Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Индивидуальные задания по курсу высшей математики

для студентов радиотехнических специальностей
дневной формы обучения

Минск БГУИР 2011

УДК 517.5(076)
ББК 22.161.5я73
Т33

С о с т а в и т е л и:
О. Ф. Борисенко, Л. А. Конюх, Н. И. Кобринец

Р е ц е н з е н т:
заведующий кафедрой информатики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», доктор физико-математических наук, профессор Л. И. Минченко

Т33 **Теория** функций комплексной переменной. Операционное исчисление: индивидуальные задания по курсу высшей математики для студ. радиотехнических спец. днев. формы обуч. / О. Ф. Борисенко, Л. А. Конюх, Н. И. Кобринец. – Минск : БГУИР, 2011. – 43 с.
ISBN 978-985-488-746-3.

Издание содержит десять вариантов индивидуальных заданий по следующим темам теории функций комплексной переменной и операционного исчисления: элементарные функций комплексной переменной, аналитические функции, интегрирование функций комплексной переменной, интегральная формула Коши, ряды в комплексной области, нули и изолированные особые точки аналитической функции, вычеты и их приложения, операционное исчисление.

Издание предназначено для самостоятельной работы студентов, а также может быть использовано для проведения практических занятий.

УДК 517.5(076)
ББК 22.161.5я73

ISBN 978-985-488-746-3

Глава 1. Элементарные ф.к.п. Аналитические функции

Задача 1. Найдите модули и аргументы комплексных чисел $(-\pi < \arg z \le \pi)$

1.1. $z = 2 - 3i.$ Ответ: $r = \sqrt{13}$, $\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$

1.2. $z = -1 - 3i.$ Ответ: $r = \sqrt{10}$, $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg} 3.$

1.3. $z = -2 + i.$ Ответ: $r = \sqrt{5}$, $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$

1.4. $z = 4 - 2i.$ Ответ: $r = \sqrt{20}$, $\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$

1.5. $z = -3 - 4i.$ Ответ: $r = 5$, $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$

1.6. $z = -5 + 2i.$ Ответ: $r = \sqrt{29}$, $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{5}.$

1.7. $z = 5 - i.$ Ответ: $r = \sqrt{26}$, $\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{1}{5}.$

1.8. $z = -4 - 5i.$ Ответ: $r = \sqrt{41}$, $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{5}{4}.$

1.9. $z = -3 + 5i.$ Ответ: $r = \sqrt{34}$, $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{3}.$

1.10. $z = -7.$ Ответ: $r = 7$, $\varphi = \pi.$

Задача 2. Найдите все значения корня

2.1. $\sqrt[3]{2\sqrt{3} - 2i}.$ Ответ: $W_0 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right).$

$$W_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{11}{18}\pi + i\sin\frac{11}{18}\pi\right).$$

$$W_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\frac{13}{18}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{13}{18}\pi\right)\right).$$

2.2. $\sqrt[3]{3 - 3i}.$ Ответ: $W_0 = \sqrt[6]{18}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$

$$W_1 = \sqrt[6]{18}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right).$$

$$W_2 = \sqrt[6]{18}\left(\cos\left(-\frac{9}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{9}{12}\pi\right)\right).$$

2.3. $\sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}}$.

Ответ: $W_0=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)\right)$.

$W_1=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\left(\cos\dfrac{5}{9}\pi+i\sin\dfrac{5}{9}\pi\right)$.

$W_2=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{7}{9}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{7}{9}\pi\right)\right)$.

2.4. $\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}i}$.

Ответ: $W_0=\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\dfrac{2}{9}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{2}{9}\pi\right)\right)$.

$W_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\dfrac{4}{9}\pi+i\sin\dfrac{4}{9}\pi\right)$.

$W_2=\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(-\dfrac{8}{9}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{8}{9}\pi\right)\right)$.

2.5. $\sqrt[3]{\dfrac{-1-i}{2}}$.

Ответ: $W_0=\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{3}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{3}{12}\pi\right)\right)$.

$W_1=\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}}\left(\cos\dfrac{5}{12}\pi+i\sin\dfrac{5}{12}\pi\right)$.

$W_2=\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{11}{12}\pi\right)\right)$.

2.6. $\sqrt[3]{-3-\sqrt{3}-3i}$.

Ответ: $W_0=\sqrt[3]{6}\left(\cos\left(-\dfrac{5}{18}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{5}{18}\pi\right)\right)$.

$W_1=\sqrt[3]{6}\left(\cos\dfrac{7}{18}\pi+i\sin\dfrac{7}{18}\pi\right)$.

$W_2=\sqrt[3]{6}\left(\cos\left(-\dfrac{17}{18}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{17}{18}\pi\right)\right)$.

2.7. $\sqrt[3]{-4\sqrt{3}+4i}$.

Ответ: $W_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\dfrac{5}{18}\pi+i\sin\dfrac{5}{18}\pi\right)$.

$W_1=\sqrt[3]{8}\left(\cos\dfrac{17}{18}\pi+i\sin\dfrac{17}{18}\pi\right)$.

$W_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(-\dfrac{7}{18}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{7}{18}\pi\right)\right)$.

2.8. $\sqrt[3]{-5+5i}$.

Ответ: $W_0=\sqrt[6]{50}\left(\cos\dfrac{3}{12}\pi+i\sin\dfrac{3}{12}\pi\right)$.

$$W_1 = \sqrt[6]{50}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right).$$

$$W_2 = \sqrt[6]{50}\left(\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right).$$

2.9. $\sqrt[3]{-4+4\sqrt{3}i}$. Ответ: $W_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi\right).$

$$W_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{8}{9}\pi + i\sin\frac{8}{9}\pi\right).$$

$$W_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(-\frac{4}{9}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{4}{9}\pi\right)\right).$$

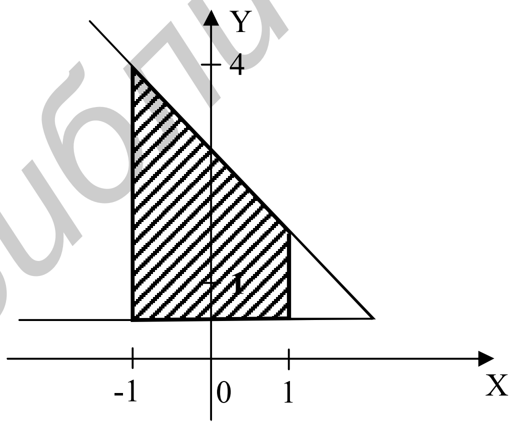
2.10. $\sqrt[3]{6+6\sqrt{3}i}$. Ответ: $W_0 = \sqrt[3]{12}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right).$

$$W_1 = \sqrt[3]{12}\left(\cos\frac{7}{9}\pi + i\sin\frac{7}{9}\pi\right).$$

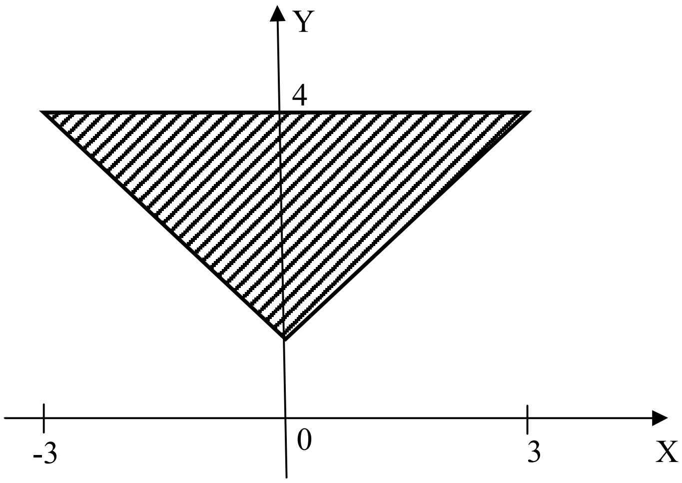
$$W_2 = \sqrt[3]{12}\left(\cos\left(-\frac{5}{9}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{9}\pi\right)\right).$$

Задача 3. Изобразите на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям

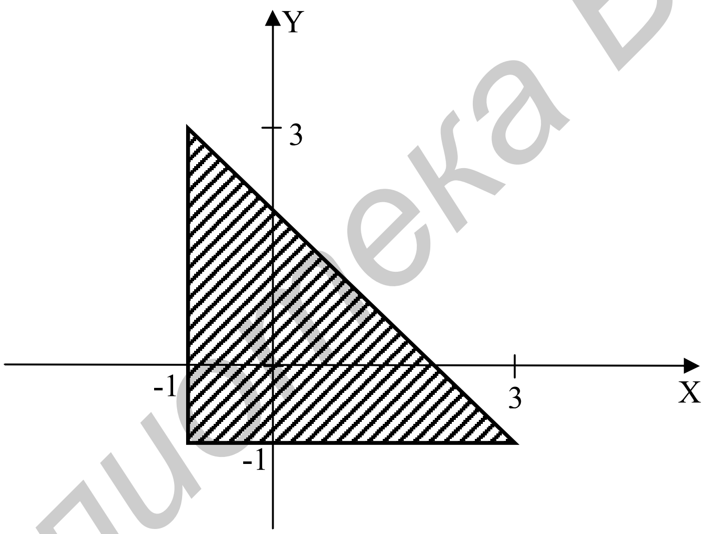
3.1. $\frac{3\pi}{4} \le \arg(z-2-i) \le \pi, \quad |\operatorname{Im} iz| \le 1.$



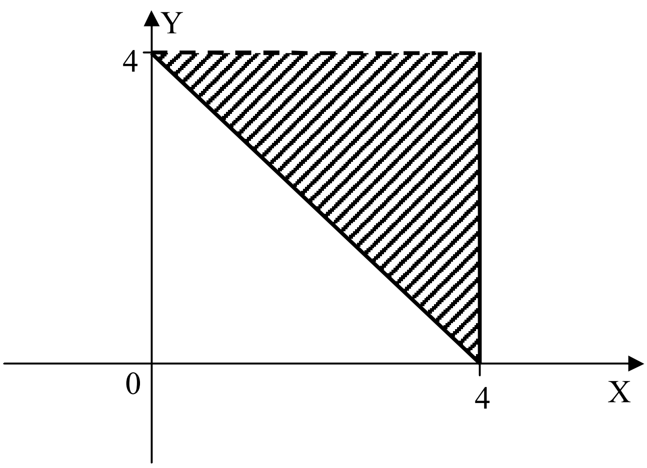
3.2. $\frac{\pi}{4} \le \arg(2-i) \le \frac{3\pi}{4}, \quad \operatorname{Re} iz \ge 4.$



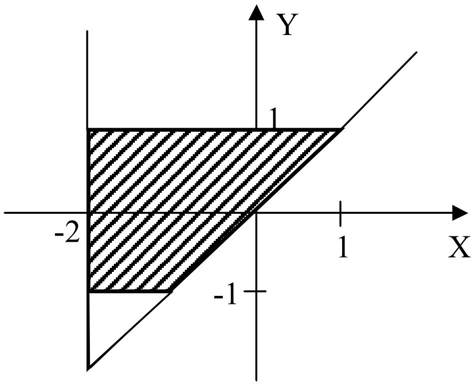
3.3. $0 \le \arg(z+1+i) \le \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} iz \ge \operatorname{Re}(z-2).$



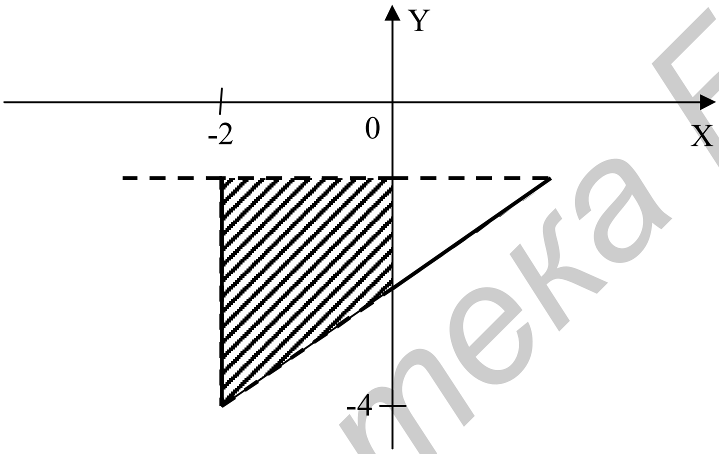
3.4. $-\pi < \arg(z-4-4i) \le -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} z \ge \operatorname{Im}(4i-z).$



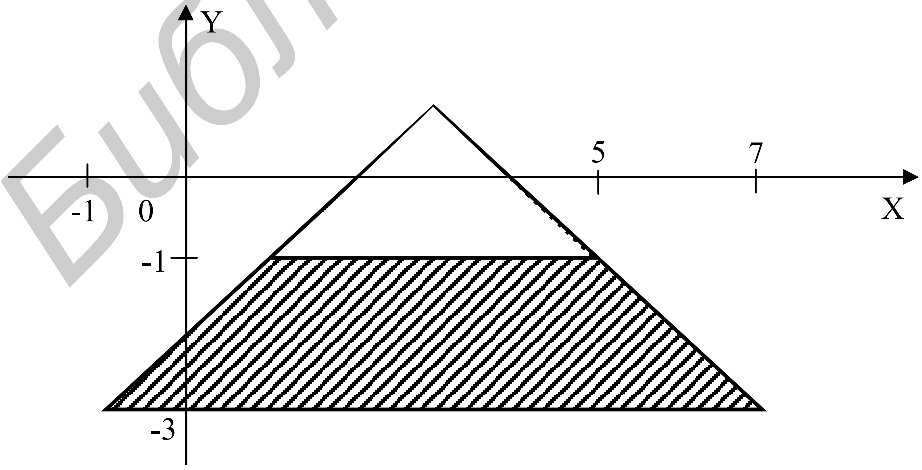
3.5. $\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z + 2 + 2i) \le \dfrac{\pi}{2}, \quad |\operatorname{Re} iz| \le 1.$



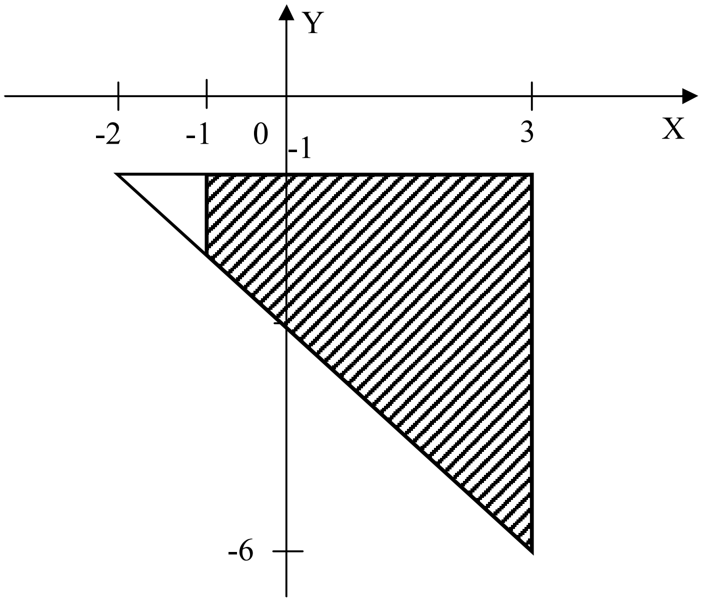
3.6. $-\pi < \arg(z - 2 + i) \le -\dfrac{3}{4}\pi, \quad |\operatorname{Im}(iz + i)| \le 1.$



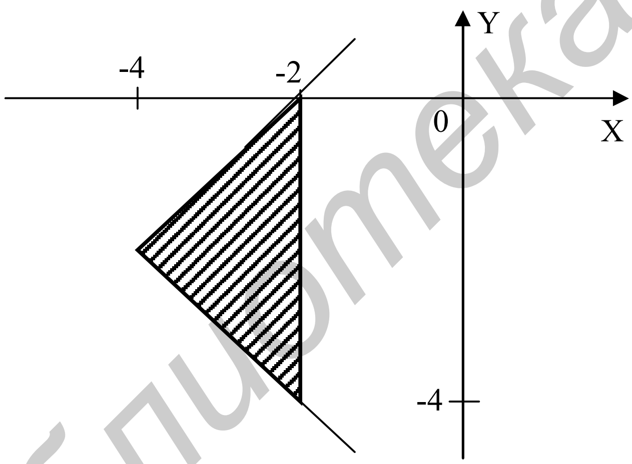
3.7. $-\dfrac{3\pi}{4} \le \arg(z - 3 - i) \le -\dfrac{\pi}{4}, \quad |\operatorname{Re}(iz - 2)| \le 1.$



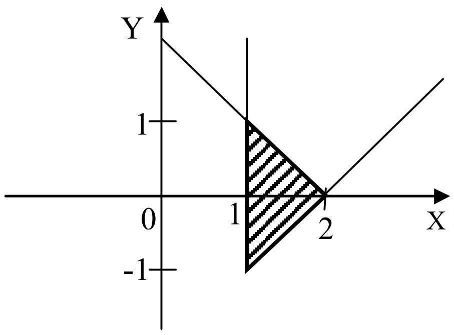
3.8. $-\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z+2+i) \le 0, \quad |\mathrm{Im}(iz-i)| \le 2.$



3.9. $-\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z+4+2i) \le \dfrac{\pi}{4}, \quad \mathrm{Im}\, 2iz \le \mathrm{Re}(z-2).$



3.10. $\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z-1+i) \le \dfrac{\pi}{2}, \quad \mathrm{Re}\, z \le \mathrm{Im}(2i-z).$



Задача 4. Представьте в алгебраической форме комплексное число

4.1. $\sin(1+2i)$. Ответ: $\operatorname{ch}2\cdot\sin 1 + i\operatorname{sh}2\cdot\cos 1$.

4.2. $\ln(3+4i)$. Ответ: $\ln 5 + i(\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2k\pi),\ k\in z$.

4.3. 2^{1+i}. Ответ: $e^{\ln 2 - 2k\pi}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2),\ k\in z$.

4.4. $\operatorname{Arcsin}2$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln(2-\sqrt{3}),\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln(2+\sqrt{3}),\quad k\in z$.

4.5. $\cos(1-i)$. Ответ: $\cos 1\cdot\operatorname{ch}1 + i\sin 1\cdot\operatorname{sh}1$.

4.6. $\operatorname{ch}(1+i)$. Ответ: $\operatorname{ch}1\cdot\cos 1 + i\operatorname{sh}1\cdot\sin 1$.

4.7. $\operatorname{sh}(-2+i)$. Ответ: $i\sin 1\cdot\operatorname{ch}2 - \cos 1\cdot\operatorname{sh}2$.

4.8. i^{2i}. Ответ: $e^{-\pi+4k\pi},\ k\in z$.

4.9. $\ln(2-i)$. Ответ: $\ln\sqrt{5} - i\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

4.10. $\operatorname{Arctg}2i$. Ответ: $\frac{\pi}{2} + k\pi + i\frac{\ln 3}{2},\ k\in z$.

Задача 5. Определите вид кривой, заданной соотношениями:

5.1. $|z+4-10i| = |z-4-2i|$. Ответ: $y = x+6$.

5.2. $|z+4-i| = |z-2-7i|$. Ответ: $y = -x+3$.

5.3. $|z+3-9i| = |z-5-i|$. Ответ: $y = x+4$.

5.4. $|z+6+i| = |z+2-3i|$. Ответ: $y = -x-3$.

5.5. $|z-2-i| = |z-6+3i|$. Ответ: $y = x-5$.

5.6. $|z+3+2i| = |z-1-2i|$. Ответ: $y = -x-1$.

5.7. $|z+2-5i| = |z-4+i|$. Ответ: $y = x+1$.

5.8. $|z+2+i| = |z-2-3i|$. Ответ: $y = -x+1$.

5.9. $|z-2+i| = |z+4-5i|$. Ответ: $y = x+3$.

5.10. $|z-1+i| = |z-5-3i|$. Ответ: $y = -x+4$.

Задача 6. Проверьте, изменился ли угол между заданными прямыми при отображении $w = f(z)$

6.1. $y = 2$ и $y = x+1$, $w = (1+i)z + 1 - i$. Ответ: нет.

6.2. $x = 1$ и $y = x-1$, $w = (1-i)z + 1 + i$. Ответ: нет.

6.3. $y = 1$ и $y = -x+1$, $w = (-1-i)z + 1 + 2i$. Ответ: нет.

6.4. $x=2$ и $y=-x-1$, $w=(-1+i)z+2+i$. Ответ: нет.
6.5. $y=-1$ и $y=x+2$, $w=(2+2i)2+2-i$, Ответ: нет.
6.6. $x=3$ и $y=-x-2$, $w=(1+i)z-1-i$. Ответ: нет.
6.7. $y=3$ и $y=x-3$, $w=(1-i)z-1-2i$. Ответ: нет.
6.8. $x=-1$ и $y=x+3$, $w=(-1-i)z+1-2i$. Ответ: нет.
6.9. $y=-2$ и $y=-x-3$, $w=(-1+i)z-2-i$. Ответ: нет.
6.10. $x=-3$ и $y=x-1$, $w=(2-2i)z-2-2i$. Ответ: нет.

Задача 7. Исследуйте на дифференцируемость функцию $f(z)$, найдите ее производную, если она существует. Найдите область аналитичности функции

7.1. $f(z)=(z-i)\operatorname{Re}(z-1)$. Ответ: $f'(z)\big|_{z=i}=-1$. Функция не является аналитической.
7.2. $f(z)=(z-1)\operatorname{Im}(z+2i)$. Ответ: $f'(z)\big|_{z=1}=2$. Функция не является аналитической.
7.3. $f(z)=(z-2i)\operatorname{Re}(z+1)$. Ответ: $f'(z)\big|_{z=2i}=1$. Функция не является аналитической.
7.4. $f(z)=(z-2)\operatorname{Im}(z+3i)$. Ответ: $f'(z)\big|_{z=2}=3$. Функция не является аналитической.
7.5. $f(z)=(z-3i)\operatorname{Re}(z-2)$. Ответ: $f'(z)\big|_{z=3i}=-2$. Функция не является аналитической.
7.6. $f(z)=(z+2)\operatorname{Im}(z-3i)$. Ответ: $f'(z)\big|_{z=-2}=-3$. Функция не является аналитической.
7.7. $f(z)=(z+2i)\operatorname{Re}(z+5)$. Ответ: $f'(z)\big|_{z=-2i}=5$. Функция не является аналитической.
7.8. $f(z)=(z+3)\operatorname{Im}(z+4i)$. Ответ: $f'(z)\big|_{z=-3}=4$. Функция не является аналитической.
7.9. $f(z)=(z+3i)\operatorname{Re}(z-6)$. Ответ: $f'(z)\big|_{z=-3i}=-6$. Функция не является аналитической.
7.10. $f(z)=(z-3)\operatorname{Im}(z-4i)$. Ответ: $f'(z)\big|_{z=3}=-4$. Функция не является аналитической.

Задача 8. Используя условия Коши-Римана, докажите аналитичность следующих функций

8.1. $f(z)=e^{-z^2}$. 8.2. $f(z)=(iz)^3$.

8.3. $f(z)=e^{iz^2}$.

8.4. $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$, $(z\neq 2)$.

8.5. $f(z)=ze^{2z}$.

8.6. $f(z)=\sin 2z$.

8.7. $f(z)=\cos\dfrac{z}{2}$.

8.8. $f(z)=\operatorname{sh} z$.

8.9. $f(z)=\operatorname{ch} z$.

8.10. $f(z)=\dfrac{1}{z-i}$, $(z\neq i)$.

Задача 9. Восстановите аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной части $U(x,y)$ или мнимой $V(x,y)$ и значению $f(z_0)$

9.1. $U(x,y)=2x^2-2y^2-3y+1$, $f(1)=3+3i$. Ответ: $f(z)=2z^2+3iz+1$.

9.2. $U(x,y)=-3x^2+3y^2-2y$, $f(1)=-3+4i$. Ответ: $f(z)=-3z^2+2iz+zi$.

9.3. $U(x,y)=-2xy+3x$, $f(1)=3+4i$. Ответ: $f(z)=iz^2+3z+3i$.

9.4. $U(x,y)=2xy+2x-1$, $f(1)=-i+1$. Ответ: $f(z)=-iz^2+2z-1$.

9.5. $U(x,y)=4xy+x$, $f(1)=1-3i$. Ответ: $f(z)=-2iz^2+z-i$.

9.6. $V(x,y)=4xy+3x+5$, $f(1)=2+8i$. Ответ: $f(z)=2z^2+3iz+5i$.

9.7. $V(x,y)=-6xy+2x$, $f(1)=1+2i$. Ответ: $f(z)=-3z^2+2iz+4$.

9.8. $V(x,y)=x^2-y^2+3y+4$, $f(1)=3+5i$. Ответ: $f(z)=iz^2+3z+4i$.

9.9. $V(x,y)=y^2-x^2+2y-6$, $f(1)=2-7i$. Ответ: $f(z)=-iz^2+2z-6i$.

9.10. $V(x,y)=2y^2-2x^2+y$, $f(1)=-7-2i$. Ответ: $f(z)=-2iz^2+z-8$.

Глава 2. Интегрирование ф.к.п. Интегральная формула Коши

Задача 1. Вычислите интеграл от функции комплексного переменного по заданной кривой

1.1. $\int\limits_{AB}(z+2\bar{z})dz$, AB – отрезок прямой $z_A=1+3i$, $z_B=2+5i$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}(25+10i)$.

1.2. $\int\limits_{AB}(z-2\bar{z})dz$, AB – отрезок прямой $z_A=1+i$, $z_B=2+3i$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}(-27+6i)$.

1.3. $\int\limits_{AB}(3z+\bar{z})dz,$ AB – отрезок прямой $z_A=-2+5i,\ z_B=-1+3i.$

Ответ: $-6+12i.$

1.4. $\int\limits_{AB}(3z-\bar{z})dz,$ AB – отрезок прямой $z_A=-2+3i,\ z_B=-1+i.$

Ответ: $13+16i.$

15. $\int\limits_{AB}(3z+2\bar{z})dz,$ AB – отрезок прямой $z_A=1+4i,\ z_B=2+7i.$

Ответ: $25i.$

1.6. $\int\limits_{AB}(2z+\bar{z})dz,$ AB – отрезок прямой $z_A=-2-3i,\ z_B=-1-i.$

Ответ: $\frac{1}{2}(-1-22i).$

1.7. $\int\limits_{AB}(2z-\bar{z})dz,$ AB – отрезок прямой $z_A=-2-5i,\ z_B=-1-3i.$

Ответ: $\frac{1}{2}(45-30i).$

1.8. $\int\limits_{AB}(z+3\bar{z})dz,$ AB – отрезок прямой $z_A=1-i,\ z_B=2-3i.$

Ответ: $14-8i.$

1.9. $\int\limits_{AB}(z-3\bar{z})dz,$ AB – отрезок прямой $z_A=1-3i,\ z_B=2-5i.$

Ответ: $29-10i.$

1.10. $\int\limits_{AB}(3z-2\bar{z})dz,$ AB – отрезок прямой $z_A=-2-5i,\ z_B=-1-2i.$

Ответ: $-51+22i.$

Задача 2. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислите интегралы

2.1. $\int\limits_{|z|=1}\frac{\operatorname{ch} z}{z^2+22}dz.$ Ответ: $\pi i.$

2.2. $\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin z}{z^2-4}dz.$ Ответ: $\frac{\pi i}{2}\sin 2.$

2.3. $\int\limits_{|z-i|=1}\frac{\operatorname{sh} z}{z^2+1}dz.$ Ответ: $-i\pi\sin 1.$

2.4. $\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2-32}dz.$ Ответ: $-\frac{2}{3}\pi i.$

2.5. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=0,5} \frac{e^{z^2}}{z^2-1}\,dz.$ Ответ: $\pi ie.$

2.6. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z^2+32}\,dz.$ Ответ: $\dfrac{2}{3}\pi i.$

2.7. $\displaystyle\int\limits_{|z+3|=1} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+32}\,dz.$ Ответ: $-\dfrac{2}{3}\pi i\cos 3.$

2.8. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2,5} \frac{dz}{z^2-5z+6}.$ Ответ: $-2\pi i.$

2.9. $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z^2+9}.$ Ответ: $\dfrac{\pi}{3}.$

2.10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3}\,dz.$ Ответ: $\pi\operatorname{sh}1.$

Задача 3. Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, вычислите интегралы

3.1. $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{e^{z-3}}{(z-1)(z-5)}\,dz.$ Ответ: $\pi i\operatorname{sh}2.$

3.2. $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{\sin(z+3)}{(z+1)(z+5)}\,dz.$ Ответ: $\pi i\sin 2.$

3.3. $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{\cos(z+3)}{(z+2)(z+4)}\,dz.$ Ответ: $0.$

3.4. $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{e^{z^2+4}}{(z-2i)(z-4i)}\,dz.$ Ответ: $\pi(e^{-12}-1).$

3.5. $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{e^{i\pi z}}{z^2-5z}\,dz.$ Ответ: $-\dfrac{4}{5}\pi i.$

3.6. $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{e^{(z+2)(z+i)}}{(z+2)(z+i)}\,dz.$ Ответ: $0.$

3.7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{\operatorname{sh}(z+2)}{(z-1)(z+5)}\,dz.$ Ответ: $\dfrac{2}{3}\pi i\operatorname{sh}3.$

3.8. $\int\limits_{|z|=10} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{(z-1)(z+3)}\,dz.$ Ответ: 0.

3.9. $\int\limits_{|z|=10} \frac{\cos(z-3)}{(z-3)(z+2)}\,dz.$ Ответ: $\frac{2\pi i}{5}(1-\cos 5).$

3.10 $\int\limits_{|z|=10} \frac{\operatorname{sh}(z-2)}{(z-3)(z+3)}\,dz.$ Ответ: $\frac{\pi i}{3}(\operatorname{sh}1+\operatorname{sh}5).$

Задача 4. Вычислите интегралы, используя формулу n-й производной для аналитической функции

4.1. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz.$ Ответ: $-\pi i\operatorname{ch}1.$

4.2. $\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{dz}{(z^2+3)^2}.$ Ответ: $\frac{\pi}{54}.$

4.3. $\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z+2)^4}\,dz.$ Ответ: $\frac{\pi i}{3e^2}.$

4.4. $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}.$ Ответ: $\frac{3\pi i}{8}.$

4.5. $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\,dz.$ Ответ: $-\pi i.$

4.6. $\int\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2}\,dz.$ Ответ: $-2\pi i\operatorname{sh}1.$

4.7. $\int\limits_{|z|=2} \frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}\,dz.$ Ответ: $-\frac{5}{8}\pi i.$

4.8. $\int\limits_{|z|=0,5} \frac{z+1}{z^2(z-1)^2}\,dz.$ Ответ: $6\pi i.$

4.9. $\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{dz}{z(z^2+4)^2}.$ Ответ: $-\frac{\pi i}{16}.$

4.10 $\int\limits_{|z|=1/2} \frac{1-\sin z}{z^2}\,dz.$ Ответ: $-2\pi i.$

Глава 3. Ряды в комплексной области

Задача 1. Исследуйте на сходимость ряды

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}+in}$. Ответ: ряд расходится.

1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

1.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n+i}{n^2}$. Ответ: ряд сходится условно.

1.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin in}{5^n}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

1.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2+i)^n}{n\cdot 2^n}$. Ответ: ряд расходится.

1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2-i}{3}\right)^{n^2}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos in}{2^n}$. Ответ: ряд расходится.

1.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin in^2}{3^{n^2}}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\cos \pi n \cdot \sin \dfrac{1}{n} + i\dfrac{2^n}{n!})$. Ответ: ряд сходится условно.

1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i2n}}{n\sqrt{n}}$. Ответ: ряд сходится абсолютно.

Задача 2. Найдите область сходимости степенных рядов

2.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n(1-i)^n}{\sqrt{(3n-2)\cdot 8^n}}(z-i+1)^n$. Ответ: $|z-i+1|<\dfrac{1}{3}$.

2.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n(1-2i)^n}{\sqrt{(2n+1)\cdot 10^n}}(z-i-1)^n$. Ответ: $|z-i-1|<\dfrac{\sqrt{2}}{7}$.

2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n(1+3i)^n}{\sqrt{(3n-1)\cdot 5^n}}(z-2i+1)^n$. Ответ: $|z-2i+1|<\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n(2-3i)^n}{\sqrt{(2n+5)\cdot 26^n}}(z-i+3)^n.$ Ответ: $|z-i+3| < \dfrac{\sqrt{2}}{5}.$

2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9^n(1+2i)^n}{\sqrt{(3n+7)\cdot 15^n}}(z+2i-4)^n.$ Ответ: $|z+2i-4| < \dfrac{\sqrt{3}}{9}.$

2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n(1-3i)^n}{\sqrt{(n+5)\cdot 2^n}}(z-3i+4)^n.$ Ответ: $|z-3i+4| < \dfrac{\sqrt{5}}{35}.$

2.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n(1+i)^n}{\sqrt{(4n+5)\cdot 18^n}}(z-2i+5)^n.$ Ответ: $|z-2i+5| < \dfrac{3}{5}.$

2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n(2+3i)^n}{\sqrt{(3n+2)\cdot 52^n}}(z+3i-4)^n.$ Ответ: $|z+3i-4| < \dfrac{1}{2}.$

2.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n(4+i)^n}{\sqrt{(2n+7)\cdot 34^n}}(z-5i+1)^n.$ Ответ: $|z-5i+1| < \dfrac{\sqrt{2}}{3}.$

2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n(5-i)^n}{\sqrt{(3n+8)\cdot 13^n}}(z+5i+2)^n.$ Ответ: $|z+5i+2| < \dfrac{\sqrt{2}}{14}.$

Задача 3. Разложите в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 заданную функцию

3.1. $f(z) = \dfrac{1}{1-5z+6z^2}, \quad z_0 = 0.$ Ответ: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (3^{n+1} - 2^{n+1})z^n, |z| < \dfrac{1}{3}.$

3.2. $f(z) = \dfrac{z}{1+z-2z^2}, \quad z_0 = 0.$ Ответ: $f(z) = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-(-2)^n z^n), \quad |z| < \dfrac{1}{2}.$

3.3. $f(z) = \dfrac{12-5z}{6-5z-z^2}, \quad z_0 = 0.$ Ответ: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+\dfrac{(-1)^n}{6^n})z^n, \quad |z| < 1.$

3.4. $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-2z-3}, \quad z_0 = 1.$ Ответ: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n+3}}\left((-1)^{n+1}-5\right)\times$
$\times(z-1)^n, \quad |z-1| < 2.$

3.5. $f(z) = \dfrac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3}, \quad z_0 = 0.$ Ответ: $f(z) = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)z^n,$
$|z-1| < 1.$

3.6. $f(z)=\dfrac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3}, \quad z_0=3.$

Ответ: $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n+1}{6^{n+1}}(z-3)^n, \quad |z-3|<2.$

3.7. $f(z)=\dfrac{3z+1}{z^2+5z+6}, \quad z_0=1.$

Ответ: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2}{4^n}-\dfrac{5}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n, \quad |z-1|<3.$

3.8. $f(z)=\sin(2z-1), \quad z_0=0.$

Ответ: $f(z)=\cos 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sin 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n}z^{2n}}{(2n)!}, \quad z\in C.$

3.9. $f(z)=\ln(2+z-z^2), \quad z_0=0.$

Ответ: $f(z)=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left((-1)^{n-1}-\dfrac{1}{2^n}\right)z^n, \quad |z|<1.$

3.10. $f(z)=\cos^2\dfrac{iz}{2}, \quad z_0=0.$ Ответ: $f(z)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z\in C.$

Задача 4. Данную функцию разложите в ряд Лорана в окрестности точки z_0

4.1. $z\cos\dfrac{1}{z+3}, \quad z_0=-3.$ Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z+3)^{2n-1}(2n)!}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z+3)^2(2n)!}.$

4.2. $(z+1)e^{\frac{z}{z-2}}, \quad z_0=2.$ Ответ: $e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-2)^{n-1}n!}+3e\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-2)^2 n!}.$

4.3. $(z+2)\sin\dfrac{2}{z-1}, \quad z_0=1.$

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(z-1)^{2n}(2n+1)!}+3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(z-1)^{2n+1}(2n+1)!}.$

4.4. $\sin\dfrac{z-1}{z-2}, \quad z_0=2.$

Ответ: $\sin 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(z-2)^{2n}(2n)!}+\cos 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-2)^{2n+1}(2n+1)!}.$

4.5. $\cos\dfrac{z+1}{z+2}$, $\quad z_0=-2$.

Ответ: $\cos 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(-1)^n}{(z+2)^{2n}(2n)!}+\sin 1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z+2)^{2n+1}(2n+1)!}$.

4.6. $\dfrac{1}{2z+3}$, $\quad z_0=\infty$. Ответ: $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{z^{n+1}}$.

4.7. $\dfrac{1}{3z-2}$, $\quad z_0=\infty$. Ответ: $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{z^{n+1}}$.

4.8. $\dfrac{\sin^2 z}{z^3}$, $\quad z_0=0$. Ответ: $\dfrac{1}{2z^3}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n-1}z^{2n-3}}{(2n)!}$.

4.9. $\dfrac{\cos^2 2z}{z^5}$, $\quad z_0=0$. Ответ: $\dfrac{1}{2z^5}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^{2n}z^{2n-5}}{(2n)!}$.

4.10. $\sin\dfrac{2z-1}{z+1}$, $\quad z_0=1$.

Ответ: $\sin 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^{2n}}{(z+1)^{2n}(2n)!}-\cos 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(z+1)^{2n+1}(2n+1)!}$.

Задача 5. Разложите указанные функции в ряд Лорана в заданном кольце

5.1. $\dfrac{3z}{z^2+z-5}$, $\quad 1<|z|<2$. Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{z^n}{2^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}$.

5.2. $\dfrac{2}{z^2-1}$, $\quad 1<|z+2|<3$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z+2)^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$.

5.3. $\dfrac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3}$, $\quad 1<|z|<3$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}z^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$.

5.4. $\dfrac{z^2-2z-3}{(z-1)^2(z+3)}$, $\quad 0<|z-1|<4$.

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3(-1)^n}{2^{n+3}}(z-1)^n+\dfrac{1}{4(z-1)}-\dfrac{1}{(z-1)^2}$.

5.5. $\dfrac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3}$, $\quad 0<|z-1|<4$. Ответ: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}(z-1)^n+\frac{1}{4}-\frac{1}{z-1}$.

5.6. $\dfrac{1}{z^2+1}$, $\quad 0<|z-i|<2$. Ответ: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}$.

5.7. $\dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$, $\quad 0<|z+1|<4$. Ответ: $-\dfrac{1/4}{z+1}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5(z+1)^n}{4^{n+2}}$.

5.8. $\dfrac{z}{(z+3)(z+2)^2}$, $\quad 0<|z+2|<1$.

Ответ: $\dfrac{3}{z+2}-\dfrac{2}{(z+2)^2}-3\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+2)^n$.

5.9. $\dfrac{1}{(z-1)(1-2z)}$, $\quad \dfrac{1}{2}<|z|<1$. Ответ: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^n z^{n+1}}\right)$.

5.10. $\dfrac{1}{(z-2)(z-5)}$, $\quad 2<|z|<5$. Ответ: $-\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{5^{n+1}}+\frac{2^n}{z^{n+1}}\right)$.

Глава 4. Нули и изолированные особые точки аналитической функции

Задача 1. Для заданных функций определите порядок нуля в точке z_0

1.1. $f(z)=z^3+8z^2+20z+16+(1-\cos\pi z)^3$, $\quad z_0=-2$.

Ответ: нуль второго порядка.

1.2. $f(z)=\left(e^z-1\right)^3-\sin^4 z$, $\quad z_0=0$. Ответ: нуль третьего порядка.

1.3. $f(z)=\sin^2 z\left(e^{z^2}-1\right)^3$, $\quad z_0=0$. Ответ: нуль восьмого порядка.

1.4. $f(z)=1-\sin^3 z-\cos z$, $\quad z_0=\pi$. Ответ: нуль второго порядка.

1.5. $f(z)=\dfrac{\cos^4\pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}$, $\quad z_0=-\dfrac{1}{2}$. Ответ: нуль третьего порядка.

1.6. $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z(z+\pi)}$, $\quad z_0=-\pi$. Ответ: нуль первого порядка.

1.7. $f(z)=\dfrac{1}{z^6}-\dfrac{z^2+z+1}{z^8}$, $\quad z_0=\infty$. Ответ: нуль седьмого порядка.

1.8. $f(z)=\left(e^z-1\right)^2-\sin^2 z$, $\quad z_0=0$. Ответ: нуль третьего порядка.

1.9. $f(z)=\dfrac{z^3-\sin^2 z^2}{\cos z^2-1}, \quad z_0=0.$ Ответ: нуль третьего порядка.

1.10. $f(z)=\left(e^{z^2}-1-z^2\right)\sin^3 z, \quad z_0=0.$ Ответ: нуль седьмого порядка.

Задача 2. Определите тип особой точки $z=0$ для данной функции

2.1. $\dfrac{\cos 7z-1}{\operatorname{sh} z-z-\dfrac{z^3}{6}}.$ Ответ: полюс 3-го порядка.

2.2. $\dfrac{\operatorname{sh} 6z-6z}{\operatorname{ch} z-1-\dfrac{z^2}{2}}.$ Ответ: полюс 1-го порядка.

2.3. $\dfrac{\operatorname{ch} 5z-1}{e^z-1-z}.$ Ответ: устранимая особая точка.

2.4. $\dfrac{\cos z^2-1}{\operatorname{sh} z-z-\dfrac{z^3}{6}}.$ Ответ: полюс 1-го порядка.

2.5. $\dfrac{e^{5z}-1}{\operatorname{ch} z-1-\dfrac{z^2}{2}}.$ Ответ: полюс 3-го порядка.

2.6. $\dfrac{\operatorname{ch} 2z-1}{\operatorname{sh} z-z-\dfrac{z^3}{6}}.$ Ответ: полюс 3-го порядка.

2.7. $\dfrac{\operatorname{ch} 2z-2z}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}.$ Ответ: полюс 1-го порядка.

2.8. $\dfrac{\sin 6z-6z}{\operatorname{ch} z-z-\dfrac{z^3}{6}}.$ Ответ: полюс 2-го порядка.

2.9. $\dfrac{\operatorname{ch} 3z-1}{\sin z-z+\dfrac{z^3}{6}}.$ Ответ: полюс 3-го порядка.

2.10. $\dfrac{\sin z^4 - z^4}{\operatorname{sh} z - z - \dfrac{z^3}{6}}$. Ответ: устранимая особая точка.

Задача 3. Для данной функции найдите конечные изолированные особые точки и определите их тип

3.1. $f(z) = \dfrac{\cos \pi z}{(4z^2 - 1)(z^2 + 3)}$.

Ответ: $z = \pm\sqrt{3}i$ – простые полюсы, $z = \pm\dfrac{1}{2}$ – устранимые особые точки.

3.2. $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z^4 - 1}$.

Ответ: $z = \pm 1$ – устранимые особые точки, $z = \pm i$ – простые полюсы.

3.3. $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$.

Ответ: $z = 2k\pi i,\ k \neq 0$ – простые полюсы, $z = 0$ – устранимая особая точка.

3.4. $f(z) = \dfrac{(z + \pi)\sin\dfrac{\pi}{2}z}{z \sin^2 z}$.

Ответ: $z = -\pi$ – полюс первого порядка, $z = \pi k,\ k \neq -1$ – полюс второго порядка.

3.5. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2 - 4)^2 \cos\dfrac{1}{z - 2}}$.

Ответ: $z = -2$ – полюс второго порядка, $z = 2 + \dfrac{2}{\pi + 2k\pi}$ – полюсы первого порядка, $z = 2$ – неизолированная особая точка.

3.6. $f(z) = \dfrac{\sin^3 z}{z^2(1 - \cos z)}$.

Ответ: $z = 0$ – простой полюс, $z = 2\pi k,\ k \neq 0$ – устранимая особая точка.

3.7. $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z - 1)(1 - z)^2}$.

Ответ: $z = 0$ – существенно особая точка, $z = 1$ – полюс второго порядка, $z = 2\pi ik,\ k \neq 0$ – полюс первого порядка.

3.8. $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$.

Ответ: $z=0$ – полюс второго порядка, $z=2\pi k,\ k\neq 0$ – полюс первого порядка

3.9. $f(z)=\dfrac{2z-\sin 2z}{z^2(z^2+1)}$.

Ответ: $z=0$ – устранимая особая точка, $z=\pm i$ – простые полюсы.

3.10. $f(z)=\dfrac{\sin 2\pi z}{z^4-1}e^{\frac{1}{z}}$.

Ответ: $z=0$ – существенно особая точка, $z=\pm 1$ –устранимые особые точки, $z=\pm i$ – простые полюсы.

Задача 4. Исследуйте характер бесконечно удаленной точки для следующих функций

4.1. $f(z)=\dfrac{z^8+2z^7+5z}{z^3+1}-z^5+e^{\frac{2z-3}{z+1}}$. Ответ: полюс 4-го порядка.

4.2. $f(z)=\dfrac{z^8-2z^6+5z^2}{z^3+2}-z^5+\cos\left(\dfrac{z+2}{3z-1}\right)$. Ответ: полюс 3-го порядка.

4.3. $f(z)=\dfrac{z^8+4z^5+3z^3}{z^3+3}-z^5+\sin\left(\dfrac{z+4}{2z-1}\right)$. Ответ: полюс 2-го порядка.

4.4. $f(z)=\dfrac{z^8+4z^5+5z^4}{z^3+4}-z^5+e^{\frac{1}{z+2}}$. Ответ: полюс 1-го порядка.

4.5. $f(z)=\dfrac{z^8+5z^5-4z^3}{z^3+5}-z^5+\cos\left(\dfrac{2z+1}{3z-2}\right)$. Ответ: устранимая особая точка.

4.6. $f(z)=z^7-\dfrac{z^{11}+3z^{10}+5}{z^4+1}+\sin\left(\dfrac{2iz+1}{3z-2}\right)$. Ответ: полюс 6-го порядка.

4.7. $f(z)=z^7-\dfrac{z^{11}-3z^9+4z^3}{z^4+2}+e^{\frac{z+2}{2iz+1}}$. Ответ: полюс 5-го порядка.

4.8. $f(z)=z^7-\dfrac{z^{11}+5z^8+3z}{z^4+3}+\cos\left(\dfrac{3iz+2}{2iz+1}\right)$. Ответ: полюс 4-го порядка.

4.9. $f(z)=z^7-\dfrac{z^{11}+1}{z^4+4}+\sin\left(\dfrac{iz-1}{2z+i}\right)$. Ответ: полюс 3-го порядка.

4.10. $f(z)=z^7-\dfrac{z^{11}+5z^7-2z}{z^4+5}+e^{\frac{iz+3}{2z-4}}.$ Ответ: устранимая особая точка.

Глава 5. Вычеты и их приложения

Задача 1. Найдите вычеты функции $f(z)$ в конечных особых точках

1.1. $f(z)=\dfrac{z^2+3}{z^3-4z}.$ Ответ: $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=-\dfrac{3}{4},\ \operatorname*{Res}_{2} f(z)=\dfrac{7}{8},\ \operatorname*{Res}_{-2} f(z)=\dfrac{7}{8}.$

1.2. $f(z)=\dfrac{z^2}{z^3+3z^2+z+3}.$

Ответ: $\operatorname*{Res}_{i} f(z)=\dfrac{1+3i}{20},\ \operatorname*{Res}_{-i} f(z)=\dfrac{1-3i}{20},\ \operatorname*{Res}_{-3} f(z)=\dfrac{9}{10}.$

1.3. $f(z)=\dfrac{z^3}{4+z^2}.$ Ответ: $\operatorname*{Res}_{2i} f(z)=-2,\ \operatorname*{Res}_{-2i} f(z)=-2.$

1.4. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^3-6z^2+11z-6}.$

Ответ: $\operatorname*{Res}_{1} f(z)=1,\ \operatorname*{Res}_{2} f(z)=-3,\ \operatorname*{Res}_{3} f(z)=2.$

1.5. $f(z)=\dfrac{1}{z^3+6z^2+8z}.$

Ответ: $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=\dfrac{1}{8},\ \operatorname*{Res}_{-2} f(z)=-\dfrac{1}{4},\ \operatorname*{Res}_{-4} f(z)=\dfrac{1}{8}.$

1.6. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+4}.$ Ответ: $\operatorname*{Res}_{2i} f(z)=-\dfrac{i}{4e^2},\ \operatorname*{Res}_{-2i} f(z)=\dfrac{e^2 i}{4}.$

1.7. $f(z)=\dfrac{z^2+2}{z^3-4z^2+3z}.$

Ответ: $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=\dfrac{2}{3},\ \operatorname*{Res}_{1} f(z)=-\dfrac{3}{2},\ \operatorname*{Res}_{3} f(z)=\dfrac{11}{6}.$

1.8. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^3-3z^2+2z}.$

Ответ: $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=\dfrac{1}{2},\ \operatorname*{Res}_{1} f(z)=-2,\ \operatorname*{Res}_{2} f(z)=\dfrac{5}{2}.$

1.9. $f(z)=\dfrac{1}{z-z^3}$. Ответ: $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=1$, $\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=-\dfrac{1}{2}$, $\operatorname*{Res}_{1} f(z)=-\dfrac{1}{2}$.

1.10. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+9}$. Ответ: $\operatorname*{Res}_{3i} f(z)=-\dfrac{i}{6e^3}$, $\operatorname*{Res}_{-3i} f(z)=\dfrac{ie^3}{6}$.

Задача 2. Найдите вычеты функции $f(z)$ в конечных особых точках

2.1. $f(z)=\dfrac{1-z}{(z-3)^3(z+i)}$. Ответ: $\operatorname*{Res}_{-i} f(z)=\dfrac{-11+2i}{250}$, $\operatorname*{Res}_{3} f(z)=\dfrac{11-2i}{125}$.

2.2. $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$. Ответ: $\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=\dfrac{17}{54e}$, $\operatorname*{Res}_{2} f(z)=\dfrac{e^2}{27}$.

2.3. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)^2z^3}$. Ответ: $\operatorname*{Res}_{-2} f(z)=-\dfrac{3}{16}$, $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=\dfrac{3}{16}$.

2.4. $f(z)=\dfrac{z^3+1}{(z+2)^2(z-3)}$. Ответ: $\operatorname*{Res}_{3} f(z)=\dfrac{28}{25}$, $\operatorname*{Res}_{-2} f(z)=-\dfrac{53}{25}$.

2.5. $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2+4)^2}$.

Ответ: $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=-\dfrac{1}{32}$, $\operatorname*{Res}_{2i} f(z)=\dfrac{1}{64}$, $\operatorname*{Res}_{-2i} f(z)=\dfrac{1}{64}$.

2.6. $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)^2}$. Ответ: $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=1$, $\operatorname*{Res}_{1} f(z)=-1$.

2.7. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$. Ответ: $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=-\dfrac{5}{2}$, $\operatorname*{Res}_{1} f(z)=e$.

2.8. $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$. Ответ: $\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=\dfrac{1}{27}$, $\operatorname*{Res}_{2} f(z)=-\dfrac{1}{27}$.

2.9. $f(z)=\dfrac{1}{z^5-z^3}$. Ответ: $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=-1$, $\operatorname*{Res}_{1} f(z)=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname*{Res}_{-1} f(z)=\dfrac{1}{2}$.

2.10 $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2(z^2+z-2)}$.

Ответ: $\operatorname*{Res}_{0} f(z)=-\dfrac{1}{4}$, $\operatorname*{Res}_{1} f(z)=\dfrac{2}{3}$, $\operatorname*{Res}_{-2} f(z)=-\dfrac{5}{12}$.

Задача 3. Вычислите вычеты в конечных особых точках следующих функций

3.1. $f(z)=(z^2+4z+3)e^{\frac{2}{z+1}}$. Ответ: $5\frac{1}{3}$.

3.2. $f(z)=(z^2+5z+5)\cos\frac{2}{z+1}$. Ответ: -6.

3.3. $f(z)=(z^2+6z+8)\sin\frac{2}{z+1}$. Ответ: $4\frac{2}{3}$.

3.4. $f(z)=(z^2+5z+6)\,\mathrm{sh}\,\frac{2}{z+1}$. Ответ: $7\frac{1}{3}$.

3.5. $f(z)=(z^2+6z+10)\,\mathrm{ch}\,\frac{2}{z+1}$. Ответ: 8.

3.6. $f(z)=(z^2+z-2)e^{\frac{3}{z-1}}$. Ответ: 18.

3.7. $f(z)=(z^2+2z-1)\cos\frac{3}{z-1}$. Ответ: -18.

3.8. $f(z)=(z^2-5z+6)\sin\frac{3}{z-1}$. Ответ: $-1\frac{1}{2}$.

3.9. $f(z)=(z^2-7z+10)\,\mathrm{sh}\,\frac{3}{z-1}$. Ответ: $16\frac{1}{2}$.

3.10. $f(z)=(z^2+3z-7)\,\mathrm{ch}\,\frac{3}{z-1}$. Ответ: $22\frac{1}{2}$.

Задача 4. При помощи вычетов вычислите следующие интегралы

4.1. $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=\frac{5}{4}}\frac{dz}{z^2(z-1)}$. Ответ: $2\pi i$.

4.2. $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=\frac{1}{2}}\frac{e^z dz}{\sin z}$. Ответ: $-2\pi i e^{\pi}$.

4.3. $\displaystyle\int\limits_{\left|z-\frac{3}{2}\right|=2}\frac{z(\sin z+2)}{\sin z}dz$. Ответ: $-4\pi^2 i$.

4.4. $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=3}\frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz$. Ответ: $2i$.

4.5. $\displaystyle\int\limits_{|z+6|=1} \frac{\cos z + 2}{z^2 - 4\pi^2}\,dz.$ Ответ: $-\dfrac{3}{2}i.$

4.6. $\displaystyle\int\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}\,dz.$ Ответ: $-2i.$

4.7. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z}\,dz.$ Ответ: $-\dfrac{3}{4}\pi^3 i.$

4.8. $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin^2 z}{z\cos z}\,dz.$ Ответ: $-4i.$

4.9. $\displaystyle\int\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z + 2}{z^2 - 4\pi^2}\,dz.$ Ответ: $i.$

4.10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z}\,dz.$ Ответ: $-2\pi^2 i.$

Задача 5. При помощи вычетов вычислите следующие интегралы

5.1. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z+1}{(z-1)^3(z-3)}\,dz.$ Ответ: $-\pi i.$

5.2. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z+4}{(z+1)^3(z+3)}\,dz.$ Ответ: $\dfrac{\pi i}{4}.$

5.3. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{z+8}{(z+2)^3(z+5)}\,dz.$ Ответ: $\dfrac{2}{9}\pi i.$

5.4. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2,5} \frac{z-4}{(z-2)^3(z-3)}\,dz.$ Ответ: $2\pi i.$

5.5. $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=0,5} \frac{z-1}{(z-3)^3(z-2)}\,dz.$ Ответ: $2\pi i.$

5.6. $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{z+5}{(z+3)^3(z+7)}\,dz.$ Ответ: $-\dfrac{\pi i}{16}.$

5.7. $\displaystyle\int\limits_{|z|=5} \frac{z-8}{(z-4)^3(z-6)}\,dz.$ Ответ: $\dfrac{\pi i}{2}.$

5.8. $\oint\limits_{|z|=5} \dfrac{z+9}{(z+4)^3(z+6)}dz.$ Ответ: $\dfrac{3}{4}\pi i.$

5.9. $\oint\limits_{|z|=6} \dfrac{z-11}{(z-5)^3(z-8)}dz.$ Ответ: $\dfrac{2}{9}\pi i.$

5.10. $\oint\limits_{|z|=6} \dfrac{z+11}{(z+5)^3(z+7)}dz.$ Ответ: $\pi i.$

Задача 6. Используя вычет относительно бесконечно удаленной точки, вычислите следующие интегралы

6.1. $\oint\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{20}}{z^7+2}dz.$ Ответ: $8\pi i.$

6.2. $\oint\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{23}}{z^8-3}dz.$ Ответ: $18\pi i.$

6.3. $\oint\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{26}}{z^3+4}dz.$ Ответ: $32\pi i.$

6.4. $\oint\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{29}}{z^{10}-5}dz.$ Ответ: $50\pi i.$

6.5. $\oint\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{32}}{z^{11}+6}dz.$ Ответ: $72\pi i.$

6.6. $\oint\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{35}}{z^{11}+6}dz.$ Ответ: $98\pi i$.

6.7. $\oint\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{38}}{z^{13}+8}dz.$ Ответ: $128\pi i.$

6.8. $\oint\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{41}}{z^{14}-9}dz.$ Ответ: $162\pi i.$

6.9. $\oint\limits_{|z|=10} \dfrac{z^{44}}{z^{15}+10}dz.$ Ответ: $200\pi i.$

6.10. $\displaystyle\int\limits_{|z|=10} \frac{z^{47}}{z^{16}-11}\,dz.$ Ответ: $242\pi i.$

Задача 7. Вычислите определенные интегралы

7.1. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t+3}.$ Ответ: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{8}}.$

7.2. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\cos t}.$ Ответ: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

7.3 $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3+2\sin t}.$ Ответ: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}.$

7.4. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{2}-4\sin t}.$ Ответ: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}.$

7.5. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\sin t}.$ Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}.$

7.6. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5\sin t+3\sqrt{5}}.$ Ответ: $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}.$

7.7. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7}\sin t+4}.$ Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}.$

7.8. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sin t+3\sqrt{2}}.$ Ответ: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}.$

7.9. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{12\sin t-5\sqrt{6}}.$ Ответ: $-\dfrac{2\pi}{\sqrt{6}}.$

7.10. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{12\sin t-7\sqrt{3}}.$ Ответ: $-\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

Задача 8. Вычислите несобственные интегралы

8.1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}.$ Ответ: $-\dfrac{\pi}{27}.$

8.2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+4)^2}$. Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

8.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$. Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

8.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+3}{x^4+10x^2+9}dx$. Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

8.5. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}$. Ответ: $\frac{\pi}{12}$.

8.6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$. Ответ: $\frac{\pi}{12}$.

8.7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+6x+13)^2}$. Ответ: $\frac{3\pi}{256}$.

8.8. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+16)^2}$. Ответ: $\frac{\pi}{16}$.

8.9. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$. Ответ: $\frac{\pi}{30}$.

8.10. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+25)}$. Ответ: $\frac{\pi}{30}$.

Задача 9. Вычислите интегралы с помощью леммы Жордана

9.1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$. Ответ: $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1-3\sin 1)$.

9.2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}dx$. Ответ: $\frac{\pi}{2e^4}(2\cos 2+\sin 2)$.

9.3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-2x+2}dx$. Ответ: $-\pi e^{-1}\sin 1$.

9.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$. Ответ: $\pi e^{-2}\cos 2$.

9.5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 - x + 1} dx.$ Ответ: $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}} \cos 1.$

9.6. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx.$ Ответ: $\frac{\pi e^{-2}}{4}.$

9.7. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 1} dx.$ Ответ: $\frac{\pi}{2} e^{-2}.$

9.8. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 9} dx.$ Ответ: $\frac{\pi e^{-6}}{6}.$

9.9. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2 + 16} dx.$ Ответ: $\frac{\pi e^{-12}}{2}.$

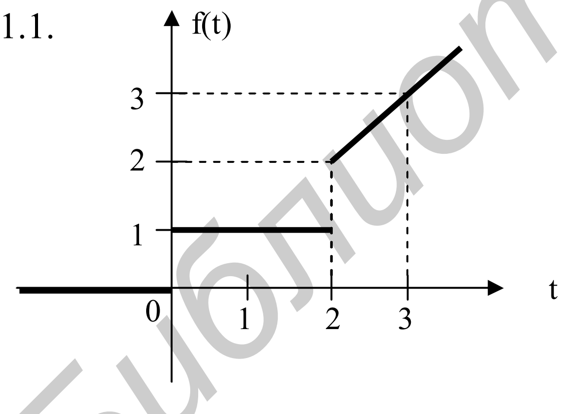
9.10. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 16} dx.$ Ответ: $\frac{\pi e^{-12}}{8}.$

Глава 6. Операционное исчисление

6.1. Оригиналы и их изображения. Отыскание изображений

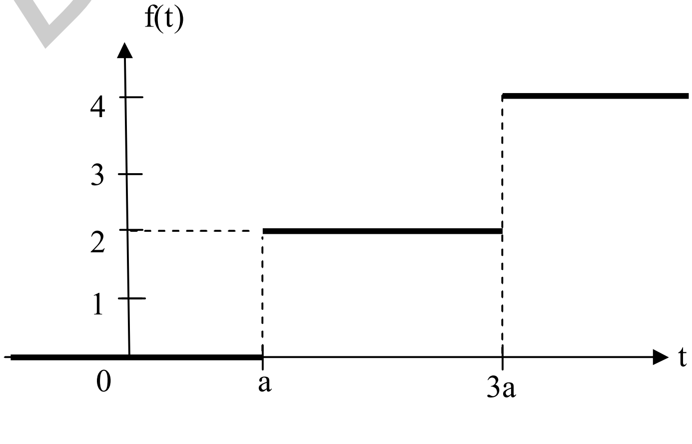
Задача 1. Найдите изображение функций, заданных графически

1.1.



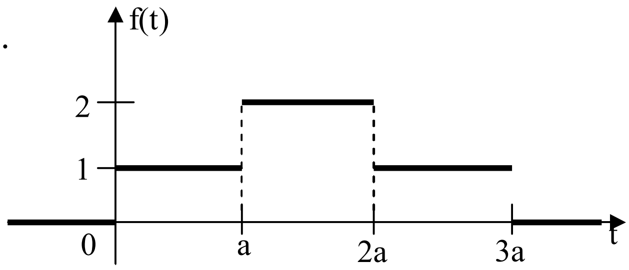
Ответ: $F(p) = \frac{1}{p} + e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right);$

1.2.



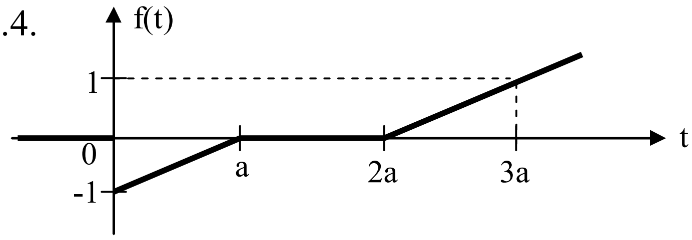
Ответ: $F(p) = \frac{2}{p}\left(e^{-ap} + e^{-3ap}\right);$

1.3.



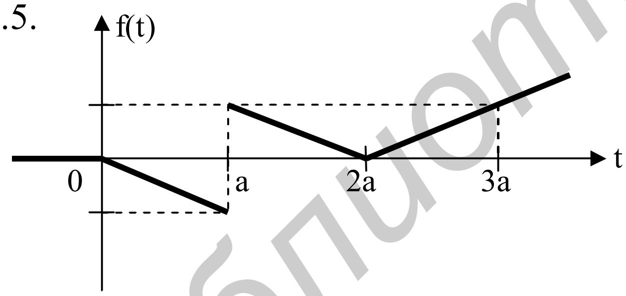
Ответ: $F(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}e^{-ap}-\frac{1}{p}e^{-2ap}-\frac{1}{p}e^{-3ap}$;

1.4.



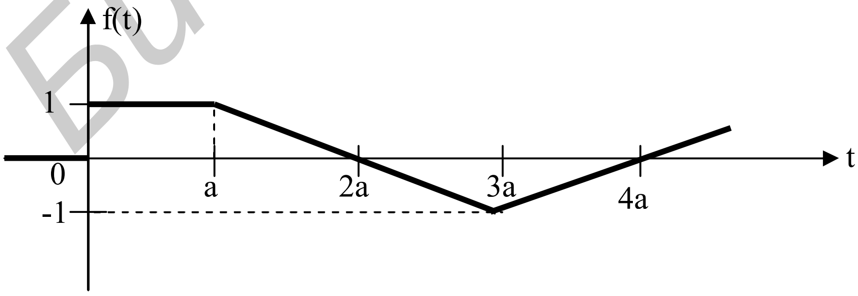
Ответ: $F(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1-e^{-ap}-e^{-2ap}}{ap^2}$;

1.5.



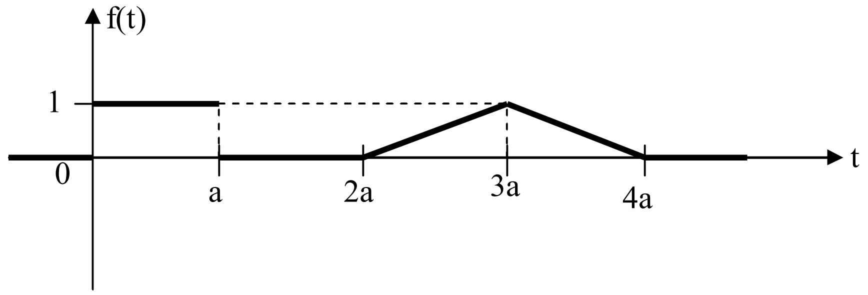
Ответ: $F(p)=\frac{2e^{-2ap}-1}{ap^2}+\frac{2e^{-ap}}{p}$;

1.6.



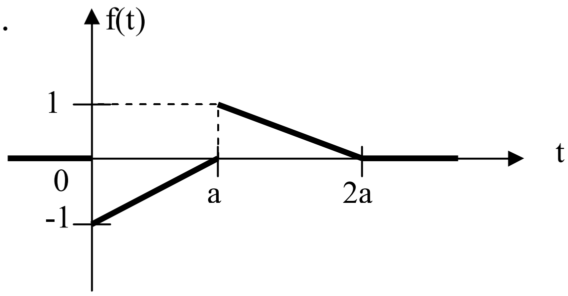
Ответ: $F(p)=\frac{1}{p}+\frac{2e^{-3ap}-e^{-ap}}{ap^2}$;

1.7.



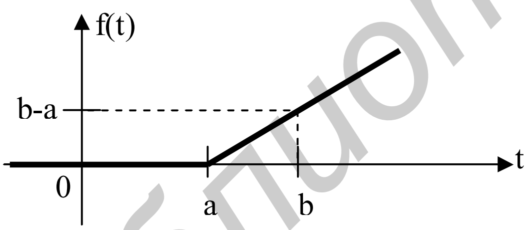
Ответ: $F(p)=\dfrac{1-e^{-ap}}{p}+\dfrac{e^{-2ap}-2e^{-3ap}+e^{-4ap}}{ap^2}$;

1.8.



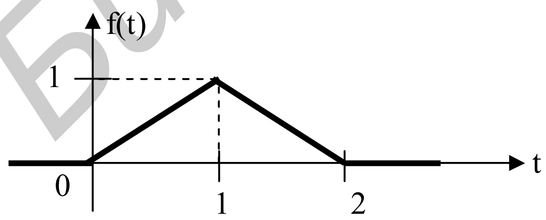
Ответ: $F(p)=-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1+(ap-2)e^{-ap}+e^{-2ap}}{ap^2}$;

1.9.



Ответ: $F(p)=\dfrac{1}{p^2}(e^{-ap}-e^{-bp})$;

1.10.



Ответ: $F(p)=\dfrac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$.

Задача 2. Пользуясь определением изображения, найдите изображения следующих оригиналов

2.1. $f(t) = e^{3t}$. Ответ: $\dfrac{1}{p-3}$.

2.2. $f(t) = te^{2t}$. Ответ: $\dfrac{1}{(p-2)^2}$.

2.3. $f(t) = e^{-5t}$. Ответ: $\dfrac{1}{p+5}$.

2.4. $f(t) = \sin 2t$. Ответ: $\dfrac{2}{p^2+4}$.

2.5. $f(t) = \cos 7t$. Ответ: $\dfrac{p}{p^2+49}$.

2.6. $f(t) = t^2$. Ответ: $\dfrac{2}{p^3}$.

2.7. $f(t) = e^t \sin 3t$. Ответ: $\dfrac{3}{(p-1)^2+9}$.

2.8. $f(t) = e^t \cos t$. Ответ: $\dfrac{p-1}{(p-1)^2+1}$.

2.9. $f(t) = \operatorname{ch} 3t$. Ответ: $\dfrac{p}{p^2-9}$.

2.10. $f(t) = \operatorname{sh} 2t$. Ответ: $\dfrac{2}{p^2-4}$.

Задача 3. Пользуясь теоремами линейности, подобия и смещения, найдите изображения следующих функций-оригиналов

3.1. $f(t) = \sin^2 t$. Ответ: $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$.

3.2. $f(t) = \cos^2 t$. Ответ: $\dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$.

3.3. $f(t)=e^t\cos^2 t$. Ответ: $\dfrac{p^2-2p+3}{(p-1)(p^2-2p+5)}$.

3.4. $f(t)=e^t\sin^2 t$. Ответ: $\dfrac{2}{(p-1)(p^2-2p+5)}$.

3.5. $f(t)=\sin^3 t$. Ответ: $\dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

3.6. $f(t)=\cos^3 t$. Ответ: $\dfrac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

3.7. $f(t)=\sin 2t\cos 3t$. Ответ: $\dfrac{2(p^2+5)}{(p^2+1)(p^2+25)}$.

3.8. $f(t)=\sin 2t\sin 3t$. Ответ: $\dfrac{12p}{(p^2+1)(p^2+25)}$.

3.9. $f(t)=\cos 2t\cos 3t$. Ответ: $\dfrac{p(p^2+13)}{(p^2+1)(p^2+25)}$.

3.10. $f(t)=3\cos 5t+e^{2t}$. Ответ: $\dfrac{3p}{p^2+25}+\dfrac{1}{p-2}$.

Задача 4. Пользуясь теоремами о дифференцировании оригинала и дифференцирования изображения, найдите изображения функций

4.1. $f(t)=t\sin 3t$. Ответ: $\dfrac{6p}{(p^2+9)^2}$.

4.2. $f(t)=t\cos 4t$. Ответ: $\dfrac{p^2-16}{(p^2+16)^2}$.

4.3. $f(t)=t^2e^{-3t}$. Ответ: $\dfrac{2}{(p+3)^3}$.

4.4. $f(t)=t(e^{4t}+\cos 3t)$. Ответ: $\dfrac{1}{(p-4)^2}+\dfrac{p^2-9}{(p^2+9)^2}$.

4.5. $f(t) = \sin^2 t$. Ответ: $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$.

4.6. $f(t) = \cos^2 t$. Ответ: $\dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$.

4.7. $f(t) = \sin^3 t$. Ответ: $\dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

4.8. $f(t) = \cos^3 t$. Ответ: $\dfrac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

4.9. $f(t) = t^2 \sin 3t$. Ответ: $\dfrac{18(p^2-3)}{(p^2+9)^3}$.

4.10. $f(t) = t \operatorname{sh} 2t$. Ответ: $\dfrac{(p+2)^2-(p-2)^2}{2(p^2-4)^2}$.

Задача 5. Пользуясь теоремами об интегрировании оригинала и изображения, найдите изображения следующих функций

5.1. $f(t) = \int\limits_0^t \sin\tau d\tau$. Ответ: $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$.

5.2. $f(t) = \int\limits_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau$. Ответ: $\dfrac{4}{(p^2-4)^2}$.

5.3. $f(t) = \int\limits_0^t \cos^2 2\tau d\tau$. Ответ: $\dfrac{p^2+8}{p^2(p^2+16)}$.

5.4. $f(t) = \int\limits_0^t \operatorname{ch} 2\tau d\tau$. Ответ: $\dfrac{1}{p^2-4}$.

5.5. $f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$. Ответ: $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$.

5.6. $f(t) = \dfrac{\cos t - \cos 2t}{t}$. Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+4}{p^2+1}$.

5.7. $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$. Ответ: $\ln\dfrac{p+1}{p}$.

5.8. $f(t)=\dfrac{e^{t}-e^{-t}}{t}$. Ответ: $\ln\dfrac{p+1}{p-1}$.

5.9. $f(t)=\dfrac{e^{t}-1-t}{t}$. Ответ: $\ln\dfrac{p}{p+1}-\dfrac{1}{p}$.

5.10. $f(t)=\dfrac{e^{-2t}\sin 3t}{t}$. Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{p+2}$.

6.2. Свертка оригиналов. Интеграл Дюамеля. Восстановление оригинала по известному изображению. Решение дифференциальных изображений и систем дифференциальных уравнений операционным методом.

Задание 1.

1.1. Найдите изображение функции

$$f(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)e^{\tau}\,d\tau.$$ Ответ: $\dfrac{1}{p^2(p-1)}$.

1.2. Найдите оригинал по заданному изображению

$$F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}.$$ Ответ: $-\dfrac{1}{2}(t\cos t-\sin t)$.

1.3. С помощью формулы Дюамеля решите дифференциальное уравнение

$$x''-x'=\frac{1}{1+e^t},\quad x(0)=x'(0)=0.$$

Ответ: $x(t)=(e^t+1)\ln(e^t+1)+e^t-1-(\ln 2+t)(e^t+1)$.

1.4. Решите дифференциальное уравнение

$x'''+x=0,\quad x(0)=0,\ x'(0)=-1,\ x''(0)=2.$

Ответ: $x(t)=e^{-t}-e^{t/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{t/2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t.$

1.5. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x+x'=y+e^t, \\ y+y'=x+e^t, \end{cases}\quad x(0)=y(0)=1.$$ Ответ: $\begin{cases} x(t)=e^t, \\ y(t)=e^t. \end{cases}$

Задание 2.

2.1. Найдите изображение функции

$f(t)=\int\limits_0^t e^{2(\tau-t)}\tau^2 d\tau.$ Ответ: $\dfrac{2}{p^3(p+2)}.$

2.2. Найдите оригинал по заданному изображению

$F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}.$ Ответ: $\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}).$

2.3. С помощью формулы Дюамеля решите дифференциальное уравнение

$x''=t\ln^2 t,\quad x(0)=x'(0)=0.$ Ответ: $x(t)=\dfrac{t^3}{6}(\ln^2 t-\dfrac{5}{8}\ln t+\dfrac{19}{18}).$

2.4. Решите дифференциальное уравнение
$x''-2x'+5x=1-t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=\dfrac{3}{25}-\dfrac{t}{5}-\dfrac{3}{25}e^t\cos 2t+\dfrac{4}{25}e^t\sin 2t.$

2.5. Решите систему дифференциальных уравнений

$\begin{cases} x'+y=0, & x(0)=1,\\ y'+x=0, & y(0)=-1.\end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} x(t)=e^t,\\ y(t)=-e^t.\end{cases}$

Задание 3.

3.1. Найдите изображение функции

$f(t)=\int\limits_0^t \sin(t-\tau)\operatorname{sh}\tau d\tau.$ Ответ: $\dfrac{1}{p^4-1}.$

3.2. Найдите оригинал по заданному изображению

$F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}.$ Ответ: $\dfrac{1}{2}t\sin t.$

3.3. С помощью формулы Дюамеля решите дифференциальное уравнение
$x''=\operatorname{arctg} t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=t^2\operatorname{arctg} t-\dfrac{1}{2}t\ln(1+t^2)-\dfrac{t^2+1}{2}\operatorname{arctg} t+\dfrac{t}{2}.$

3.4. Решите дифференциальное уравнение
$x''+4x=t,\quad x(0)=1,\ x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=\dfrac{1}{4}t+\cos 2t-\dfrac{1}{8}\sin 2t.$

3.5. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \quad x(0) = y(0) = x'(0) = 0. \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{t}), \\ y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}. \end{cases}$

Задание 4.

4.1. Найдите изображение функции

$f(t) = \int\limits_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau.$ Ответ: $\frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p-1}.$

4.2. Найдите оригинал по заданному изображению

$F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}.$ Ответ: $e^{-2t} \sin 2t.$

4.3. С помощью формулы Дюамеля решите дифференциальное уравнение

$x'' = \frac{1}{1+t^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$ Ответ: $x(t) = t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2).$

4.4. Решите дифференциальное уравнение

$x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0.$ Ответ: $x(t) = \frac{1}{4}t + \cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t.$

4.5. Решите систему дифференциальных уравнений

$\begin{cases} x' = y + z, \quad x(0) = 0; \\ y' = 3x + z, \quad y(0) = 1; \\ z' = 3x + y, \quad z(0) = 1. \end{cases}$ Ответ: $\begin{cases} x(t) = \frac{2}{5}(e^{3t} - e^{-2t}), \\ y(t) = \frac{1}{5}(3e^{3t} + 2e^{-2t}), \\ z(t) = \frac{1}{5}\left(3e^{3t} + 2e^{-2t}\right). \end{cases}$

Задание 5.

5.1. Найдите изображение функции

$f(t) = \int\limits_0^t \tau \sin \tau \, e^{t-\tau} d\tau.$ Ответ: $\frac{2p}{(p^2+1)^2} \cdot \frac{1}{(p-1)}.$

5.2. Найдите оригинал по заданному изображению

$$F(p)=\frac{1}{p+2p^2+p^3}.$$ Ответ: $1-e^{-t}-te^{-t}$.

5.3. С помощью формулы Дюамеля решите дифференциальное уравнение

$x''-x=\operatorname{th}t,\quad x(0)=x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t+2\operatorname{ch}t(\operatorname{arctg}e^t-\frac{\pi}{4}).$

5.4. Решите дифференциальное уравнение

$x'''+x'=t,\quad x(0)=0,\, x'(0)=2,\, x''(0)=0.$

Ответ: $x(t)=-1+\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}\cos t+\frac{3}{2}\sin t.$

5.5. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=-y-z, & x(0)=-1; \\ y'=-x-z, & y(0)=0; \\ z'=-x-y, & z(0)=1. \end{cases}$$ Ответ: $\begin{cases} x(t)=-e^t, \\ y(t)=0, \\ z(t)=e^t. \end{cases}$

Задание 6.

6.1. Найдите изображение функции

$$f(t)=\int_0^t\cos(t-\tau)e^{2\tau}\,d\tau.$$ Ответ: $\dfrac{p}{(p-2)(p^2+1)}$.

6.2. Найдите оригинал по данному изображению

$$F(p)=\frac{1}{p^2-p+7}.$$ Ответ: $\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t\,e^{\frac{t}{2}}$.

6.3. С помощью формулы Дюамеля решите дифференциальное уравнение

$x'''=\dfrac{1}{t^2+1},\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0.$

Ответ: $x(t)=\frac{1}{2}(t^2\operatorname{arctg}t-t\ln(t^2+1)+t-\operatorname{arctg}t).$

6.4. Решите дифференциальное уравнение

$x^{\prime v}-x''=1,\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0.$

Ответ: $x(t)=\operatorname{ch}t-\frac{1}{2}t^2-1.$

6.5. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -y, \quad x(0) = 1; \\ y' = 2x + 2y, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = e^t(\cos t - 2\sin t), \\ y(t) = e^t(\cos t + 3\sin t). \end{cases}$

Задание 7.

7.1. Найдите изображение функции

$$f(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)e^{3\tau}d\tau.$$

Ответ: $\dfrac{1}{(p^2+1)(p-3)}$.

7.2. Найдите оригинал по заданному изображению

$$F(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}.$$

Ответ: $e^{-t}(1-t^2)$.

7.3. С помощью формулы Дюамеля решите дифференциальное уравнение

$$x''' = \frac{1}{t^2-1}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

Ответ: $x(t) = \dfrac{1}{2}\left(t^2 \ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right| - t\ln\left|t^2-1\right| - t + \ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|\right)$.

7.4. Решите дифференциальное уравнение

$$x'' - x' = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Ответ: $x(t) = \dfrac{1}{2}e^t(t^2 - 2t + 2) - 1$.

7.5. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' - x - 2y = t, \quad x(0) = 2; \\ -2x + y' - y = t, \quad y(0) = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = \dfrac{28}{9}e^{3t} - e^{-t} - \dfrac{t}{3} - \dfrac{1}{9}, \\ y(t) = \dfrac{28}{9}e^{3t} + e^{-t} - \dfrac{t}{3} - \dfrac{1}{9}. \end{cases}$

Задание 8.

8.1. Найдите изображение функции

$$f(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\cos 2\tau d\tau.$$

Ответ: $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

8.2. Найдите оригинал по заданному изображению

$$F(p) = \frac{2p+3}{p(p^2+4p+5)}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5}e^{-2t}\cos t - \dfrac{2}{5}e^{-2t}\sin t$.

8.3. С помощью формулы Дюамеля решите дифференциальное уравнение

$$x'' + x' = \frac{1}{1+e^{t}}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Ответ: $x(t) = (1+e^{-t})(t - \ln(1+e^{t}) + \ln 2) + \ln(1+e^{t}) - \ln 2 + 1 - t - e^{-t}$.

8.4. Решите дифференциальное уравнение

$x'' + 4x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$ Ответ: $x(t) = \frac{1}{3}(\sin t - \sin 2t)$.

8.5. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, & x(0) = 0; \\ y' = -2x + y - 2z, & y(0) = 1; \\ z' = 5x + 2y + 7z, & z(0) = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = 6e^{t} - 2e^{2t} - 4e^{3t}, \\ y(t) = 3e^{t} - 2e^{3t}, \\ z(t) = 6e^{3t} + e^{2t} - 6e^{t}. \end{cases}$

Задание 9.

9.1. Найдите изображение функции

$f(t) = \int_{0}^{t} \cos(t-\tau)\sin\tau d\tau.$ Ответ: $\frac{p}{(p^2+1)^2}$.

9.2. Найдите оригинал по заданному изображению

$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}.$ Ответ: $\frac{1}{9}(e^{-2t} - e^{t} + 3te^{t})$.

9.3. С помощью формулы Дюамеля решите дифференциальное уравнение

$$x'' + x = \frac{1}{1+\sin^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Ответ: $x(t) = \sin t \cdot \operatorname{arctg}(\sin t) + \cos t \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right| - \ln(3+2\sqrt{2})\right)$.

9.4. Решите дифференциальное уравнение

$x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, x'(0) = 2, x''(0) = -2.$

Ответ: $x(t) = 4t + 3 - 2e^{t}$.

9.5. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z, & x(0) = 1; \\ y' = x + z, & y(0) = 1; \\ z' = -3x + y - 2z, & z(0) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = 2 - e^{-t}, \\ y(t) = 2 - e^{-t}, \\ z(t) = 2e^{-t} - 2. \end{cases}$

Задание 10.

10.1. Найдите изображение функции

$$f(t)=\int\limits_0^t \mathrm{sh}(t-\tau)\sin\tau d\tau.$$ Ответ: $\dfrac{1}{p^4-1}$.

10.2. Найдите оригинал по заданному изображению

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}.$$ Ответ: $\dfrac{1}{9}(e^{-2t}-e^t+3te^t)$.

10.3. С помощью формулы Дюамеля решите дифференциальное уравнение

$$x''+x=\frac{1}{1+\cos^2 t},\quad x(0)=x'(0)=0.$$

Ответ: $x(t)=\cos t\cdot\mathrm{arctg}(\cos t)-\dfrac{\pi}{4}\cos t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\sin t\cdot\ln\left|\dfrac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right|$.

10.4. Решите дифференциальное уравнение
$x''+x'=\cos t,\quad x(0)=2,\, x'(0)=0.$

Ответ: $x(t)=2+\dfrac{1}{2}(e^t+\sin t-\cos t)$.

10.5. Решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}3x'+2x+y'=1, & x(0)=0;\\ x'+4y'+3y=0, & y(0)=0.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases}x(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}e^{-t}-\dfrac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t},\\ y(t)=\dfrac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}\right).\end{cases}$

Св. план 2011, поз. 63

Учебное издание

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Индивидуальные задания по курсу высшей математики

для студентов радиотехнических специальностей
дневной формы обучения

Составители:
Борисенко Олег Федорович
Конюх Людмила Афанасьевна
Кобринец Николай Иванович

Редактор Е. Н. Батурчик
Корректор А. В. Тюхай

Подписано в печать 08.09.2011.	Формат 60×84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Отпечатано на ризографе.	Усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 2,5.	Тираж 100 экз.	Заказ 56.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6