dfrac{x - C_2}{C_1}$.

Задача 6. Найти решение $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 \le x \le 5,\ t \ge 0,$$

с граничными условиями $u(0, t) = u(5, t) = 0$ и начальными условиями

$$u(x, 0) = 25\sin(4\pi x),\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Р е ш е н и е .

В нашем случае $a = 7, l = 5, \varphi(x) = 25\sin(4\pi x), \ \psi(x) \equiv 0, \ \ \forall x \in [0, 5]$. Решение данной краевой задачи определяется рядом (6.35), в котором коэффициенты $A_n, B_n, n \in \boldsymbol{N}$, вычисляются по формулам (6.38).

Так как $\psi(x) \equiv 0, \forall x \in [0, 5]$, то $B_n = 0, \ \forall n \in \boldsymbol{N}$. Определим теперь A_n.

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = \frac{2}{5}\int_0^5 25\sin(4\pi x)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)dx =$$

$$= 5\int_0^5 \left(\cos\left(\frac{20-n}{5}\pi x\right) - \cos\left(\frac{20+n}{5}\pi x\right)\right)dx = \begin{cases} 25, & \text{если } n = 20, \\ 0, & \text{если } n \neq 20. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая формулу (6.35), решение искомой краевой задачи имеет вид

$$u(x, t) = 25\cos(28\pi t)\cdot\sin(4\pi x).$$

Литература

1. Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики / А. В. Бицадзе. – М. : Наука, 1976. – 296 с.

2. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа : учеб. пособие для втузов / В. А. Болгов [и др.] ; под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича – 2-е изд. – М. : Наука, 1986. – 368 с.

3. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1961. – 228 с.

4. Жевняк, Р. М. Высшая математика : Дифференциальные уравнения. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной : учеб. пособие / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ Обозрение, 1977. – 570 с.

5. Жевняк, Р. М. Высшая математика : Операционное исчисление. Теория вероятностей. Математическая статистика. Случайные процессы : учеб. пособие / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ Обозрение, 1977. – 445с.

6. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 10 ч. Ч. 5 : учеб. пособие / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1988. – 254 с.

7. Кофман, А. Введение в прикладную комбинаторику /А. Кофман. – М. : Наука, 1975. – 368 с.

8. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1991. – 304 с.

9. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения. Серия «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов». Задачи и упражнения / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1968. – 192 с.

10. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения (Введение в теорию) / М. Л. Краснов. – М. : Наука, 1975. – 304 с.

11. Михлин, С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям : учеб. пособие / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1959. – 232 с.

12. Петровский, И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. – М. : Физматгиз, 1961. – 400 с.

13. Смирнов, М. М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 1964. – 208 с.

14. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 736 с.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Построить ортонормированный базис в R^3 по данному базису. Доказать, что полученная система векторов является ортонормированной:

$$x_1 = (-1, -1, 1), \quad x_2 = (-2, 2, 1), \quad x_3 = (0, -2, 1).$$

2. Найти прямое преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Введя замену, свести данный интеграл к эйлерову. Вычислить значение полученного интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$.

4. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+3) - 3x\,(n+2) + 3x\,(n+1) - x(n) = 2^n, \; x(0) = 0, x(1) = 0, x(2) = 1.$$

5. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int\limits_0^1 (12xy + yy' + (y')^2)\, dx, \; y(0) = 1, \; y(1) = 4.$$

6. Найти решение $u(x, t)$ уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \; 0 \le x \le 1, \; t \ge 0$ с граничными условиями $u\,(0, t) = 0, u\,(1, t) = 0$ и начальными условиями

$$u(x,0) = 2\sin \pi x, \; \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Вариант 2

1. Построить ортонормированный базис в R^3 по данному базису. Доказать, что полученная система векторов является ортонормированной:

$$x_1 = (1, 2, 1), \quad x_2 = (1, 3, 0), \quad x_3 = (1, -2, -1).$$

2. Найти прямое преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Введя замену, свести данный интеграл к эйлерову. Вычислить значение полученного интеграла $\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x^q}\, dx$.

4. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2)+x(n+1)+x(n)=0,\ x(0)=0,\ x(1)=-1.$$

5. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y)=\int_0^1 (y+2xy'+(y')^2)\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0.$$

6. Найти решение $u(x,t)$ уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ с граничными условиями $u(0,t)=0, u(2,t)=0$ и начальными условиями

$$u\,(x,0)=4\sin\frac{\pi x}{2},\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Вариант 3

1. Построить ортонормированный базис в R^3 по данному базису. Доказать, что полученная система векторов является ортонормированной

$$x_1=(5,1,1),\quad x_2=(0,3,1),\quad x_3=(-2,-1,-1).$$

2. Найти прямое преобразование Фурье функции

$$f(x)=e^{-\beta x},\ x\geq 0, \beta>0;\ f(-x)=f(x).$$

3. Введя замену, свести данный интеграл к эйлерову. Вычислить значение полученного интеграла $\int\limits_1^{+\infty}(\ln x)^p\,\frac{dx}{x^2}$.

4. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2)-3x(n+1)-10x(n)=0,\ x(0)=3,\ x(1)=-1.$$

5. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y)=\int_0^{\ln 2}((y')^2+3y^2)\,e^{2x}dx,\quad y(0)=0,\quad y(\ln 2)=\frac{15}{8}.$$

6. Найти решение $u(x,t)$ уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ с граничными условиями $u(0,t)=0, u(3,t)=0$ и начальными условиями

$$u(x,0)=5\sin\frac{\pi x}{3},\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Вариант 4

1. Построить ортонормированный базис в R^3 по данному базису. Доказать, что полученная система векторов является ортонормированной:

$$x_1=(1,1,-1),\quad x_2=(2,1,-1),\quad x_3=(3,0,3).$$

2. Найти прямое преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}e^{-ax}, & x>0,\, a>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

3. Введя замену, свести данный интеграл к эйлерову. Вычислить значение полученного интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx$.

4. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2)-4x(n)=4^n,\; x(0)=1,\; x(1)=1.$$

5. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y)=\int\limits_0^1 x^2(y')^2\,dx,\quad y(0)=3,\quad y(1)=1.$$

6. Найти решение $u(x,t)$ уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ с граничными условиями $u(0,t)=0, u(4,t)=0$ и начальными условиями

$$u(x,0)=6\sin\frac{\pi x}{4},\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Вариант 5

1. Построить ортонормированный базис в R^3 по данному базису. Доказать, что полученная система векторов является ортонормированной:

$$x_1=(2,1,-1),\quad x_2=(-2,1,1),\quad x_3=(0,4,2).$$

2. Найти прямое преобразование Фурье функции $f(x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 3,\\ 0, & x<0, x>3.\end{cases}$

3. Введя замену, свести данный интеграл к эйлерову. Вычислить значение полученного интеграла $\int\limits_0^1\frac{x^{3\alpha}}{\sqrt[3]{1-x^3}}\,dx$.

4. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2)+2x(n+1)+x(n)=(-1)^n,\; x(0)=0,\; x(1)=1.$$

5. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y)=\int\limits_0^6 (2xy-(y')^2)\,dx,\quad y(0)=1,\quad y(6)=1.$$

6. Найти решение $u(x,t)$ уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ с граничными условиями $u(0,t)=0, u(5,t)=0$ и начальными условиями

$$u(x,0) = 3\sin\frac{\pi x}{5},\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Вариант 6

1. Построить ортонормированный базис в R^3 по данному базису. Доказать, что полученная система векторов является ортонормированной:

$$x_1 = (3,\ 4,\ 5), \quad x_2 = (-2,\ -1,\ -3), \quad x_3 = (0,\ -4,\ -1).$$

2. Найти прямое преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < 0, x > 1. \end{cases}$$

3. Введя замену, свести данный интеграл к эйлерову. Вычислить значение полученного интеграла $\int\limits_0^1 x^3 \sqrt[3]{1 - x^3}\, dx$.

4. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) - x(n) = (-1)^n,\ x(0) = 1,\ x(1) = -1.$$

5. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int\limits_0^{\ln 2} ((y')^2 + 3y^2)\, e^{2x} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\ln 2) = \frac{1}{2}.$$

6. Найти решение $u(x,\, t)$ уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ с граничными условиями $u(0,\, t) = 0,\ u(1,\, t) = 0$ и начальными условиями

$$u(x,0) = 4\sin 2\pi x,\ \frac{\partial u(x,\, 0)}{\partial t} = 0.$$

Вариант 7

1. Построить ортонормированный базис в R^3 по данному базису. Доказать, что полученная система векторов является ортонормированной:

$$x_1 = (3,\ 3,\ 4), \quad x_2 = (-1,\ -1,\ -1), \quad x_3 = (0,\ 2,\ 1).$$

2. Найти прямое преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |\,x\,| \le 2, \\ 0, & |\,x\,| > 2. \end{cases}$$

3. Введя замену, свести данный интеграл к эйлерову. Вычислить значение полученного интеграла $\int\limits_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad (a > 0)$.

4. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) + x(n) = 1,\ x(0) = 0,\ x(1) = 1.$$

5. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y)=\int_0^1((y')^4-6(y')^2)\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=0.$$

6. Найти решение $u(x,t)$ уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ с граничными условиями $u(0,t)=0, u(2,t)=0$ и начальными условиями

$$u(x,0)=3\sin\pi x,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Вариант 8

1. Построить ортонормированный базис в R^3 по данному базису. Доказать, что полученная система векторов является ортонормированной:

$$x_1=(2,-2,-3),\quad x_2=(3,3,0),\quad x_3=(2,1,0).$$

2. Найти прямое преобразование Фурье функции $f(x)=\begin{cases}1, & -2\le x\le 0,\\ 0, & x<-2, x>0.\end{cases}$

3. Введя замену, свести данный интеграл к эйлерову. Вычислить значение полученного интеграла $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x^3)^2}\,dx$.

4. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2)-x(n)=1, x(0)=0, x(1)=0.$$

5. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y)=\int_0^{\pi}(4y\cos x+(y')^2-y^2)\,dx,\quad y(0)=y(\pi)=0.$$

6. Найти решение $u(x,t)$ уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ с граничными условиями $u(0,t)=0, u(3,t)=0$ и начальными условиями

$$u(x,0)=2\sin\frac{2\pi x}{3},\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Вариант 9

1. Построить ортонормированный базис в R^3 по данному базису. Доказать, что полученная система векторов является ортонормированной:

$$x_1=(-1,1,1),\quad x_2=(-2,1,-1),\quad x_3=(-2,0,2).$$

2. Найти прямое преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 3,\\ 0, & |x|>3.\end{cases}$$

3. Введя замену, свести данный интеграл к эйлерову. Вычислить значение полученного интеграла $\int\limits_0^{+\infty} x^6 e^{-x^2}\,dx$.

4. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2)-5x(n+1)+6x(n)=0,\ \ x(0)=1,\ x(1)=2.$$

5. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y)=\int\limits_0^1 (e^{x+y}-y'-\sin x)\,dx,\quad y(0)=2,\quad y(1)=0.$$

6. Найти решение $u(x,t)$ уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ с граничными условиями $u(0,t)=0,\ u\,(4,t)=0$ и начальными условиями

$$u(x{,}0)=5\sin\frac{\pi x}{2}\ \ \frac{\partial u(x{,}0)}{\partial t}=0.$$

Вариант 10

1. Построить ортонормированный базис в R^3 по данному базису. Доказать, что полученная система векторов является ортонормированной:

$$x_1=(1,1,1),\quad x_2=(1,-2,-1),\quad x_3=(2,-1,1).$$

2. Найти прямое преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 5,\\ 0, & x<0, x>5.\end{cases}$$

3. Введя замену, свести данный интеграл к эйлерову. Вычислить значение полученного интеграла $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{x}}\cdot\dfrac{dx}{(x-2)^2}$.

4. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2)+6x(n+1)+13x(n)=1,\ x(0)=0,\ x(1)=1.$$

5. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi/4}((y')^2-4y^2)\,dx,\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

6. Найти решение $u(x,t)$ уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ с граничными условиями $u(0,t)=0, u(5,t)=0$ и начальными условиями

$$u(x,\,0)=6\sin\frac{2\pi x}{5},\ \frac{\partial u(x,\,0)}{\partial t}=0\,.$$

Св. план 2011, поз. 61

Учебное издание

Цегельник Владимир Владимирович
Четыркина Зинаида Никандровна
Ранцевич Валентина Алексеевна и др.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

Методическое пособие
для студентов специальностей 1-45 01 01 «Многоканальные системы телекоммуникаций», 1-45 01 02 «Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения», 1-53 01 07 «Информационные технологии и управление в технических системах» заочной формы обучения

Редактор Т. П. Андрейченко

Корректор И. П. Острикова

Компьютерная верстка А. В. Бас

Подписано в печать 10.11.11.	Формат 60×84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Отпечатано на ризографе.	Усл. печ. л. 4,53.
Уч.-изд. л. 4,5.	Тираж 200 экз.	Заказ 875.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ № 02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП № 02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6