ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 151, № 1
апрель, 2007

 В. В. Цегельник*

ГАМИЛЬТОНИАНЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ШЕСТЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ

Получена формула, определяющая общий вид полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с шестым уравнением Пенлеве, и доказана ее единственность. Доказано существование гамильтонианов неполиномиального типа, ассоциированных с данным уравнением. Выделен класс гамильтонианов, для которых определяющее их дифференциальное уравнение совпадает с уравнением (h-уравнением) для простейшего полиномиального гамильтониана (гамильтониана Окамото).

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, гамильтонианы, семейства решений, преобразование Беклунда, уравнение Гойна.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1884 г. Пуанкаре и Л. Фуксом была сформулирована проблема поиска новых неприводимых уравнений, которые могли бы определить новые специальные функции. В 1887 г. Пикар для решения этой проблемы предложил рассмотреть уравнения второго порядка определенного класса. Указанная проблема была решена в начале XX века в серии работ Пенлеве и Гамбье по классификации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, общие решения которых не имеют подвижных критических особых точек. Позднее данное свойство решений стали называть P-свойством, а уравнения с P-свойством решений – уравнениями типа Пенлеве или P-типа.

В настоящей работе рассматривается шестое уравнение Пенлеве

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right)\left(\frac{dw}{dz}\right) + \\ + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left[\alpha + \beta\frac{z}{w^2} + \gamma\frac{z-1}{(w-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right], \qquad (1)$$

где $z \in \mathbb{C}$, а α, β, γ, δ – произвольные комплексные параметры. Уравнение (1) было открыто Р. Фуксом [1], сыном известного математика Л. Фукса. Позже Гамбье [2]

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. E-mail: tsegvv@gw.bsuir.unibel.by

включил данное уравнение в число уравнений, которые известны сейчас как шесть трансцендентных уравнений Пенлеве.

Уравнение (1) можно рассматривать с различных точек зрения [3]. Р. Фукс предложил два подхода к исследованию уравнения (1) [1], [4]. Один из его подходов связан с концепцией изомонодромных деформаций. С этой точки зрения уравнение (1) интерпретируется как дифференциальное уравнение, описывающее изомонодромные деформации линейного обыкновенного дифференциального уравнения на сфере Римана. Данный подход послужил источником для многочисленных исследований, касающихся не только уравнения (1), но и остальных пяти трансцендентных уравнений Пенлеве.

Другой подход связывает уравнение (1) с неполным эллиптическим интегралом. При этом следует отметить, что эллиптическое представление уравнения (1) было первоначально введено Пенлеве [5]. Он получил новое представление уравнения (1) в терминах $\wp$-функции Вейерштрасса. Указанные результаты Пенлеве позже были кратко проанализированы в работе Окамото [6], посвященной симметриям аффинной группы Вейля. Некоторые алгебраические и геометрические свойства эллиптического представления уравнения (1) были исследованы в работе [7]. Аналитические свойства решений уравнения (1) (связанные с эллиптическим представлением) при произвольных значениях α, β, γ, δ были рассмотрены в работе [8].

Уравнение (1) и его решения обладают рядом важных и интересных свойств.

1. Уравнение (1) имеет группу дискретных преобразований [9]. Порядок данной группы равен 24.

2. Существуют семейства рациональных [10], [11] и алгебраических [12] решений уравнения (1) при определенных значениях параметров.

3. Уравнение (1) при определенных значениях входящих в него параметров имеет однопараметрические семейства решений, выражающихся через гипергеометрические функции [13]–[16].

4. Существует ряд форм преобразований Беклунда уравнения (1) [10], [16], [17].

5. Уравнение (1) (при определенных значениях параметров) имеет однопараметрические семейства решений [9]–[11]. Эти семейства решений связаны с помощью преобразований, указанных в п. 4, с соответствующими известными однопараметрическими семействами решений, указанными в п. 3.

6. Уравнение (1) возникает как автомодельная редукция уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. В качестве примера отметим две работы [18], в которых полное уравнение (1) (т.е. с четырьмя произвольными параметрами) возникает как автомодельная редукция нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

7. Наличие дискретной группы преобразований и преобразований Беклунда позволило получить [10], [19] новые случаи интегрируемости уравнения (1) в эллиптических функциях.

Еще одно важное свойство уравнения (1) состоит в том, что оно, как известно, представимо (см. первую работу в [20]) в виде системы Гамильтона

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial H(z,w,u)}{\partial u}, \qquad \frac{du}{dz} = -\frac{\partial H(z,w,u)}{\partial w} \tag{2}$$

с полиномиальным относительно w и u гамильтонианом

$$H = z^{-1}(z-1)^{-1}\Big[w(w-1)(w-z)u^2 - \theta_0(w-1)(w-z)u - r_1 w(w-z)u + \\ + (r_2+1)w(w-1)u + \frac{k^2-\theta_\infty^2}{4}(w-z)\Big], \tag{3}$$

где $\theta_0^2 + 2\beta = 0$, $r_1^2 = 2\gamma$, $r_2^2 = 1-2\delta$, $\theta_\infty^2 = 2\alpha$, $k = 1-\theta_0 - r_1 + r_2$. Представление уравнения (1) в виде системы (2) впервые получено в [21], а позже в работах [14], [22].

Следует отметить, что полученные в указанных работах выражения для гамильтонианов совпадают с H (3) с точностью до обозначения параметров, масштабного преобразования переменной u и зависящей от z функции. В связи с этим оставался открытым вопрос о существовании других гамильтонианов полиномиального типа, отличных от указанных выше. Гамильтониан H будем называть простейшим.

Для полноты изложения отметим следующее: уравнение (1) (в случае его эллиптического представления [7]) эквивалентно системе Гамильтона с гамильтонианом в нормальной форме $\mathcal{H} = p^2/2 + V(q)$, где потенциал есть линейная комбинация $\wp$-функции Вейерштрасса и ее сдвига на три полупериода.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы охарактеризовать весь класс полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с уравнением (1), а также исследовать вопрос о существовании других (отличных от полиномиальных) гамильтонианов, описать их структуру и некоторые свойства. Решение указанной задачи важно по двум причинам. Во-первых, ее реализация позволяет описать все классы эквивалентных уравнению (1) гамильтоновых систем полиномиального типа. Во-вторых, гамильтониан H (3) после добавления некоторой линейной функции от z (см. ниже) имеет характерную черту, заключающуюся в том, что он (рассматриваемый как функция от z) удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка второй степени (h-уравнение) P-типа [6], [22], [23]. Как будет показано ниже, последнее играет важную роль в различных приложениях. В связи с этим актуальным является выделение среди гамильтонианов, ассоциированных с уравнением (1), таких гамильтонианов (не обязательно полиномиального типа), что определяющие их дифференциальные уравнения совпадают с h-уравнением для простейшего гамильтониана H (определение h-уравнения см. ниже).

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы доказываем формулу, определяющую общий вид полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с уравнением (1), и рассматриваем два частных (важных с точки зрения приложений) случая h-уравнения для простейшего полиномиального гамильтониана H. В разделе 3 мы выделяем класс ассоциированных с шестым уравнением Пенлеве гамильтонианов таких, что определяющие их дифференциальные уравнения совпадают с h-уравнением для простейшего полиномиального гамильтониана H. В этом же разделе мы также доказываем существование ассоциированных с уравнением (1) гамильтонианов, обладающих свойством, что определяющие их дифференциальные уравнения не являются уравнениями P-типа. В разделе 4 приводится обсуждение полученных результатов, а также обращается внимание на связь между представлением уравнений в виде гамильтоновых систем и теорией изомонодромной деформации линейных уравнений.

2. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТОНИАНЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С УРАВНЕНИЕМ (1)

Теорема 1. *Пусть $P_m(z,w)$, $Q_n(z,w)$ – многочлены относительно w степени $m \in \mathbb{Z}_0$ и $n \in \mathbb{Z}_0$, соответственно, с аналитическими по z коэффициентами такие, что*

$$\frac{\partial P_m(z,w)}{\partial z} \equiv \frac{\partial Q_n(z,w)}{\partial w}. \tag{4}$$

Тогда множество ассоциированных с уравнением (1) полиномиальных гамильтонианов определяется выражением

$$H_1 = z^{-1}(z-1)^{-1}\Big[w(w-1)(w-z)u_1^2 - \theta_0(w-1)(w-z)u_1 - r_1 w(w-z)u_1 + \\ + (r_2+1)w(w-1)u_1 + \frac{k^2-\theta_\infty^2}{4}(w-z)\Big] + Q_n(z,w), \quad u_1 = u + P_m(z,w), \tag{5}$$

с точностью до произвольной (зависящей от z) функции и преобразования

$$u \to pu, \qquad H \to pH_1, \tag{6}$$

где p – отличный от нуля параметр.

Доказательство. Пусть $H_2(z,w,u)$ – полиномиальный по переменным w, u гамильтониан с аналитическими по z коэффициентами, ассоциированный с уравнением (1). Тогда необходимо, чтобы он имел вид

$$H_2 = \frac{p_0(z,w)}{2}u^2 + p_1(z,w)u + p_2(z,w), \tag{7}$$

где p_0, p_1, p_2 – многочлены по переменной w с аналитическими по z коэффициентами.

Действительно, если предположить существование ассоциированного с уравнением (1) гамильтониана

$$\widetilde{H}_2 = f(z,w)u^l + \sum_{k=1}^{l} f_k(z,w)u^{l-k}, \qquad l > 2,$$

в котором f, f_k, $k=\overline{1,l}$, – многочлены по w с аналитическими по z коэффициентами, то рассмотрению подлежат два следующих случая:

1) $\widetilde{H}_2 = f(z,w)(u+P_m(z,w))^l + f_{l-1}(z,w)(u+P_m(z,w)) + Q_n(z,w)$, где P_m, Q_n – многочлены по w, удовлетворяющие условию (4);

2) $f(z,w) \not\equiv 0$ и хотя бы одна из функций $f_k(z,w) \not\equiv 0$ (считаем, что $\partial f_l(z,w)/\partial w \not\equiv 0$, если $f_l(z,w) \not\equiv 0$), но

$$\widetilde{H}_2 \neq f(z,w)(u+P_m(z,w))^l + f_{l-1}(z,w)(u+P_m(z,w)) + Q_n(z,w),$$

если для многочленов P_m, Q_n выполнено условие (4).

Система дифференциальных уравнений, соответствующая гамильтониану $\widetilde{H}_2$, в первом случае имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{dw}{dz} = lf(u+P_m)^{l-1} + f_{l-1},\\ \frac{du}{dz} = -\frac{\partial f}{\partial w}(u+P_m)^l - lf(u+P_m)\frac{\partial P_m}{\partial w} - \frac{\partial f_{l-1}}{\partial w}(u+P_m) - f_{l-1}\frac{\partial P_m}{\partial w} - \frac{\partial Q_n}{\partial w}.\end{gathered} \tag{8}$$

Эта система в случае $f(z,w) \equiv 0$ вырождается в уравнение первого порядка по переменной w. Если $f(z,w) \not\equiv 0$, то для того чтобы система (8) была эквивалентна уравнению (1), необходимо $l = 2$. Таким образом, этот случай невозможен.

Рассматривая второй случай, приходим к заключению, что соответствующая гамильтониану $\widetilde{H}_2$ система эквивалентна уравнению второго порядка по переменной w с иррациональной относительно w, w' правой частью. Таким образом, случай $l > 2$ невозможен.

Пусть система

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= p_0(z,w)u + p_1(z,w),\\ \frac{du}{dz} &= -\frac{\partial p_2(z,w)}{\partial w} - \frac{\partial p_1(z,w)}{\partial w}u - \frac{1}{2}\frac{\partial p_0(z,w)}{\partial w}u^2,\end{aligned} \tag{9}$$

отвечающая гамильтониану H_2, эквивалентна уравнению (1). Из (9) находим [24]

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2}p_0\frac{\partial p_0}{\partial w}u^2 + \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} + p_1\frac{\partial p_0}{\partial w}\right)u + \frac{\partial p_1}{\partial z} + p_1\frac{\partial p_1}{\partial w} - p_0\frac{\partial p_2}{\partial w}. \tag{10}$$

Подставляя d^2w/dz^2 из (10) и dw/dz из (9) в уравнение (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях u, получим систему уравнений в частных производных для определения функций p_0, p_1, p_2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_0}{\partial w} &= \frac{3w^2-2zw-2w+z}{w(w-1)(w-z)}p_0,\\ \frac{\partial p_0}{\partial z} + p_1\frac{\partial p_0}{\partial w} &= \frac{3w^2-2zw-2w+z}{w(w-1)(w-z)}p_0p_1 - \frac{2zw-w-z^2}{z(z-1)(w-z)}p_0,\\ \frac{\partial p_1}{\partial z} + p_1\frac{\partial p_1}{\partial w} - p_0\frac{\partial p_2}{\partial w} &= \frac{3w^2-2zw-2w+z}{2w(w-1)(w-z)}p_1^2 - \frac{2zw-w-z^2}{z(z-1)(w-z)}p_1 +\\ &\quad + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2}\right].\end{aligned} \tag{11}$$

Анализ последней системы показывает, что можно выбрать (без ограничения общности) $p_0 = 2w(w-1)(w-z)/(z(z-1))$, а в качестве p_1, p_2 взять

$$\begin{aligned} p_1 &= z^{-1}(z-1)^{-1}\big[2w(w-1)(w-z)P_m(z) - \theta_0(w-1)(w-z) - \\ &\quad - r_1 w(w-z) + (r_2+1)w(w-1)\big], \\ p_2 &= z^{-1}(z-1)^{-1}\Big\{\big[w(w-1)(w-z)P_m(z,w) - \theta_0(w-1)(w-z) - r_1 w(w-z) + \\ &\quad + (r_2+1)w(w-1)\big]P_m(z,w) + \frac{k^2-\theta_\infty^2}{4}(w-z)\Big\} + Q_n(z,m), \end{aligned}$$

где P_m, Q_n – многочлены по w с аналитическими по z коэфициентами степени $m \in \mathbb{Z}_0$ и $n \in \mathbb{Z}_0$, соответственно. При этом для совместности системы (11) необходимо выполнение условия (4). Легко проверить, что гамильтониан H_2 можно записать в виде (5). Если в гамильтониане (5) ввести преобразования $u \to pu$, $\widetilde{H}_1 = p^{-1}H_1$ (p – отличный от нуля параметр), то несложно проверить, что система дифференциальных уравнений, соответствующая гамильтониану $\widetilde{H}_1$, эквивалентна уравнению (1). Для завершения доказательства теоремы предположим, что существует ассоциированный с уравнением (1) гамильтониан

$$H_0 = \frac{w(w-1)(w-z)}{z(z-1)}u^2 + \varphi(z,w)u + \psi(z,w), \tag{12}$$

полиномиальный по u, w и отличный от H_1 (5). Без ограничения общности будем считать коэффициенты при u^2 в H_1 и H_0 одинаковыми. Этого всегда можно добиться с помощью преобразований гамильтониана H_1.

Рассмотрим эквивалентные (1) системы

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= z^{-1}(z-1)^{-1}\big[2w(w-1)(w-z)(u+P_m(z,m)) - \\ &\quad - \theta_0(w-1)(w-z) - r_1 w(w-z) + (r_2+1)w(w-1)\big], \\ \frac{du}{dz} &= -\frac{\partial H_1}{\partial w} \end{aligned} \tag{13}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= 2z^{-1}(z-1)^{-1}w(w-1)(w-z)u + \varphi(z,w), \\ \frac{du}{dz} &= -\frac{\partial H_0}{\partial w}, \end{aligned} \tag{14}$$

порождаемые гамильтонианами H_1 и H_0, соответственно. Приравнивая правые части первых уравнений систем (13), (14), получаем

$$\begin{aligned} &z^{-1}(z-1)^{-1}\big[2w(w-1)(w-z)P_m(z,u) - \\ &\quad - \theta_0(w-1)(w-z) - r_1 w(w-z) + (r_2+1)w(w-1)\big] = \varphi(z,w). \end{aligned} \tag{15}$$

Очевидно, что при заданном многочлене $\varphi(z,w)$ по переменной w всегда можно подобрать многочлен $P_m(z,w)$ так, что будет выполнено условие (15). Поскольку каждая из систем (13), (14) эквивалентна уравнению (1) и их первые уравнения совпадают при условии (15), то при выполнении этого условия с учетом (4) совпадут и вторые уравнения, а гамильтониан H_1 преобразуется в H_0 с точностью до произвольной функции от z.

Таким образом, формула (5) с точностью до произвольной (зависящей от z) функции и масштабного преобразования (6) определяет общий вид гамильтониана, ассоциированного с уравнением (1), при условии (4).

Теорема доказана.

Рассмотрим систему (2) в развернутой форме:

$$\begin{aligned} z(z-1)\frac{dw}{dz} &= 2w(w-1)(w-z)u - \theta_0(w-1)(w-z)- \\ &\qquad - r_1 w(w-z) + (r_2+1)w(w-1), \\ z(z-1)\frac{du}{dz} &= -(3w^2-2wz-2w+z)u^2 + \theta_0(2w-z-1)u + r_1(2w-z)u- \\ &\qquad - (r_2+1)(2w-1)u - \frac{1}{4}(k^2-\theta_\infty^2). \end{aligned} \tag{16}$$

Уравнение, определяющее функцию (см. вторую работу в [20])

$$h(z) = z(z-1)H + m_1 z + m_2, \tag{17}$$

имеет вид [6], [22], [23]

$$\begin{aligned} h'[z(z-1)h'']^2 + [2h'(zh'-h) - h'^2 - n_1n_2n_3n_4]^2 &= \\ = (h'+n_1^2)(h'+n_2^2)(h'+n_3^2)(h'+n_4^2)&, \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$m_1 = n_1n_3 + n_1n_4 + n_3n_4, \qquad m_2 = -\frac{m_1 + n_1n_2 + n_2n_3 + n_2n_4}{2},$$
$$n_1 = \frac{\theta_0 - r_1}{2}, \qquad n_2 = \frac{\theta_0 + r_1}{2}, \qquad n_3 = \frac{-r_2 + \theta_\infty - 1}{2}, \qquad n_4 = -\frac{r_2 + \theta_\infty + 1}{2},$$
$$h' = \frac{dh}{dz}, \qquad h'' = \frac{d^2h}{dz^2}.$$

Определение. Дифференциальное уравнение (18), определяющее функцию h вида (17), будем называть h-уравнением для гамильтониана H, рассматриваемого как функция от z.

Выразим функцию h через w, w', используя первое уравнение системы (16):

$$\begin{aligned} h(z,w,w') = \frac{[z(z-1)w']^2 - [\theta_0(w-1)(w-z) + r_1w(w-z) - (r_2+1)w(w-1)]^2}{4w(w-1)(w-z)} &+ \\ + m_1z + m_2 + \frac{k^2-\theta_\infty^2}{4}(w-z)&. \end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим два частных случая уравнения (18).

1. Пусть в уравнении (18) $n_1 = n_3 = 0$, $n_2 = n_4 = p$, где p – произвольный параметр. Тогда $\theta_0 = r_1 = p$, $r_2 = -p-1$, $\theta_\infty = -p$, а параметры уравнения (1) имеют вид $\alpha = p^2/2$, $\beta = -p^2/2$, $\gamma = p^2/2$, $\delta = -(p^2+2p)/2$. Уравнение (18) принимает следующий вид:

$$[z(z-1)h'']^2 + 4h'(zh'-h)^2 - 4h'^2(zh'-h) - 2h'^2p^2 - h'p^4 = 0. \tag{20}$$

Полагая в (20) $h = h_1 + p^2/2$, относительно h_1 получим уравнение

$$[z(z-1)h_1'']^2 = -4h_1'(zh'-h_1)[(z-1)h_1' - h_1 - p^2], \tag{21}$$

которое заменой $z = -\eta$, $h_1 = -\sigma$, $p = \tilde{\delta}$ сводится к уравнению [25]

$$[\eta(\eta+1)\sigma'']^2 = 4\sigma'(\eta\sigma' - \sigma)[-\tilde{\delta}^2 + \sigma - (1+\eta)\sigma']. \tag{22}$$

Уравнение (22) получено при исследовании аксиально-симметричных вакуумных решений Эйнштейна в пространстве-времени с метрикой Керра.

2. Пусть в уравнении (18) $n_1 = n_4 = N/2$, $n_2 = (N+1)/2$, $n_3 = (1-N)/2$, где N – произвольный параметр. Тогда $\theta_0 = N + 1/2$, $r_1 = 1/2$, $r_2 = -3/2$, $\theta_\infty = -N+1/2$, а параметры уравнения (1) имеют вид

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{2}\right)^2, \qquad \beta = -\frac{1}{2}\left(N + \frac{1}{2}\right)^2, \qquad \gamma = \frac{1}{8}, \qquad \delta = -\frac{5}{8}.$$

Уравнение (18) принимает вид

$$\begin{aligned}[z(z-1)h'']^2 &= 4h'^2(zh'-h) - 4h'(zh'-h)^2 + \frac{N^2-N^4}{4}(zh'-h) + \\ &+ \left(N^2 + \frac{1}{2}\right)h'^2 + \left(\frac{N^4}{2} + \frac{1}{16}\right)h' + \frac{N^6}{16} + \frac{N^2-N^4}{32}.\end{aligned}$$

Заменой $h = y_1 + 1/8$ последнее уравнение сводится к уравнению

$$\begin{aligned}[z(z-1)y_1'']^2 &= 4y_1'^2(zy_1'-y_1) - 4y_1'(zy_1'-y_1)^2 + y_1'(zy_1'-y_1) + \\ &+ \frac{N^2-N^4}{4}(zy_1'-y_1) + \frac{N^4}{2}y_1' + \frac{N^6}{16} + N^2y_1'^2,\end{aligned}$$

которое, в свою очередь, подстановкой $y_1 = y - N^2z/4$ преобразуется в уравнение

$$\begin{aligned}[z(z-1)y'']^2 &= N^2y'^2 - 2N^2y'(zy'-y) + N^2(zy'-y)^2 + \\ &+ 4y'^2(zy'-y) - 4y'(zy'-y)^2 + y'(zy'-y)\end{aligned}$$

или

$$[z(z-1)y'']^2 = N^2[(z-1)y'-y]^2 - 4y'(zy'-y)\left[(z-1)y' - y - \frac{1}{4}\right]. \tag{23}$$

Уравнение (23) получено [26], [27] при исследовании корреляционной функции в двумерной модели Изинга с помощью теории голономных квантовых полей. Заметим, что уравнения (21) и (23) при $4p^2 = 1$, $N = 0$ совпадают.

В современной терминологии уравнение (18) – это так называемая σ-версия Окамото–Джимбо–Мива уравнения (1) [28]. Оно возникает в теории представлений, а также в теории случайных матриц [29]. Отметим, что уравнение (18), являясь уравнением P-типа (это следует из формулы (19)), имеет также однопараметрическое семейство решений $h = \lambda z + \mu$, где

$$[2\lambda\mu + \lambda^2 + n_1n_2n_3n_4]^2 = (\lambda + n_1^2)(\lambda + n_2^2)(\lambda + n_3^2)(\lambda + n_4^2).$$

Система (16) с точностью до обозначений и преобразования $2u = v$ совпадает с системой, предложенной в работе [14].

Замечание. Поскольку гамильтониан H определен с точностью до функции, зависящей от z [22], [23], то коэффициенты m_1, m_2 функции $h(z)$, задаваемой формулой (17), определяются неоднозначно.

3. НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ГАМИЛЬТОНИАНЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С УРАВНЕНИЕМ (1)

Теорема 2. *Пусть $K(z,w), L(z,w)$ – аналитические функции переменных z, w такие, что*

$$L(z,w) = \int \frac{\partial K(z,w)}{\partial z}\,dw.$$

Тогда выражение

$$H_3 = z^{-1}(z-1)^{-1}\Big[w(w-1)(w-z)u_2^2 - \theta_0(w-1)(w-z)u_2 - r_1w(w-z)u_2 + \\ + (r_2+1)w(w-1)u_2 + \frac{k^2-\theta_\infty^2}{4}(w-z)\Big] + L(z,w), \quad u_2 = u + K(z,w), \quad (24)$$

определяет гамильтониан, ассоциированный с уравнением (1). Преобразование

$$u \to pu, \qquad H_3 \to p\widetilde{H}_3,$$

где p – отличный от нуля параметр, определяет гамильтониан $\widetilde{H}_3$, также ассоциированный с уравнением (1).

Для доказательства теоремы достаточно построить систему (аналогичную системе (16)) двух дифференциальных уравнений, отвечающую гамильтониану (24), которая оказывается эквивалентной по w уравнению (1). Таким же образом доказывается, что гамильтониан $\widetilde{H}_3$ ассоциирован с уравнением (1).

Если в (24) $K(z,w) \equiv G(w)$, то гамильтониан H_3 можно записать в виде

$$H_4 = z^{-1}(z-1)^{-1}\Big[w(w-1)(w-z)u_3^2 - \theta_0(w-1)(w-z)u_3 - r_1w(w-z)u_3 + \\ + (r_2+1)w(w-1)u_3 + \frac{k^2-\theta_\infty^2}{4}(w-z)\Big], \qquad u_3 = u + G(w). \quad (25)$$

Пусть $\tilde{h}(z) = z(z-1)H_4(z) + m_1 z + m_2$. Тогда определяющее функцию $\tilde{h}$ дифференциальное уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением (18) (h-уравнением) для функции h. Это следует из того, что, как несложно убедиться, $h(z,w,w') = \tilde{h}(z,w,w')$.

Из формулы (24) следует существование рациональных (по переменной w) гамильтонианов, ассоциированных с уравнением (1).

Пример. Если в выражении для гамильтониана H_3 (24) функции $K(z,w)$ и $L(z,w)$ выбрать в виде

$$K(z,w) = \frac{\theta_0}{2w} + \frac{r_1}{2(w-1)} - \frac{r_2}{2(w-z)}, \qquad L(z,w) = \frac{r_2}{2(w-z)},$$

то он с точностью до функции от z совпадает с гамильтонианом

$$H_5 = z^{-1}(z-1)^{-1}\Big[w(w-1)(w-z)u^2 + w(w-1)u - \\ - \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\right)w + \frac{\beta z}{2w} + \frac{\gamma(z-1)}{2(w-1)} + \left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{z(z-1)}{w-z}\Big].$$

Вид гамильтониана H_3 позволяет сделать вывод о существовании ассоциированных с уравнением (1) гамильтонианов таких, что определяющие их дифференциальные уравнения не являются уравнениями P-типа. Так, например, если в выражении (24) выбрать

$$K(z,w) = \frac{z}{w}, \qquad L(z,w) = \operatorname{Ln} w,$$

то уравнение, определяющее функцию

$$s(z) = z(z-1)H_3(z) + \operatorname{Ln} w = \\ = \frac{1}{4w(w-1)(w-z)}\left([z(z-1)w']^2 - [\theta_0(w-1)(w-z) + r_1 w(w-1) - \\ - (r_2+1)w(w-1)]^2\right) + \frac{k^2 - \theta_\infty^2}{4}(w-z) + \operatorname{Ln} w,$$

не является уравнением P-типа. Это следует из вида функции $s(z)$ и того факта, что любая подвижная особая точка любого решения уравнения (1) может быть только полюсом [5].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получена формула, определяющая общий вид полиномиальных гамильтонианов, ассоциированных с уравнением (1), и доказана ее единственность. Выделен класс ассоциированных с шестым уравнением Пенлеве гамильтонианов таких, что определяющее их дифференциальное уравнение совпадает с аналогичным уравнением (h-уравнением) для простейшего полиномиального гамильтониана H. Доказано существование ассоциированных с уравнением (1) гамильтонианов, обладающих свойством, что определяющие их дифференциальные уравнения не являются уравнениями P-типа.

Аналогичные результаты (они анонсированы в [30]) справедливы для первых пяти уравнений Пенлеве.

Почти с самого начала изучения уравнений Пенлеве интерес к ним вызван не только свойством Пенлеве их решений, они были также связаны с некоторыми изомодромными свойствами линейных дифференциальных уравнений [4], [31]. Эта идея получила в последнее время представление в новом свете. Исходным моментом здесь является деформация уравнений класса Гойна добавлением ложной особой точки. Уравнения Пенлеве возникают при этом как условие того, что при изменении параметров, определяющих добавленную особую точку, данные монодромии линейного дифференциального уравнения не изменяются.

В работах [32] (см. также монографию [33]) установлено, что каждому типу уравнений Гойна соответствует определенное уравнение Эйлера–Лагранжа для лагранжиана специального вида, которое совпадает с одним из уравнений Пенлеве. Верно и обратное: каждое уравнение Пенлеве порождено соответствующим уравнением Гойна.

Список литературы

[1] R. Fuchs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **141** (1905), 555–558.

[2] B. Gambier, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **142** (1906), 266–269.

[3] K. Takasaki, *J. Math. Phys.*, **42** (2001), 1443–1473.

[4] R. Fuchs, *Math. Ann.*, **63** (1907), 301–321.

[5] P. Painlevè, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **143** (1906), 1111–1147.

[6] K. Okamoto, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **146** (1987), 337–381.

[7] Yu. I. Manin, “Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$”, *Geometry of Differential Equations*, Dedicated to V. I. Arnold on the occasion of his 60th birthday, AMS Transl, Ser. 2, **186**, eds. A. Khovanskii, A. Varchenko, V. Vassiliev, AMS, Providence, RI, 1998, 131–151.

[8] D. Guzzetti, *Commun. Pure Appl. Math.*, **55** (2002), 1280–1363.

[9] В. В. Цегельник, *Докл. АН БССР*, **29**:6 (1985), 497–500.

[10] В. И. Громак, В. В. Цегельник, *ТМФ*, **78**:1 (1989), 22–34.

[11] M. Mazzocco, *J. Phys. A*, **34** (2001), 2281–2294.

[12] B. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Groups*, Lectures given at the 1st session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) (Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993), Lecture Notes in Math., **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348; B. Dubrovin, M. Mazzocco, *Invent. Math.*, **141** (2000), 55–147; M. Mazzocco, *Math. Ann.*, **321** (2001), 157–195; F. V. Andreev, A. V. Kitaev, *Commun. Math. Phys.*, **228** (2002), 151–176; T. Masuda, *Funkc. Ekvacioj. Ser. Int.*, **46** (2003), 121–171.

[13] Н. А. Лукашевич, А. И. Яблонский, *Дифф. уравнения*, **3** (1967), 520–523.

[14] Н. А. Лукашевич, *Дифф. уравнения*, **8** (1972), 1404–1408.

[15] В. И. Громак, Н. А. Лукашевич, *Дифф. уравнения*, **18** (1982), 419–429.

[16] A. V. Kitaev, *J. Phys.*, **23** (1990), 3543–3553; A. S. Fokas, Y. C. Yourtsos, *Lett. Nuovo Cimento*, **30** (1981), 539–544.

[17] A. V. Kitaev, *Lett. Math. Phys.*, **21** (1991), 105–111; V. E. Adler, *Physica D*, **73** (1994), 335–351; F. Nijhoff, A. Hone, N. Joshi, *Phys. Lett. A*, **264** (2000), 396–406; R. Conte, M. Mussette, *Phys. Lett. A*, **34** (2001), 10507–10522.

[18] F. Nijhoff, A. Hone, N. Joshi, *Phys. Lett. A*, **267** (2000), 147–156; W. K. Schief, *Phys. Lett. A*, **267** (2000), 265–275.

[19] V. I. Gromak, "Bäcklund transformations of Painlevè equations and their applications", *The Painlevè Property. One Century Later* (Cargèse School, 3–22 June, 1996), CRM Ser. in Math. Phys., ed. R. Conte, Springer, New York, 1999, 687–734.
[20] K. Okamoto, *Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci.*, **56**:6 (1980), 264–268; **56**:8, 367–371.
[21] J. Malmquist, *Ark. Mat.*, *Astron. Fys.*, **17**:8 (1923), 1–89.
[22] M. Jimbo, T. Miwa, *Physica D*, **2** (1981), 407–448.
[23] M. Jimbo, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **18** (1982), 1137–1161.
[24] В. И. Громак, Н. А. Лукашевич, *Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве*, Университетское издательство, Минск, 1990.
[25] C. M. Cosgrove, *J. Phys. A*, **10** (1977), 1481–1524; P. Dale, *Proc. Roy. Soc. London. A*, **362** (1978), 463–464; Э. Шмутцер (ред.), *Точные решения уравнений Эйнштейна*, Энергоиздат, М., 1982.
[26] M. Jimbo, T. Miwa, *Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci.*, **56** (1980), 405–410.
[27] M. Kashiwara, T. Miwa, *Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci.*, **57** (1981), 342–347.
[28] P. Haine, J.-P. Semengue, *J. Math. Phys.*, **40** (1999), 2117–2134.
[29] A. Borodin, P. Deift, *Commun. Pure Appl. Math.*, **55** (2002), 1160–1230; N. S. Witte, P. J. Forrester, *Nagoya Math. J.*, **174** (2004), 29–114.
[30] В. В. Цегельник, *Докл. БГУИР*, 2004, № 2, 64–72.
[31] L. Schlesinger, *J. Math.*, **141** (1912), 96–145; G. Mahoux, "Introduction to the theory of isomonodromic deformations on linear ordinary differential equations with rational coefficients", *The Painlevè Property. One Century Later* (Cargèse School, 3–22 June, 1996), CRM Ser. in Math. Phys., ed. R. Conte, Springer, New York, 1999, 35–76.
[32] S. Yu. Slavyanov, *J. Phys. A*, **29** (1996), 7329–7335; С. Ю. Славянов, *ТМФ*, **123**:3 (2000), 395–406.
[33] С. Славянов, В. Лай, *Специальные функции*: *единая теория*, *основанная на анализе особенностей*, Невский диалект, С.-Пб., 2002.

Поступила в редакцию 6.07.2006,
после доработки 8.09.2006