Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 3-х частях

Часть 1

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений, обеспечивающих получение
высшего образования по специальностям,
закрепленным за УМО*

Минск БГУИР 2012

УДК 517(076.1)
ББК 22.1я73
Т43

С о с т а в и т е л и :
Ж. А. Черняк, З. Н. Примичева, И. В. Дайняк, Л. И. Василюк,
В. Г. Шилкин, Т. А. Романчук, М. Д. Пименова

Р е ц е н з е н т ы :
заведующий кафедрой информатики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, профессор, доктор физико-математических наук Л. И. Минченко;

кафедра высшей математики Белорусского государственного экономического университета (протокол № 1 от 29.08.2011 г.);

доцент кафедры математики Белорусского государственного педагогического университета им.М.Танка,
кандидат физико-математических наук С. А. Богданович

Т43 **Типовые** расчеты по высшей математике : учеб.- метод. пособие. В 3 ч. Ч. 1 / сост. Ж. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГУИР, 2012. – 91 с.
ISBN 978-985-488-836-1.

Пособие содержит тематические наборы индивидуальных заданий по следующим разделам курса высшей математики: аналитическая геометрия и векторная алгебра, линейная алгебра, введение в анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной и приложения для самостоятельной контролируемой работы студентов всех специальностей дневной формы обучения.

УДК 517(076.1)
ББК 22.1я73

ISBN **978-985-488-836-1**

Содержание

Введение

Одной из особенностей высшего образования на нынешнем этапе его развития является направленность на активное, контролируемое самообучение каждого студента, учитывающее его потенциал и уровень базовой подготовки. Это предполагает создание соответствующего методического обеспечения учебного процесса, включая разработку разнообразных форм самостоятельной работы и методов ее контроля.

В этом контексте авторы настоящего пособия подготовили наборы индивидуальных заданий (30 вариантов) по высшей математике для самостоятельной контролируемой работы студентов.

Основная концепция авторов – не нагружать студентов громоздкими вычислительными задачами (из серии «за деревьями леса не видно»), рассчитанными на сверхсложную технику вычислений, а сосредоточить их внимание на основных математических идеях и понятиях изучаемого раздела. В связи с этим во многих задачах требуется не только получить числовой ответ, но и дать его математическую интерпретацию.

Пособие содержит наборы индивидуальных заданий по следующим разделам высшей математики, изучаемым в первом семестре первого курса технического университета:

«Векторная алгебра и аналитическая геометрия»,

«Линейная алгебра»,

«Введение в математический анализ»,

«Дифференциальное исчисление функции одной переменной и приложения».

Хотя задачи из этого сборника рекомендуются как задания для типовых расчетов по ВМ, их можно использовать также для проведения аудиторных самостоятельных и контрольных работ, для составления экзаменационных материалов.

Пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов всех форм обучения и преподавателей высшей математики.

Аналитическая геометрия и векторная алгебра

Задание 1.

Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$.

1) Постройте векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, убедитесь в том, что они образуют базис на плоскости, и геометрически разложите вектор $\bar{d}$ по этому базису.

2) Докажите аналитически, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис на плоскости, и найдите координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

3) В параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, найдите:

3а) длины сторон $\bar{a}$ и $\bar{b}$; скалярное произведение $(\bar{a}, \bar{b})$;

3б) диагонали $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ и их длины;

3в) внутренние углы параллелограмма и тупой угол между его диагоналями;

3г) площадь параллелограмма и длины его высот.

4) В параллелепипеде, построенном на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, с основанием, образованным векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, найдите:

4а) объем и длину высоты, опущенной на основание;

4б) ориентацию тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

1.1. $\bar{a} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2, \quad \bar{b} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_1, \bar{e}_2], \quad \bar{d} = -\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 1, \quad |\bar{e}_2| = 2, \quad \left(\bar{e}_1 \widehat{,} \bar{e}_2\right) = \arcsin\frac{1}{3}.$

1.2. $\bar{a} = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2, \quad \bar{b} = -\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_1, 2\bar{e}_2], \quad \bar{d} = \bar{e}_1 - 5\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 2, \quad |\bar{e}_2| = 3, \quad \left(\bar{e}_1 \widehat{,} \bar{e}_2\right) = 2\arccos\frac{4}{5}.$

1.3. $\bar{a} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{b} = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, \quad \bar{c} = [-\bar{e}_1, \bar{e}_2], \quad \bar{d} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 1, \quad |\bar{e}_2| = 4, \quad \left(\bar{e}_1 \widehat{,} \bar{e}_2\right) = \arcsin\frac{4}{5}.$

1.4. $\bar{a} = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{b} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{c} = [2\bar{e}_1, \bar{e}_2], \quad \bar{d} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 2, \quad |\bar{e}_2| = \frac{1}{2}, \quad \left(\bar{e}_1 \widehat{,} \bar{e}_2\right) = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}.$

1.5. $\bar{a} = \bar{e}_1 + 5\bar{e}_2, \quad \bar{b} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_1, -2\bar{e}_2], \quad \bar{d} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 5, \quad |\bar{e}_2| = 1, \quad \left(\bar{e}_1 \widehat{,} \bar{e}_2\right) = 2\,\mathrm{arctg}\,3.$

1.6. $\bar{a} = 3\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2, \quad \bar{b} = 5\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_2, 2\bar{e}_1], \quad \bar{d} = -3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = \frac{1}{4}, \quad |\bar{e}_2| = \sqrt{2}, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \operatorname{arcctg} 5.$

1.7. $\bar{a} = -2\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2, \quad \bar{b} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_1, 3\bar{e}_2], \quad \bar{d} = \bar{e}_1 + 4\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = \frac{1}{3}, \quad |\bar{e}_2| = 1, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \operatorname{arcctg} \frac{3}{4}.$

1.8. $\bar{a} = \bar{e}_1 + 6\bar{e}_2, \quad \bar{b} = -3\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_1, \bar{e}_2], \quad \bar{d} = \bar{e}_1 + 7\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 2, \quad |\bar{e}_2| = 5, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{\pi}{2}.$

1.9. $\bar{a} = -4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, \quad \bar{b} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \quad \bar{c} = [2\bar{e}_1, -5\bar{e}_2], \quad \bar{d} = 7\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 2, \quad |\bar{e}_2| = 1, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$

1.10. $\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{b} = -3\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \quad \bar{c} = [4\bar{e}_1, \bar{e}_2], \quad \bar{d} = -5\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = \sqrt{2}, \quad |\bar{e}_2| = \frac{1}{3}, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \pi - \operatorname{arcctg} 7.$

1.11. $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \quad \bar{b} = -\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, \quad \bar{c} = [-\bar{e}_2, \bar{e}_1], \quad \bar{d} = 8\bar{e}_1 - 9\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = \sqrt{3}, \quad |\bar{e}_2| = \frac{1}{2}, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3}.$

1.12. $\bar{a} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, \quad \bar{b} = -4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_1, 5\bar{e}_2], \quad \bar{d} = 7\bar{e}_1 + \bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 1, \quad |\bar{e}_2| = 3, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{3}{5}\right).$

1.13. $\bar{a} = \bar{e}_1 - 7\bar{e}_2, \quad \bar{b} = 8\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, \quad \bar{c} = [2\bar{e}_2, -3\bar{e}_1], \quad \bar{d} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 1, \quad |\bar{e}_2| = 1, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \operatorname{arctg} 2.$

1.14. $\bar{a} = 3\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \quad \bar{b} = \bar{e}_1 + 4\bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_1, 7\bar{e}_2], \quad \bar{d} = -\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 3, \quad |\bar{e}_2| = \sqrt{2}, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \operatorname{arcctg}(-7) - \frac{\pi}{2}.$

1.15. $\bar{a} = -\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2, \quad \bar{b} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{c} = [2\bar{e}_1, -9\bar{e}_2], \quad \bar{d} = 2\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 1, \quad |\bar{e}_2| = \sqrt{3}, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arcin}\left(-\frac{3}{5}\right).$

1.16. $\overline{a} = -3\overline{e}_1 - 4\overline{e}_2, \quad \overline{b} = \overline{e}_1 + 5\overline{e}_2, \quad \overline{c} = [\overline{e}_1, \overline{e}_2], \quad \overline{d} = 4\overline{e}_1 - 7\overline{e}_2,$

где $|\overline{e}_1| = \sqrt{5}, \quad |\overline{e}_2| = 1, \quad \left(\widehat{\overline{e}_1, \overline{e}_2}\right) = \pi - \arccos 7.$

1.17. $\overline{a} = 7\overline{e}_1 - 5\overline{e}_2, \quad \overline{b} = \overline{e}_1 + 6\overline{e}_2, \quad \overline{c} = [7\overline{e}_1, -2\overline{e}_2], \quad \overline{d} = \overline{e}_1 - 11\overline{e}_2,$

где $|\overline{e}_1| = 3, \quad |\overline{e}_2| = 4, \quad \left(\widehat{\overline{e}_1, \overline{e}_2}\right) = \frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}.$

1.18. $\overline{a} = 9\overline{e}_1 - 6\overline{e}_2, \quad \overline{b} = 7\overline{e}_1 + \overline{e}_2, \quad \overline{c} = [\overline{e}_2, \overline{e}_1], \quad \overline{d} = 12\overline{e}_1 - 5\overline{e}_2,$

где $|\overline{e}_1| = 1, \quad |\overline{e}_2| = \sqrt{2}, \quad \left(\widehat{\overline{e}_1, \overline{e}_2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{5}.$

1.19. $\overline{a} = 4\overline{e}_1 + \overline{e}_2, \quad \overline{b} = -3\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2, \quad \overline{c} = [2\overline{e}_2, -5\overline{e}_1], \quad \overline{d} = \overline{e}_1 + 8\overline{e}_2,$

где $|\overline{e}_1| = 1, \quad |\overline{e}_2| = 2, \quad \left(\widehat{\overline{e}_1, \overline{e}_2}\right) = \pi + \operatorname{arcin}\left(-\frac{3}{4}\right).$

1.20. $\overline{a} = 5\overline{e}_1 + \overline{e}_2, \quad \overline{b} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2, \quad \overline{c} = [\overline{e}_2, 2\overline{e}_1], \quad \overline{d} = 12\overline{e}_1 - 7\overline{e}_2,$

где $|\overline{e}_1| = 3, \quad |\overline{e}_2| = 4, \quad \left(\widehat{\overline{e}_1, \overline{e}_2}\right) = \frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}.$

1.21. $\overline{a} = 3\overline{e}_1 + 8\overline{e}_2, \quad \overline{b} = 7\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2, \quad \overline{c} = [\overline{e}_1, -5\overline{e}_2], \quad \overline{d} = 9\overline{e}_1 + 6\overline{e}_2,$

где $|\overline{e}_1| = \sqrt{3}, \quad |\overline{e}_2| = \sqrt{2}, \quad \left(\widehat{\overline{e}_1, \overline{e}_2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{5}.$

1.22. $\overline{a} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2, \quad \overline{b} = -\overline{e}_1 + 6\overline{e}_2, \quad \overline{c} = [3\overline{e}_2, 4\overline{e}_1], \quad \overline{d} = 7\overline{e}_1 + 5\overline{e}_2,$

где $|\overline{e}_1| = \frac{1}{2}, \quad |\overline{e}_2| = 1, \quad \left(\widehat{\overline{e}_1, \overline{e}_2}\right) = 2\operatorname{arcin}\frac{3}{5}.$

1.23. $\overline{a} = -7\overline{e}_1 + 8\overline{e}_2, \quad \overline{b} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2, \quad \overline{c} = [-4\overline{e}_1, \overline{e}_2], \quad \overline{d} = 3\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2,$

где $|\overline{e}_1| = \sqrt{10}, \quad |\overline{e}_2| = 1, \quad \left(\widehat{\overline{e}_1, \overline{e}_2}\right) = 2\arccos\frac{3}{5}.$

1.24. $\overline{a} = 5\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2, \quad \overline{b} = -4e_1 + 2\overline{e}_2, \quad \overline{c} = [\overline{e}_1, 7\overline{e}_2], \quad \overline{d} = 9\overline{e}_1 - 8\overline{e}_2,$

где $|\overline{e}_1| = 1, \quad |\overline{e}_2| = \sqrt{2}, \quad \left(\widehat{\overline{e}_1, \overline{e}_2}\right) = \operatorname{arctg} 5.$

1.25. $\overline{a} = \overline{e}_1 + 3\overline{e}_2, \quad \overline{b} = 4\overline{e}_1 + 7\overline{e}_2, \quad \overline{c} = [5\overline{e}_1, -\overline{e}_2], \quad \overline{d} = 4\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2,$

где $|\overline{e}_1| = 2, \quad |\overline{e}_2| = \frac{1}{2}, \quad \left(\widehat{\overline{e}_1, \overline{e}_2}\right) = \operatorname{arcctg}\frac{1}{4}.$

1.26. $\bar{a} = -7\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{b} = 4\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_1, 6\bar{e}_2], \quad \bar{d} = 7\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 3, \quad |\bar{e}_2| = \frac{1}{3}, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = 2\,\mathrm{arcin}\frac{2}{3}.$

1.27. $\bar{a} = -3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2, \quad \bar{b} = \bar{e}_1 + 4\bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_1, \bar{e}_2], \quad \bar{d} = 3\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = \frac{1}{4}, \quad |\bar{e}_2| = 2, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right).$

1.28. $\bar{a} = 10\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \quad \bar{b} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, \quad \bar{c} = [-5\bar{e}_2, 4\bar{e}_1], \quad \bar{d} = 5\bar{e}_1 - 7\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = \sqrt{3}, \quad |\bar{e}_2| = 1, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi.$

1.29. $\bar{a} = \bar{e}_1 + 8\bar{e}_2, \quad \bar{b} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{c} = [\bar{e}_1, 7\bar{e}_2], \quad \bar{d} = 11\bar{e}_1 + 8\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = \frac{1}{3}, \quad |\bar{e}_2| = 1, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = 2\arccos\frac{1}{5}.$

1.30. $\bar{a} = -\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2, \quad \bar{b} = 5\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2, \quad \bar{c} = [-3\bar{e}_2, 7\bar{e}_1], \quad \bar{d} = 8\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2,$

где $|\bar{e}_1| = 2, \quad |\bar{e}_2| = \frac{1}{2}, \quad \left(\bar{e}_1 \hat{,} \bar{e}_2\right) = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right).$

Задание 2.

Даны точки A, B, C. Найдите:

1) длину стороны AB треугольника ABC;

2) внутренний и внешний углы при вершине B треугольника ABC;

3) точку D – конец вектора $\overline{AD} = [\overline{AB}, \overline{AC}]$;

4) ориентацию тройки векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$;

5) объем тетраэдра $ABCD$ (точка D найдена в пункте 3));

6) расстояние от вершины D до основания ABC;

7) разложение вектора $\overline{DC}$ по базису $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

2.1. $A(3,5,4), \quad B(8,7,4), \quad C(5,10,4).$

2.2. $A(1,-1,2), \quad B(-3,4,7), \quad C(0,1,5).$

2.3. $A(2,-2,3), \quad B(5,3,1), \quad C(-1,0,7).$

2.4. $A(3,0,-1), \quad B(2,4,5), \quad C(7,-8,3).$

2.5. $A(-5,7,4), \quad B(-2,-3,1), \quad C(9,-6,4).$

2.6. $A(0,1,-1), \quad B(2,-4,9), \quad C(6,7,-6).$

2.7. $A(-3,4,-4), \quad B(5,1,-1), \quad C(2,7,0).$

2.8. $A(9,7,0)$, $B(4,-3,2)$, $C(1,8,4)$.
2.9. $A(6,5,4)$, $B(3,2,1)$, $C(1,2,9)$.
2.10. $A(-7,6,0)$, $B(5,-4,3)$, $C(1,-2,3)$.
2.11. $A(4,-4,5)$, $B(6,0,7)$, $C(1,2,9)$.
2.12. $A(-6,7,4)$, $B(9,3,0)$, $C(-2,5,4)$.
2.13. $A(3,8,-1)$, $B(-1,1,2)$, $C(3,-7,-7)$.
2.14. $A(0,0,1)$, $B(2,3,4)$, $C(5,6,7)$.
2.15. $A(-9,-8,4)$, $B(3,-3,3)$, $C(2,0,5)$.
2.16. $A(1,3,-4)$, $B(2,-2,7)$, $C(4,5,6)$.
2.17. $A(-2,9,8)$, $B(4,-6,-6)$, $C(1,0,2)$.
2.18. $A(1,0,-4)$, $B(0,-5,5)$, $C(6,9,8)$.
2.19. $A(3,4,0)$, $B(-2,1,2)$, $C(4,6,0)$.
2.20. $A(9,-5,-2)$, $B(4,3,1)$, $C(-2,4,5)$.
2.21. $A(3,2,-1)$, $B(1,-1,4)$, $C(7,-5,2)$.
2.22. $A(-4,2,3)$, $B(-2,-1,1)$, $C(0,5,7)$.
2.23. $A(-3,4,5)$, $B(1,2,3)$, $C(-7,8,2)$.
2.24. $A(1,0,-5)$, $B(4,3,6)$, $C(-7,2,3)$.
2.25. $A(1,-1,1)$, $B(2,3,-4)$, $C(4,-3,3)$.
2.26. $A(3,-2,7)$, $B(1,0,-4)$, $C(2,-3,4)$.
2.27. $A(2,-7,4)$, $B(1,1,-5)$, $C(6,8,-9)$.
2.28. $A(3,-3,7)$, $B(1,-2,4)$, $C(6,8,-2)$.
2.29. $A(1,4,3)$, $B(5,-6,9)$, $C(1,-2,2)$.
2.30. $A(5,10,-1)$, $B(2,4,-8)$, $C(8,7,-3)$.

Задание 3.

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC одна из его вершин находится в точке (x_0, y_0), а гипотенуза AB лежит на прямой ℓ. Найдите:

1) уравнения прямых, содержащих катеты треугольника;
2) уравнение медианы, проведенной к гипотенузе AB;
3) уравнения биссектрис острых углов;
4) координаты центра и радиус r вписанной в треугольник ABC окружности;
5) координаты центра и радиус R описанной около треугольника ABC окружности.

3.1. $x_0 = 4$, $y_0 = -1$, $\ell:\ 3x - y + 5 = 0$.
3.2. $x_0 = -4$, $y_0 = 5$, $\ell:\ x + y - 2 = 0$.
3.3. $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $\ell:\ x - 2y + 7 = 0$.

3.4. $x_0 = -5, \quad y_0 = 1, \quad \ell: \ 2x + 3y - 1 = 0.$

3.5. $x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad \ell: \ 3x - 7y - 5 = 0.$

3.6. $x_0 = 7, \quad y_0 = 6, \quad \ell: \ x - y + 4 = 0.$

3.7. $x_0 = 3, \quad y_0 = -4, \quad \ell: \ 2x + y + 3 = 0.$

3.8. $x_0 = 0, \quad y_0 = 7, \quad \ell: \ x - 6y + 11 = 0.$

3.9. $x_0 = -2, \quad y_0 = 0, \quad \ell: \ 3x + 4y + 5 = 0.$

3.10. $x_0 = 6, \quad y_0 = -3, \quad \ell: \ 7x + 9y - 13 = 0.$

3.11. $x_0 = -1, \quad y_0 = 1, \quad \ell: \ 4x + 2y - 3 = 0.$

3.12. $x_0 = 8, \quad y_0 = 2, \quad \ell: \ x - 2y + 5 = 0.$

3.13. $x_0 = -3, \quad y_0 = -8, \quad \ell: \ 5x + 2y + 10 = 0.$

3.14. $x_0 = 0, \quad y_0 = -4, \quad \ell: \ 7x + 6y - 12 = 0.$

3.15. $x_0 = 1, \quad y_0 = -3, \quad \ell: \ 9x + y - 5 = 0.$

3.16. $x_0 = -2, \quad y_0 = 4, \quad \ell: \ 4x + 3y + -2 = 0.$

3.17. $x_0 = 4, \quad y_0 = 1, \quad \ell: \ x - 4y + 3 = 0.$

3.18. $x_0 = 3, \quad y_0 = -3, \quad \ell: \ x - y + 2 = 0.$

3.19. $x_0 = 5, \quad y_0 = -7, \quad \ell: \ 2x + y - 6 = 0.$

3.20. $x_0 = 9, \quad y_0 = 1, \quad \ell: \ x - 7y - 3 = 0.$

3.21. $x_0 = 8, \quad y_0 = -3, \quad \ell: \ x + 2y - 4 = 0.$

3.22. $x_0 = 6, \quad y_0 = -4, \quad \ell: \ 3x + 5y + 1 = 0.$

3.23. $x_0 = 0, \quad y_0 = 5, \quad \ell: \ 6x + 2y - 7 = 0.$

3.24. $x_0 = -9, \quad y_0 = 2, \quad \ell: \ x + 5y + 2 = 0.$

3.25. $x_0 = -5, \quad y_0 = -6, \quad \ell: \ x - y + 3 = 0.$

3.26. $x_0 = 4, \quad y_0 = 1, \quad \ell: \ 3x - 6y + 7 = 0.$

3.27. $x_0 = 2, \quad y_0 = -7, \quad \ell: \ 3x + y + 5 = 0.$

3.28. $x_0 = -1, \quad y_0 = -1, \quad \ell: \ x - y + 2 = 0.$

3.29. $x_0 = 9, \quad y_0 = 6, \quad \ell: \ 3x - 4y + 4 = 0.$

3.30. $x_0 = -3, \quad y_0 = 4, \quad \ell: \ x + y - 8 = 0.$

Задание 4.

В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC (точки A, B, C даны в условии задания 2)), $A_1(1, 3, -2)$, найдите:

1) расстояние между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$;

2) уравнение плоскости $A_1B_1C_1$;

3) уравнение прямой A_1B_1;

4) расстояние между прямыми AB и A_1B_1, BC и A_1B_1;

5) расстояние и угол между прямыми AC_1 и A_1B;

6) точку A', симметричную точке A относительно BC;

7) угол между прямой AC_1 и плоскостью AA_1B_1B.

Задание 5.

5.1. Составьте уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A(-1,0)$, $B(0,1)$ и $C(1,0)$ равна 3. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.2. Составьте уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-2,0)$ и $F_2(2,0)$ равна $2\sqrt{5}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.3. Составьте уравнение кривой, отношение расстояния от каждой точки которой до точки $F(2,0)$ к расстоянию от той же точки до прямой $x-\frac{9}{2}=0$ равно $\frac{2}{3}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.4. Составьте уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-3,1)$ и $F_2(-3,-5)$ равен $2\sqrt{3}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.5. Составьте уравнение кривой, отношение расстояния от каждой точки которой до точки $F(2,0)$ к расстоянию от той же точки до прямой $x-\frac{1}{2}=0$ равно 2. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.6. Составьте уравнение кривой, каждая точка которой одинаково удалена от оси Ox и точки $F(0,-2)$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.7. Составьте уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A(-2,0)$, $B(0,2)$ и $C(2,0)$ равна 12. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.8. Составьте уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-1,2)$ и $F_2(-1,6)$ равна $2\sqrt{7}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.9. Составьте уравнение кривой, отношение расстояния от каждой точки которой до точки $F(3,0)$ к расстоянию от той же точки до прямой $x-\frac{16}{3}=0$

равно $\frac{3}{4}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.10. Составьте уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(5,-1)$ и $F_2(1,-1)$ равен 2. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.11. Составьте уравнение кривой, отношение расстояния от каждой точки которой до точки $F(-5,0)$ к расстоянию от той же точки до прямой $x+\frac{9}{5}=0$ равно $\frac{5}{3}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.12. Составьте уравнение кривой, каждая точка которой одинаково удалена от прямой $y-1=0$ и точки $F(2,-3)$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.13. Составьте уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A(-3,0)$, $B(0,3)$ и $C(3,0)$ равна 27. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.14. Составьте уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-1,0)$ и $F_2(1,0)$ равна $2\sqrt{3}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.15. Составьте уравнение кривой, отношение расстояния от каждой точки которой до точки $F(0,3)$ к расстоянию от той же точки до прямой $y-\frac{16}{3}=0$ равно $\frac{3}{4}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.16. Составьте уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0,-3)$ и $F_2(0,3)$ равен 4. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.17. Составьте уравнение кривой, отношение расстояния от каждой точки которой до точки $F(0,-5)$ к расстоянию от той же точки до прямой $y+\frac{16}{5}=0$ равно $\frac{5}{4}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.18. Составьте уравнение кривой, каждая точка которой одинаково удалена от прямой $x-2=0$ и точки $F(-3,4)$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.19. Составьте уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A(3,0)$, $B(0,-3)$ и $C(0,3)$ равна 27. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.20. Составьте уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(5,1)$ и $F_2(-1,1)$ равна 8. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.21. Составьте уравнение кривой, отношение расстояния от каждой точки которой до точки $F(0,-2)$ к расстоянию от той же точки до прямой $y+\frac{9}{2}=0$ равно $\frac{2}{3}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.22. Составьте уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0,-5)$ и $F_2(0,5)$ равен 6. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.23. Составьте уравнение кривой, отношение расстояния от каждой точки которой до точки $F(0,2)$ к расстоянию от той же точки до прямой $y-\frac{1}{2}=0$ равно 2. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.24. Составьте уравнение кривой, каждая точка которой одинаково удалена от оси Oy и точки $F(5,0)$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.25. Составьте уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A(1,0)$, $B(0,-1)$ и $C(0,1)$ равна 3. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.26. Составьте уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(2,1)$ и $F_2(2,-3)$ равна $2\sqrt{5}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.27. Составьте уравнение кривой, отношение расстояния от каждой точки которой до точки $F(-3,0)$ к расстоянию от той же точки до прямой $x+\frac{25}{3}=0$ равно $\frac{3}{5}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.28. Составьте уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0,2)$ и $F_2(-6,2)$ равен 4. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.29. Составьте уравнение кривой, отношение расстояния от каждой точки которой до точки $F(-7,0)$ к расстоянию от той же точки до прямой $x+\frac{25}{7}=0$ равно $\frac{7}{5}$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

5.30. Составьте уравнение кривой, каждая точка которой одинаково удалена от прямой $x-5=0$ и точки $F(-1,-2)$. Приведите это уравнение к каноническому виду, определите тип кривой и постройте ее.

Задание 6.

Даны уравнения второго порядка а) – г). Приведите их к каноническому виду. Учитывая, что уравнение второго порядка а) – в) от двух переменных на плоскости может определять некоторую кривую линию, а в трехмерном пространстве – цилиндрическую поверхность, в задачах а) – в) постройте соответствующую кривую, а в задачах а)–г) изобразите соответствующую поверхность.

6.1. а) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$;

б) $9x^2-16y^2-6x+8y-144=0$;

в) $12x^2-12x-32y-29=0$;

г) $9y^2+4z^2-36x+36y-24z-108=0$.

6.2. а) $x^2+4y^2-4x-8y+8=0$;

б) $5x^2-9y^2-30x+18y-9=0$;

в) $y^2+10x+2y=0$;

г) $4x^2-9y^2-32x-54y-36z-17=0$.

6.3. а) $5x^2+4y^2+10x-8y-11=0$;

б) $16x^2-25y^2+32x-100y+84=0$;

в) $y^2+8x+16=0$;

г) $5x^2-2y^2+4z^2+10x+12y+16z+3=0$.

6.4. а) $y^2+6x+14y+43=0$;

б) $9x^2+4y^2+36x-24y+36=0$;

в) $2x^2-4y^2+5x-6y-1=0$;

г) $4x^2-9y^2+z^2+24x-18y-10z+88=0$.

6.5. а) $3x^2-4y^2-12x-8y+20=0$;

б) $x^2-2x-3=0$;

в) $x^2+y^2-4x+6y+1=0$;

г) $3x^2-4y^2-2z^2+12x+8y+12z+2=0$.

6.6. а) $2x^2-12x-3y+18=0$;

б) $4x^2+25y^2+4x-10y-8=0$;

в) $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$;

г) $3x^2+4y^2+6z^2-6x+16y-36z+49=0$.

6.7. а) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$;

б) $x^2-6x+2y+11=0$;

в) $x^2-4y^2+14x-24y+9=0$;

г) $x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+22=0$.

6.8. а) $y^2-3x-4y+10=0$;

б) $x^2-4y^2+14x-24y+17=0$;

в) $36x^2+36y^2-36x-24y-23=0$;

г) $4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0$.

6.9. а) $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$;

б) $9x^2+4y^2+6x-4y-2=0$;

в) $4y^2-8y-2x-1=0$;

г) $2x^2-3y^2+12x+12y-12z-42=0$.

6.10. а) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$;

б) $4x^2+4x+2y-1=0$;

в) $4x^2-y^2-8x-6y-4=0$;

г) $2x^2+3y^2+6x-18y-12z+47=0$.

6.11. а) $2x^2+6x+3y+6=0$;

б) $4x^2-9y^2-8x-18y-41=0$;

в) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;

г) $2x^2-3y^2-4z^2+4x+12y+8z-14=0$.

6.12. а) $4x^2-9y^2-8x-18y+31=0$;

б) $4y^2+4x-2y+1=0$;

в) $4x^2+25y^2+16x-50y-59=0$;

г) $5x^2-2y^2-4z^2+10x+12y-16z-49=0$.

6.13. а) $4x^2-9y^2+8x+18y-41=0$;

б) $9x^2+4y^2-18x+16y+25=0$;

в) $2y^2-3x-16y+17=0$;

г) $x^2+2y^2-4z^2-6x+4y+32z-49=0$.

6.14. а) $9x^2+25y^2+36x-50y-164=0$;

б) $2y^2+3x+20y+53=0$;

в) $4x^2-9y^2+8x+18y+31=0$;

г) $2x^2+y^2-z^2+16x-2y+4z+17=0$.

6.15. а) $3y^2 - 7x - 6y - 4 = 0$;

б) $4x^2 + 7y^2 + 16x - 14y - 5 = 0$;

в) $x^2 - 4y^2 + 6x - 8y + 1 = 0$;

г) $x^2 + 2y^2 + 6x - 18y + 8z + 49 = 0$.

6.16. а) $x^2 - 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$;

б) $y^2 + 4y + 4 = 0$;

в) $4x^2 + y^2 + 8x - 14y + 52 = 0$;

г) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y - 8z + 47 = 0$.

6.17. а) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 40y + 73 = 0$;

б) $x^2 - 4y^2 - 6x - 40y - 95 = 0$;

в) $2y^2 - 3x - 4y - 13 = 0$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 35 = 0$.

6.18. а) $y^2 - 3x + 4y + 19 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$;

в) $x^2 - 4y^2 - 6x - 40y - 87 = 0$;

г) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$.

6.19. а) $4x^2 + 36y^2 + 100x + 72y - 8 = 0$;

б) $2y^2 - 3x + 20y + 47 = 0$;

в) $25x^2 - 4y^2 + 100x + 56y + 4 = 0$;

г) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$.

6.20. а) $2y^2 + 3x - 16y + 47 = 0$;

б) $4x^2 + y^2 - 40x + 2y + 101 = 0$;

в) $25x^2 - 4y^2 + 100x + 56y - 196 = 0$;

г) $3x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 6x - 36y - 8z - 1 = 0$.

6.21. а) $49x^2 - 4y^2 + 98x - 64y - 403 = 0$;

б) $x^2 - 2x - 2y - 5 = 0$;

в) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 51 = 0$;

г) $49x^2 + 4y^2 - 98x - 24y - 196z - 111 = 0$.

6.22. а) $x^2 + y^2 + 5x + 2y - 1 = 0$;

б) $x^2 - 2x + 2y + 7 = 0$;

в) $9x^2 - 4y^2 + 108x + 16y + 344 = 0$;

г) $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$.

6.23. а) $x^2+2x-2y+9=0$;

б) $9x^2-4y^2+108x+16y+272=0$;

в) $x^2+y^2+6x+2y-40=0$;

г) $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$.

6.24. а) $x^2-4y^2+4x+24y-32=0$;

б) $x^2+y^2-3x+7y-25=0$;

в) $x^2+2x+2y-7=0$;

г) $4x^2+9y^2+36z^2+8x+36y-72z+40=0$.

6.25. а) $4x^2-25y^2-100x-50y-25=0$;

б) $2x^2+12x-5y+53=0$;

в) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;

г) $x^2+y^2+z^2-4x+2z-11=0$.

6.26. а) $3x^2+108y^2-6x+216y+84=0$;

б) $5x^2+20x-3y+44=0$;

в) $36x^2-9y^2-72x-18y+351=0$;

г) $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$.

6.27. а) $5x^2+20x+3y-4=0$;

б) $36x^2-9y^2-72x-18y-297=0$;

в) $4x^2+5y^2-8x+10y-11=0$;

г) $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$.

6.28. а) $4x^2-y^2+56x+10y+175=0$;

б) $25x^2+16y^2+50x-32y-359=0$;

в) $x^2-5x+6=0$;

г) $x^2-y^2-4x+8y-2z=0$.

6.29. а) $4x^2-y^2+56x+10y+167=0$;

б) $4x^2-56x-3y+193=0$;

в) $9x^2+4y^2-18x+72y+297=0$;

г) $x^2+y^2-z^2-2x-4y+2z+4=0$.

6.30. а) $2x^2+12x+5y-17=0$;

б) $9x^2+4y^2+36x-40y+100=0$;

в) $25x^2-4y^2-100x-56y-196=0$;

г) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0$.

Линейная алгебра

Задание 1.

Выясните, образуют ли линейное векторное пространство следующие множества с естественными операциями сложения и умножения на действительные числа.

1.1. а) Множество всех целых чисел;

б) множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех четных функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих первой четверти.

1.2. а) Множество всех действительных чисел, больших 9;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию: $f(0) = 0$.

г) множество всех плоских сонаправленных векторов.

1.3. а) Множество всех действительных чисел, по модулю больших 1;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех периодических функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, лежащих на оси Ox.

1.4. а) Множество всех простых чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех возрастающих функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, коллинеарных данной прямой.

1.5. а) Множество всех действительных положительных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию: $f(0)=1$;

г) множество всех плоских векторов, длина которых равна 7.

1.6. а) Множество всех рациональных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций $f(x)$ с областью определения $\mathbb{R}$ и областью значений $[-4;\ 10]$;

г) множество всех плоских векторов, вторая координата которых равна -2.

1.7. а) Множество всех чисел, кратных 3;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций $f(x)$, областью определения которых является множество неотрицательных чисел;

г) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих второй четверти.

1.8. а) Множество всех действительных неположительных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$, с областью значений $[-100;\ 100]$;

г) множество всех плоских векторов, образующих острый угол с данной прямой.

1.9. а) Множество всех четных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех нечетных функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, сумма координат которых является отрицательным числом.

1.10. а) Множество всех правильных рациональных дробей;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & 0 & 0\\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию: $f(1)=1$;

г) множество всех плоских векторов, лежащих на оси Oy.

1.11. а) Множество всех действительных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \alpha_2\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех невозрастающих функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих третьей четверти.

1.12. а) Множество всех нечетных чисел, больших 11;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4\\ \alpha_5 & \alpha_6 & 0\end{pmatrix}$ где $\alpha_1 \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию: $f(-1)=3$;

г) множество всех плоских векторов, длина которых равна 4.

1.13. а) Множество всех делителей числа 198;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha_1\\ 0 & 0 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех убывающих функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, имеющих равные координаты.

1.14. а) Множество всех нечетных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций $f(x)$ с заданным периодом T, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, ортогональных данной прямой.

1.15. а) Множество всех действительных чисел, принадлежащих промежутку $[-1;\ 8]$;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R};\mathbb{Z}$

в) множество всех ограниченных функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, образующих угол $\frac{\pi}{6}$ с осью Ox.

1.16. а) Множество всех действительных чисел, имеющих вид $k\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех неположительных функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, модуль которых не превосходит 10.

1.17. а) Множество всех четных чисел, больших 6;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_5 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций $f(x)$, имеющих период π;

г) множество всех плоских векторов, принадлежащих первой четверти.

1.18. а) Множество всех иррациональных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию: $f(1) = 3$;

г) множество всех плоских векторов, перпендикулярных оси Oy.

1.19. а) Множество всех целых чисел, кратных 2, но не кратных 5;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех неотрицательных функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, первая координата которых равна 3.

1.20. а) Множество всех действительных чисел, модуль которых меньше 3;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \alpha_2\\ \alpha_3 & 0 & \alpha_4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i\in\mathbb{R}$;

в) множество всех линейных функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, исходящих из начала координат и принадлежащих четвертой четверти.

1.21. а) Множество всех действительных чисел вида $a+\sqrt{2}\,n$, где $n\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{R}$;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha_1\\ \alpha_2 & 0 & 0\\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}$, где $\alpha_i\in\mathbb{R}$;

в) множество всех линейных функций $f(x)$, заданных на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условию: $f(2)=0$;

г) множество всех плоских векторов, ортогональных вектору $\bar{a}=(-2;1)$.

1.22. а) Множество всех действительных неотрицательных чисел;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \alpha_1\\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0\\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}$, где $\alpha_i\in\mathbb{R}$;

в) множество всех постоянных функций, заданных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, сумма координат которых равна 0.

1.23. а) Множество всех неправильных рациональных дробей;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & \alpha_3 & 0\\ 0 & \alpha_4 & 0\end{pmatrix}$, где $\alpha_i\in\mathbb{R}$;

в) множество всех квадратичных функций
$f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0,\ a,b,c\in\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, принадлежащих третьей четверти.

1.24. а) Множество всех чисел, кратных 7;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}0 & \alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}$, где $\alpha_i\in\mathbb{R}$;

в) множество всех многочленов $\mathrm{P}(x)$, степень которых не превосходит 3;

г) множество всех плоских векторов, образующих угол $\frac{2\pi}{3}$ с осью Ox.

1.25. а) Множество всех действительных чисел вида $\sqrt{3}\,n + a$, где $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & 0 & \alpha_5 \\ 0 & \alpha_6 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех многочленов вида $ax^4 + bx^2 + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, разность координат которых является нечетным числом.

1.26. а) Множество всех составных чисел;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех периодических функций, определенных на $\mathbb{R}$;

г) множество всех плоских векторов, первая координата которых равна 1.

1.27. а) Множество всех целых чисел, кратных 3, но не кратных 9;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех невозрастающих функций, заданных на отрезке $[-10;\ 10]$;

г) множество всех плоских векторов, принадлежащих четвертой четверти.

1.28. а) Множество всех действительных чисел, меньших 5;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех неубывающих на отрезке $[1;\ 5]$ функций;

г) множество всех плоских векторов, образующих тупой угол с данной прямой.

1.29. а) Множество всех чисел, имеющих вид $4k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

б) множество всех матриц вида $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех многочленов степени 3;

г) множество всех плоских векторов, сумма координат которых является четным числом.

1.30. а) Множество всех правильных несократимых рациональных дробей;

б) множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & \alpha_3\\ 0 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$;

в) множество всех функций, имеющих период 2π;

г) множество всех плоских векторов, принадлежащих второй четверти.

Задание 2.

Докажите, что данный упорядоченный набор векторов образует базис линейного пространства V, и найдите координаты вектора $\overline{y}$ в этом базисе.

В задаче а) $V=\mathbb{R}^3$; в задаче б) V – пространство всех матриц второго порядка; в задаче в) V – пространство многочленов, степень которых не превосходит трех:

2.1. а) $\overline{e}_1=(0;1;2)$, $\overline{e}_2=(1;0;1)$, $\overline{e}_3=(-1;2;4)$, $\overline{y}=(-2;4;5)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 8 & 9\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 47 & 49\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x+1$, $f_3(x)=(x+1)^2$, $f_4(x)=(x+1)^3$,

$Y(x)=x^3-2x^2+3x-4$.

2.2. а) $\overline{e}_1=(1;0;-1)$, $\overline{e}_2=(2;1;1)$, $\overline{e}_3=(0;1;1)$, $\overline{y}=(3;-1;2)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & -6\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x-3$, $f_3(x)=x^2$, $f_4(x)=-x^3+x+1$,

$Y(x)=x^3+x^2-2x+5$.

2.3. а) $\overline{e}_1=(1;-1;-1)$, $\overline{e}_2=(0;1;0)$, $\overline{e}_3=(1;3;2)$, $\overline{y}=(-1;4;2)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 7\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$,

$A_4=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -8 & 2\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=2$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=x^2+3$, $f_4(x)=x^3-x^2+2$,

$$Y(x) = x^3 - x^2 + x + 4.$$

2.4. а) $\bar{e}_1 = (-1; 3; 1)$, $\bar{e}_2 = (1; 0; 4)$, $\bar{e}_3 = (2; -1; 1)$, $\bar{y} = (4; -3; -1)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} -11 & 46 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x - 2$, $f_3(x) = (x-2)^2$, $f_4(x) = (x-2)^3$,

$Y(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 6$.

2.5. а) $\bar{e}_1 = (2; -4; 3)$, $\bar{e}_2 = (-1; 0; 5)$, $\bar{e}_3 = (1; -2; -1)$, $\bar{y} = (3; -8; 1)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = -1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = x^2 + 4$, $f_4(x) = x^3 + x + 1$,

$Y(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 3$.

2.6. а) $\bar{e}_1 = (3; -1; 4)$, $\bar{e}_2 = (1; -3; -3)$, $\bar{e}_3 = (0; -1; -2)$, $\bar{y} = (3; 5; 9)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 3$, $f_2(x) = x + 2$, $f_3(x) = x^2 + x - 1$, $f_4(x) = x^3 + 1$,

$Y(x) = -2x^3 + 3x^2 - 5$.

2.7. а) $\bar{e}_1 = (1; -5; -1)$, $\bar{e}_2 = (0; 1; -3)$, $\bar{e}_3 = (1; -1; 1)$, $\bar{y} = (1; -6; 2)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = -2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2 - 2x - 1$, $f_4(x) = x^3 + 2x^2 - 1$,

$Y(x) = -4x^3 + x^2 - 3x + 1$.

2.8. а) $\bar{e}_1 = (1; 3; 7)$, $\bar{e}_2 = (-1; 0; 1)$, $\bar{e}_3 = (2; 1; 4)$, $\bar{y} = (-3; -9; -1)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}-11 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix};$$

в) $f_1(x)=1,\ f_2(x)=x-1,\ f_3(x)=(x-1)^2,\ f_4(x)=(x-1)^3,$

$Y(x)=x^3-x^2+2x+3$.

2.9. а) $\bar{e}_1=(-2;3;5),\quad \bar{e}_2=(1;-4;2),\quad \bar{e}_3=(0;1;3),\quad \bar{y}=(5;-8;22);$

б) $A_1=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & -3\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix},$

$$A_4=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -3 & 7\end{pmatrix};$$

в) $f_1(x)=2,\ f_2(x)=x+3,\ f_3(x)=x^2-3x+4,$

$f_4(x)=x^3-2x^2+x,\quad Y(x)=2x^3-4x+12$.

2.10. а) $\bar{e}_1=(7;0;-8),\quad \bar{e}_2=(1;-3;4),\quad \bar{e}_3=(0;1;-1),\quad \bar{y}=(-7;13;-5);$

б) $A_1=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 0\end{pmatrix},$

$$Y=\begin{pmatrix}-4 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix};$$

в) $f_1(x)=-3,\ f_2(x)=3x+1,\ f_3(x)=x^2,\ f_4(x)=2x^3-x+6,$

$Y(x)=4x^3-5x^2+x+7$.

2.11. а) $\bar{e}_1=(1;-2;4),\quad \bar{e}_2=(-3;5;4),\quad \bar{e}_3=(1;0;-2),\quad \bar{y}=(-6;14;9);$

б) $A_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix},$

$$A_4=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix};$$

в) $f_1(x)=2,\ f_2(x)=-x+5,\ f_3(x)=x^2+x+1,$

$f_4(x)=x^3-2x^2+x,\quad Y(x)=2x^3-4x+6$.

2.12. а) $\bar{e}_1=(5;-1;0),\quad \bar{e}_2=(1;3;-2),\quad \bar{e}_3=(4;1;-1),\quad \bar{y}=(3;8;-7);$

б) $A_1=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix},$

$$A_4=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 3\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}15 & 11\\ -32 & 23\end{pmatrix};$$

в) $f_1(x)=-1,\ f_2(x)=x+2,\ f_3(x)=(x+2)^2,\ f_4(x)=(x+2)^3,$

$Y(x)=-2x^3-4x^2+8x+3$.

2.13. а) $\bar{e}_1=(1;-6;3)$, $\bar{e}_2=(-2;1;-5)$, $\bar{e}_3=(-1;4;-7)$, $\bar{y}=(-3;6;13)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & -2\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=-x+2$, $f_3(x)=x^2-4$,

$f_4(x)=x^3+x^2-x-1$, $Y(x)=4x^3-x^2+3x-1$.

2.14. а) $\bar{e}_1=(-2;3;7)$, $\bar{e}_2=(1;6;5)$, $\bar{e}_3=(0;2;-3)$, $\bar{y}=(11;-6;5)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & 0\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -4 & 0\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=4$, $f_2(x)=-x+1$, $f_3(x)=-x^2-1$, $f_4(x)=x^3-x+1$,

$Y(x)=x^3+5x^2-x+2$.

2.15. а) $\bar{e}_1=(-5;2;-3)$, $\bar{e}_2=(1;-1;0)$, $\bar{e}_3=(-4;1;6)$, $\bar{y}=(1;-7;-6)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$,

$Y=\begin{pmatrix}12 & -6\\ 4 & 17\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=-2x+1$, $f_3(x)=x^2-2x-3$, $f_4(x)=x^3-1$,

$Y(x)=3x^3-7x^2+4x+15$.

2.16. а) $\bar{e}_1=(1;7;-5)$, $\bar{e}_2=(2;-3;-6)$, $\bar{e}_3=(0;4;-1)$, $\bar{y}=(1;-1;-2)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$A_4=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & -5\end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=2$, $f_2(x)=-x$, $f_3(x)=x^2+2x-4$,

$f_4(x)=x^3+2x^2-x+1$, $Y(x)=5x^3+3x^2-16x-7$.

2.17. а) $\bar{e}_1=(4;5;1)$, $\bar{e}_2=(1;-1;-3)$, $\bar{e}_3=(2;7;5)$, $\bar{y}=(-1;1;2)$;

б) $A_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & -6\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 4\end{pmatrix}$,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix};$$

в) $f_1(x) = -3,\ \ f_2(x) = x - 1,\ \ f_3(x) = x^2 - x - 2,$

$f_4(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3, \quad Y(x) = 2x^3 + 7x^2 - x + 8.$

2.18. а) $\bar{e}_1 = (3; 0; -5), \quad \bar{e}_2 = (6; -1; 1), \quad \bar{e}_3 = (1; -2; 0), \quad \bar{y} = (-4; -8; -7);$

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix};$$

в) $f_1(x) = 1,\ \ f_2(x) = 2x - 3,\ \ f_3(x) = x^2 + 1,$

$f_4(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2, \quad Y(x) = -3x^3 + x^2 - 5x - 1.$

2.19. а) $\bar{e}_1 = (1; -1; -7), \quad \bar{e}_2 = (8; 0; -3), \quad \bar{e}_3 = (2; 1; 4), \quad \bar{y} = (-1; 0; 9);$

б) $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$

$$Y = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 13 & 12 \end{pmatrix};$$

в) $f_1(x) = -1,\ \ f_2(x) = x - 3,\ \ f_3(x) = (x-3)^2,$

$f_4(x) = (x-3)^3, \quad Y(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1.$

2.20. а) $\bar{e}_1 = (7; 0; 3), \quad \bar{e}_2 = (1; 4; -2), \quad \bar{e}_3 = (-2; 3; -5), \quad \bar{y} = (12; \ -2; 11);$

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix};$$

в) $f_1(x) = 1,\ \ f_2(x) = 5x + 3,\ \ f_3(x) = 2x^2 - x + 4,$

$f_4(x) = x^3 - x + 2, \quad Y(x) = -x^3 + 4x^2 - 6x + 5.$

2.21. а) $\bar{e}_1 = (-9; 0; -1), \quad \bar{e}_2 = (3; -7; 1), \quad \bar{e}_3 = (6; 2; 1), \quad \bar{y} = (6; 0; -3);$

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$

в) $f_1(x) = 1,\ \ f_2(x) = -x - 2,\ \ f_3(x) = x^2 - 3x + 5,$

$f_4(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1, \quad Y(x) = -2x^3 + 4x^2 - 7x - 11.$

2.22. а) $\bar{e}_1 = (0; -6; -8), \quad \bar{e}_2 = (1; -7; -9), \quad \bar{e}_3 = (-3; -5; 1), \quad \bar{y} = (-9; 3; 1);$

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = -x^2 + 2x - 1$,

$f_4(x) = 2x^3 + 5x - 6$, $\quad Y(x) = -4x^3 + 2x^2 - 8x + 16$.

2.23. а) $\bar{e}_1 = (5; -4; 3)$, $\quad \bar{e}_2 = (0; 1; -5)$, $\quad \bar{e}_3 = (1; 0; -9)$, $\quad \bar{y} = (-6; -6; 0)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad Y = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = -1$, $f_2(x) = x + 5$, $f_3(x) = x^2$,

$f_4(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$, $\quad Y(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

2.24. а) $\bar{e}_1 = (-1; 2; -8)$, $\quad \bar{e}_2 = (3; 7; -5)$, $\quad \bar{e}_3 = (0; -3; 1)$, $\quad \bar{y} = (3; -9; -12)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 3$, $f_2(x) = -x + 1$, $f_3(x) = 2x^2 + x - 1$,

$f_4(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$, $\quad Y(x) = -3x^3 + x^2 + 2x + 7$.

2.25. а) $\bar{e}_1 = (1; -6; -5)$, $\quad \bar{e}_2 = (8; -3; 1)$, $\quad \bar{e}_3 = (2; 1; 0)$, $\quad \bar{y} = (15; 1; -5)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} 15 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x + 3$, $f_3(x) = x^2 - 4x + 5$,

$f_4(x) = x^3 - 3x^2 + 6$, $\quad Y(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 12$.

2.26. а) $\bar{e}_1 = (3; -1; -1)$, $\quad \bar{e}_2 = (-1; 7; 0)$, $\quad \bar{e}_3 = (2; 0; -1)$, $\quad \bar{y} = (5; -3; 2)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad Y = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x)=2,\ \ f_2(x)=-x+4,\ \ f_3(x)=x^2-x+3,$
$f_4(x)=x^3+2x^2-3x+5, \quad Y(x)=x^3+9x^2-2x+6.$

2.27. а) $\bar{e}_1=(7;-8;1), \quad \bar{e}_2=(1;-3;0), \quad \bar{e}_3=(2;5;-3), \quad \bar{y}=(9;9;-3);$

б) $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$

$A_4=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 11 & 20 \end{pmatrix};$

в) $f_1(x)=1,\ \ f_2(x)=2x+1,\ \ f_3(x)=-x^2-x+2,$
$f_4(x)=2x^3-x^2-4x+1, \quad Y(x)=-2x^3+x^2-4x-3.$

2.28. а) $\bar{e}_1=(4;-1;5), \quad \bar{e}_2=(3;1;1), \quad \bar{e}_3=(-1;3;-1), \quad \bar{y}=(-13;-3;5);$

б) $A_1=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$

$A_4=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$

в) $f_1(x)=-1,\ \ f_2(x)=-3x,\ \ f_3(x)=x^2+x+2,$
$f_4(x)=-x^3+2x^2-3x+4, \quad Y(x)=2x^3+7x+5.$

2.29. а) $\bar{e}_1=(-7;2;-1), \quad \bar{e}_2=(3;0;-4), \quad \bar{e}_3=(1;-2;5), \quad \bar{y}=(-9;0;12);$

б) $A_1=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$

$A_4=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix};$

в) $f_1(x)=1,\ \ f_2(x)=x-5,\ \ f_3(x)=x^2+3x-2,$
$f_4(x)=-4x^3+5x^2-x+1, \quad Y(x)=8x^3-11x^2+3x-12.$

2.30. а) $\bar{e}_1=(-1;0;3), \quad \bar{e}_2=(-2;-6;-1), \quad \bar{e}_3=(3;5;1), \quad \bar{y}=(11;0;-8);$

б) $A_1=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$

$A_4=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$

в) $f_1(x)=-2,\ \ f_2(x)=x+1,\ \ f_3(x)=-2x^2+x-3,$
$f_4(x)=x^3-4x^2+x-2, \quad Y(x)=x^3-6x^2+3x+10.$

Задание 3.

Дана матрица A размером 4х3.

1) Замените числами элементы, обозначенные «*» так, чтобы ранг матрицы стал равным: а) 1; б) 2; в) 3. В каждом из случаев а) – в) укажите базисный минор матрицы A.

2) Пусть $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных. Сколько решений будет иметь однородная система линейных уравнений СЛАУ $A\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$ с матрицей A, составленной в заданиях а) – в) пункта 1? Укажите, сколько свободных неизвестных будет содержать общее решение СЛАУ в каждом из этих случаев.

3.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.2. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2 & 1 & -3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.3. $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

3.4. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 3 & -1 & 2 \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.5. $A=\begin{pmatrix} -2 & -7 & 5 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.6. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.7. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 4 & -3 & -1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.8. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.9. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -1 & -2 & -2 \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

3.10. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$. 3.11. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & 2 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.12. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -5 & -2 & 7 \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

3.13. $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & -9 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.14. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$. 3.15. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

3.16. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 7 & -1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.17. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ -1 & -5 & 8 \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.18. $A=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 6 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

3.19. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.20. $A=\begin{pmatrix} -2 & 9 & 5 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.21. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 7 & 3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

3.22. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 8 & 2 & -6 \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.23. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. 3.24. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

3.25. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 4 & -5 & -9 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.26. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 6 & -9 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.27. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & -3 & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

3.28. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. 3.29. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$. 3.30. $A=\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

Задание 4.

Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите размерность и найдите базис (ФСР) пространства ее решений.

4.1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 5, \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -13, \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 14, \\ 6x_1 - 9x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 9. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 1. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 - x_5 = -7. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 2, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 7, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 1. \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 5, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 1. \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = -1, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 2. \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 1, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 3. \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = 1. \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 - x_5 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 37. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = -6, \\ 6x_1 + 9x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = -8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 + x_5 = -8. \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -3. \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 7x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -7. \end{cases}$

4.21. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$

4.22. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 16x_1 - 7x_2 + 16x_3 + 18x_4 = 20, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

4.23. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 24x_4 = 1. \end{cases}$

4.24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 29. \end{cases}$

4.25. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

4.26. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 - 7x_3 + 11x_4 = -1. \end{cases}$

4.27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 2, \\ \quad 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -1. \end{cases}$

4.28. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$

4.29. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = -3, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = -17, \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = -18. \end{cases}$

4.30. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = 0. \end{cases}$

Задание 5.

Докажите, что данный геометрический оператор пространства $\mathbb{R}^3$ является линейным. Найдите:

1) область значений и ранг, ядро и дефект этого оператора, исходя из геометрических соображений;

2) матрицу оператора в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$;

3) собственные векторы оператора, определив их из геометрических соображений, а затем подтвердите это вычислениями.

5.1. Оператор поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

5.2. Оператор зеркального отражения относительно плоскости $x + y = 0$.

5.3. Оператор зеркального отражения относительно плоскости Oxy.

5.4. Оператор зеркального отражения относительно плоскости $x - y = 0$.

5.5. Оператор зеркального отражения относительно плоскости Oyz.

5.6. Оператор проектирования на ось Ox.

5.7. Оператор проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}\, z = 0$.

5.8. Оператор проектирования на плоскость $y + \sqrt{3}\, z = 0$.

5.9. Оператор проектирования на плоскость $z = 0$.

5.10. Оператор проектирования на плоскость $y = \sqrt{3}\, x$.

5.11. Оператор проектирования на плоскость $x + z = 0$.

5.12. Оператор проектирования на плоскость $\sqrt{3}\, y + z = 0$.

5.13. Оператор проектирования на плоскость $\sqrt{3}x + z = 0$.

5.14. Оператор поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол π.

5.15. Оператор проектирования на ось Oz.

5.16. Оператор проектирования на плоскость $y - z = 0$.

5.17. Оператор проектирования на плоскость $\sqrt{3}\, x + y = 0$.

5.18. Оператор проектирования на ось Oy.

5.19. Оператор поворота относительно оси Ox на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении.

5.20. Оператор проектирования на плоскость $x + y = 0$.

5.21. Оператор поворота в положительном направлении относительно оси Oy на угол $\frac{\pi}{2}$

5.22. Оператор проектирования на плоскость $y + z = 0$.

5.23 Оператор проектирования на плоскость Oyz.

5.24. Оператор зеркального отражения относительно плоскости $x + z = 0$.

5.25. Оператор зеркального отражения относительно плоскости $Ox\,z$.

5.26. Оператор зеркального отражения относительно плоскости $y - z = 0$.

5.27. Оператор зеркального отражения относительно плоскости $x - z = 0$.

5.28. Оператор зеркального отражения относительно плоскости $y + z = 0$.

5.29. Оператор зеркального отражения относительно плоскости $x + z = 0$.

5.30. Оператор проектирования на плоскость $x - y = 0$.

Задание 6.

Дана матрица Q и уравнение поверхности второго порядка:

1) составьте квадратичную форму с матрицей Q;

2) исследуйте ее знакоопределенность;

3) приведите квадратичную форму к каноническому виду и укажите базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид;

4) используя результат задачи 3), определите тип поверхности второго порядка, имеющей данное уравнение.

6.1. $Q=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $x^2-8xy+y^2-4z^2+60=0$.

6.2. $Q=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $2x^2+2y^2+4xy+3z^2=12$.

6.3. $Q=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $3x^2+4xy+3y^2+2z^2=50$.

6.4. $Q=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $6x^2-2y^2+6z^2+4xz=8$.

6.5. $Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6xz=54$.

6.6. $Q=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $z^2-xy=0$.

6.7. $Q=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $-2x^2-2y^2+5z^2+4xz-4yz=36$.

6.8. $Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $x^2-y^2+z^2+4xy-4yz=27$.

6.9. $Q=\begin{bmatrix}2 & 0 & \sqrt{3}\\ 0 & 4 & 0\\ \sqrt{3} & 0 & 4\end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $2x^2+4y^2+4z^2+2\sqrt{3}xz=20$.

6.10. $Q=\begin{bmatrix}5 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $5x^2+2y^2+2z^2+4xz=12$.

6.11. $Q=\begin{bmatrix}3 & -\sqrt{2} & 0\\ -\sqrt{2} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $3x^2+2y^2+5z^2-2\sqrt{2}xy=20$.

6.12. $Q=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $x^2+y^2+z^2-2yz=4$.

6.13. $Q=\begin{bmatrix}-3 & \sqrt{6} & 0\\ \sqrt{6} & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $-3x^2+2\sqrt{6}xy-2y^2-z^2=-25$.

6.14. $Q=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $4x^2+y^2+2yz=16$.

6.15. $Q=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $-2x^2+3y^2+4yz=-8$.

6.16. $Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $x^2+3z^2+4yz=4$.

6.17. $Q=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $-3x^2-3z^2-4yz=0$.

6.18. $Q=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $4x^2+2y^2+2\sqrt{3}yz=12$.

6.19. $Q=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $-x^2-2y^2-2\sqrt{3}yz=0$.

6.20. $Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $x^2+3y^2-4yz=40$.

6.21. $Q=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $3x^2+4xy+9z^2=-60$.

6.22. $Q=\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $x^2-2\sqrt{2}xy+2y^2+4z^2=36$.

6.23. $Q=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{5} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $x^2+6y^2+3z^2+2\sqrt{5}xy=21$.

6.24. $Q=\begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{5} & 0 \\ -\sqrt{5} & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $-2x^2-6y^2-4z^2-2\sqrt{5}xy=-28$.

6.25. $Q=\begin{bmatrix} 3 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 7 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 7 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $3x^2+7y^2+7z^2+2\sqrt{5}xz=56$.

6.26. $Q=\begin{bmatrix} -3 & 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & -3 & 0 \\ -\sqrt{5} & 0 & -7 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $-3x^2-2\sqrt{5}xz-3y^2-7z^2=-24$.

6.27. $Q=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $4x^2+4xy+4y^2+3z^2=12$.

6.28. $Q=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $3x^2+4xy+3y^2+4z^2=20$.

6.29. $Q=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $-x^2+2xy-2y^2-2z^2+6=0$.

6.30. $Q=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$;

уравнение поверхности: $3x^2+5y^2+5z^2-2yz=24$.

Введение в анализ

Задание 1.

Подберите такие значения a и b, при которых $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ равен:

1) нулю; 2) ∞; 3) заданному числу k.

Затем докажите это в соответствии с определением предела числовой последовательности.

1.1. $x_n=\dfrac{an-2}{bn+5}$, $k=\dfrac{4}{5}$.

1.2. $x_n=\dfrac{bn^2+n-1}{an^2-3n+2}$, $k=\dfrac{1}{2}$.

1.3. $x_n=\dfrac{4-bn}{an+1}$, $k=2$.

1.4. $x_n=\dfrac{an^2-5}{bn^2+7n-1}$, $k=\dfrac{5}{7}$.

1.5. $x_n=\dfrac{an+25}{1-bn}$, $k=25$.

1.6. $x_n=\dfrac{bn^2-4n}{8-an^2}$, $k=-3$.

1.7. $x_n=\dfrac{5-bn}{1+an}$, $k=5$.

1.8. $x_n=\dfrac{an^2-9}{bn^2-4}$, $k=\dfrac{9}{4}$.

1.9. $x_n=\dfrac{2an+3}{4-bn}$, $k=\dfrac{3}{2}$.

1.10. $x_n = \dfrac{an^2 - 5n + 1}{bn^2 + 8}$, $\quad k = \dfrac{1}{4}$.

1.11. $x_n = \dfrac{-an + 4}{bn + 2}$, $\quad k = 2$.

1.12. $x_n = \dfrac{an^2 + 2}{bn^2 - n - 1}$, $\quad k = -2$.

1.13. $x_n = \dfrac{an + 12}{4 - bn}$, $\quad k = 3$.

1.14. $x_n = \dfrac{4 - 2bn^2}{an^2 + n + 3}$, $\quad k = 2$.

1.15. $x_n = \dfrac{4 - 3bn}{2an + 5}$, $\quad k = 6$.

1.16. $x_n = \dfrac{7 - an}{bn - 4}$, $\quad k = \dfrac{4}{7}$.

1.17. $x_n = \dfrac{n - an^2}{bn^2 + 5n + 6}$, $\quad k = -\dfrac{1}{6}$.

1.18. $x_n = \dfrac{an + 1}{bn - 2}$, $\quad k = \dfrac{4}{3}$.

1.19. $x_n = \dfrac{bn^2 + 8}{4 - n - an^2}$, $\quad k = 5$.

1.20. $x_n = \dfrac{a - bn}{an + b}$, $\quad k = -2$.

1.21. $x_n = \dfrac{an^2 + 5n - 3}{bn^2 - 4}$, $\quad k = \dfrac{3}{4}$.

1.22. $x_n = \dfrac{an + 6}{3 - bn}$, $\quad k = 2$.

1.23. $x_n = \dfrac{bn^2 - 1}{an^2 + 2n - 5}$, $\quad k = \dfrac{1}{5}$.

1.24. $x_n = \dfrac{bn - 5}{3an + 4}$, $\quad k = -\dfrac{5}{4}$.

1.25. $x_n = \dfrac{an^2 + 3n}{bn^2 + 8 + 4n}$, $\quad k = 3$.

1.26. $x_n = \dfrac{an - 11}{4 + bn}$, $\quad k = \dfrac{11}{2}$.

1.27. $x_n = \dfrac{an^2 + 8n + 4}{3 - bn^2}$, $\quad k = -\dfrac{2}{3}$.

1.28. $x_n = \dfrac{bn+13}{an-1}$, $\qquad k = 13$.

1.29. $x_n = \dfrac{an^2+n-8}{7n-2bn^2}$, $\qquad k = 1$.

1.30. $x_n = \dfrac{5an-1}{7+2bn}$, $\qquad k = \dfrac{1}{7}$.

Задание 2.

Даны последовательности x_n, y_n, z_n. Для каждой последовательности найдите предел при $n \to \infty$ и укажите, является ли последовательность сходящейся (расходящейся), бесконечно малой (бесконечно большой); ни той, ни другой, ограниченной (неограниченной).

2.1. $x_n = \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right) \cdot \sqrt[n]{5n^4 + 2n^3 - 3}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{1+5n}{5n-2}\right)^{4-3n}$,

$$z_n = \frac{4n(n-3)! + (n-2)!}{2(n-1)! - 5(n-2)!}.$$

2.2 $x_n = \dfrac{3+6+\ldots+3n}{5-4n-2n^2}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{3n-4}{3n+5}\right)^{2-7n}$,

$$z_n = \frac{(n-1)! + n^2(n-2)!}{2n! - (n-1)!}.$$

2.3. $x_n = \dfrac{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n+1}}}{\sqrt[2n]{3n^2+7n-4}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{9n^2+5n-4}{9n^2+5n+10}\right)^{1-4n}$,

$$z_n = \frac{(n+2)! - (n+1)!}{n! + 2(n+1)!}.$$

2.4. $x_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{3n^2-n+1}{3n^2+2n-4}\right)^{1+n}$,

$$z_n = \frac{(n+3)!}{2(n+1)! - (n+2)!}.$$

2.5. $x_n = \dfrac{3^n - 4\cdot 5^n}{5 + 25 + \ldots + 5^n}$, $\qquad y_n = \left(\dfrac{2n^2 + 3n + 3}{2n^2 + 3n - 4}\right)^{n-2}$,

$$z_n = \frac{2n\cdot n! - 3(n-1)!}{(n+1)! - 4n!}.$$

2.6. $x_n = \dfrac{5 + 7 + 9 + \ldots + (2n+3)}{11n + 7n^2 - 12}$, $\qquad y_n = \left(\dfrac{4n^2 + 5n - 1}{4n^2 - n + 3}\right)^{-n^3}$,

$$z_n = \frac{n! - (n+2)!}{(n+3)n! + (n+1)!}.$$

2.7. $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{3n^8 + 4n^6 - 2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}}$, $\qquad y_n = \left(\dfrac{6n^2 + 2n - 1}{6n^2 + 5}\right)^{3+2n}$,

$$z_n = \frac{(n-1)! + n^2\cdot(n-2)!}{2n! - (n-1)!}.$$

2.8. $x_n = \dfrac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)}{1 + 2 + 3 + \ldots + n}$, $\qquad y_n = \left(\dfrac{3n^2 - 2n + 1}{3n^2 + 5n - 4}\right)^{1-2n}$,

$$z_n = \frac{n(n-3)! + (n-2)!}{(n-1)! - (n-2)!}.$$

2.9. $x_n = \left(\dfrac{2}{n^3} + \dfrac{4}{n^3} + \ldots + \dfrac{2(n-2)}{n^3}\right)\cdot\sqrt[5]{3n^5 + 2n^4 - 1}$,

$y_n = \left(\dfrac{4n^2 - n + 3}{4n^2 + 2n - 1}\right)^{2-n^3}$, $\qquad z_n = \dfrac{n!(n+2) - (n-2)!}{(n-1)! + n!}$.

2.10. $x_n = \dfrac{1 + 2n + 3n^2}{2 + 7 + 12 + \ldots + (5n-3)}$, $\qquad y_n = \left(\dfrac{7n+3}{7n+2}\right)^{3n-4}$,

$$z_n = \frac{(n-1)! + 3n!}{(n+1)(n-1)! - (n-2)!}.$$

2.11. $x_n = \dfrac{2+\sqrt[n]{4n^3+10n^2-7n+1}}{\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{36}+\ldots+\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n+1}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+2n+4}\right)^{n^3}$,

$z_n = \dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+2(n+1)!}$.

2.12. $x_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}+\sqrt[3]{3n^2+n-1}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{3n+15}{3n-1}\right)^{4n-3}$,

$z_n = \dfrac{n(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+1)!}$.

2.13. $x_n = \dfrac{9+3-3-\ldots-(3n-12)}{12+5n^2-8n^3}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+n-1}\right)^{n^2+2}$,

$z_n = \dfrac{(n-1)!+(n-3)!}{2n^2(n-3)!+(n-2)!}$.

2.14. $x_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n$, $\quad y_n = \left(\dfrac{3n^2-n+4}{3n^2+2n-1}\right)^{n^3+n}$,

$z_n = \dfrac{(n+1)!+n!(n+3)}{(n+2)!+(n+1)!}$.

2.15. $x_n = \dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}+\sqrt{5n+1}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{4n^2-n+3}{4n^2+2n-1}\right)^{2-n^3}$,

$z_n = \dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{2n^2(n+1)!-(n+2)!}$.

2.16. $x_n = \dfrac{\dfrac{1}{7}+1+7+\ldots+7^{n-2}}{4\cdot 3^n+5\cdot 7^{n-1}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{6n^2+5n+1}{6n^2+2n+3}\right)^{n^2-1}$,

$z_n = \dfrac{(n+1)!-n\cdot n!(n-4)}{2(n+2)!}$.

2.17. $x_n = \dfrac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{2n^2 + n + 5}{2n^2 + 3n + 4} \right)^{n^2}$,

$z_n = \dfrac{(n+5)!(n-3) + 2(n+4)!}{3n^2(n+4)! - (n+5)!}$.

2.18. $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2 + 5} - \sqrt{3n^4 + 2}}{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{2n^2 - 4n}{2n^2 + n - 5} \right)^{7-n}$,

$z_n = \dfrac{3n(n+3)! + (n+4)!}{2(n+1)! - 8(n+4)!}$.

2.19. $x_n = \left(\dfrac{1}{n^4} + \dfrac{5}{n^4} + \dfrac{9}{n^4} + \ldots + \dfrac{4n-11}{n^4} \right) \cdot \sqrt[3]{8n^6 + 11}$,

$y_n = \left(\dfrac{3n^2 + 4}{3n^2 - n} \right)^{5n+8}$, $\quad z_n = \dfrac{(n-2)! + n^2(n-3)!}{4(n-1)! - (n-2)!}$.

2.20. $x_n = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{\sqrt[5n]{3n^4 + 5n^3 + 2} + 7}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{4n^2 - 5n + 1}{4n^2 + n} \right)^{8-6n}$,

$z_n = \dfrac{(n+3)! - (n+2)!}{(n+1)! + 2(n+2)!}$.

2.21. $x_n = \dfrac{n+2}{1 + 2 + 3 + \ldots + n} - \dfrac{2}{3}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{5n^2 - 6}{5n^2 + n - 2} \right)^{n^2 + n}$,

$z_n = \dfrac{(n+1)!}{3(n-1)! + n!}$.

2.22. $x_n = \dfrac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{2 + 7 + 12 + \ldots + (5n-3)}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{8n^2 - 3n + 5}{8n^2 - 7} \right)^{n^2 - n^3}$,

$z_n = \dfrac{3n(n+1)! - 8n!}{(n+2)! - 5(n+1)!}$.

2.23. $x_n = \dfrac{-3+5+13+\ldots+(8n-11)}{13+4n}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{2-n-n^2}{5n-n^2}\right)^{2n-3}$,

$z_n = \dfrac{(n-1)!-(n+1)!}{n\cdot(n-1)!+5n!}$.

2.24. $x_n = \dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{5\cdot 2^{n-1}}}{5-10+\ldots+5\cdot(-2)^{n-1}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{7n^2+3n+5}{7n^2+6n-1}\right)^{4-5n}$,

$z_n = \dfrac{(n+1)!+n^2\cdot n!}{(n+2)!-5(n+1)!}$.

5.25. $x_n = \dfrac{1+5+9+\ldots+(4n-3)}{n+1}-\dfrac{4n+1}{2}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{6n^2+n-3}{6n^2+4n}\right)^{n^2+3n}$,

$z_n = \dfrac{(n+3)!+7(n+4)!}{(n+9)(n+3)!-(n+2)!}$.

2.26. $x_n = \dfrac{17-13n+11n^2}{-1-4-7-\ldots-(3n-2)}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{n^2-n-9}{n^2+3n}\right)^{1-n^3}$,

$z_n = \dfrac{(n-1)n!+(n+1)!}{(n+2)!-n!}$.

2.27. $x_n = \dfrac{-20+2+4+\ldots+2^{n-1}}{13+9n+10\cdot 2^{n-1}}$, $\quad y_n = \left(\dfrac{9n^2+5}{n-3+9n^2}\right)^{18n+4}$,

$z_n = \dfrac{(n-2)!+(n-4)!}{8n^2(n-4)!+5(n-3)!}$.

2.28. $x_n = \left(\dfrac{2+4+\ldots+2n}{n+3}-n\right)\cdot\sqrt[n]{n^2+n+2}$,

$y_n = \left(\dfrac{2n^2+9n-1}{2n^3+7n}\right)^{8n-5}$, $\quad z_n = \dfrac{(n-5)!+(n-4)!}{5n^3(n-7)!+(n-6)!}$.

2.29. $x_n = \dfrac{\sqrt[2n]{25+9n+16n^2}-3}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{36}+\ldots+\dfrac{1}{4\cdot 3^{n-1}}}$, $\qquad y_n = \left(\dfrac{3n^2+5n+9}{3n^2+4}\right)^{2n^2}$,

$$z_n = \frac{(n-2)!}{2(n-4)!-(n-3)!}.$$

2.30. $x_n = \dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{5n^2+3n+3}$, $\qquad y_n = \left(\dfrac{4n^2+3n}{4n^2+8n-1}\right)^{2n^3}$,

$$z_n = \frac{n^4\cdot n!-(n+3)!}{6(n+5)(n+2)!-(n+4)!}.$$

Задание 3.

Вычислить пределы:

3.1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1-x^3}{4x^2-x-3}+\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{x^2-x}-(1-x^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right).$

3.2. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}+\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+3}-1}-(x+2)\operatorname{tg}\dfrac{5}{4}\pi x\right).$

3.3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{3x^2-4x-4}-\dfrac{2x-x^2}{\sqrt{x+7}-\sqrt{2x+5}}+(x-2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right).$

3.4. $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+1)\operatorname{tg}\dfrac{3\pi x}{2}-\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3-3x-2}-\dfrac{1-x^2}{\sqrt{24-x}-5}\right).$

3.5. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{3-5x-2x^2}{x^3+27}-\dfrac{1-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+12}-3}-(9-x^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}\right).$

3.6. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{\sqrt{13-3x}-\sqrt{17+x}}{x^2-1}+\dfrac{x^4+x}{3x^2+5x+2}-(x+1)\operatorname{tg}\left(\dfrac{7\pi x}{2}\right)\right).$

3.7. $\lim\limits_{x\to -1}\left((1-x^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}-\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x^2+4}+\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{1-3x}}{x^2+3x+2}\right).$

3.8. $$\lim_{x\to -2}\left(\frac{4-3x^2-x^3}{x^4+5x-6}+\frac{x^2+2x}{1-\sqrt{x+3}}-(2-x-x^2)\,\mathrm{tg}(\frac{11\pi x}{4})\right).$$

3.9. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-x^2}+\frac{5x^2-7x+3-x^3}{x^3-3x+2}+(2-x-x^2)\,\mathrm{tg}\,\frac{11\pi x}{2}\right).$$

3.10. $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2-\sqrt{x+1}}{3x-x^2}-\frac{x^3+x-2x^2-12}{x^3-x^2-18}+(3x-x^2)\,\mathrm{tg}\,\frac{5\pi x}{6}\right).$$

3.11. $$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^3-5x^2+16}{x^3-2x^2-6x-8}+\frac{4x-x^2}{\sqrt{x-3}-\sqrt{13-3x}}-(x-4)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{8}\right).$$

3.12. $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{27-x^3}{2x^2-7x+3}+\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}+(x^2-4x+3)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{6}\right).$$

3.13. $$\lim_{x\to 5}\left(\frac{125-x^3}{2x^2-9x-5}+\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{14-x}}{x^2-6x+5}-(2x^2-9x-5)\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x}{10}\right).$$

3.14. $$\lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+5}}{x^2+x}-\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^3-3x-2}-(x^2+x)\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x}{2}\right).$$

3.15. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3-\sqrt{x+8}}{x^2-1}-\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^4-x^3+x-1}-(x^2-1)\,\mathrm{tg}\,\frac{5\pi x}{2}\right).$$

3.16. $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}+\frac{2x^2+x-10}{x^3-2x^2-x+2}+(4-x^2)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{4}\right).$$

3.17. $$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^3-64}{5x-4-x^2}+\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{5+x}}{x^2-5x+4}-(x^2-16)\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x}{8}\right).$$

3.18. $$\lim_{x\to -2}\left(\frac{6-x-2x^2}{x^3+8}+\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{1-\sqrt{x+3}}-\pi(x^2-4)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{4}\right).$$

3.19. $$\lim_{x\to -4}\left(\frac{4-3x-x^2}{x^3+64}+\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{17+14x}}{x^2+4x}-\pi(16-x^2)\,\mathrm{tg}\,\frac{5\pi x}{8}\right).$$

3.20. $$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2+x+1}-\frac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}-\pi(1-x^2)\,\mathrm{tg}\,\frac{5\pi x}{2}\right).$$

3.21. $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-5x+3}{x^3-x^2-2x+2}-\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+3}}{x^2+x-2}-\pi(1-x^2)\,\mathrm{tg}\,\frac{5\pi x}{2}\right).$$

$$3.22.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^4-x^3+x-1}-\frac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{5+4x}}{1-x^2}-\pi(x^2+x-2)\,\mathrm{tg}\,\frac{7\pi x}{4}\right).$$

$$3.23.\ \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3+3x^2+3x+2}{2x^2+x-6}+\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}-\pi(x+2)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{4}\right).$$

$$3.24.\ \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+3x^2+2x}{4+x-3x^2}+\frac{\sqrt{x^2+x+9}-\sqrt{10+x}}{1+x}+\right.$$
$$\left.+\pi(x^2-x-2)\,\mathrm{tg}\,\frac{7\pi x}{2}\right).$$

$$3.25.\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}-\frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+7}}{x^2-2x}+\pi(x^2-4)\,\mathrm{tg}\,\frac{9\pi x}{4}\right).$$

$$3.26.\ \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}-\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{3+x}}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x+2}}+\pi(x^2+x-2)\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x}{4}\right).$$

$$3.27.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{5x^2-8x+3}{2x^2-3x+1}-\frac{\sqrt{17-8x}-\sqrt{2x+7}}{x^2-x}+\pi(x-1)\,\mathrm{tg}\,\frac{9\pi x}{2}\right).$$

$$3.28.\ \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+x^2-5x-5}{x^2+3x+2}-\frac{x^2-x-2}{\sqrt{5-x^2}-\sqrt{3x+7}}-\pi(x+1)\,\mathrm{tg}\,\frac{9\pi x}{2}\right).$$

$$3.29.\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^3-x^2-4x+3}{x^3-2x+1}-\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{7x-6}}{x^2+2x-3}+5\pi(x^2-1)\,\mathrm{tg}\,\frac{5\pi x}{2}\right).$$

$$3.30.\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^3-13x^2+16x-4}{x^3-x^2-x-2}-\frac{x^2+2x-8}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}+7\pi(x^2+x-6)\,\mathrm{tg}\,\frac{7\pi x}{4}\right).$$

Задание 4.

При $x\to 0$ определите порядок малости бесконечно малых функций $\alpha(x), \beta(x)$ и $\gamma(x)$ относительно функции x. Обоснуйте, справедливо ли равенство $\beta(x)=o(\gamma(x))$ при $x\to 0$.

4.1. $\alpha(x)=6\sin^3 x,\quad \beta(x)=2\dfrac{\mathrm{tg}(x^2\sqrt{x})}{3x-1},\quad \gamma(x)=5^{\arcsin(x^{3/2})}-1.$

4.2. $\alpha(x)=5\,\mathrm{arctg}\sqrt[3]{4x^2},\quad \beta(x)=2e^{3x+4}\cdot x^2,\quad \gamma(x)=3\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos 2x.$

4.3. $\alpha(x)=e^{\sin^3 x}-1,\quad \beta(x)=5e^{-x}\cdot \mathrm{arctg}\,3x,\quad \gamma(x)=3^{x^2-2x+1}-3$.

4.4. $\alpha(x)=1-e^{\mathrm{tg}(x^3)},\quad \beta(x)=\dfrac{\arcsin^3 x}{2x+3},\quad \gamma(x)=4\ln\left(1-\sqrt{x^7}\right)$.

4.5. $\alpha(x)=\log_2(1+\mathrm{tg}^2\, x^3)^{1/5}$, $\beta(x)=7^{1-x}\cdot\ln(1+3x^2)$, $\gamma(x)=\sqrt{\mathrm{tg}\,9x^3}$.

4.6. $\alpha(x)=\sqrt{2x}\cdot\sin(17x^{10}),\quad \beta(x)=e^{5x}\cdot\ln(1+9x^7)$,

$\gamma(x)=\sqrt[3]{1+\arcsin^3(x^2)}-1$.

4.7. $\alpha(x)=9-3^{x^2+2},\quad \beta(x)=\dfrac{\mathrm{arctg}\sqrt{x^5}}{4-7x},\quad \gamma(x)=e^{9x}-e^{x}$.

4.8. $\alpha(x)=\sqrt{1+5x^2-4x^3}-1,\quad \beta(x)=(x^2+5)\,\mathrm{arctg}(x^4)$, .

$\gamma(x)=e^{x^2-\sin^3(3x)}-1$.

4.9. $\alpha(x)=5\,\mathrm{arctg}^3(\sqrt{4x}),\quad \beta(x)=3\sin(x^2)\cdot\cos(x^4),\quad \gamma(x)=x\,\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

4.10. $\alpha(x)=e^{\arcsin^2(\sqrt{x})}-1,\quad \beta(x)=4^{x-x^2+1}-4,\quad \gamma(x)=\sqrt[3]{1+x^2}-1$.

4.11. $\alpha(x)=e^{\sin x}-1,\quad \beta(x)=\dfrac{\ln(1+x+5x^2)}{1+x+5x^2},\quad \gamma(x)=7^{2x^2-3x+1}-7$.

4.12. $\alpha(x)=\sqrt[4]{1+3x^5-x^7}-1,\quad \beta(x)=(5x^3+1)\,\mathrm{tg}^3\left(\dfrac{x}{6}\right)$,

$\gamma(x)=e^{\mathrm{tg}^5 x}-1$.

4.13. $\alpha(x)=2x^3\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x^3},\quad \beta(x)=\dfrac{\ln(1+4x^5)}{2\cos^2 x},\quad \gamma(x)=\dfrac{3^{\sqrt{4x^4+1}}}{3}-1$.

4.14. $\alpha(x)=1-5^{2\,\mathrm{arctg}(x^3)},\quad \beta(x)=(x+2)\log_2(1+x\sin x)$,

$\gamma(x)=1-e^{3x^4+x^3}$.

4.15. $\alpha(x)=9^{(\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x})^9}-1,\quad \beta(x)=7^{x+1}\sin(x^3\sqrt{x})$,

$\gamma(x)=\mathrm{tg}\left(e^{x^2\sqrt{\sin x}}-1\right)$.

4.16. $\alpha(x)=e^{\mathrm{tg}^2(x^2)}-1,\quad \beta(x)=\dfrac{3x\sin 4x}{\cos 11x},\quad \gamma(x)=4^{1-7x^2+8x^3}-4$.

4.17. $\alpha(x)=\sqrt{1+x^3\sin^4 x}-1,\quad \beta(x)=\dfrac{\mathrm{arctg}^4(\sqrt[3]{x^8})}{x^2+3x+5}$,

$\gamma(x)=e^{(x+1)^2+1}-e^2$.

4.18. $\alpha(x)=1-e^{4x^4}$, $\beta(x)=(x^2+7)\,\mathrm{tg}\sqrt[3]{\arcsin(x^6)}$,

$\gamma(x)=\log_3(\cos^2 x)$.

4.19. $\alpha(x)=-1+\sqrt[3]{1+x^3-2x^4}$, $\beta(x)=2^{\sin^3 x}-1$,

$\gamma(x)=\log_2(\cos^{-2} x)$.

4.20. $\alpha(x)=1-2^{3x}$, $\beta(x)=\dfrac{4\ln(1-\sqrt{x}+x)}{31+3\,\mathrm{arctg}^2\,x}$, $\gamma(x)=\arcsin\sqrt{\mathrm{tg}^3\,x}$.

4.21. $\alpha(x)=3\sqrt{\mathrm{tg}(\sin^8 x)}$, $\beta(x)=\dfrac{4}{\cos^6(\sqrt{x})}\ln(1-5x^3)$,

$\gamma(x)=8\left(3^{\mathrm{arctg}\sqrt{x^3}}-1\right)$.

4.22. $\alpha(x)=4e^{\sin(x^3)}-4$, $\beta(x)=5\lg(1-\sqrt[3]{x^{10}})\arccos 3x$,

$\gamma(x)=4x-x^2$.

4.23. $\alpha(x)=1-e^{8x^4}$, $\beta(x)=2^{4\sin^2(x^6)}-1$, $\gamma(x)=\log_5(\cos^4 x)$.

4.24. $\alpha(x)=\sqrt[7]{1-8x^2+4x^5}-1$, $\beta(x)=\dfrac{3\,\mathrm{tg}(\arcsin^3 x)}{2x^2+3x+4}$,

$\gamma(x)=7^{\sin^5 x}-1$.

4.25. $\alpha(x)=3\arcsin x^6$, $\beta(x)=\sqrt[3]{\mathrm{tg}(3x^9)+1}-1$, $\gamma(x)=\ln(2-\cos x^3)$.

4.26. $\alpha(x)=3^{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}}-1$, $\beta(x)=3^{x^2-x+1}-3$, $\gamma(x)=\sqrt[5]{1-x^2}-1$.

4.27. $\alpha(x)=1-\sqrt[3]{1+\mathrm{tg}^3(x^4)}$, $\beta(x)=\dfrac{\left(5\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)^4}{1+5x-x^2}$,

$\gamma(x)=e^{(x-1)^2-2}-\dfrac{1}{e}$.

4.28. $\alpha(x)=e^{5\,\mathrm{tg}(x^3)}-1$, $\beta(x)=\left(\cos\sqrt{x}+3\right)\ln(1+2\sqrt[3]{x})$,

$\gamma(x)=\dfrac{2^{\sqrt{x^3-x^2+1}}}{2}-1$.

4.29. $\alpha(x)=1-2^{\mathrm{tg}(x^2-3x)}$, $\beta(x)=3\arcsin\sqrt{x^7}\cdot\arccos\sqrt{x^7}$,

$\gamma(x)=16-4^{3x+2}$.

4.30. $\alpha(x)=5^{3x^2-2x+1}-5$, $\beta(x)=\dfrac{\ln(1+2x-3x^2)}{x^2+x+1}$, $\gamma(x)=e^{\mathrm{tg}\,x}-1$.

Задание 5.

При $x \to 0$ для функции $f(x)$ найдите главную часть вида Ax^k.

5.1. $f(x) = 6\sin^3 x - 2\,\mathrm{tg}\,x^2\sqrt{x} + 9(5^{\arcsin(x^{3/2})} - 1).$

5.2. $f(x) = 5\,\mathrm{arctg}\sqrt[3]{4x^2} - 2x^2 + 3\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x.$

5.3. $f(x) = 3^{x^2-2x+1} + e^{\sin^3 x} - 4 + 5e^{-x}\,\mathrm{arctg}\,3x.$

5.4. $f(x) = 1 - e^{\mathrm{tg}(x^3)} + 4\ln(1-\sqrt{x^7}) - \frac{\arcsin^3 x}{x+3}.$

5.5. $f(x) = \log_2(1+\mathrm{tg}^2\,x^3)^{1/5} - 7^{1-x}\cdot\ln(1+3x^2) + \sqrt{\mathrm{tg}\,9x^3}.$

5.6. $f(x) = \sqrt[3]{1+\arcsin^3(x^2)} - 1 + 2e^{5x}\ln(1+9x^7) + \sqrt{2x}\sin 17x^{10}.$

5.7. $f(x) = e^{9x} - e^{3x} + 5(9 - 3^{x^2+2}) + \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x^5}}{4-7x}.$

5.8. $f(x) = \sqrt{1+5x^2-4x^3} - 2 + e^{x^2-\sin^3 3x}.$

5.9. $f(x) = 5\,\mathrm{arctg}^3\sqrt{4x} - 3\sin(x^2)\cos(x^4) + x\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right).$

5.10. $f(x) = e^{\arcsin^2(\sqrt{x})} - 6 + 4^{x-x^2+1} + \sqrt[3]{1+x^2}.$

5.11. $f(x) = 7^{2x^2-3x+1} - 8 + e^{\sin x} + \frac{\ln(1+x+5x^2)}{1+x+5x^2}.$

5.12. $f(x) = \sqrt[4]{1+(3x^5-x^7)} - 2 + e^{\mathrm{tg}^5 x} + (5x^3+1)\,\mathrm{tg}^3\left(\frac{x}{6}\right).$

5.13. $f(x) = \frac{1}{3}\cdot 3^{\sqrt{4x^4+1}} - 1 + 2x^3\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^3} + \frac{\ln(1+4x^5)}{2\cos^2 x}.$

5.14. $f(x) = (x+2)\log_2(1+x\sin x) - e^{x^3+3x^4} + 2 - 5^{2\,\mathrm{arctg}\,x^3}.$

5.15. $f(x) = 7^x\sin x^3\sqrt{x} - 6(9^{\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x^9}} - 1) + \mathrm{tg}(e^{x^2\sqrt{\sin x}} - 1).$

5.16. $f(x) = 4^{1-7x^2+8x^3} + e^{\mathrm{tg}^2 x^2} - 5 + \frac{3x\cdot\sin 4x}{\cos 11x}.$

5.17. $f(x) = e^{(x+1)^2+1} - e^2 + \sqrt{1+x^3\sin^4 x} - 1 + \frac{\mathrm{arctg}^4\left(\sqrt[3]{x^8}\right)}{x^2+3x+5}.$

5.18. $f(x) = \log_3(\cos^2 x) + 1 - e^{4x^4} + (x^2+7)\,\mathrm{tg}\sqrt[3]{\arcsin x^6}.$

5.19. $f(x)=2^{\sin^3 x}-2+\sqrt[3]{1+x^3-2x^4}+\log_2(\cos^{-2} x).$

5.20. $f(x)=\dfrac{4\ln(1-\sqrt{x}+x)}{31+3\,\mathrm{arctg}^2\, x}+5\arcsin\sqrt{\mathrm{tg}^3\, x}-2^{3x}+1.$

5.21. $f(x)=3\sqrt{\mathrm{tg}(\sin^8 x)}-\dfrac{4\ln(1-5x^3)}{\cos^6(\sqrt{x})}-8\left(3^{\mathrm{arctg}\sqrt{x^3}}-1\right).$

5.22. $f(x)=5\lg\left(1-\sqrt[3]{x^{10}}\right)\arccos 3x+4e^{\sin x^3}-(x-2)^2.$

5.23. $f(x)=\log_5(\cos^4 x)-e^{8x^4}+2^{4\sin^2 x^6}.$

5.24. $f(x)=\sqrt[7]{1-8x^2+4x^5}-2+7^{\sin^5 x}-\dfrac{3\,\mathrm{tg}(\arcsin^3 x)}{2x^2+3x+4}.$

5.25. $f(x)=\ln(2-\cos(x^3))-1+\sqrt[3]{\mathrm{tg}(3x^9)+1}+3\arcsin x^6.$

5.26. $f(x)=3^{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}}-5+3^{x^2-x+1}+\sqrt[5]{1-x^2}.$

5.27. $f(x)=e^{(x-1)^2-2}-e^{-1}+1-\sqrt[3]{1+\mathrm{tg}^3\, x^4}+\dfrac{(\mathrm{arctg}\sqrt{x})^4}{1+5x-x^2}.$

5.28. $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 2^{\sqrt{x^3-x^2+1}}-2+e^{5\,\mathrm{tg}\,x^3}+\dfrac{\ln(1+2\arcsin\sqrt[3]{x})}{3+\cos\sqrt{x}}.$

5.29. $f(x)=1-2^{\mathrm{tg}(x^2-3x)}+4(16-4^{3x+2})-3\arcsin(\sqrt{x^7})\arccos(\sqrt{x^7}).$

5.30. $f(x)=5^{3x^2-2x+1}-6+e^{\mathrm{tg}\,x}+\ln(1+2x-3x^2).$

Задание 6.

Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и определите, какое из следующих трех утверждений верно при $x\to 0$:

1) $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок малости;

2) $f(x)=o(g(x))$;

3) $g(x)=o(f(x))$.

6.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{5\,\mathrm{arctg}^3\sqrt{2x}-2x^2+3\sin\dfrac{x}{2}}.$

6.2. $$\lim_{x\to 0}\frac{5^{3x^2-2x+1}-6+e^{\operatorname{tg}x}+\ln(1+2x-3x^2)}{5\operatorname{arctg}4x-2x^2+3\sin\dfrac{x}{2}}.$$

6.3. $$\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^2-e^{\operatorname{tg}x^3}+4\ln(1-\sqrt{x^7})+\arcsin^3 x}{e^{8x}-2^{x^2-3x}+4(16-4^{x^2+2})+\operatorname{arctg}\sqrt{x^7}}.$$

6.4. $$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2-2x+1}+e^{\sin^3 x}-4+5\operatorname{arctg}3x}{e^{(x-1)^2-2}-e^{-1}+1-\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}^3(x^4)}+(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^4}.$$

6.5. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{9x}-2^{3x-x^2}+5(9-3^{x^2+2})+\operatorname{arctg}\sqrt{x^5}}{e^{(x+1)^2+1}-e^2+\sqrt{1+\sin^4(x^3)}-1+\arcsin^4\sqrt[3]{x^9}}.$$

6.6. $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+\operatorname{tg}^2 x^3)^5-\ln(1+3x^2-x^3)+\sqrt{\sin 9x^3}}{6\operatorname{tg}^3 x-2\sin x^2\sqrt{x}+9(5^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^3}}-1)}.$$

6.7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}^2 x^3}-1-\ln(1+9x^7-8x^9)+\sin 17x^{10}}{\log_3(\cos x^3)^{-2}-e^{4x^7}+e^{3x^8}}.$$

6.8. $$\lim_{x\to 0}\frac{4^{1-7x^2-8x^3}+e^{\sin^2 x^2}-5+3\operatorname{arctg}4x^2}{\log_2(1+\sin^2 x)-e^{x^3+3x^4}+2-5^{2\operatorname{arctg}x^3}}.$$

6.9. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1-8x^2+4x^5}-2+7^{\sin^5(x^2)}+3\operatorname{tg}^4\left(\dfrac{x^2}{5}\right)}{\dfrac{1}{2}\cdot 2^{\sqrt{x^3-x^2+1}}-2+e^{\operatorname{tg}x^3}+\ln(1+2\arcsin\sqrt[3]{x})}.$$

6.10. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+3x^5+x^6}-2+e^{\sin^5 x}+5\operatorname{tg}^4\left(\dfrac{x^2}{3}\right)}{\sqrt{-2\ln(\cos x^5)+2^{4\sin^2(x^6)}-e^{8x^{13}}}}.$$

6.11. $$\lim_{x\to 0}\frac{5\arcsin\sqrt[3]{4x^2}-2x^5+3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}}{7^{2x^2-3x+1}-8+e^{\sin x}+\ln(1+x+8x^4)}.$$

6.12. $$\lim_{x\to 0}\frac{0{,}5\cdot 2^{\sqrt{x^3-x^2+1}}-2+e^{\sin x^3}+\ln(1+2\operatorname{arctg}^3\sqrt{x})}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^4-\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}^3 x^4}-e^{-1}+1+e^{(x-1)^2-2}}.$$

6.13. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2-\cos(\sin^2 x^3))+\sqrt[3]{\operatorname{tg}(3x^9)+1}+\arcsin x^7-1}{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg}^3(x^2)}-1+\sin 3x^{11}-\log_2(1+5x^{12})}.$$

6.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\arcsin^2\sqrt{x}}-5+3^{x^2-x+1}+\sqrt[5]{1-x^2-4x^4}}{2^{\sin x^3}-2+\sqrt[3]{1+x^3+5x^5}+\log_2(\cos^{-2}x)}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(x+1)^2+1}-e^2+\sqrt{1+\sin^4 x^3}-1+\operatorname{arctg}^4\sqrt[3]{x^8}}{5\ln(1-\sqrt[3]{x^{10}})+\operatorname{arctg}^4 x+4e^{\sin x^3}-(x-2)^2}$.

6.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4\ln(1-\sqrt{x}+x)+5\arcsin\sqrt[3]{x}-(2^{3x}-1)^2}{(x-1)^2-e^{\operatorname{tg}x^3}+4\ln(1-\sqrt{x^9})+\operatorname{arctg}^3 x}$.

6.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x^2-4x^3}-2+e^{x^5-\sin^3 3x}+\operatorname{arctg}(x^4)}{(7^{2x^2-3x+1}-8+e^{\sin x}+\ln(1+x+5x^2))^2}$.

6.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\arcsin\sqrt[3]{4x}-3\operatorname{tg}(x^3)+8\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{3x}{2}\right)}{\ln(1-\sqrt{x}+x)+\operatorname{arctg}^5\sqrt{x}-2^{7x}+1}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\arcsin^2\sqrt{x}}-6+4^{x-x^2+1}+\sqrt[3]{1+x^2-3x^5}}{3\operatorname{tg}^3 x-2{,}5\sin x^2\sqrt{x}-8(3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^3}}-1)}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\sin x^3\sqrt{x}-6(9^{\operatorname{tg}\sqrt[4]{x^9}}-1)+\operatorname{arctg}(e^{x^7}-1)}{\log_2(1+\sin^2 x)-e^{x^3+3x^4}+2-5^{2\operatorname{arctg}x^3}}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{3}\cdot 3^{\sqrt{x^4+2x^5+1}}-1+2\arcsin^4\left(\sqrt{x^3}\right)+\ln(1+3x^8-4x^5)}{(e^{(x-1)^2-2}-e^{-1}+1-\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}^3(x^4)}+(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^4)^4}$.

6.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x^2-2x}+e^{\sin^3 x}+e^{\sqrt{x}}+5\operatorname{arctg}3x-3}{4\ln(1+2\sqrt{x}-x)-8\arcsin^3(x^2)-2^{5x}+1}$.

6.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x-8x^2}-2+e^{\operatorname{tg}^5 x}+5\sin^5\left(\dfrac{x}{4}\right)}{5^{2x^2-3x+1}-6+e^{\operatorname{tg}x}+\ln(1+x+5x^2)}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos(\sin x^2))-1+\sqrt[5]{\sin(5x^9)+1}+\operatorname{arctg}(x^7)}{(3^{x^2+1}+e^{\sin^3 x}-4+5\operatorname{tg}(x^5))^2}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1-8x^2+4x^5}-2+3^{\operatorname{tg}^3(x^2)}-3\sin^5\left(\dfrac{x}{4}\right)}{\ln(2-\cos(\operatorname{tg}x))-1+e^{x^3}+\arcsin^2(x^3)}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_5(1+\sin^2 x)-e^{4x^4}+2-3^{3\arcsin x^5}}{\sqrt{1+6x^2-x^3}-2+e^{\sin 3x^3}+\operatorname{arctg}(x^4)}$.

6.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2-e^{\operatorname{tg}3x}+4\ln(1+\sqrt[3]{x^7})+\arcsin^5 x}{e^{\operatorname{arctg}x}-6+4^{x-x^2+1}+\sqrt[3]{1+x^2-3x^5}}$.

6.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\log_6(\cos x)+e^{3x^4}-2^{5\operatorname{tg}^2(x^3)}}{2-\cos x-\sqrt[4]{1+x^7-4x^3}+\sin^3(x^2)}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(x-2)^2-3}-e+1-\sqrt[5]{1+\sin^2 x^3}+\operatorname{arctg}x}{5^{3x^2-2x+1}-6+e^{\operatorname{tg}x}+\ln(1+2x-3x^2)}$.

6.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\log_3(\cos x^4)-e^{5x^{10}}+3^{2\sin^2(x^5)}}{\sqrt[3]{1+x^4-2x^5}-2+e^{\sin^5 x}+\arcsin^4\left(\dfrac{x^9}{3}\right)}$.

Задание 7.

Вычислите пределы:

7.1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 3x}$.

7.2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\frac{8}{\cos 2x}}$.

7.3. $\lim\limits_{x\to 2}(\sin\dfrac{\pi x}{4})^{\operatorname{cosec}\frac{\pi x}{2}}$.

7.4. $\lim\limits_{x\to\pi}(\sin\dfrac{x}{2})^{\operatorname{cosec}2x}$.

7.5. $\lim\limits_{x\to 1}(\cos 4\pi x)^{\frac{1}{\sin\pi x}}$.

7.6. $\lim\limits_{x\to 1}(\sin\dfrac{\pi x}{2})^{\operatorname{cosec}2\pi x}$.

7.7. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{-\frac{2}{\sin^2 x}}$.

7.8. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{4}{\sin 3x}}$.

7.9. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg}5x\cdot\sin 2x}}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin 5x)^{\frac{\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}3x}{5}}$.

7.11. $\lim\limits_{x\to 1}(\sin\dfrac{\pi x}{2})^{6\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi x}{2}\right)}$.

7.12. $\lim\limits_{x\to\pi}(\cos 4x)^{\frac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 4x}}$.

7.13. $\lim\limits_{x\to 2}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}$.

7.14. $\lim\limits_{x\to 4\pi}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{\sin\frac{3x}{2}}}$.

7.15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

7.16. $\lim\limits_{x\to \pi}(\cos 2x)^{\operatorname{cosec} 4x}$.

7.17. $\lim\limits_{x\to 1}(\cos 2\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

7.18. $\lim\limits_{x\to -1}(\cos 4\pi x)^{\operatorname{ctg}^2\pi x}$.

7.19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos 4x)^{\operatorname{tg} x}$.

7.20. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\sin\frac{x}{4}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

7.21. $\lim\limits_{x\to \pi}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

7.22. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 2x}$.

7.23. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{3\operatorname{ctg} x}{\sin 4x}}$.

7.24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{6\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} 5x}$.

7.25. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos 3x)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 5x}}$.

7.26. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

7.27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos 3x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

7.28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{\cos x}}$.

7.29. $\lim\limits_{x\to \pi}(\cos 2x)^{\frac{-5}{x\sin 4x}}$.

7.30. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{4}-x)}}$.

Задание 8.

При каком значении a функция $f(x)$ будет непрерывной в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки $f(x)$ задана следующим образом:

8.1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\ln x}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}\quad x_0=1.$

8.2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}, & x\neq\dfrac{\pi}{4},\\ a, & x=\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$ $x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

8.3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}, & x\neq 2\pi,\\ a, & x=2\pi,\end{cases}$ $x_0=2\pi.$

8.4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}$ $x_0=1.$

8.5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}, & x\neq 2,\\ a, & x=2,\end{cases}$ $x_0=2.$

8.6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}, & x\neq\dfrac{\pi}{3},\\ a, & x=\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ $x_0=\dfrac{\pi}{3}.$

8.7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}$ $x_0=1.$

8.8. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0.$

8.9. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}, & x\neq 10,\\ a, & x=10,\end{cases}$ $x_0=10.$

8.10. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}, & x\neq 1,\\ \alpha, & x=1,\end{cases}$ $x_0=1.$

8.11. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin\dfrac{x+2}{2}}{3^{\sqrt{2+x+x^2}}-9}, & x\neq -2,\\ a, & x=2,\end{cases}$ $x_0=2.$

8.12. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\pi-x}, & x\neq\pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}\quad x_0=\pi.$

8.13. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}, & x\neq\dfrac{\pi}{6},\\ a, & x=\dfrac{\pi}{6},\end{cases}\quad x_0=\dfrac{\pi}{6}.$

8.14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\sin\pi x}-1}{\ln(x^3-6x-8)}, & x\neq 3,\\ a, & x=3,\end{cases}\quad x_0=3.$

8.15. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos 2x}{\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)^2}, & x\neq\pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}\quad x_0=\pi.$

8.16. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 4x}, & x\neq\pi,\\ a, & x=\pi.\end{cases}\quad x_0=\pi.$

8.17. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}, & x\neq\pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}\quad x_0=\pi.$

8.18. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}, & x\neq\dfrac{\pi}{2},\\ a, & x=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

8.19. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}, & x\neq 4,\\ a, & x=4,\end{cases}\quad x_0=4.$

8.20. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,2}{\sin\ln(x-1)}, & x\neq 2,\\ a, & x_0=2,\end{cases}\quad x_0=2.$

8.21. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}, & x\neq 3,\\ a, & x_0=3,\end{cases}\quad x_0=3.$

$$8.22.\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}\quad x_0=1.$$

$$8.23.\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}, & x\neq \pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}\quad x_0=\pi.$$

$$8.24.\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x-1)}, & x\neq 2\pi,\\ a, & x=2\pi,\end{cases}\quad x_0=2\pi.$$

$$8.25.\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}\quad x_0=1.$$

$$8.26.\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}, & x\neq \pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}\quad x_0=\pi.$$

$$8.27.\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lg\operatorname{tg} x}{\cos 2x}, & x\neq \dfrac{\pi}{4},\\ a, & x=\dfrac{\pi}{4},\end{cases}\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}.$$

$$8.28.\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}, & x\neq 1,\\ a, & x=1,\end{cases}\quad x_0=1.$$

$$8.29.\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos 2x}{\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)^2}, & x\neq \pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}\quad x_0=\pi.$$

$$8.30.\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}, & x\neq \pi,\\ a, & x=\pi,\end{cases}\quad x_0=\pi.$$

Задание 9.

Для заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ составьте сложные функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$. Исследуйте непрерывность этих функций (при наличии точки разрыва определите ее тип, вычислив односторонние пределы в этой точке).

9.1. $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \dfrac{1}{x+1}.$

9.2. $f(x) = \operatorname{sign} x, \quad g(x) = \cos x.$

9.3. $f(x) = \dfrac{4}{x-1}, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$

9.4. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}, \quad g(x) = 5^x.$

9.5. $f(x) = \operatorname{arcctg} x, \quad g(x) = \dfrac{2}{x+1}.$

9.6. $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x-1}, \quad g(x) = |x|.$

9.7. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \operatorname{sign} x.$

9.8. $f(x) = |x|, \quad g(x) = \ln x.$

9.9. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}, \quad g(x) = |x|.$

9.10. $f(x) = 2^x, \quad g(x) = \operatorname{sign} x.$

9.11. $f(x) = \dfrac{3}{2+4x}, \quad g(x) = \cos x.$

9.12. $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \operatorname{sign} x.$

9.13. $f(x) = \operatorname{arcctg} x, \quad g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3} - x}.$

9.14. $f(x) = 3^x, \quad g(x) = \dfrac{\pi}{18 - 2x}.$

9.15. $f(x) = \dfrac{5}{3x + \sqrt{3}}, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$

9.16. $f(x) = |x|, \quad g(x) = \dfrac{3^x}{2x-3}.$

9.17. $f(x) = \operatorname{sign} x, \quad g(x) = (x-1)^3.$

9.18. $f(x) = \log_{1/2} x, \quad g(x) = |x|.$

9.19. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4x + 3}, \quad g(x) = |x|.$

9.20. $f(x) = \operatorname{sign} x, \quad g(x) = 7^x.$

9.21. $f(x) = 2^x, \quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}.$

9.22. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}, \quad g(x) = \operatorname{sign} x.$

9.23. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$

9.24. $f(x) = 7^{-2x}, \quad g(x) = \dfrac{5}{x-49}.$

9.25. $f(x) = \operatorname{arcctg} 2x, \quad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-3}}.$

9.26. $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{2x^2+5x+2}, \quad g(x) = |x|.$

9.27. $f(x) = x^2 - x - 6, \ g(x) = \operatorname{sign} x.$

9.28. $f(x) = \dfrac{x+1}{4-x^2}, \quad g(x) = \dfrac{2}{x}.$

9.29. $f(x) = \dfrac{1}{\lg x}, \quad g(x) = x^2 + x - 1.$

9.30. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x^2 - 5x + 6.$

Задание 10.

Найдите точки разрыва функции $y = f(x)$ и определите их тип. Постройте график функции.

10.1. $f(x) = \begin{cases} -3x^2, & \text{если} \quad x \le 0, \\ 1 - x, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ \dfrac{1}{1-x}, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$

10.2. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1-x}, & \text{если} \quad x \le 0, \\ \dfrac{2}{2-x}, & \text{если} \quad 0 < x < 2, \\ x - 3, & \text{если} \quad x \ge 2. \end{cases}$

$$10.3.\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & \text{если} \quad x<0,\\ \operatorname{ctg} x, & \text{если} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 4-x, & \text{если} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$10.4.\ f(x)=\begin{cases}(x+1)^2-1, & \text{если} \quad x\le 1,\\ \log_2(x-1), & \text{если} \quad 1<x\le 3,\\ x+1, & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$$

$$10.5.\ f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & \text{если} \quad x<0,\\ 1+\sqrt{2x}, & \text{если} \quad 0\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{2-x}, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

$$10.6.\ f(x)=\begin{cases}-3(x+2), & \text{если} \quad x<-3,\\ \sqrt{x+7}, & \text{если} \quad -3\le x\le 2,\\ \ln(x-2)^{-1}, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

$$10.7.\ f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & \text{если} \quad x\le 0,\\ x-\pi, & \text{если} \quad 0<x\le\pi,\\ \dfrac{1}{x-\pi}, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$$

$$10.8.\ f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x+1}, & \text{если} \quad x<-1,\\ \arcsin x, & \text{если} \quad -1\le x\le 1,\\ x-1, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

$$10.9.\ f(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{если} \quad x\le 0,\\ x^2-2x, & \text{если} \quad 0<x\le 2,\\ \lg(x-2), & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

$$10.10.\ f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+3, & \text{если} \quad x\le 1,\\ 3-x, & \text{если} \quad 1<x\le 3,\\ \log_2\dfrac{1}{x-3}, & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$$

$$10.11.\ f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{если} \quad x<-1,\\ x^3, & \text{если} \quad -1\le x\le 2,\\ \dfrac{5}{2-x}, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

$$10.12.\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+1, & \text{если} \quad x<-1,\\ \arccos x, & \text{если} \quad -1\le x\le 1,\\ x-2, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

$$10.13.\ f(x)=\begin{cases} -(x+3), & \text{если} \quad x\le -3,\\ -x^2-2x, & \text{если} \quad -3<x\le 0,\\ -\dfrac{1}{x^2}, & \text{если} \quad x>0.\end{cases}$$

$$10.14.\ f(x)=\begin{cases} \log_2(-x), & \text{если} \quad x<0,\\ 2(x-1)^2, & \text{если} \quad 0\le x<2,\\ 3-x, & \text{если} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

$$10.15.\ f(x)=\begin{cases} \log_3(1-x)^{-1}, & \text{если} \quad x<1,\\ 2-x, & \text{если} \quad 1\le x<3,\\ x^2-8x+12, & \text{если} \quad x\ge 3.\end{cases}$$

$$10.16.\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & \text{если} \quad x<-1,\\ -1-x, & \text{если} \quad -1\le x<0,\\ 2x^2, & \text{если} \quad x\ge 0.\end{cases}$$

10.17. $f(x)=\begin{cases} -(x+3), & \text{если} \quad x\le -2, \\ \dfrac{2}{x+2}, & \text{если} \quad -2<x<0, \\ 2\sqrt{x+1}, & \text{если} \quad x\ge 0. \end{cases}$

10.18. $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если} \quad x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{если} \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x<0, \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{если} \quad x>0. \end{cases}$

10.19. $f(x)=\begin{cases} -x-1, & \text{если} \quad x<-3, \\ \log_2(-x-1), & \text{если} \quad -3\le x<-1, \\ x^2-2x, & \text{если} \quad x\ge -1. \end{cases}$

10.20. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & \text{если} \quad x<-2, \\ 1+\sqrt{-2x}, & \text{если} \quad -2\le x<0, \\ -\sqrt{x}, & \text{если} \quad x\ge 0. \end{cases}$

10.21. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+2}-1, & \text{если} \quad x<-2, \\ \sqrt{7-x}, & \text{если} \quad -2\le x\le 3, \\ 3(x-2), & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$

10.22. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x+\pi}, & \text{если} \quad x<-\pi, \\ -x-\pi, & \text{если} \quad -\pi\le x<0, \\ \cos x, & \text{если} \quad x\ge 0. \end{cases}$

10.23. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & \text{если} \quad x<-1, \\ \arcsin x, & \text{если} \quad -1\le x\le 1, \\ \dfrac{2}{1-x}, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$

10.24. $f(x)=\begin{cases} \lg(-x-2), & \text{если} \quad x<-2, \\ x^2+2x, & \text{если} \quad -2\le x<0, \\ 3-2x, & \text{если} \quad x\ge 0. \end{cases}$

10.25. $f(x)=\begin{cases} \log_2 \dfrac{1}{x+3}, & \text{если} \quad x<-3, \\ x+3, & \text{если} \quad -3\le x<-1, \\ -x^2+2x+3, & \text{если} \quad x\ge 1. \end{cases}$

10.26. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x+2}, & \text{если} \quad x<-2, \\ -x^3, & \text{если} \quad -2\le x\le 1, \\ 2x, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$

10.27. $f(x)=\begin{cases} -(x+2), & \text{если} \quad x<-1, \\ \arccos(-x), & \text{если} \quad x\in[-1;1], \\ 1-\dfrac{2}{x-1}, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$

10.28. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}, & \text{если} \quad x<0, \\ 2x-x^2, & \text{если} \quad 0\le x<3, \\ x+3, & \text{если} \quad x\ge 3. \end{cases}$

10.29. $f(x)=\begin{cases} x+3, & \text{если} \quad x\le -2, \\ 2(x+1)^2, & \text{если} \quad -2<x\le 0, \\ \log_2 x, & \text{если} \quad x>0. \end{cases}$

10.30. $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & \text{если} \quad x\le 0, \\ x-1, & \text{если} \quad 0<x\le 1, \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$

Дифференциальное исчисление функции одной переменной и приложения

Задание 1.

Найдите значения производных для функций из задач а) и б) в точке $x = 0$, исходя из определения производной в точке.

1.1. а) $y = \begin{cases} \arcsin(5x\cos\frac{1}{x}), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = x + \sqrt[3]{x}$.

1.2. а) $y = \begin{cases} \mathrm{arctg}(x^2\cos\frac{1}{3x}), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \sin 2x$.

1.3. а) $y = \begin{cases} x\sin\frac{3}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \sqrt{x_2 + x + 3}$.

1.4. а) $y = \begin{cases} \frac{\cos 3x - \cos x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \lg 3x$.

1.5. а) $y = \begin{cases} 3x - x\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \frac{1}{x^2}$.

1.6. а) $y = \begin{cases} x + x^2\sin\frac{3}{2x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \cos 3x$.

1.7. а) $y = \begin{cases} x^2\cos\frac{4}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = 2^{2x}$.

1.8. а) $y = \begin{cases} x^2\sin\frac{9}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \mathrm{tg}\, 3x$.

1.9. а) $y = \begin{cases} \mathrm{arctg}(x\sin\frac{3}{x}), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$.

1.10. а) $y = \begin{cases} \arccos(x^2 \sin\frac{3}{x}), & \text{если } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \frac{1}{\sqrt{4x+1}}$.

1.11. а) $y = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \sin x^2$.

1.12. а) $y = \begin{cases} 2x + x^2 \cos\frac{3}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \frac{1}{3x-2}$.

1.13. а) $y = \begin{cases} \sin(x^2 \sin\frac{7}{x}), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \sqrt{3x+2}$.

1.14. а) $y = \begin{cases} \sin(x^2 \cos\frac{3}{x}), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \sqrt[3]{2x+3}$.

1.15. а) $y = \begin{cases} \sin(x \sin\frac{3}{x}), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

1.16. а) $y = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \cos(x^2)$.

1.17. а) $y = \begin{cases} x^2 \sin\frac{3}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = 3^{2x}$.

1.18. а) $y = \begin{cases} \operatorname{arcctg}(x \cos\frac{1}{3x}), & \text{если } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \log_5 2x$.

1.19. а) $y = \begin{cases} \ln(1 - \sin(x^2 \sin\frac{3}{x})), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ б) $y = \operatorname{ctg} 2x$.

1.20. а) $y=\begin{cases}\dfrac{\cos 5x-\cos 7x}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=(3x+2)^3$.

1.21. а) $y=\begin{cases}\arcsin\left(\dfrac{5x}{2}-x\sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

1.22. а) $y=\begin{cases}\operatorname{arctg}(x\cos\dfrac{5}{x}), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=\cos\sqrt{x}$.

1.23. а) $y=\begin{cases}\operatorname{arctg}(x+x^2\sin\dfrac{3}{x}), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=\sqrt[3]{4x-1}$.

1.24. а) $y=\begin{cases}\operatorname{tg}(x^2\cos\dfrac{1}{7x}), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=\ln(2x+3)$.

1.25. а) $y=\begin{cases}3x^2+\operatorname{arctg}(x\sin\dfrac{1}{3x}), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=3^{x+2}$.

1.26. а) $y=\begin{cases}\ln(1+\operatorname{tg}(x^2\cos\dfrac{1}{x})), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=\cos(2x-1)$.

1.27. а) $y=\begin{cases}3x-x^2\cos\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=2^{3-x}$.

1.28. а) $y=\begin{cases}\operatorname{arcctg}(x^2\sin\dfrac{1}{2x}), & \text{если } x\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=\operatorname{tg}(x+3)$.

1.29. а) $y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{3}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=\sqrt{5-x^2}$.

1.30. а) $y=\begin{cases}\operatorname{arctg}(x^2\sin^2\dfrac{3}{x}), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$ б) $y=\sin(3x-\dfrac{\pi}{3})$.

Задание 2.

Даны кривая, имеющая уравнение $y = f(x)$, и прямая l. Составьте уравнение такой касательной к кривой, которая параллельна прямой l. Укажите координаты точки касания.

2.1. $y = \sqrt{x+2}, \quad l: 2x - 8y + 1 = 0$.

2.2. $y = \dfrac{1}{2x-3}, \quad l: 4x + 2y - 11 = 0$.

2.3. $y = \cos^2 x, \quad l: 3x + 3y + 7 = 0$.

2.4. $y = \ln\sqrt{x-1}, \quad l: -3x + 6y - 1 = 0$.

2.5. $y = 1 + \operatorname{tg} 2x, \quad l: -12x + 3y + 10 = 0$.

2.6. $y = -(2x-3)^3, \quad l: 6x + y - 4 = 0$.

2.7. $y = e^{x^2-1}, \quad l: 4x - 2y - 3 = 0$.

2.8. $y = \dfrac{1}{2}(2x+1)^2, \quad l: 4x + 2y - 13 = 0$.

2.9. $y = \sqrt[3]{1-3x}, \quad l: -3x - 12y + 5 = 0$.

2.10. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}, \quad l: -4x + 2y + 1 = 0$.

2.11. $y = \sqrt{5-x^2}, \quad l: 8x + 4y + 9 = 0$.

2.12. $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right), \quad x \in [-\pi; \pi], \quad l: 4x - 4y - 3 = 0$.

2.13. $y = \dfrac{1}{3-x^3}, \quad l: -3x + 4y + 2 = 0$.

2.14. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}, \quad l: 7x - 7y - 4 = 0$.

2.15. $y = \sqrt[3]{5x-2}, \quad l: 5x - 12y - 2 = 0$.

2.16. $y = \ln(2x^2 - 1), \quad l: 10x + 5y - 3 = 0$.

2.17. $y = x^3 - 2x, \quad l: -20x + 2y + 17 = 0$.

2.18. $y = -(4-x)^2, \quad l: 8x + 4y + 11 = 0$.

2.19. $y = -\sqrt{3x-3}, \quad l: x + 2y + 5 = 0$.

2.20. $y = \dfrac{1}{x^2-4}, \quad l: -2x - 9y + 7 = 0$.

2.21. $y=\sin^2(2x), \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right], \quad l:8x-4y+5=0$.

2.22. $y=\ln(2+x^3), \quad l:-3x+y-2=0$.

2.23. $y=\sqrt[3]{x^2+4}, \quad l:9x+3y-7=0$.

2.24. $y=\frac{1}{2}e^{2-4x}, \quad l:18x+9y+5=0$.

2.25. $y=\frac{2}{5-x^2}, \quad l:8x+2y-7=0$.

2.26. $y=\ln\sqrt{5-x^2}, \quad l:-2x+8y+3=0$.

2.27. $y=2-x-x^4, \quad l:9x+6y+5=0$.

2.28. $y=\frac{4}{1-2x}, \quad l:8x-9y+2=0$.

2.29. $y=\sqrt[3]{3-4x}, \quad l:4x+3y-1=0$.

2.30. $y=\frac{1}{\sqrt{x^3-7}}, \quad l:6x+y-1=0$.

Задание 3.

Найдите производную $f'(x)$ функции $f(x)$.

3.1. $f(x)=6x\arcsin(4x-3)+\cos\frac{1}{2}\cdot\ln(2x+3)-\frac{x^2-x}{2x+1}$.

3.2. $f(x)=\arccos\frac{2(5x+2)}{x^3+2x-1}-\cos 3x\cdot\ln(4x-1)+\frac{1}{3}$.

3.3. $f(x)=\sin 5x\cdot\frac{\operatorname{arctg}(9x-2)}{3}-\ln 2\cdot\cos(3x^2-2)-\arcsin\frac{1}{4}$.

3.4. $f(x)=\cos\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4-3x^2+1}+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln\frac{5x}{4x-3}+\frac{1}{5}$.

3.5. $f(x)=\operatorname{sh}(5x-3)\cdot\sqrt{7x+2}+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\cdot\ln\frac{x^2-2}{2x+1}-\operatorname{ch}\frac{1}{2}$.

3.6. $f(x)=\frac{\operatorname{th}(2x-3)}{3x^2+4}-\arcsin\frac{2}{5}\cdot\ln\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}{3}+\cos\frac{2}{7}$.

3.7. $f(x)=\sin\frac{1}{3x}\cdot\ln(2x^2+3)+\operatorname{tg}10+\frac{4x^2-3x+1}{5x\sqrt{1-x}}$.

3.8. $f(x)=\sin\frac{1}{5x}+\ln(7x-2)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{3x^3-4}+\arcsin\frac{1}{4}\cdot\operatorname{ch}(5x+1)$.

3.9. $f(x)=\cos 5x\cdot\sin\frac{1}{5x}+\ln(2e)-\frac{\sqrt{4x+6}}{x^2-x-1}$.

3.10. $f(x)=\frac{1}{3}\ln(5x^3+x)+e^{x+2}\cdot\arcsin\sqrt{5x-1}-\operatorname{ch}\frac{1}{4}$.

3.11. $f(x)=\sin 1\cdot\sqrt[4]{2x^3+x-1}-\operatorname{sh}\frac{2}{3}+\frac{e^{x^2-x+2}}{x^4-4x^2+3}$.

3.12. $f(x)=\operatorname{tg}\frac{1}{2x}\cdot\ln(2x+3)+\arcsin\frac{3}{4}-\cos\frac{1}{3}\cdot\frac{5x-\sqrt{2x}}{x^2-1}$.

3.13. $f(x)=\frac{1}{\sin x+\cos x}+\frac{1}{\sin 2}-\arcsin(4x+7)\cdot\ln(2x^2-3)$.

3.14. $f(x)=\frac{1}{\operatorname{sh}4}+\frac{1}{\operatorname{ch}4}\ln\frac{7x+2}{1-2x^2}-\operatorname{arctg}(3x+1)\cdot\cos(1-x^2)$.

3.15. $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt[4]{2x+\sin 2x}-\frac{3}{7x}+e^{3x^2-5x}\cdot\arccos(2x+5)$.

3.16. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{5}{2}\cdot\sqrt{3x^5+2x^3-x}+\frac{\operatorname{ch}3}{8}-\sin(7x^2+4)\cdot\ln(1-6x)$.

3.17. $f(x)=\frac{2}{7x}\operatorname{sh}(x^3+2)+\operatorname{th}\frac{2}{7}+\frac{\sqrt[4]{2x+1}-\sqrt[4]{x+2}}{4x^3}$.

3.18. $f(x)=\cos(2x+9)\cdot\ln(1+x^2)-\operatorname{sh}\frac{3}{2}\cdot\sqrt[5]{\ln x+\frac{3}{2x}}-\operatorname{ch}\frac{3}{2}$.

3.19. $f(x)=\frac{4}{5}\cdot\frac{2x+1}{1-3x^3}+\ln\frac{2x}{\sqrt[3]{3x^2-2}}+\cos x\cdot\sqrt{7x-1}$.

3.20. $f(x)=\frac{x}{3}\operatorname{arctg}(x^3-7x+1)+\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-\frac{\sin 2x-\sqrt{x}}{x^2}$.

3.21. $f(x)=\frac{\arcsin 7x}{\sqrt[3]{5x}}-\operatorname{tg}\frac{3}{4}+(4x^3-7x+2)\operatorname{ch}(3x-2)$.

3.22. $f(x)=\frac{\ln(4x+1)}{2x}-\ln 2\cdot\sqrt{1+\ln x}+(x^2-3x+1)\sin(1-4x)$.

3.23. $f(x)=x\sin(2x+3x^2+4x^3)+\sin(\pi x)+\frac{\operatorname{arctg}(1-6x)}{\ln(3x+1)}$.

3.24. $f(x)=x\sqrt[4]{x^2-3x+2}+\cos(\pi x)-\frac{\operatorname{arcctg}(2x+3)}{x+1}$.

3.25. $f(x)=x\sin 2x\cdot\ln(x^2-2)+\frac{4x^3-2x+1}{\sqrt[5]{1-x^3}}+2$.

3.26. $f(x)=2x\cos 3x\cdot\ln(3-x)+4x-\frac{2x^5-x+4}{x\sqrt[3]{x}}$.

3.27. $f(x)=\frac{1}{3}\ln(3x+1)\cdot\cos(2-x)+\sqrt[3]{4\pi}\cdot\arcsin(4x+5)+\frac{2x}{\sqrt{x}+\sqrt{2x}}$.

3.28. $f(x)=e^{2x^2+3x}\cdot\sin(1-5x)+\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{4x}+\arccos(3x)$.

3.29. $f(x)=e^{3-x^2}\cdot\cos(4x^2)-\arcsin(2x)-\frac{4x^3-1}{x-\sqrt{x}}$.

3.30. $f(x)=-\arccos\frac{1}{2}+x^2\cdot\sqrt[3]{\sin x-4x}-\frac{\sqrt{x^5}+\sqrt{x^3}}{4x^2-3}$.

Задание 4.

Найдите производную функции $f(x)$.

4.1. $f(x)=\operatorname{tg}\left(\ln^2\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}{2}\right)$.

4.2. $f(x)=\cos^3\left(\sqrt{\operatorname{tg}5x-\operatorname{ctg}7x}\right)$.

4.3. $f(x)=\sin^2\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{4-7x}}{3}\right)$.

4.4. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sin\left(\sqrt{5x}+16x^2\right)\right)$.

4.5. $f(x)=\operatorname{tg}^2\left(\arcsin\frac{x^2+x-1}{1-2x}\right)$.

4.6. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos^3(x+\ln x)}$.

4.7. $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\operatorname{tg}(\sin 2x-\cos 3x)}$.

4.8. $f(x)=\ln\left(\sin^4\left(\frac{x^3-2x}{3x+1}\right)\right)$.

4.9. $f(x)=(\operatorname{tg}3)^{\sin^2(2x^2+3x^3)}$.

4.10. $f(x)=\sin\left(\ln^2\left(\sqrt[5]{5x}+\sqrt[3]{3x}+1\right)\right)$.

4.11. $f(x)=\cos^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x^5+x^3+x}{4}\right)$.

4.12. $f(x)=\operatorname{tg}^3\left(\arccos\frac{3+2x}{4x^2-1}\right)$.

4.13. $f(x)=\arccos\left(\ln^3\left(2+4x+8x^3\right)\right)$.

4.14. $f(x)=\sin\left(\operatorname{arctg}^2\left(\sqrt{\frac{x^2+4x}{3x-1}}\right)\right)$.

4.15. $f(x)=\ln^2\left(\arcsin\sqrt{\frac{10x+2}{x^2-6}}\right)$.

4.16. $f(x)=\cos^4\left(e^{\operatorname{arctg}(7x^3)}\right)$.

4.17. $f(x)=(2e)^{\cos^2(\ln(6x-1))}$.

4.18. $f(x)=\sin^3\left(e^{\operatorname{arcctg}(4-5x^4)}\right)$.

4.19. $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sin^4\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)\right)$.

4.20. $f(x)=\cos^2\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}4x+x^4}\right)$.

4.21. $f(x)=\sin^3\left(\frac{\ln x+\operatorname{arctg}x}{\sqrt[3]{2\pi}}\right)$.

4.22. $f(x)=\left(\sin\sqrt{\pi}\right)^{\operatorname{arctg}(1+3x^4)}$.

4.23. $f(x)=e^{\operatorname{tg}^2\ln(5+3x)}$.

4.24. $f(x)=\operatorname{tg}\left(\sin^3\left(\frac{7x^2-1}{4x}\right)\right)$.

4.25. $f(x)=\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sin 2x}{x^2}-\frac{\cos 5x}{x^5}\right)$.

4.26. $f(x)=(4e)^{\operatorname{arctg}\sqrt{2+3x+4x^2}}$.

4.27. $f(x)=\arccos\left(\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\frac{4x-1}{x^3}}\right)\right)$.

4.28. $f(x)=\sin\left(\operatorname{arctg}^2\left(\frac{x^3-x^2-x}{2x+1}\right)\right)$.

4.29. $f(x)=\left(\cos\sqrt{2}\right)^{\ln(4x+10x^2)}$.

4.30. $f(x)=\ln\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{5x-1}{2x^2+1}\right)\right)$.

Задание 5.

Найдите производную $f'(x)$ функции $f(x)$.

5.1. $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)^{\ln x}$.

5.2. $f(x) = (\arcsin 3x)^{x^2+1}$.

5.3. $f(x) = (\sqrt{x})^{\sin 10x}$.

5.4. $f(x) = (\sin x)^{\sqrt[3]{x}}$.

5.5. $f(x) = (\cos 5x)^{\ln(2x)}$.

5.6. $f(x) = (\sin 3x)^{\sqrt[4]{x}}$.

5.7. $f(x) = (\operatorname{arctg} 2x)^{x-x^3}$.

5.8. $f(x) = (\arccos 7x)^{\sqrt{2x}}$.

5.9. $f(x) = (\ln 3x)^{\sin 4x}$.

5.10. $f(x) = (\sqrt[3]{x})^{\cos(x^2)}$.

5.11. $f(x) = (\operatorname{tg} 7x)^{\sqrt{1-x^2}}$.

5.12. $f(x) = (\arcsin 2x)^{4e^x}$.

5.13. $f(x) = (\sin^2 x)^{\operatorname{arctg} 3x}$.

5.14. $f(x) = (x^2 - x)^{\cos x}$.

5.15. $f(x) = (2 - x^2)^{\operatorname{tg}(2x)}$.

5.16. $f(x) = (2x)^{\operatorname{arctg}(5x)}$.

5.17. $f(x) = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x}}$.

5.18. $f(x) = (\ln 4x)^{x^3}$.

5.19. $f(x) = (\cos 2x)^{e^{3x}}$.

5.20. $f(x) = (x^2 - 1)^{\sin(3x)}$.

5.21. $f(x) = (\arccos x)^{\sqrt[3]{4x}}$.

5.22. $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)^{e^{5x}}$.

5.23. $f(x) = (\arcsin 2x)^{x^3-2x}$.

5.24. $f(x) = (\sqrt[3]{2x})^{\sin(5x)}$.

5.25. $f(x)=(x+4)^{\cos(x^4)}$.

5.26. $f(x)=(\operatorname{arctg} 3x)^{\ln \operatorname{arctg} 3x}$.

5.27. $f(x)=(\cos 8x)^{x-x^3}$.

5.28. $f(x)=(\operatorname{ctg} x)^{\sqrt[3]{5x}}$.

5.29. $f(x)=(6x)^{\operatorname{ctg} 4x}$.

5.30. $f(x)=\left(\sqrt{x^3}\right)^{\arcsin(2x)}$.

Задание 6.

Для функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ найдите y'_x и y''_{xx}. Вычислите $y'_x(t_0)$ и $y''_{xx}(t_0)$ для заданного значения t_0.Определите, под каким углом касательная, проведенная к графику данной функции в точке $M_0(x_0,y_0)$, пересекает ось *Ox*.

6.1. $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} \quad t_0=\dfrac{\pi}{3}, \quad M_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

6.2. $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3, \end{cases} \quad t_0=2, \quad M_0(0,-2).$

6.3. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(t-\sin t), \\ y=\dfrac{1}{2}(1-\cos t), \end{cases} \quad t_0=\pi, \quad M_0\left(\dfrac{\pi}{2},1\right).$

6.4. $\begin{cases} x=\sin^3 t, \\ y=2\cos^3 t, \end{cases} \quad t_0=\dfrac{\pi}{4}, \quad M_0\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

6.5. $\begin{cases} x=t\cos t, \\ y=t\sin t, \end{cases} \quad t_0=\dfrac{\pi}{2}, \quad M_0\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right).$

6.6. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{1}{t^2+1}, \end{cases} \quad t_0=1, \quad M_0\left(1,\dfrac{1}{2}\right).$

6.7. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t-1}, \\ y = \sqrt{t}, \end{cases} \quad t_0 = 1, \quad M_0(0,1)$

6.8. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{2\pi}{3}, \quad M_0\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right).$

6.9. $\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t_0 = -2, \quad M_0(-9, 4).$

6.10. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{2\pi}{3}, \quad M_0\left(\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}, 3\right).$

6.11. $\begin{cases} x = 2\sin^3 t, \\ y = \cos^3 t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{6}, \quad M_0\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right).$

6.12. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = 2t\sin t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{6}, \quad M_0\left(\dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}, \dfrac{\pi}{6}\right).$

6.13. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}, \end{cases} \quad t_0 = 2, \quad M_0\left(1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right).$

6.14. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, \\ y = \sqrt{t+1}, \end{cases} \quad t_0 = 8, \quad M_0(2, 3).$

6.15. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{5\pi}{6}, \quad M_0(-\sqrt{3}, 1).$

6.16. $\begin{cases} x = t^3 - 1, \\ y = t^2 - t - 1, \end{cases} \quad t_0 = -1, \quad M_0(-2, 1).$

6.17. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad t_0 = -\pi, \quad M_0(-3\pi, 6).$

6.18. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 5\sin^3 t, \end{cases} \quad t_0 = 0, \quad M_0(2, 0).$

6.19. $\begin{cases} x = 2t\cos t, \\ y = 3t\sin t, \end{cases} \quad t_0 = \dfrac{\pi}{3}, \quad M_0\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}\right).$

6.20. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{-t+1}}, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{1}{2}$, $M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$.

6.21. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}}, \end{cases}$ $t_0 = 2$, $M_0(1, 2)$.

6.22. $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\cos t, \\ y = \dfrac{3}{2}\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $M_0\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}, \dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$.

6.23. $\begin{cases} x = t^2 - t + 1, \\ y = t^3 + 1, \end{cases}$ $t_0 = 1$, $M_0(1, 2)$.

6.24. $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}(t - \sin t), \\ y = \dfrac{3}{2}(1 - \cos t), \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$.

6.25. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $M_0(0, 4)$.

6.26. $\begin{cases} x = 3t\cos t, \\ y = 2t\sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $M_0\left(\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{8}, \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$.

6.27. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases}$ $t_0 = 1$, $M_0(1, 0)$.

6.28. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt[3]{t-1}}, \\ y = \sqrt[3]{t-1}, \end{cases}$ $t_0 = 0$, $M_0(0, -1)$.

6.29. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases}$ $t_0 = -\dfrac{\pi}{3}$, $M_0\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{-5\sqrt{3}}{3}\right)$.

6.30. $\begin{cases} x = t^4 - t, \\ y = t^3 - t^2, \end{cases}$ $t_0 = 1$, $M_0(0, 0)$.

Задание 7.

Для заданной функции $y(x)$ в указанной точке x_0 найдите значения производной и дифференциала k-го порядка (k приводится в условии задачи).

7.1. $y = \dfrac{2x-1}{x+3}, \quad k = 8, \quad x_0 = -4.$

7.2. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}, \quad k = 23, \quad x_0 = 0.$

7.3. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}, \quad k = 7, \quad x_0 = 3.$

7.4. $y = \sin(x+1), \quad k = 12, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{6} - 1.$

7.5. $y = 2^{3x-2}, \quad k = 31, \quad x_0 = 1.$

7.6. $y = \ln(1 - x - 12x^2), \quad k = 16, \quad x_0 = 0.$

7.7. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}, \quad k = 26, \quad x_0 = 0.$

7.8. $y = \dfrac{3x-2}{2x-1}, \quad k = 21, \quad x_0 = 1.$

7.9. $y = \dfrac{8}{20 - x - x^2}, \quad k = 16, \quad x_0 = 0.$

7.10. $y = \log_2(2x+7), \quad k = 10, \quad x_0 = -3.$

7.11. $y = \sin(3x+1), \quad k = 17, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{3} - 1.$

7.12. $y = 3^{2x+3}, \quad k = 18, \quad x_0 = -1.$

7.13. $y = \ln(1 + x - 6x^2), \quad k = 23, \quad x_0 = 0.$

7.14. $y = (x^2 + 2x - 3)e^{-x}, \quad k = 10, \quad x_0 = 0.$

7.15. $y = \dfrac{5x+2}{3x-1}, \quad k = 15, \quad x_0 = 0.$

7.16. $y = \dfrac{6}{8 + 2x - x^2}, \quad k = 9, \quad x_0 = -1.$

7.17. $y = \ln(5x+2), \quad k = 14, \quad x_0 = -0{,}2.$

7.18. $y = \cos(x+1), \quad k = 19, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{6} - 1.$

7.19. $y = 5^{2x-3}, \quad k = 12, \quad x_0 = 2.$

7.20. $y = \ln(1 + 2x - 8x^2), \quad k = 22, \quad x_0 = 0.$

7.21. $y = \sin^2 x, \quad k = 28, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

7.22. $y = \dfrac{x-3}{2-3x}, \quad k = 13, \quad x_0 = 1$.

7.23. $y = \dfrac{5}{6-x-x^2}, \quad k = 11, \quad x_0 = -2$.

7.24. $y = \log_3(3x+1), \quad k = 22, \quad x_0 = 0$.

7.25. $y = \cos 5x, \quad k = 10, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{5}$.

7.26. $y = e^{3x-2}, \quad k = 41, \quad x_0 = 1$.

7.27. $y = \ln(1-x-20x^2), \quad k = 25, \quad x_0 = 0$.

7.28. $y = \sin 2x, \quad k = 22, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{12}$.

7.29. $y = \dfrac{2-3x}{2+x}, \quad k = 29, \quad x_0 = -1$.

7.30. $y = \dfrac{7}{12-x-x^2}, \quad k = 23, \quad x_0 = 2$.

Задание 8.

Проверьте, удовлетворяет ли функция $y = f(x)$ заданному уравнению.

8.1. $y = x^2 \cos 4x$; $\quad (4x^3 + 2y)dx - xdy = 0$.

8.2. $y = (1-x)e^{-x}$; $\quad (y - x^2 e^{-x} + e^{-x})dx + (1-x)dy = 0$.

8.3. $y = x \sin 2x$; $\quad (2x^2 \cos 2x - y)dx + xdy = 0$.

8.4. $y = (x^2+1)\ln x$; $\quad (x^2 + 2y + 1)dx - xdy = 0$.

8.5. $y = x(\cos 2x - 1)$; $\quad x(y - 2x^2 \sin 2x)dx - x^2 dy = 0$.

8.6. $y = 3x \cos 3x$; $\quad (9x^2 \sin 3x - y)dx + xdy = 0$.

8.7. $y = x^2(1 + \ln x)$; $\quad xdy - (x^2 + 2y)dx = 0$.

8.8. $y = -xe^{x^2}$; $\quad xy(1 + 2x^2)dx - x^2 dy = 0$.

8.9. $y = 2x \sin x - 1$; $\quad (y - 2x^2 \cos x + 1)dx - xdy = 0$.

8.10. $y = 2x(1 + \sin x)$; $\quad xdy - (2x^2 \cos x + y)dx = 0$.

8.11. $y = x \operatorname{tg} x$; $\quad xdy - \dfrac{x^2}{\cos^2 x}dx - ydx = 0$.

8.12. $y = x\ln^2 x$; $\dfrac{2+\ln x}{\ln x}ydx - xdy = 0$.

8.13. $y = x(2-\ln x)$; $xydx - x^2dy = 0$.

8.14. $y = x\sin^2 x$; $(1+2x\operatorname{ctg} x)ydx - xdy = 0$.

8.15. $y = (2x-1)\sin x$; $(y - x\cos x)dx - xdy = 0$.

8.16. $y = (2x+1)e^x$; $(4x^2e^x + 3y)dx - 2xdy = 0$.

8.17. $y = x\sin 2x + \cos 2x$; $2x(y\sin 2x - x\sin^2 2x)dx - \sin 2xdy = 0$.

8.18. $y = \sin x + x^2\cos x$; $(x^2\sin x - x^2\cos x + y)dx + dy = 0$.

8.19. $y = \dfrac{x^2-x}{2-x}$; $\left(\dfrac{x^2+2x-2}{2-x} - 2y\right)dx + (x-2)dy = 0$.

8.20. $y = \dfrac{2}{x}\ln^2 x$; $(4\ln x - xy)dx - x^2dy = 0$.

8.21. $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$; $(2x^2y - x\cos x)dx + x^3dy = 0$.

8.22. $y = \dfrac{\cos x}{x}$; $-x^2(y+\sin x)dx - x^3dy = 0$.

8.23. $y = \dfrac{x}{\sin x} + 2$; $(y-1)\operatorname{tg} xdx + \sin^2 xdy = 0$.

8.24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; $(x^2y - 1)dx + x^3dy = 0$.

8.25. $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$; $(y\sin 2x + 4x\cos x)dx - 2\cos^2 xdy = 0$.

8.26. $y = x^2\operatorname{tg} x$; $(2x\sin x + 4y\operatorname{ctg} x)dx - 2\cos^2 xdy = 0$.

8.27. $y = x^2e^{2x}$; $2y(1-x)dx - xdy = 0$.

8.28. $y = 2x\cos x$; $(2x^3\sin 2x - y^2)dx + xydy = 0$.

8.29. $y = x^2\sin x$; $\left(\dfrac{2}{x} + \operatorname{ctg} x\right)y^2dx - ydy = 0$.

8.30. $y = \ln x \cdot \sin x$; $(xy - \sin x)dx + xdy = 0$.

Задание 9.

Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

9.1. $f(x) = \dfrac{x-1}{2x^2+1}$, $x_0 = 1$.

9.2. $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x+1}, \quad x_0=-2$.

9.3. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^3-1}, \quad x_0=-1$.

9.4. $f(x)=\dfrac{x+2}{2-x^2}, \quad x_0=2$.

9.5. $f(x)=\dfrac{x^3+3}{x^2-2}, \quad x_0=-1$.

9.6. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^3-1}, \quad x_0=0$.

9.7. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x-1}, \quad x_0=-1$.

9.8. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+2}, \quad x_0=0$.

9.9. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}, \quad x_0=-1$.

9.10. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x+1}, \quad x_0=-2$.

9.11. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}, \quad x_0=-2$.

9.12. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}, \quad x_0=1$.

9.13. $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{x^2+1}, \quad x_0=1$.

9.14. $f(x)=\dfrac{x^3+x}{1-x^2}, \quad x_0=2$.

9.15. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+2}, \quad x_0=1$.

9.16. $f(x)=\dfrac{1}{x^5+2}, \quad x_0=-1$.

9.17. $f(x)=\dfrac{-x}{x^4+1}, \quad x_0=-1$.

9.18. $f(x)=\dfrac{x^2}{7-x^3}, \quad x_0=2$.

9.19. $f(x)=\dfrac{x}{2-x^4}, \quad x_0=-1$.

9.20. $f(x)=\dfrac{x-x^2}{2-x^3}, \quad x_0=-1.$

9.21. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-3x}, \quad x_0=2.$

9.22. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-x+2}, \quad x_0=0.$

9.23. $f(x)=\dfrac{x+1}{1-5x-x^2}, \quad x_0=0.$

9.24. $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-3x+1}, \quad x_0=2.$

9.25. $f(x)=\dfrac{2-5x}{4x^2+1}, \quad x_0=0.$

9.28. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}, \quad x_0=3.$

9.29. $f(x)=\dfrac{2x^3-6x}{x-4}, \quad x_0=2.$

9.30. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^4-2}, \quad x_0=-1.$

Задание 10.

Вычислите значение функции $y=f(x)$ в заданной точке x приближённо с помощью дифференциала.

10.1. $y=\sqrt{x-10}, \quad x=36.$

10.2. $y=\sqrt{x+11}, \quad x=24.$

10.3. $y=\sqrt{x-2}, \quad x=65.$

10.4. $y=\sqrt[3]{x+3}, \quad x=5{,}25.$

10.5. $y=\sqrt[3]{x-2}, \quad x=9{,}85.$

10.6. $y=\sqrt[3]{x+1}, \quad x=25{,}75.$

10.7. $y=x^5, \quad x=0{,}95.$

10.8. $y=x^5, \quad x=2{,}05.$

10.9. $y=x^4, \quad x=3{,}1.$

10.10. $y=x^6, \quad x=1{,}98.$

10.11. $y=x^8, \quad x=2{,}11.$

10.12. $y=\sqrt{1+\sin 2x}, \quad x=0{,}02.$

10.13. $y=\sqrt{1-\cos 2x}, \quad x=0{,}02.$

10.14. $y=\sqrt{1+\operatorname{tg} x}, \quad x=0{,}04.$

10.15. $y=\sqrt{1-\operatorname{tg} 2x}, \quad x=0{,}02.$

10.16. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}, \quad x=1{,}03.$

10.17. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}}, \quad x=1{,}97.$

10.18. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}, \quad x=6{,}05.$

10.19. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}, \quad x=4{,}45$.

10.20. $y=\sin(x^2-1), \quad x=1{,}02$.

10.21. $y=\arcsin x, \quad x=0{,}04$.

10.22. $y=\arccos x, \quad x=1{,}05$.

10.23. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x=24$.

10.24. $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x=1{,}02$.

10.25. $y=\sqrt[3]{x^2}, \quad x=0{,}98$.

10.26. $y=\sqrt[3]{2-x^2}, \quad x=1{,}03$.

10.27. $y=\sin(1-x), \quad x=0{,}97$.

10.28. $y=\cos(x-2), \quad x=1{,}98$.

10.29. $y=x^3, \quad x=2{,}05$.

11.30. $y=(1-x)^4, \quad x=3{,}02$.

Задание 11.

Проведите полное исследование заданных функций и постройте их графики.

11.1 а) $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$; б) $y=\frac{8x}{x^2+4}$.

11.2. а) $y=16x^2(x-1)^2$; б) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

11.3. а) $y=3x-x^3$; б) $y=\frac{1}{x^2-1}$.

11.4. а) $y=(x+1)(x-2)^2$; б) $y=\frac{3x^2}{x^2+2}$.

11.5. а) $y=12x^2-8x^3-2$; б) $y=\frac{x^4}{(x+1)^3}$.

11.6. а) $y=16x^3-12x^2-4$; б) $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

11.7. а) $y=\frac{1}{16}x^2(x-4)^2$; б) $y=\frac{x+1}{x^2}$.

11.8. а) $y=(x+1)^2(x-1)^2$; б) $y=\frac{2x}{(x+1)^2}$.

11.9. а) $y=(2x-1)^2(2x-3)^2$; б) $y=\frac{3x+2}{x^3}$.

11.10. а) $y=16x^2(x-1)^2$; б) $y=-\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$.

11.11. а) $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$; б) $y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2$.

11.12. а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

11.13. а) $y = (x-1)(x+2)^2$; б) $y = \frac{x^3+4}{x^2}$.

11.14. а) $y = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$; б) $y = \frac{3x^2+2}{x^2}$.

11.15. а) $y = 8x^3 - 12x^2 + 3$; б) $y = \frac{x+2}{x^2+1}$.

11.16. а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 4$; б) $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

11.17. а) $y = 8x^3 + 12x^2 - 5$; б) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.

11.18. а) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$; б) $y = \frac{x}{x^2-1}$.

11.19. а) $y = 16(x^2-4)^2$; б) $y = \frac{1}{x^2-2x-3}$.

11.20. а) $y = -\frac{1}{8}(x-1)^2(x+3)^2$; б) $y = \frac{3x^2-6x-9}{x^2-2x+13}$.

11.21. а) $y = \frac{1}{16}(x+1)^2(x-3)^2$; б) $y = \frac{(x+1)^3}{x^4}$.

11.22. а) $y = x^3 + 9x^2 - 24x + 6$; б) $y = \frac{x^2}{x+1}$.

11.23. а) $y = \frac{x+4}{(x-1)^2}$; б) $y = \frac{(x+1)^2}{2x}$.

11.24. а) $y = 4 - 2x + x^4$; б) $y = \frac{x^3}{3x+2}$.

11.25. а) $y = 5 - 3x + x^3$; б) $y = \frac{7-2x-x^2}{x^2+2x-3}$.

11.26. а) $y = 4(x+1)^2(x+2)^2$; б) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+4}$.

11.27. а) $y = 7 - 9x + 3x^2 + x^3$; б) $y = \left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)^2$.

11.28. а) $y = x^3 + 3x^2 - 12$; б) $y = \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^2$.

11.29. а) $y = (2x+3)^2(2x-3)^2$; б) $y = \dfrac{3x^2 - 12}{x^2 + 10}$.

11.30. а) $y = 6x^3 + 9x^2 - 4$; б) $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

Задание 12.

Вычислите пределы по правилу Лопиталя.

12.1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{2x} - 2^x}{\sin 2\pi x - \sin \pi x}$.

12.2. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 x}$.

12.3. $\lim\limits_{x \to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

12.4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos\sqrt{x}}$.

12.5. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sin x - \sin 3}{x - 3}$.

12.6. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$.

12.7. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\pi^2 - x^2}{\sin x}$.

12.8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2^x - 2}{\lg x}$.

12.9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 2^{5x}}{\sin x + \sin x^2}$.

12.10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$.

12.11. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$.

12.12. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - x}{\log_2(x-2)}$.

12.13. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{e^x - e^{-1}}{\sin(x^2 - 1)}$.

12.14. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{\sin x}{\sin 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

12.15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 5x}$.

12.16. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\lg\cos 4x}{\lg\cos 2x}$.

12.17. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3^x - x^3}{x - 3}$.

12.18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{5x} - 2^{3x}}{\sin 5x - \sin 3x}$.

12.19. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin 5\pi x}{\sin 8\pi x}$.

12.20. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

12.21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.

12.22. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

12.23. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1+\cos 5x}{\sin^2 3x}$.

12.24. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{\ln(1+3^x)}$.

12.25. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}$.

12.26. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2^x-8}{\ln(x-2)}$.

12.27. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{9+x}-2}{\sin \pi x}$.

12.28. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 3x}$.

12.29. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+x\sin \pi x}-1}{2^{x^2}-2}$.

12.30. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3}{\lg x-\lg 3}$.

Задание 13.

Разложите заданную функцию $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора указанного порядка n, используя различные приемы.

13.1. $y=e^{2x-x^2}$, $x_0=0, n=5$.

13.2. $y=\sqrt{4x-3}$, $x_0=3, n=4$.

13.3. $y=\ln(1-x-12x^2)$, $x_0=0, n=13$.

13.4. $y=\operatorname{arctg} x$, $x_0=0, n=4$.

13.5. $y=(x-1)\operatorname{sh} x$, $x_0=1, n=17$.

13.6. $y=\frac{\operatorname{ch} 3x-1}{x^2}$, $x_0=0, n=29$.

13.7. $y=(x-1)\sin 5x$, $x_0=1, n=12$.

13.8. $y=\frac{e^x-1}{x}$, $x_0=0, n=24$.

13.9. $y=x^7$, $x_0=2, n=7$.

13.10. $y=\frac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}$, $x_0=0, n=6$.

13.11. $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$, $x_0=-1, n=4$.

13.12. $y=\ln(1+x-12x^2)$, $x_0=1, n=10.$

13.13. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}$, $x_0=0, n=8.$

13.14. $y=\dfrac{1-e^{-2x}}{x}$, $x_0=0, n=16.$

13.15. $y=\sqrt{x}$, $x_0=1, n=3.$

13.16. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=4, n=4.$

13.17. $y=\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$, $x_0=0, n=9.$

13.18. $y=\dfrac{1-e^{-3x}}{x}$, $x_0=0, n=15.$

13.19. $y=\dfrac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$, $x_0=0, n=23.$

13.20. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$, $x_0=0, n=8.$

13.21. $y=2x\cos^2\dfrac{x}{2}-x$, $x_0=0, n=14.$

13.22. $y=\operatorname{tg} x$, $x_0=0, n=5.$

13.23. $y=\arcsin x$, $x_0=0, n=4.$

13.24. $y=x^5$, $x_0=3, n=5.$

13.25. $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16-x^4}}$, $x_0=0, n=9.$

13.26. $y=2x\sin^2\dfrac{x}{2}-x$, $x_0=0, n=57.$

13.27. $y=\dfrac{6}{8+2x-x^2}$, $x_0=-1, n=15.$

13.28. $y=\ln\cos x$, $x_0=0, n=4.$

13.29. $y=\sin(\sin x)$, $x_0=0, n=3.$

13.30. $y=\dfrac{\ln(1+\frac{x}{3})}{x}$, $x_0=0, n=7.$

Задание 14.

Для функции из задания 7 составьте многочлен Тейлора второго порядка в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ и постройте его схематический график в окрестности этой точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Апатенок, Р. Ф. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок. – Минск : – Выш.шк., 1986. – 272 с.

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : Наука, 1984. – 335 с.

3. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980; 1984, 1988. – 224 с.

4. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980; 1988. – 431 с.

5. Герасимович, А. И. Математический анализ. Ч. 1, 2 / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. –Минск : Выш.шк., 1989.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1. Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : Изд. дом «Оникс 21 век» : Мир и Образование, 2002. – 304 с.

7. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш.шк., 1992. – 384 с.

8. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1989. – 734 с.

9. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – т. 1 – 429 с., т. 2 – 560 с.

10. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике 1 – я часть / Д. Т. Письменный. – М. : Рольф, 2002. – 288 с.

11. Сборник задач по высшей математике. В 10-ти ч. – Минск : БГУИР : Ч. 1 Аналитическая геометрия / А. А. Карпук [и др.], 2002; Ч. 2 Линейная алгебра / А. А. Карпук [и др.], 2004.; Ч. 3 / А. А. Карпук [и др.], 2005; Ч. 4 Дифференциальное исчисление функции одной переменной / А. А, Карпук [и др.], 2006.

12.Третьякова, Н. Н. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Сборник задач с решениями / Н. Н. Третьякова, Т. М. Пушкарева. – Минск : Бестпринт, 2003. – 90 с.

13. Черняк, А. А. Высшая математика для студентов инженерно-экономических специальностей +СД / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк. – Минск. : Харвест, 2008. – 715 с.

Учебное издание

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 3-х частях

Часть 1

С о с т а в и т е л и :

Черняк Жанна Альбертовна
Примичева Зоя Николаевна
Дайняк Игорь Викторович и др.

Редактор Т. П. Андрейченко
Корректор

Подписано в печать	Формат 60×84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Отпечатано на ризографе.	Усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 5.5.	Тираж экз.	Заказ 696.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ № 02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП № 02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6