Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра высшей математики

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 3-х частях

Часть 2

**Дифференциальное исчисление функций многих переменных.
Дифференциальные уравнения**

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
для радиотехнических специальностей,
закрепленных за УМО, в качестве
учебно-методического пособия*

Минск БГУИР 2013

УДК 517(076.1)
ББК 22.1я73
Т43

Авторы:

Ж. А. Черняк, В. В. Величковский, А. М. Жабик,
Н. В. Князюк, О. Н. Малышева, Т. А. Романчук, И. А. Смирнова,
З. Н. Примичева, В. Г. Шилкин

Рецензенты:

кафедра высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный экономический университет»
(протокол №2 от 27.09.2012 г.);

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного
анализа Белорусского государственного университета
В. В. Амелькин

Т43 **Типовые** расчеты по высшей математике : учеб.-метод. пособие. В 3 ч. Ч. 2 : Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Дифференциальные уравнения / Ж. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГУИР, 2013. – 134 с.
ISBN 978-985-488-940-5 (ч. 2).

Пособие содержит тематические наборы индивидуальных заданий по следующим разделам курса высшей математики: комплексные числа, многочлены и рациональные функции, интегральное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций многих переменных, дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений, а также приложения для самостоятельной контролируемой работы студентов всех специальностей дневной формы обучения.

Часть 1-я издана в БГУИР в 2012 г.

УДК 517(076.1)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-488-940-5 (ч. 2)
ISBN 978-985-488-973-3

Содержание

Введение

Настоящее пособие является второй частью учебно-методического комплекса «Типовые расчеты по высшей математике» в трех частях.

В отличие от первой части этого комплекса, содержащей наборы индивидуальных заданий по темам, изучаемым в первом семестре первого курса технического университета, данное пособие включает не только варианты индивидуальных заданий по следующим разделам курса высшей математики: «Комплексные числа. Многочлены и рациональные функции», «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Дифференциальное исчисление функций многих переменных», «Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений», изучаемым обычно во втором семестре первого курса, но также и образцы решений типовых вариантов. При этом каждая задача образцового варианта решена чрезвычайно подробно, все вычислительные выкладки сопровождаются словесными пояснениями, позволяющими студенту детально разобраться в решениях задач каждого раздела. На взгляд авторов, большое количество досконально разобранных задач поможет студентам создать необходимую базу для понимания изучаемых идей и методов, приобрести умение самостоятельно работать с учебной литературой, поддерживая тем самым уверенность в своих силах и развивая свой творческий потенциал.

Авторы во второй части пособия по-прежнему придерживаются концепции: основные идеи и методы математики не должны скрываться за громоздкими вычислениями. Поэтому наряду со стандартными задачами, без которых трудно постигнуть классическую математику, авторы предлагают и такие задачи, которые нужно решить «на уровне идеи».

Например, в некоторых задачах требуется привести схему решения, не находя числовых значений параметров, или преобразовать поставленную задачу к более простому виду (без дальнейшего решения полученной задачи) и т. д.

Задачи из этого сборника можно использовать также и для аудиторной работы, проведения самостоятельных и контрольных работ, составления экзаменационных материалов.

Задачи с подробными решениями рекомендуются студентам для самостоятельной работы при подготовке к контрольным работам, зачетам и экзаменам.

Пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов и преподавателей высшей математики.

Типовой расчет №1
Комплексные числа. Многочлены и рациональные дроби

Задание 1

Даны два комплексных числа z_1 и z_2. Найдите $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$ (результат запишите в алгебраической форме); $z_1 \cdot z_2$ (результат запишите в тригонометрической форме); $\dfrac{z_1}{z_2}$ (результат запишите в показательной форме).

1.1. $z_1 = 2 - 2i, \quad z_2 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3};$

1.2. $z_1 = 3 + 3\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right);$

1.3. $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 6\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right);$

1.4. $z_1 = 4 - 4i, \quad z_2 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right);$

1.5. $z_1 = 3 + 3i, \quad z_2 = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3};$

1.6. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = \sqrt{6}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right);$

1.7. $z_1 = 4 - 4\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right);$

1.8. $z_1 = -3 + 3i, \quad z_2 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right);$

1.9. $z_1 = -3 - \sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 8\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right);$

1.10. $z_1 = -8 - 8i, \quad z_2 = 3(\cos\pi + i\sin\pi);$

1.11. $z_1 = 5 - 5i, \quad z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right);$

1.12. $z_1 = -4\sqrt{3} - 4i, \quad z_2 = 5\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right);$

1.13. $z_1 = 6 + 6i, \quad z_2 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right);$

1.14. $z_1 = -2 - 2i, \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right);$

1.15. $z_1 = 6 + 2\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right);$

1.16. $z_1 = -3\sqrt{3} + 9i, \quad z_2 = \sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$

1.17. $z_1 = -5\sqrt{3} - 15i, \quad z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right);$

1.18. $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i, \quad z_2 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right);$

1.19. $z_1 = 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\,i, \quad z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right);$

1.20. $z_1 = 6 - 2\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 6\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right);$

1.21. $z_1 = -3 + \sqrt{3}\,i, \quad z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3};$

1.22. $z_1 = -3\sqrt{2} - \sqrt{6}\,i, \quad z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right);$

1.23. $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i, \quad z_2 = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right);$

1.24. $z_1 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}\,i, \quad z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6};$

1.25. $z_1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i, \quad z_2 = 2\sqrt{6}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right);$

1.26. $z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{6}\,i, \quad z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right);$

1.27. $z_1 = -\sqrt{2}\,i, \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right);$

1.28. $z_1 = 3, \quad z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right);$

1.29. $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right);$

1.30. $z_1 = 4 + 4\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$

Задание 2

Дана последовательность z_n комплексных чисел. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n$ (варианты 1–15), $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n$ (варианты 16–30), если эти пределы существуют.

2.1. $z_n = \dfrac{2-3in}{1+2in}$;

2.2. $z_n = 1+\dfrac{i^n}{n}$;

2.3. $z_n = \dfrac{1}{n} e^{i\frac{\pi n}{4}}$;

2.4. $z_n = \dfrac{3\operatorname{sh}\frac{\pi n i}{3}}{n^2+4n+1}$;

2.5. $z_n = \dfrac{2\operatorname{ch}(\pi n i)}{5+3n^2}$;

2.6. $z_n = \dfrac{5n}{3n+2}\cdot\dfrac{in^2}{n^2-4i}$;

2.7. $z_n = \dfrac{n(2n+9i)}{in^2+7}$;

2.8. $z_n = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi n i}{5}}{n-2i}$;

2.9. $z_n = 2-i+\dfrac{1}{n}(1+i)$;

2.10. $z_n = \dfrac{2n-3-i}{in+1}$;

2.11. $z_n = \dfrac{2n}{3n+i}\cdot\dfrac{3in^2}{n^2-5}$;

2.12. $z_n = \dfrac{4i\operatorname{ch}\left(\frac{\pi n i}{6}\right)}{n^2+7n+3}$;

2.13. $z_n = \dfrac{n^2-2in-3}{4n^2+5i}$;

2.14. $z_n = \dfrac{3n^2+5i}{2-in^2}$;

2.15. $z_n = \dfrac{in}{n^2+4} e^{i\frac{\pi n}{8}}$;

2.16. $z_n = \dfrac{2-3in}{1+2in}$;

2.17. $z_n = 1+\dfrac{i^n}{n}$;

2.18. $z_n = \dfrac{1}{n} e^{i\frac{\pi n}{4}}$;

2.19. $z_n = \dfrac{3\operatorname{sh}\frac{\pi n i}{3}}{n^2+4n+1}$;

2.20. $z_n = \dfrac{2\operatorname{ch}(\pi n i)}{5+3n^2}$;

2.21. $z_n = \dfrac{5n}{3n+2}\cdot\dfrac{in^2}{n^2-4i}$;

2.22. $z_n = \dfrac{n(2n+9i)}{in^2+7}$;

2.23. $z_n = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi n i}{5}}{n-2i}$;

2.24. $z_n = 2-i+\dfrac{1}{n}(1+i)$;

2.25. $z_n = \dfrac{2n-3-i}{in+1}$;

2.26. $z_n = \dfrac{2n}{3n+i}\cdot\dfrac{3in^2}{n^2-5}$;

2.27. $z_n = \dfrac{4i\operatorname{ch}\left(\frac{\pi n i}{6}\right)}{n^2+7n+3}$;

2.28. $z_n = \dfrac{n^2-2in-3}{4n^2+5i}$;

2.29. $z_n = \dfrac{3n^2+5i}{2-in^2}$;

2.30. $z_n = \dfrac{in}{n^2+4} e^{i\frac{\pi n}{8}}$.

Задание 3

Проверьте, верно ли равенство. Если нет, приведите правильный ответ.

3.1. $\overline{\left((3+i)^3\right)} = 18+26i$;

3.2. $\overline{\left(\dfrac{3+i}{(1+i)\cdot(1-2i)}\right)} = 0{,}8+0{,}6i$;

3.3. $\overline{\left((2-i)^3\cdot(2+11i)\right)} = 125$;

3.4. $\overline{\left((4+5i)-(3-2i)\right)} = 1-7i$;

3.5. $\overline{\left(\dfrac{13+12i}{6i-8}\right)} = 0{,}32+1{,}74i$;

3.6. $\overline{\left((4+5i)\cdot(3-2i)\right)} = 22-7i$;

3.7. $\overline{\left((4i-3)\cdot(1-2i)\right)} = 5-10i$;

3.8. $\overline{\left((4+3i)^2\right)} = 7+24i$;

3.9. $\overline{\left(\dfrac{2-3i}{1+4i}+i^6\right)} = -\dfrac{27}{17}+\dfrac{11}{17}i$;

3.10. $\overline{\left(\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}\right)} = 3$;

3.11. $\overline{\left(\dfrac{\overline{(13+12i)}}{\overline{6i-8}}+\dfrac{\overline{(1+2i)}^2}{\overline{(2-i)}}\right)} = -\dfrac{18}{25}+\dfrac{23}{50}i$;

3.12. $\overline{\left(\dfrac{\overline{(1+2i)}^2-\overline{(1-i)}^2}{\overline{(3+2i)}^3-\overline{(2+i)}^2}\right)} = \dfrac{22}{159}-\dfrac{5}{318}i$;

3.13. $\overline{\left((\overline{3-i})^3\right)} = 18+26i$;

3.14. $\overline{\left(2i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)} = -2i$;

3.15. $\overline{\left((\overline{4-3i})^2\right)} = 7-24i$;

3.16. $\overline{\left(\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}\right)} = \dfrac{18}{25}+\dfrac{23}{50}i$;

3.17. $\overline{\left(\dfrac{i}{(1+i)^2}\right)} = \dfrac{1}{2}$;

3.18. $\overline{\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{-1-i}\right)^6}=8i$;

3.19. $\overline{\left((4-3i)^2\right)}=7+24i$;

3.20 $\overline{\left(\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}\right)}=\dfrac{22}{159}+\dfrac{5}{318}i$;

3.21. $\overline{\left(\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}\right)}=0$;

3.22. $\overline{\left(\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{1}{i}\right)}=2i$;

3.23. $\overline{((\overline{4i-3})\cdot\overline{(1-2i)})}=5+10i$;

3.24. $\overline{\left(\dfrac{\sqrt{3}\,i+1}{i-1}\right)^6}=\dfrac{8i}{\sqrt{2}}$;

3.25. $\overline{\left(\dfrac{\overline{(13+12i)}}{\overline{(6i-8)}}\right)}=-0{,}32+1{,}74i$;

3.26. $\overline{\left(\dfrac{13-12i}{-6i-8}+\dfrac{(1-2i)^2}{2-i}\right)}=-\dfrac{18}{25}+\dfrac{23}{50}i$;

3.27. $\overline{\left(\dfrac{2-3i}{1+4i}+i^5\right)}=\dfrac{10}{17}-\dfrac{7}{17}i$;

3.28. $(\overline{(\overline{4+5i})-\overline{(3-2i)}})=1+7i$;

3.29. $\overline{\left((3-i)^3\right)}=18-26i$;

3.30. $\overline{\left(\overline{(4+3i)}^2\right)}=7+24i$.

Задание 4

Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих указанным условиям:

4.1. 1) $|z|=1$, 2) $|z-1-i|=1$, 3) $\begin{cases}|z-1-i|\le 1,\\ \operatorname{Im} z>1{,}5;\end{cases}$

4.2. 1) $|z|=2$, 2) $|z+3-i|=2$, 3) $\begin{cases}|z+3-i|\le 2,\\ |z|<1-\operatorname{Re} z;\end{cases}$

4.3. 1) $|z| = \frac{1}{2}$, 2) $|z-2+i| = \frac{1}{2}$, 3) $\begin{cases} |z-2+i| < \frac{1}{2}, \\ -2 < \operatorname{Im} z \le -1; \end{cases}$

4.4. 1) $|z| = 2$, 2) $|z-i| = 2$, 3) $\begin{cases} |z-i| = |z-2|, \\ |z-i| \le 2; \end{cases}$

4.5. 1) $|z| = 2$, 2) $|z+i-1| = 2$, 3) $\begin{cases} |z+i-1| < 2, \\ \operatorname{Im} z \le \frac{1}{6}; \end{cases}$

4.6. 1) $|z| = 3$, 2) $|z-2i| = 3$, 3) $\begin{cases} |z-2i| < 3, \\ \operatorname{Im} z \ge \frac{1}{2}; \end{cases}$

4.7. 1) $|z| = 2$, 2) $|z+1-i| = 2$, 3) $\begin{cases} |z+1-i| \le 2, \\ z^2 + \bar{z}^2 \le 4; \end{cases}$

4.8. 1) $|z| = 2$, 2) $|z-2-2i| = 2$, 3) $\begin{cases} |z-2-2i| < 2, \\ z^2 + \bar{z}^2 = 2; \end{cases}$

4.9. 1) $|z| = 1$, 2) $|z-i-1| = 1$, 3) $\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \ge 1, \\ |z-i-1| < 1; \end{cases}$

4.10. 1) $|z| = 5$, 2) $|z-2i+4| = 5$, 3) $\begin{cases} z^2 + \bar{z}^2 \ge 6, \\ 1 < \operatorname{Re} z < 3; \end{cases}$

4.11. 1) $|z| = 2$, 2) $|z+i+5| = 2$, 3) $\begin{cases} |z+i+5| \le 2, \\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \le \frac{1}{4}; \end{cases}$

4.12. 1) $|z| = 1$, 2) $|z+1-i| = 1$, 3) $\begin{cases} |z+1-i| < 1, \\ |z-2i| = |z+3|; \end{cases}$

4.13. 1) $|z| = \frac{2}{3}$, 2) $|z-2+2i| = \frac{2}{3}$, 3) $\begin{cases} \frac{2}{3} < |z-2+2i| < \frac{3}{2}, \\ \operatorname{Re} z > 3; \end{cases}$

4.14. 1) $|z| = 3$, 2) $|z-3+2i| = 3$, 3) $\begin{cases} |z-3+2i| > 3, \\ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}; \end{cases}$

4.15. 1) $|z| = 2$, 2) $|z - i| = 2$, 3) $\begin{cases} |z - i| < 2, \\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) \geq \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

4.16. 1) $|z| = 3$, 2) $|z - 2 - i| = 3$, 3) $\begin{cases} |z - 2 - i| > 3, \\ |z - 2 - i| = |z - 1 + 2i|; \end{cases}$

4.17. 1) $|z| = 3$, 2) $|z - 3 + 2i| = 3$, 3) $\begin{cases} z^2 + \bar{z}^2 = 8, \\ |z - 3 + 2i| < 3; \end{cases}$

4.18. 1) $|z| = 2$, 2) $|z - 2i + 3| = 2$, 3) $\begin{cases} 2 \leq |z - 2i + 3| < 3, \\ -1 < \operatorname{Im} z \leq 1; \end{cases}$

4.19. 1) $|z| = 1$, 2) $|z - 4| = 1$, 3) $\begin{cases} |z - 4| > 1, \\ 0 < \arg z \leq \dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$

4.20. 1) $|z| = 3$, 2) $|z + 2| = 3$, 3) $\begin{cases} |z + 2| \leq 3, \\ \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) < \dfrac{1}{2}; \end{cases}$

4.21. 1) $|z| = 1$, 2) $|z - 2 - i| = 1$, 3) $\begin{cases} |z - 2 - i| < 1, \\ \operatorname{Im} z^2 = 2; \end{cases}$

4.22. 1) $|z| = 2$, 2) $|z + 2 + 3i| = 1$, 3) $\begin{cases} 1 < |z + 2 + 3i| < 2, \\ -2{,}5 < \operatorname{Im} z < -1{,}5; \end{cases}$

4.23. 1) $|z| = 1$, 2) $|z - 4i + 4| = 1$, 3) $\begin{cases} 1 < |z - 4i + 4| < 2, \\ -3 < \operatorname{Re} z \leq -2; \end{cases}$

4.24. 1) $|z| = 2$, 2) $|z - 2| = 2$, 3) $\begin{cases} |z - 2| > 2, \\ \operatorname{Re} z^2 = 1; \end{cases}$

4.25. 1) $|z| = 2$, 2) $|z - 3i - 3| = 2$, 3) $\begin{cases} |z - 3i - 3| < 2, \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z \leq \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

4.26. 1) $|z| = 4$, 2) $|z - 1 + 2i| = 4$, 3) $\begin{cases} |z - 1 + 2i| \leq 4, \\ z = \bar{z}; \end{cases}$

4.27. 1) $|z|=1,$ 2) $|z-1+i|=1,$ 3) $\begin{cases} |z-1+i|<1, \\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

4.28. 1) $|z|=1,$ 2) $|z-2-i|=1,$ 3) $\begin{cases} |z-2-i|<1, \\ \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

4.29. 1) $|z|=2,$ 2) $|z+1-i|=2,$ 3) $\begin{cases} |z+1-i|\le 2, \\ \operatorname{Re} z<-2; \end{cases}$

4.30. 1) $|z|=3,$ 2) $|z+2i|=3,$ 3) $\begin{cases} |z+2i|\le 3, \\ z=\bar{z}. \end{cases}$

Задание 5

Дано комплексное число z. Найдите:

1) $(lz)^k$;

2) $m|z|^2$;

3) все значения $\sqrt[n]{m|z|^2}$.

Числа k, l, m, n даны в условии каждой задачи.

5.1. $z=\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}+i\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{4},\quad k=10,\quad l=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\quad m=-8,\quad n=4;$

5.2. $z=\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}+i\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3}\right),\quad k=8,\quad l=\dfrac{2}{\sqrt{3}},\quad m=-4,\quad n=4;$

5.3. $z=8\left(\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}+i\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right),\quad k=6,\quad l=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad m=-\dfrac{1}{4},\quad n=3;$

5.4. $z=8\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}+16\cos\dfrac{5\pi}{6},\quad k=4,\quad l=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\quad m=-4,\quad n=5;$

5.5. $z=3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right),\quad k=4,\quad l=\dfrac{1}{2\sqrt{3}},\quad m=-243,\quad n=6;$

5.6. $z=\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{2\pi}{3}-8i\sin\pi,\quad k=8,\quad l=4,\quad m=-\dfrac{1}{64},\quad n=4;$

5.7. $z=\dfrac{1}{16}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right),\quad k=10,\quad l=16,\quad m=-8,\quad n=3;$

5.8. $z=8\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}-i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right),\quad k=6,\quad l=\dfrac{1}{4\sqrt{3}},\quad m=-\dfrac{1}{4},\quad n=3;$

5.9. $z=16\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\right)$, $k=6$, $l=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $m=-1$, $n=5$;

5.10. $z=16\left(\sin\frac{7\pi}{6}+i\cos\frac{4\pi}{3}\right)$, $k=8$, $l=\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $m=-1$, $n=4$;

5.11. $z=\cos\pi+i\sin\frac{5\pi}{2}$, $k=10$, $l=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $m=-\frac{1}{32}$, $n=4$;

5.12. $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$, $k=8$, $l=\sqrt{2}$, $m=-81$, $n=4$;

5.13. $z=16\left(\sin\frac{7\pi}{6}-i\cos\frac{5\pi}{6}\right)$, $k=6$, $l=\frac{1}{16}$, $m=-\frac{1}{4}$, $n=3$;

5.14. $z=8\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$, $k=4$, $l=\frac{1}{4}$, $m=-4$, $n=5$;

5.15. $z=3\left(\operatorname{tg}\pi+i\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)$, $k=4$, $l=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $m=-81$, $n=6$;

5.16. $z=\frac{1}{8}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}-i\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\right)$, $k=8$, $l=\frac{i}{4}$, $m=-\frac{1}{2}$, $n=4$;

5.17. $z=4\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\right)$, $k=10$, $l=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $m=-\frac{1}{16}$, $n=3$;

5.18. $z=\frac{1}{16}\left(\sin\frac{5\pi}{6}-i\cos\frac{2\pi}{3}\right)$, $k=6$, $l=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $m=-\frac{1}{4}$, $n=3$;

5.19. $z=32\left(\sin\frac{7\pi}{6}+i\cos\frac{4\pi}{3}\right)$, $k=6$, $l=\frac{1}{4\sqrt{3}}$, $m=-1$, $n=5$;

5.20. $z=8\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}+i\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\right)$, $k=8$, $l=\frac{1}{4\sqrt{2}}$, $m=-\frac{1}{4}$, $n=4$;

5.21. $z=2\left(\sin\frac{7\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$, $k=10$, $l=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $m=-\frac{1}{32}$, $n=4$;

5.22. $z=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}-i\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}\right)$, $k=8$, $l=\sqrt{3}$, $m=-16$, $n=4$;

5.23. $z=-8\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+i\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}\right)$, $k=6$, $l=\frac{i}{32}$, $m=-\frac{1}{64}$, $n=3$;

5.24. $z=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, $k=4$, $l=\frac{i}{4}$, $m=-\frac{1}{8}$, $n=5$;

5.25. $z=6\left(\operatorname{tg}\pi-i\cos\frac{2\pi}{3}\right)$, $k=4$, $l=\frac{i}{3}$, $m=-\frac{1}{9}$, $n=6$;

5.26. $z=\frac{1}{4}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cos\frac{\pi}{2}\right),\quad k=8,\quad l=4i,\quad m=-4,\quad n=4;$

5.27. $z=-\frac{1}{16}\left(\sin\frac{7\pi}{6}+i\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),\quad k=10,\quad l=\frac{i}{2\sqrt{2}},\quad m=-\frac{1}{4},\quad n=3;$

5.28. $z=16\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right),\quad k=6,\quad l=2i,\quad m=-4,\quad n=3;$

5.29. $z=32\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad k=6,\quad l=\frac{i}{2\sqrt{3}},\quad m=-1,\quad n=5;$

5.30. $z=8\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}+i\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right),\quad k=8,\quad l=\frac{i}{8},\quad m=-16,\quad n=4.$

Задание 6

Найдите все корни заданных уравнений 1−3. Для корня уравнения 1 − z_1 найдите расстояние до точки $z=0$.

Для уравнения 2 вычислите периметр треугольника с вершинами в точках z_1, z_2, z_3, где z_1 и z_2 − корни уравнения, $z_3=-1$.

Для уравнения 3 напишите уравнение окружности с центром в точке z_1 (z_1 − действительный корень уравнения), на которой лежат остальные корни z_2 и z_3 этого уравнения.

6.1. 1) $(2+i)z-1=3i$; 2) $2z^2+iz+3=0$; 3) $z^3+3z^2+z+3=0$;

6.2. 1) $(2+3i)z-i=5$; 2) $z^2+2iz+3=0$; 3) $z^3-2z^2+4z-8=0$;

6.3. 1) $(2-i)z-3i=4$; 2) $3z^2-2iz+1=0$; 3) $z^3-3z^2+z+5=0$;

6.4. 1) $(-1-i)z+3=-i$; 2) $iz^2+2z-2i=0$; 3) $z^3-5z^2+8z-6=0$;

6.5. 1) $(1+i)z+4i=2$; 2) $5iz^2-2z-2i=0$; 3) $z^3-5z^2+4z+10=0$;

6.6. 1) $(4+i)z+7i=-11$; 2) $iz^2-4z-5i=0$; 3) $z^3+5z^2+z+5=0$;

6.7. 1) $(1-5i)z+3i=11$; 2) $z^2+3iz+4=0$; 3) $2z^3-4z^2-z+5=0$;

6.8. 1) $(1+i)z-4=2i$; 2) $4z^2-3iz+1=0$; 3) $z^3-7z^2+20z-24=0$;

6.9. 1) $(2+i)z+7i=6$; 2) $5z^2+4iz+1=0$; 3) $z^3-8z^2+22z-20=0$;

6.10. 1) $(1-2i)z+3i=4$; 2) $2iz^2+2z-5i=0$; 3) $z^3+2z^2+25z+50=0$;

6.11. 1) $(3-i)z+4i=2$; 2) $iz^2-2z-5i=0$; 3) $z^3-6z^2+16z-16=0$;

6.12. 1) $(1-4i)z+7i=6$; 2) $5iz^2+2z-i=0$; 3) $z^3+8z^2+25z+26=0$;

6.13. 1) $(4-3i)z-7=i$; 2) $z^2+7iz+8=0$; 3) $z^3+22z+52=0$;

6.14. 1) $(-2+i)z-1=7i$; 2) $3z^2+8iz+3=0$; 3) $z^3-4z^2+21z-34=0$;

6.15. 1) $(5+i)z+9i=7$; 2) $4z^2-7iz+2=0$; 3) $z^3-z^2+8z+10=0$;

6.16. 1) $(4+5i)z-6i=13$; 2) $iz^2+6z-13i=0$; 3) $z^3+z+10=0$;

6.17. 1) $(5i-2)z+9=8i$; 2) $iz^2-6z-10i=0$; 3) $z^3-z^2+15z+17=0$;

6.18. 1) $(3+2i)z+5=i$; 2) $2z^2-5iz+3=0$; 3) $z^3+3z^2+4z+2=0$;

6.19. 1) $(3-i)z+i=13$; 2) $3z^2+5iz+2=0$; 3) $z^3+3z^2+9z+27=0$;

6.20. 1) $(6i-1)z-4=13i$; 2) $z^2-5iz+6=0$; 3) $z^3-6z^2+13z-10=0$;

6.21. 1) $(4+i)z-3=5i$; 2) $9z^2+8iz+1=0$; 3) $z^3+5z^2+7z-13=0$;

6.22. 1) $(1+2i)z+6=-7i$; 2) $3z^2-iz+2=0$; 3) $z^3-11z-20=0$;

6.23. 1) $(5i-3)z+8=2i$; 2) $z^2-4iz+5=0$; 3) $z^3-7z^2+25z-39=0$;

6.24. 1) $(1+2i)z+1=3i$; 2) $2iz^2-2z-i=0$; 3) $z^3-5z^2+11z-15=0$;

6.25. 1) $(4-i)z+7=6i$; 2) $iz^2+4z-8i=0$; 3) $z^3-2z^2+5z+26=0$;

6.26. 1) $(3-4i)z+1=-7i$; 2) $2iz^2-6z-9i=0$; 3) $z^3+7z^2+17z+15=0$;

6.27. 1) $(3+i)z-19=3i$; 2) $8iz^2-4z-i=0$; 3) $z^3+2z^2-6z+8=0$;

6.28. 1) $(2+3i)z-7=4i$; 2) $z^2-8iz+9=0$; 3) $z^3+3z^2+4z+12=0$;

6.29. 1) $(5-i)z-11=3i$; 2) $2z^2+7iz+4=0$; 3) $z^3+2z^2+16z+32=0$;

6.30. 1) $(3+i)z+7i=9$; 2) $6z^2+5iz+1=0$; 3) $z^3+6z+20=0$.

Задание 7

Дан многочлен $P_4(z)$ с действительными коэффициентами; известен один из его корней – z_1.

1. Найдите остальные корни многочлена $P_4(z)$.
2. Разложите $P_4(z)$ на линейные множители.
3. Разложите многочлен $P_4(z)$ на множители, неприводимые на множестве ∡.
4. Разложите рациональную дробь $\dfrac{1}{P_4(z)}$ на простейшие.

7.1. $P_4(z)=z^4+8z^3+23z^2+30z+18$, $z_1=-1-i$;

7.2. $P_4(z)=z^4+z^3+2z^2+z+1$, $z_1=i$;

7.3. $P_4(z)=z^4+3z^3+8z^2+9z+9$, $z_1=-1+i\sqrt{2}$;

7.4. $P_4(z)=z^4+z^3+4z^2+2z+4$, $z_1=i\sqrt{2}$;

7.5. $P_4(z)=z^4-z^3+2z^2-z+1$, $z_1=-i$;

7.6. $P_4(z)=z^4-2z^3+10z^2-18z+9$, $z_1=-3i$;

7.7. $P_4(z)=z^4+8z^3+22z^2+24z-7$, $z_1=-2-i\sqrt{3}$;

7.8. $P_4(z) = z^4 + 8z^3 + 23z^2 + 30z + 18, \quad z_1 = -1 + i;$

7.9. $P_4(z) = z^4 + 2z^3 - 8z - 16, \quad z_1 = -1 - i\sqrt{3};$

7.10. $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 8z - 16, \quad z_1 = 1 + i\sqrt{3};$

7.11. $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 8z^2 + 8z + 16, \quad z_1 = -2i;$

7.12. $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 8z + 16, \quad z_1 = 2i;$

7.13. $P_4(z) = z^4 + 2z^3 - 2z^2 - 6z + 5, \quad z_1 = -2 - i;$

7.14. $P_4(z) = z^4 + 6z^3 + 14z^2 + 14z + 5, \quad z_1 = -2 + i;$

7.15. $P_4(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 2z + 1, \quad z_1 = -i;$

7.16. $P_4(z) = z^4 + 4z^3 + 14z^2 + 20z + 25, \quad z_1 = -1 - 2i;$

7.17. $P_4(z) = 4z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 1, \quad z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{4};$

7.18. $P_4(z) = z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 8z + 4, \quad z_1 = 1 - i;$

7.19. $P_4(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 20z + 25, \quad z_1 = 1 + 2i;$

7.20. $P_4(z) = z^4 + 2z^3 - 2z^2 - 6z + 5, \quad z_1 = -2 + i;$

7.21. $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 8z^2 + 8z + 16, \quad z_1 = 2i;$

7.22. $P_4(z) = z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 8z + 16, \quad z_1 = -2i;$

7.23. $P_4(z) = z^4 + 6z^3 + 14z^2 + 14z + 5, \quad z_1 = -2 - i;$

7.24. $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 4z - 12, \quad z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{23}}{2};$

7.25. $P_4(z) = 6z^4 - 11z^3 - z^2 - 4, \quad z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{4};$

7.26. $P_4(z) = z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 4, \quad z_1 = -1 - i;$

7.27. $P_4(z) = z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12, \quad z_1 = 2i;$

7.28. $P_4(z) = z^4 - 6z^3 - 2z^2 + 50z - 75, \quad z_1 = 2 + i;$

7.29. $P_4(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 3z - 10, \quad z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{19}}{2};$

7.30. $P_4(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 20z + 25, \quad z_1 = 1 + 2i.$

Задание 8

Разложите рациональную дробь $R(x)$ на сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами.

8.1. $R(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 4)(x^3 - 1)^2};$

8.2. $R(x)=\dfrac{2x^2-7x+3}{(x^3-27)^2\,(x^2-9)\,(x^2+x-12)^2}$;

8.3. $R(x)=\dfrac{5x^2-6x+1}{(x^4+2x^2-3)^2\,(x^3+1)}$;

8.4. $R(x)=\dfrac{4x^2+3x-1}{(x^3-1)^2\,(x^2+x-2)\,(x+1)^3}$;

8.5. $R(x)=\dfrac{3x^2+5x-2}{(x^3-8)^3\,(x^2+5x+6)^2}$;

8.6. $R(x)=\dfrac{3x^2+8x-3}{(27x^3-1)^3\,(x^3-x^2+4x-4)}$;

8.7. $R(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x^2-25)\,(x^2+3x-10)^2\,(x^3-125)^2}$;

8.8. $P(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x(x^2-1)^2\,(x^3+4x^2+8x)^2}$;

8.9. $R(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{(x^2-4)\,(x^2-5x-14)\,(x^3+8)^2}$;

8.10. $R(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x^2-1)\,(x^4-16)^3}$;

8.11. $R(x)=\dfrac{2x^2-9x+4}{(x^2-5x+4)^2\,(27x^3-1)^3}$;

8.12. $R(x)=\dfrac{7x-1}{(x^3+8)^2\,(9x^2-1)\,(3x^2+7x+2)}$;

8.13. $R(x)=\dfrac{3x^2-10x-8}{(x^3-3x^2+7x)^3\,(x^2-16)^2}$;

8.14. $R(x)=\dfrac{4x^2-12x+9}{(2x^2+7x-15)\,(4x^2-9)^2\,(x^3+125)^2}$;

8.15. $R(x)=\dfrac{3x^2-7x-20}{(x^3+3x^2+4x)^3\,(x^2-16)^2}$;

8.16. $R(x)=\dfrac{x^2-1}{(x^3-3x^2+9x)^3\,(3x^2+2x-5)^2}$;

8.17. $R(x)=\dfrac{2x^2-5x-3}{(x^3-3x^2+5x)^3\,(x^2-9)^2}$;

8.18. $R(x)=\dfrac{2x^2-3x-2}{(x^2-4)^2\,(x^3+5x^2+7x)^3}$;

8.19. $R(x)=\dfrac{x^2-16}{(8x^3+1)^2\,(4x^2-1)\,(x^2-5x+4)}$;

8.20. $R(x)=\dfrac{2x^2+5x-3}{(27x^3-1)^3\,(4x^2-1)^2}$;

8.21. $R(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{(8x^3+1)^2(2x^2+7x+3)\,(x^2-9)^2}$;

8.22. $R(x)=\dfrac{x^3-8}{(x^4-16)^2(x^3+8)^3}$;

8.23. $R(x)=\dfrac{4x^2+3x-1}{(x^2-1)^2(x^3+2x^2+2x)^3}$;

8.24. $R(x)=\dfrac{4x+1}{(x^3-x^2+4x-4)^2(x^2-1)\,(x^2-x-2)}$;

8.25. $R(x)=\dfrac{x^2+4x}{(x^2+x-2)^2(x^2+3x-4)\,(x^3-2x^2+3x)^2}$;

8.26. $R(x)=\dfrac{x^2+10x}{(x^2-6x+8)(x^3+5x^2+x+5)^2\,(x^2+x-20)}$;

8.27. $R(x)=\dfrac{9x^2+12x+4}{(3x^2-10x-8)^3(x^3-4x^2+5x)^2}$;

8.28. $R(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{(4x^2-9)^2(2x^2+x-3)\,(x^3+1)^2}$;

8.29. $R(x)=\dfrac{x^2-10x+25}{(x^3-125)^2(x^2-4x-5)\,(3x^2+x-2)^2}$;

8.30. $R(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{(x^3-1)^3(2x^2-x-10)^2}$.

Задание 9

Разложите рациональную дробь $R(x)$ на сумму простейших дробей и найдите коэффициенты этих разложений.

9.1. $R(x)=\dfrac{3x^3-x^2+12x-4}{(x^2-4x)\,(x+5)}$;

9.2. $R(x)=\dfrac{x^3+6x^2-10x+52}{(x^2-4)(x^2+4x+4)}$;

9.3. $R(x)=\dfrac{5x+2}{x^4-x}$;

9.4. $R(x)=\dfrac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$;

9.5. $R(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x^2-3x+2)}$;

9.6. $R(x)=\dfrac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x^2-3x+2)(x^2-2x+1)}$;

9.7. $R(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}$;

9.8. $R(x)=\dfrac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x^2+3x+2)(x^2-x+1)}$;

9.9. $R(x)=\dfrac{x^3+6x^2+15x+2}{(x^2+6x+9)(x^2+2x+2)}$;

9.10. $R(x)=\dfrac{x^3+x+2}{x^4+2x^3}$;

9.11. $R(x)=\dfrac{x}{x^4+1}$;

9.12. $R(x)=\dfrac{2x^3-x^2-7x-12}{x^3-2x^2-3x}$;

9.13. $R(x)=\dfrac{x^3}{x^4+2x^2+1}$;

9.14. $R(x)=\dfrac{2x^4+2x^3-3x^2+2x-9}{x^4-x}$;

9.15. $R(x)=\dfrac{x-1}{x^4+8x^2+16}$;

9.16. $R(x)=\dfrac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x^2+4x+4)(x^2+x+1)}$;

9.17. $R(x)=\dfrac{2x+5}{x^4+x}$;

9.18. $R(x)=\dfrac{x^3-6x^2+10x-10}{(x^2-4x+4)(x^2-x-2)}$;

9.19. $R(x)=\dfrac{2x^3-40x-8}{(x+4)(x^2-2x)}$;

9.20. $R(x)=\dfrac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}$;

9.21 $R(x)=\dfrac{x^3+6x^2+10x+12}{(x^2-4)(x^2+4x+4)}$;

9.22. $R(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x^2-3x+2)}$;

9.23. $R(x)=\dfrac{x^3+4x^2+3x+2}{(x^2+2x+1)(x^2+1)}$;

9.24. $R(x)=\dfrac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)}$;

9.25. $R(x)=\dfrac{x^2}{x^4+22x^2+121}$;

9.26. $R(x)=\dfrac{2x^3-6x^2+7x}{(x^2-4)(x^2+4x+4)}$;

9.27. $R(x)=\dfrac{x^3+x}{x^4+1}$;

9.28. $R(x)=\dfrac{x^2}{x^4+6x^2+9}$;

9.29. $R(x)=\dfrac{2x^3-6x^2+7x}{(x^2+x-2)(x^2-2x+1)}$;

9.30. $R(x)=\dfrac{x^3+x+1}{(x^2-2x+1)(x^2+9)}$.

Типовой расчет №2
Интегральное исчисление функции одной переменной

Задание 1

Вычислите неопределенный интеграл.

1.1. $\int (3\cos 2x - 2^x \cdot 5^{2x})dx$;

1.2. $\int \frac{1}{x}(xe^{-3x} + \sqrt[3]{x^4} + 5\sqrt{x})dx$;

1.3. $\int (\mathrm{tg}^2\, x - 2\sin 3x)dx$;

1.4. $\int \left(\frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} + \frac{1}{4x}\right)dx$;

1.5. $\int \left(e^{-2x} + \frac{1}{\sin^2 3x}\right)dx$;

1.6. $\int \cos^2 3x \cdot \sin^2 3x dx$;

1.7. $\int \cos(2x+3) \cdot \sin(4x+5)dx$;

1.8. $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2 \cdot (1+x^2)} dx$;

1.9. $\int (\arcsin x + \arccos x + \mathrm{tg}\, x)dx$;

1.10. $\int \frac{(2+x)^2}{x(4+x^2)}dx$;

1.11. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$;

1.12. $\int (\sqrt{x}+1) \cdot (x - \sqrt{x} + 1)dx$;

1.16. $\int (\cos^{-2} x + \sin^{-2} x + 5\sin(t^2))dx$;

1.17. $\int \frac{\sqrt{x^3} - 1}{\sqrt{x} - 1}dx$;

1.18. $\int \frac{(1-u)^2}{u\sqrt{u}}\, du$;

1.19. $\int \frac{\sqrt[4]{x^3} + 8}{\sqrt[4]{x} + 2}\, dx$;

1.20. $\int \left(\frac{2}{u+4} + \frac{1}{\sqrt{u^2+4}}\right)du$;

1.21. $\int \left(\sqrt[3]{t^2} + \frac{1}{\sin^2 2t} + 5^t\right)dt$;

1.22. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-t^2}} + \frac{1}{\sin^2 t}\right)dt$;

1.23. $\int \left(\frac{1}{9-t^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{t^4}}\right)dt$;

1.24. $\int (\mathrm{arctg}\, t + \mathrm{arcctg}\, t + \mathrm{ctg}\, t)dt$;

1.25. $\int \frac{2tdt}{(3t+3)\cdot(2t+5)}$;

1.26. $\int \sin(4t+2) \cdot \sin(3t+4)dt$;

1.27. $\int \cos(2u+3) \cdot \cos(3u-2)du$;

1.13. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx;$

1.14. $\int \left(2\sin^2 \frac{x}{2} + \operatorname{ctg}^2 x\right)dx;$

1.15. $\int \frac{3+x}{\sqrt{3+x^2}}\,dx;$

1.28. $\int \left(\frac{2}{t^2+4t+8} - \frac{7}{\sqrt{t^2+8}}\right)dt;$

1.29. $\int \left(\frac{11}{5-4t-t^2} - \frac{3}{\sqrt{5-t^2}}\right)dt;$

1.30. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{t^2+6t+13}} + \frac{5}{\sqrt{t^2-13}}\right)dt.$

Задание 2

Вычислите неопределенный интеграл.

2.1. $\int (xe^{x^2} - \cos^2 x \cdot \sin x)dx;$

2.2. $\int \frac{3\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}\,dx;$

2.3. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}}\,dx;$

2.4. $\int \frac{e^{\arccos x} - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$

2.5. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx;$

2.6. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx;$

2.7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};$

2.8. $\int x \cdot \sqrt[5]{(5x^2-3)^7}\,dx;$

2.9. $\int x^3\sqrt{4-3x^4}\,dx;$

2.10. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx;$

2.11. $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2-3x+8}};$

2.16. $\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx;$

2.17. $\int \frac{dx}{x\cdot\sin^2(1+\ln x)};$

2.18. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 2}{\cos^2 x}\,dx;$

2.19. $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x}\,dx;$

2.20. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}};$

2.21. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^4}\,dx;$

2.22. $\int \frac{x\cos x + \sin x}{(x\sin x)^2}\,dx;$

2.23. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx;$

2.24. $\int \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx;$

2.25. $\int \cos x \cdot \sqrt{1+5\sin x}\,dx;$

2.26. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{9-2x^3}}\,dx;$

2.12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$;

2.13. $\int \left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx$;

2.14. $\int \cos^3 x dx$;

2.15. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$;

2.27. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x+1}} dx$;

2.28. $\int (\operatorname{ctg} e^x) e^x dx$;

2.29. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$;

2.30. $\int \frac{7\arcsin x - 2}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} dx$.

Задание 3

Вычислите неопределенный интеграл.

3.1. $\int x\cos 3x dx$;

3.2. $\int x e^{\frac{x}{2}} dx$;

3.3. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$;

3.4. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$;

3.5. $\int \arcsin 4x dx$;

3.6. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$;

3.7. $\int e^{-x} \cdot \cos x dx$;

3.8. $\int x \ln x dx$;

3.9. $\int \ln^2 x dx$;

3.10. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$;

3.11. $\int x \cdot \arcsin 2x dx$;

3.12. $\int \ln(1+x^2) dx$;

3.13. $\int x^2 e^{5x} dx$;

3.14. $\int (x^2-5x)\sin x dx$;

3.15. $\int x \cdot \sin^2 x dx$;

3.16. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\, dx$;

3.17. $\int \frac{x\cdot\cos x}{\sin^3 x} dx$;

3.18. $\int \sin(\ln x) dx$;

3.19. $\int (\operatorname{arctg} x)^2 x dx$;

3.20. $\int \cos(\ln x) dx$;

3.21. $\int e^x \cdot \sin 2x dx$;

3.22. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$;

3.23. $\int (\arcsin x)^2 dx$;

3.24. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x^5}} dx$;

3.25. $\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x dx$;

3.26. $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$;

3.27. $\int x \ln^2 x dx$;

3.28. $\int (7x-10)\sin 4x dx$;

3.29. $\int e^{-2x}(4x-3) dx$;

3.30. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Задание 4

Вычислите неопределенный интеграл.

4.1. $\int \frac{4x^2 + 5x + 2}{(x+4)(x-3)} dx;$

4.2. $\int \frac{x^3 + 3}{(x+1)(x^2+3x+4)} dx;$

4.3. $\int \frac{3x^2 + 8}{x^2 + 4x + 6} dx;$

4.4. $\int \frac{x^2 + 2x}{(x+1)(2x+1)} dx;$

4.5. $\int \frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx;$

4.6. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 + 4x} dx;$

4.7. $\int \frac{x^4 - 5x}{x^3 - 1} dx;$

4.8. $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx;$

4.9. $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx;$

4.10. $\int \frac{x^2 + 4x + 3}{(3x+1)(x-2)} dx;$

4.11. $\int \frac{x^4 - 4x^3 + 2}{x^3 + 8} dx;$

4.12. $\int \frac{5x^2 + 6x + 8}{(x+3)(x-1)} dx;$

4.13. $\int \frac{6x^3 - 8x + 1}{x^3 + 27} dx;$

4.14. $\int \frac{12x^3 - 3x + 4}{2x^2 - 5x + 2} dx;$

4.15. $\int \frac{x^4 - 5x^3 + 4}{(x-3)(x+5)} dx;$

4.16. $\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx;$

4.17. $\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx;$

4.18. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2+1)} dx;$

4.19. $\int \frac{x^4 dx}{(x+1)^2 \cdot (x^2+1)};$

4.20. $\int \frac{x^3 + 6}{x^2(x-2)} dx;$

4.21. $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{x(x^2 - 2x + 2)} dx;$

4.22. $\int \frac{(x^3 + x)dx}{(x+2)^3};$

4.23. $\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2(x+5)} dx;$

4.24. $\int \frac{x^4 dx}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2};$

4.25. $\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)(x^3+8)};$

4.26. $\int \frac{x^3 + 3}{x(x^2 - 4x - 5)} dx;$

4.27. $\int \frac{2x^4 - 3}{(x^2 - 3x + 2)x} dx;$

4.28. $\int \frac{3x^4 + 6x + 8}{(x-3)^2(x+2)} dx;$

4.29. $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 8}{x^4 - 1} dx;$

4.30. $\int \frac{2x^3 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$

Задание 5

Вычислите определенный интеграл.

5.1. $\int\limits_{1}^{4} \dfrac{\sqrt{x}+1}{1+x}\,dx;$

5.2. $\int\limits_{1}^{64} \dfrac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}};$

5.3. $\int\limits_{1/64}^{1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt[4]{x}+1)\,dx}{\sqrt{x}};$

5.4. $\int\limits_{1}^{64} \dfrac{dx}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x})\cdot\sqrt[3]{x}};$

5.5. $\int\limits_{16}^{81} \dfrac{\sqrt[4]{x}\,dx}{x-\sqrt{x}};$

5.6. $\int\limits_{1/81}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})};$

5.7. $\int\limits_{1}^{7} \dfrac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}};$

5.8. $\int\limits_{1}^{27} \dfrac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\cdot\sqrt[6]{x}};$

5.9. $\int\limits_{1}^{9} \dfrac{(\sqrt[4]{x}+1)\,dx}{(\sqrt{x}+1)\cdot\sqrt[4]{x^3}};$

5.10. $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{dx}{(2+x)\cdot\sqrt{1+x}};$

5.11. $\int\limits_{1}^{27} \dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)\cdot(\sqrt[6]{x}+1)dx}{\sqrt{x^3}};$

5.12. $\int\limits_{0}^{40} \dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[4]{2x+1}};$

5.13. $\int\limits_{1}^{16} \dfrac{(\sqrt[4]{x}+1)^2\cdot(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx;$

5.14. $\int\limits_{-2}^{13} \dfrac{\sqrt{x+3}\,dx}{\sqrt[4]{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}};$

5.16. $\int\limits_{81/16}^{16} \dfrac{1+\sqrt{x}\,dx}{(1-\sqrt[4]{x})\cdot\sqrt{x}};$

5.17. $\int\limits_{-4}^{11} \dfrac{dx}{4\sqrt{x+5}-2\sqrt[4]{x+5}};$

5.18. $\int\limits_{5}^{12} \dfrac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx;$

5.19. $\int\limits_{1/16}^{1} \dfrac{(\sqrt[4]{x^3-1})\cdot(\sqrt{x+1})dx}{\sqrt[4]{x^3}};$

5.20. $\int\limits_{1}^{81} \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x})\cdot(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x^3}}\,dx;$

5.21. $\int\limits_{-1}^{14} \dfrac{x^2dx}{\sqrt[4]{(x+2)^7}};$

5.22. $\int\limits_{0}^{27} \dfrac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1};$

5.23. $\int\limits_{1/64}^{1} \dfrac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\cdot\sqrt{x}};$

5.24. $\int\limits_{2}^{65} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt{x-1}};$

5.25. $\int\limits_{0}^{15} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt{x+1}};$

5.26. $\int\limits_{16}^{81} \dfrac{(\sqrt[4]{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x^3}}\,dx;$

5.27. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})\cdot(\sqrt{x}+1)};$

5.28. $\int\limits_{3}^{18} \dfrac{dx}{\sqrt{x-2}\cdot(1+\sqrt[4]{x-2})};$

5.29. $\int\limits_{1/2}^{32} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt{2x}};$

5.15. $\int\limits_0^1 \frac{(1+\sqrt{1+x})dx}{\sqrt[3]{1+x}}$;

5.30. $\int\limits_{1/16}^1 \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\cdot\sqrt{x}}$.

Задание 6

Вычислите определенный интеграл.

6.1. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3-\cos x}$;

6.2. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x dx}{2+\sin^2 x}$;

6.3. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}$;

6.4. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\sin 2x}$;

6.5. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$;

6.6. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{2\cos^2 x+3\sin^2 x-1}$;

6.7. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx$;

6.8. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x+1}{1+\sin 2x}dx$;

6.9. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$;

6.16. $\int\limits_{-\pi/6}^0 \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos x\cdot\sin x+1}$;

6.17. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\cos x+2\sin x-1}$;

6.18. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x+2}$;

6.19. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{2-\sin x+\cos x}$;

6.20. $\int\limits_{-\pi/3}^0 \frac{\operatorname{tg} x dx}{(2+\operatorname{tg} x)\cdot\sin 2x}$;

6.21. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$;

6.22. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\cos 2x}dx$;

6.23. $\int\limits_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$;

6.24. $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x+\cos 2x+2}$;

6.10. $\int\limits_{-\pi/3}^{0} \frac{\operatorname{tg} x dx}{2-\cos^2 x}$;

6.11. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x-\cos x-3}$;

6.12. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x+\cos^2 x}$;

6.13. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin x+\cos x+3}$;

6.14. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx}{1-\cos 2x}$;

6.15. $\int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$;

6.25. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$;

6.26. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x dx}{3\cos 2x-4} dx$;

6.27. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{5+4\cos x}$;

6.28. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos 2x-1}$;

6.29. $\int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\sin x dx}{(1+\cos x)^2}$;

6.30. $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{2\cos 2x-\sin 2x+3}$.

Задание 7

Вычислите определенный интеграл.

7.1. $\int\limits_{-1}^{1} \left(|\sin x| + \sqrt[5]{x} \cdot \sin^2 x\right) dx$;

7.2. $\int\limits_{-\pi/7}^{5\pi/14} \left(\frac{\sin^3 4x}{\cos^5 4x} + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 7x\right)\right) dx$;

7.3. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{5x^5-3x^3+x+2}{\sqrt{x^2+4}} dx$;

7.4. $\int\limits_{-\pi/11}^{8\pi/33} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 6x}} - \sin(11x+3\pi)\right) dx$;

7.5. $\int\limits_{-\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}/3} \left(x^{10} \cdot \sin^3 2x + |\operatorname{arctg} x|\right) dx$;

7.6. $\int\limits_{-\pi/5}^{4\pi/5} \left(\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^3 2x} + \cos\left(15x - \frac{3\pi}{2}\right)\right) dx$;

7.7. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(|\operatorname{tg} x| + x^3 \cdot \cos^5 x\right) dx;$

7.8. $\int\limits_{-\pi/7}^{5\pi/14} (\sin 2x \cdot \cos 2x - \sin(7x - 5\pi) dx;$

7.9. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left((x^{20} + x^{10}) \cdot \sin 2x + \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx;$

7.10. $\int\limits_{-\pi/5}^{3\pi/10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 4x}} - \cos\left(10x + \frac{5}{2}\pi\right)\right) dx;$

7.11. $\int\limits_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{4x^4 \cdot \operatorname{tg}^3 x - 1}{\sqrt{3 - x^2}} dx;$

7.12. $\int\limits_{-\pi/13}^{10\pi/39} \left(\sin^3 6x + \cos\left(13x + \frac{\pi}{2}\right)\right) dx;$

7.13. $\int\limits_{-\pi/12}^{\pi/12} \left(\sin^3 x \cdot \operatorname{tg}^2 2x - \sin^2 3x\right) dx;$

7.14. $\int\limits_{-\pi/7}^{4\pi/21} \left(\sqrt{1 + \cos 12x} + \cos\left(7x + \frac{7}{2}\pi\right)\right) dx;$

7.15. $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{x^9 \cdot \cos^7 2x - \cos x}{\sin^2 x} dx;$

7.16. $\int\limits_{-\pi/8}^{3\pi/40} \left(\frac{\cos^2 10x}{\sin^4 10x} + 6\sin(25\pi - 3x\right) dx;$

7.17. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(\cos^3 x \cdot \sin^5 x - |x|)}{x^2 + 9} dx;$

7.18. $\int\limits_{-\pi/9}^{5\pi/36} \left(\cos^3 8x - \sin(6x - 7\pi)\right) dx;$

7.19. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \dfrac{\sin 2x \cdot tg^2 x - 1}{\sqrt{2x^2 - 3}}\, dx;$

7.20. $\int\limits_{-\pi/5}^{7\pi/15} \left(\sin^2 \dfrac{3x}{2} - \cos^2 \dfrac{3x}{2} - \sin(5x - 2\pi) \right) dx;$

7.21. $\int\limits_{-3}^{3} \dfrac{|x| + \sqrt[5]{x^7} \cdot \mathrm{arctg}^2\, x}{x^2 - 4}\, dx;$

7.22. $\int\limits_{-\pi/5}^{\pi/20} \left(\dfrac{\sin 8x}{\cos^3 8x} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 5x \right) \right) dx;$

7.23. $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} (x^2 \cdot \sqrt[3]{\sin^5 x} + |\cos x|)\, dx;$

7.24. $\int\limits_{-\pi/7}^{\pi/42} \left(\dfrac{\cos^4 12x}{\sin^6 12x} - \sin(11\pi + 7x) \right) dx;$

7.25. $\int\limits_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \dfrac{\sin^4 x \cdot \mathrm{arctg}\, \sqrt[5]{x} + x^4 + x^6}{x^2}\, dx;$

7.26. $\int\limits_{-\pi/9}^{7\pi/18} \left(\dfrac{\mathrm{tg}\, 4x}{1 + \cos 8x} - \cos\left(9x - \dfrac{3}{2}\pi \right) \right) dx;$

7.27. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \dfrac{\sin \sqrt[7]{x} \cdot x^4 + \mathrm{tg}^2\, x}{\cos^2 x}\, dx;$

7.28. $\int\limits_{-\pi/7}^{11\pi/21} \left(\sqrt{1 - \cos 6x} + \sin(7x - 2\pi) \right) dx;$

7.29. $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} \dfrac{\mathrm{tg}^2\, x \cdot \sin^5 x - 6}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx;$

7.30. $\int\limits_{-\pi/11}^{8\pi/33} \left(\dfrac{\sqrt{\mathrm{tg}^3\, 6x}}{\cos^2 6x} - \cos\left(11x - \dfrac{3\pi}{2} \right) \right) dx.$

Задание 8

Вычислите несобственный интеграл (если он сходится).

8.1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^3+8}$;

8.2. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+3}$;

8.3. $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2x+1}dx$;

8.4. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{4+3x^2}$;

8.5. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

8.6. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{2+e^x}$;

8.7. $\int\limits_{-3/2}^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x+5}$;

8.8. $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 \cdot e^{x^3+1}dx$;

8.9. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{4+x^2}$;

8.10. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{6x+1}{\sqrt{(3x^2+x+9)^3}}dx$;

8.11. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$;

8.12. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(3x^3+1)^2}$;

8.13. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)\cdot\ln(2x-1)}$;

8.14. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x\,dx}{1+x^2}$;

8.15. $\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot 2^{-x^2}dx$;

8.16. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{9-x^2}$;

8.17. $\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)^3}$;

8.18. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^6+3}$;

8.19. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}dx}{1+x^2}$;

8.20. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^x dx}{\sqrt{2e^x+1}}$;

8.21. $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$;

8.22. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{x^2-4}$;

8.23. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^3}}$;

8.24. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(3x-2)^2}$;

8.25. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt{\ln^3(x+1)}}$;

8.26. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(2x-1)\,dx}{(x^2-x+2)^2}$;

8.27. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{2x^2+1}$;

8.28. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{2x^2-1}dx$;

8.29. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{4+x^4}$;

8.30. $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x\cdot e^{-\sin x}dx$.

Задание 9

Исследуйте сходимость несобственного интеграла первого рода.

9.1. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x^3+2x+3}{x^5+6x^2}dx;$

9.2. $\int\limits_{1}^{+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)^2\,dx;$

9.3. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2x^3+5}}{x^6-3x+1}dx;$

9.4. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^5}\cdot\operatorname{arctg}x};$

9.5. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3(1+e^{-x})};$

9.6. $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\frac{x+4}{x+3}dx;$

9.7. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 2x}{\sqrt{x^3+5}}dx;$

9.8. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)\ln^2(x+1)};$

9.9. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(2x^2+3)^2\,dx}{5x^5-x^3+2};$

9.10. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}x\,dx}{3x^2+2x-1};$

9.11. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot\sin x\,dx}{\sqrt{x^6+x^2+3}};$

9.12. $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\frac{2x^3+1}{2x^3-1}dx;$

9.13. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt[7]{2+x^2}}{\sqrt[5]{6+x^3}}dx;$

9.14. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x(2+\cos\pi x)dx}{3x^2-2};$

9.16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(2x-1)\,dx}{x^2+2x^4+2};$

9.17. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4-\sqrt[4]{x^5}};$

9.18. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{2x^3+\cos x};$

9.19. $\int\limits_{1}^{+\infty} \sqrt{x^3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}dx;$

9.20. $\int\limits_{3}^{+\infty} \ln\frac{x^2+1}{x^2-2}dx;$

9.21. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2+8x-2}{3x^4-x+1}dx;$

9.22. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}\,dx}{\sqrt{x^5-2x+1}};$

9.23. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sin x}{3\sqrt{x}+2}dx;$

9.24. $\int\limits_{1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{\pi}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$

9.25. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\cdot\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^4}}dx;$

9.26. $\int\limits_{1}^{+\infty} \sqrt{\operatorname{arctg}\frac{\pi}{x^3}}\,dx;$

9.27. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{x}dx;$

9.28. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x(1+x)}dx;$

9.29. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{-x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}+2}dx;$

9.15. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{\sqrt[3]{2x^2+x+1}}$;

9.30. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{(x^2+25)^4}}$.

Задание 10

Вычислите несобственный интеграл второго рода (если он сходится).

10.1. $\int\limits_{1/e}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$;

10.2. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

10.3. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{x^2 dx}{8x^3+1}$;

10.4. $\int\limits_{1}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$;

10.5. $\int\limits_{0}^{e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

10.6. $\int\limits_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{9-x}}$;

10.7. $\int\limits_{2}^{3} \frac{xdx}{x^2-4}$;

10.8. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;

10.9. $\int\limits_{\sqrt{2}/4}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

10.10. $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{(x^2-4)^2}$;

10.11. $\int\limits_{1}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{3-2x}}$;

10.16. $\int\limits_{0}^{e/2} \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln 2x}}$;

10.17. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-6}}$;

10.18. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-1}}$;

10.19. $\int\limits_{-1/6}^{0} \frac{dx}{(6x+1)^3}$;

10.20. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)^2}$;

10.21. $\int\limits_{-1/3}^{1} \frac{xdx}{9x^2-1}$;

10.22. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{4x^2-1}}$;

10.23. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$;

10.24. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$;

10.25. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

10.26. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$;

10.12. $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)}$;

10.13. $\int\limits_{1/4}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$;

10.14. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{3} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$;

10.15. $\int\limits_{3}^{5} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$;

10.27. $\int\limits_{2/3}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$;

10.28. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$;

10.29. $\int\limits_{6}^{8} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}$;

10.30. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{(1+\sqrt{x})^2\,dx}{\sqrt{x}}$.

Задание 11

Исследуйте сходимость несобственного интеграла второго рода.

11.1. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{dx}{1-\cos 2x}$;

11.2. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\,dx}{\ln(1+\sqrt[3]{x^5})}$;

11.3. $\int\limits_{0}^{4} \dfrac{dx}{x+8x^2+\sqrt{x}}$;

11.4. $\int\limits_{0}^{1/2} \dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x}\,dx}{e^{\operatorname{tg} x}-1}$;

11.5. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \dfrac{\sqrt[4]{x+1}\,dx}{\sqrt{\sin x^3}}$;

11.6. $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{\cos \pi x\;dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

11.7. $\int\limits_{3}^{4} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$;

11.8. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \dfrac{(\sqrt[3]{x}+2)\,dx}{\sqrt[3]{1-\cos x}}$;

11.9. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \dfrac{\sin^2 dx}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}}$;

11.16. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{\dfrac{4+x^2}{4-x^2}}\,dx$;

11.17. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\sqrt{1+x^2}\;dx}{\ln(3x^3-x+1)}$;

11.18. $\int\limits_{2}^{4} \dfrac{\sqrt[4]{x}\sin 2x dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

11.19. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}+\sin x}$;

11.20. $\int\limits_{0}^{3} \dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x})\,dx}{\operatorname{tg} x+\sqrt{x^3}}$;

11.21. $\int\limits_{0}^{1/2} \dfrac{dx}{e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt[3]{x}}}$;

11.22. $\int\limits_{4}^{5} \dfrac{\sin\,\sqrt[5]{x-4}\,dx}{\sqrt{x}-2}$;

11.23. $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{\sin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$;

11.24. $\int\limits_{1}^{4} \dfrac{dx}{(x^2+1)\cdot\sqrt{16-x^2}}$;

11.10. $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x\,dx}{\operatorname{tg}(x^2+x)}$;

11.11. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-2x+6}}$;

11.12. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{e^{\sin x}-1}}$;

11.13. $\int\limits_3^4 \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x-3}\cdot(x+3)}$;

11.14. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx}{\sin\sqrt[3]{x^2}}$;

11.15. $\int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$;

11.25. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{(1+\sqrt{x^3})\ln(1+2x)}$;

11.26. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}$;

11.27. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x+\cos x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}\,dx$;

11.28. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt[5]{x}\,dx}{\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+1}}$;

11.29. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)\cdot\ln(x+1)}$;

11.30. $\int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{8x^3-1}}$.

Задание 12
Варианты 1–15

Найдите главное значение несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{ax+b}{cx^2+d}\,dx$, если параметры a,b,c,d заданы в виде упорядоченных наборов из четырех чисел $(a;b;c;d)$.

12.1. (2; 1; 3; 4);
12.2. (–2; 3; 1; 5);
12.3. (3; 4; 5; 2);
12.4. (5; 2; 7; 3);
12.5. (–1; 3; 2; 1);
12.6. (4; 5; 6; 3);
12.7. (–3; 2; 4; 4);
12.8. (2; 4; 7; 3);
12.9. (3; 5; 5; 3);
12.10. (–3; 2; 4; 5);
12.11. (7; 5; 3; 6);
12.12. (–3; 8; 2; 4);
12.13. (8; –2; 3; 5);
12.14. (3; 7; 4; 6);
12.15. (9; 5; 3; 8).

Варианты 16–30

Найдите главное значение несобственного интеграла $\int\limits_{d-1}^{d+2} \frac{ax+b}{x-d}\,dx$, если параметры a,b,d заданы в виде упорядоченных наборов чисел $(a;b;d)$.

12.16. (2; 3; 4);
12.17. (5; 6; 7);
12.24. (2; 4; 2);
12.25. (–6; 3; 1);

12.18. (4; 3; 1);
12.19. (–2; 3; –2);
12.20. (3; 8; 3);
12.21. (1; 6; 2);
12.22. (–3; 5; 0);
12.23. (4; 7; –3);
12.26. (7; 3; 4);
12.27. (–4; 6; 2);
12.28. (–1; 7; 5);
12.29. (8; 4; 3);
12.30. (–7; 5; 6).

Задание 13
Варианты 1−10

Дана функция $y = \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$, коэффициенты a, b, c которой приведены ниже.

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $x = x_1$, $x = x_2$, $y = 0$ и графиком заданной функции.

2. Найдите объем тела, полученного вращением линии $y = ax^2 + bx + c$ (с тем же набором коэффициентов) вокруг оси OX, если $x \in [x_1; x_2]$. Сделайте рисунок.

13.1. (2; 3; 4), $x_1 = -1;\ x_2 = 2;$
13.2. (3; 2; 5), $x_1 = 0;\ x_2 = 3;$
13.3. (–2; 3; –4), $x_1 = 2;\ x_2 = 4;$
13.4. (–3; 5; –4), $x_1 = 3;\ x_2 = 6;$
13.5. (1; 3; 5), $x_1 = 4;\ x_2 = 7;$
13.6. (2; 3; 5), $x_1 = 2;\ x_2 = 5;$
13.7. (4; 2; 2), $x_1 = -3;\ x_2 = 1;$
13.8. (5; 4; 2), $x_1 = -2;\ x_2 = 4;$
13.9. (–5; –4; –2), $x_1 = 3;\ x_2 = 7;$
13.10. (4; 3; 5), $x_1 = 4;\ x_2 = 8.$

Варианты 11−20

Циклоида задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

1. Найдите длину дуги циклоиды, если t изменяется на отрезке $[t_1; t_2]$.

2. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью OX и прямыми $x = x(t_1)$, $x = x(t_2)$, а также дугой циклоиды (t изменяется на отрезке $[t_1; t_2]$). Значения параметров $a; t_1; t_2$ приведены ниже. Сделайте рисунок.

13.11. $\left(3; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$;

13.12. $\left(4; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

13.13. $\left(5; \frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right)$;

13.14. $\left(2; \frac{2\pi}{3}; \pi\right)$;

13.15. $\left(6; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right)$;

13.16. $\left(7; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right)$;

13.17. $\left(3; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$;

13.18. $\left(4; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$;

13.19. $\left(5; \frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$;

13.20. $\left(6; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}\right)$.

Варианты 21−30

Фигура ограничена линиями $r = a(1+\cos\varphi)$ и $r = a\cos\varphi$, заданными в полярной системе координат. Изобразите их на рисунке.

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями и лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$.

2. Найдите длину дуги линии $r = a(1+\cos\varphi)$, если $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$. Значения чисел $a; \varphi_1; \varphi_2$ приведены ниже.

13.21. $\left(2; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$;

13.22. $\left(3; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$;

13.23. $\left(4; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$;

13.24. $\left(5; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$;

13.25. $\left(6; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$;

13.26. $\left(7; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$;

13.27. $\left(8; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$;

13.28. $\left(9; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$;

13.29. $\left(10; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$;

13.30. $\left(1; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Типовой расчет №3
Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Задание 1

Дана функция $z = f(x, y)$.

1. Найдите область определения $D(f)$ и изобразите ее на плоскости.

2. Проанализируйте, является ли множество $D(f)$ ограниченным, связным, замкнутым.

3. Укажите линии (точки) разрыва функции, если они существуют.

1.1. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$;

1.2. $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$;

1.3. $z = \arcsin\dfrac{y-1}{x}$;

1.4. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;

1.5. $z = \log_2 x - \dfrac{1}{100 - 4x^2 - 25y^2}$;

1.6. $z = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$;

1.7. $z = \operatorname{tg} x + \sqrt{1 - y^2}$;

1.8. $z = y \cdot \arccos(x - y)$;

1.9. $z = \ln xy - y \cdot \operatorname{ctg} x$;

1.10. $z = \arcsin\dfrac{y}{x} - y^2$;

1.11. $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$;

1.16. $z = \sqrt{x - 3y} + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$;

1.17. $z = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 + x + 1}} - \dfrac{y}{x-5}$;

1.18. $z = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x^2 + 4y^2 - 1}$;

1.19. $z = \dfrac{\sqrt{xy - 1}}{x - y^2} + 1$;

1.20. $z = \sqrt{4 - y^2} + \dfrac{e^{5x}}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$;

1.21. $z = \dfrac{\sin x}{\sqrt{2y - y^2 - x^2}}$;

1.22. $z = \dfrac{\sqrt{x - 3y^2}}{x^2 + 4y^2}$;

1.23. $z = \arccos(x^2 + y^2) + e^{\sqrt{y}}$;

1.24. $z = \dfrac{\cos x}{\ln(x^2 + y^2)} + \dfrac{1}{\sqrt{2x - y}}$;

1.25. $z = \sqrt{e^{2x} - 1} + \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 3}$;

1.26. $z = \dfrac{1}{6}\ln(4x - x^2 - y^2)$;

1.12. $z=\sqrt{4x^2-9y^2-36}$;

1.13. $z=\sqrt[6]{x}+\sqrt{-(x-2y+1)^2}$;

1.14. $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{9-y^2}$;

1.15. $z=\dfrac{\ln(3y+5x-15)}{1-y^2}$;

1.27. $z=\sqrt{y^2-x}-\dfrac{1}{\sqrt{x-y^2}}$;

1.28. $z=\dfrac{e^{\sqrt{x-y-2}}}{12xy}$;

1.29. $z=\arccos\dfrac{x}{x+y}$;

1.30. $z=\dfrac{\ln(y+2x+1)}{9-x^2}$.

Задание 2

Для функции $z=f(x,y)$ (задачи 1−15) напишите уравнения линий уровня и охарактеризуйте тип полученных кривых. Для функции $u=f(x,y,z)$ (задачи 16−30) напишите уравнения поверхностей уровня и охарактеризуйте тип этих поверхностей.

2.1. $z=x^2+2x+y^2$;

2.2. $z=x^2-y^2$;

2.3. $z=2x-y$;

2.4. $z=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$;

2.5. $z=(x+y)^2$;

2.6. $z=\dfrac{x^2}{4}-y$;

2.7. $z=-x^2-y^2-6y$;

2.8. $z=\dfrac{y}{x^2}$;

2.9. $z=-\dfrac{3x}{5y}$;

2.10. $z=\dfrac{y^3}{x}+1$;

2.11. $z=(x+2)^2-(y-1)^2$;

2.12. $z=\dfrac{x}{\sqrt{y}}$;

2.13. $z=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$;

2.16. $u=x^2+y^2-z^2$;

2.17. $u=x^2-z+y^2$;

2.18. $u=(x-1)^2+y^2+(z+1)^2$;

2.19. $u=\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}+z$;

2.20. $u=x^2+y^2+z$;

2.21. $u=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-z$;

2.22. $u=x^2-y^2-z^2$;

2.23. $u=2x-y-z$;

2.24. $u=(x+y+z)^2$;

2.25. $u=x^2+z^2-y^2$;

2.26. $u=\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{16}$;

2.27. $u=x-y^2-z^2$;

2.28. $u=x^2+9y^2$;

2.14. $z = 9x^2 + 4y^2$;

2.15. $z = xy$.

2.29. $u = \frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{16}$;

2.30. $u = 2x + 5y$.

Задание 3

Найдите предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, если он существует.

3.1. а) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \left(x^2 - y^2 + 2xy - \frac{8xy - 16x}{y^2 - 4} \right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(1 + 2x^2 + 2y^2\right)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$; в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$;

3.2. а) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \left(\frac{x^2 y^2 - 2xy^3}{x^3 - 8y^3} \right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 3}} \frac{\operatorname{tg} xy}{x}$; в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

3.3. а) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \left(3x^2 + y - \frac{x^2 y^2 - 1}{x^2 y + xy^2 - x - y} \right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$;

3.4. а) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 2}} \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 y - xy^2} \right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{3(x^2 + y^2)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$;

3.5. а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(-4x^2 + 3y^2 + 2xy + \frac{xy}{3xy + x^2 y^2} \right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to 0}} xy \sin \frac{1}{x}$; в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$;

3.6. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\left(-\dfrac{3x^2}{2}+4xy+\dfrac{x^2y+5x-2xy-10}{5x-10}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}}\dfrac{2xy}{x-3}\arcsin\dfrac{x^2-9}{2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x}{x-y}$;

3.7. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\left(\dfrac{x^2y^2-4y^2}{x^2y^3-x^3y^2}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to \infty}}(x-y)\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$;

3.8. а) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 3}}\left(\dfrac{y^2+xy-5y-3x+6}{(y-3)xy^3}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\operatorname{tg}xy}{5xy^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y}{x+y}$;

3.9. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\left(\dfrac{(x^2+2x-3)(y+3)}{(x-1)(y-2)}\right)$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 3}}\left(\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)^{x^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$;

3.10. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{(x^2+x-2)(y-1)}{(x-1)(y+5)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}}\dfrac{3x}{y+8}\ln\left(1+\dfrac{1}{xy^2}\right)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$;

3.11. а) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to -1}}\dfrac{(y^2-2y-3)(x+4)}{xy-y+x-1}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)^{\frac{x^2+y^2}{2}}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y}{x^3+y}$;

3.12. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\dfrac{x^2y^2-3x^2y}{x(y^2-y-6)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to\infty}} 3xy^2 \operatorname{tg}\dfrac{x+y}{y^3}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y}{x-3y^2}$;

3.13. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 0}} \dfrac{(x^2-4x-2)(y+1)}{x^2-x-12}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to\infty}} xy\ln\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2}{x^2+y}$;

3.14. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -2}} \dfrac{(y^2+5y+6)(x-1)}{(x^2+x-2)(y+2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}} \dfrac{\arcsin(x^2-y^2)}{x+y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{4xy}{x^3-y^2}$;

3.15. а) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 4}} \dfrac{(x^2-3x-4)(y+3)}{(x^2+3x+2)(y-3)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to\infty}} \dfrac{y}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{3x^2}{y^2-x^2}$;

3.16. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{xy(y^2+2y-8)}{(x^2+3x)(y-2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\sin(x^3-y^3)}{x-y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy-y^2}{x^2}$;

3.17. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -3}} \dfrac{(x^2+4x-5)(y+2)}{x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-4x+3)y}{y^2(x-1)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3}{xy^2-y^3}$;

3.18. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{y^2-y-2}{(y^2-4)(x+2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(1+\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)^x$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{8x-y}{y+2x}$;

3.19. а) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 1}} \frac{(x^2-3x-10)(y-2)}{(x^2-4)(y+4)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}} (x^2+xy)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{x+y}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3x^2-2xy}{y^2}$;

3.20. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}} \frac{(2x^2-2x-12)(y-3)}{x^2-4x+3}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{\arcsin(x-2)^2}{xy-2y-6+3x}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{5xy+x^2}{x^2}$;

3.21. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 6}} \frac{(y^2-4y-12)(x+1)}{(y^2-6y)(x-1)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} xy\ln\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3x-5y}{2x+7y}$;

3.22. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -4}} \frac{(y^2-2y-24)(x^2-1)}{y^2+5y+4}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{\arcsin(x^2-3x+2)}{(x-2)(y-1)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2-y^3}{x^2-y^2}$;

3.23. а) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to 3}} \frac{(3x^2+9x+6)(2y-1)}{(y+3)(x+1)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} 1\frac{\mathrm{arctg}(x^2-x^2y^2)}{y^2+2y-3}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^2}{y^2-2x^2}$;

3.24. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to \frac{1}{2}}} \frac{(2y^2+y-1)(x^2+1)}{2xy^2-xy}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(1+\frac{y}{x^2+y^2}\right)^y$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{xy}$;

3.25. а) $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{2}{3}\\ y\to 1}} \frac{(3x^2-8x+4)(y-2)}{(y^2-4)(3x-2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to\infty}} (x+y)\ln\left(1+\dfrac{x}{(x+y)^2}\right)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3}{y^2-2xy}$;

3.26. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to -2}} \dfrac{(y^2+7y+10)(xy-1)}{(x+3)(y+2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \dfrac{\sin(y^2-2y-3)(x+1)}{(y-3)(x^2+4)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2}{(y-x)^2}$;

3.27. а) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 1}} \dfrac{(x^2-x-12)(y^2+2y-3)}{xy(x+3)(y-1)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to -1}} \dfrac{\operatorname{arctg}(y^2-4y-5)}{(x+2)(y+1)}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^3}{(2y-3x)^3}$;

3.28. а) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 2}} \dfrac{y^2-6y+8}{(x^2-2)(y-2)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to\infty}} x^2y^2\operatorname{tg}\dfrac{1}{xy^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{(2x-y)^2}$;

3.29. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to -\frac{1}{2}}} \dfrac{2y^2+7y+3}{2xy(2y+1)}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 2}} (x-y)\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{(x+3y)^3}$;

3.30. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{(x^2+4x-5)xy^2}{x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to\infty}} 5xy\arcsin\dfrac{1}{x^2y^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{y^2}{(y+x)^2}$.

Задание 4

Для данной функции $z=f(x,y)$, точки $M_0(x_0;y_0)$ и вектора $\overline{a}$ найдите:

1) градиент функции в точке M_0;
2) производную в точке M_0 по направлению вектора $\overline{a}$;
3) скорость изменения функции в точке M_0 по направлению вектора $\overline{a}$.

4.1. $z = x^2 - \frac{x}{y} + \sqrt[3]{y^2}$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = -4\bar{j} + 3\bar{i}$;

4.2. $z = \ln(5x^2 - 3y^3)$, $M_0(1;-1)$, $\bar{a} = -3\bar{i} + 2\bar{j}$;

4.3. $z = 2x^2 y - \sqrt{\frac{y}{x}} + 5$, $M_0(4;1)$, $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$;

4.4. $z = 7\sqrt{xy^3} + \sin xy$, $M_0(1;0)$, $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$;

4.5. $z = x^y - y^x$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$;

4.6. $z = x^3 \cdot \ln(5y^2 - 4)$, $M_0(2;1)$, $\bar{a} = \frac{1}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}$;

4.7. $z = \operatorname{arctg} xy^2$, $M_0(-1;1)$, $\bar{a} = \sqrt{2}\,\bar{i} + \sqrt{2}\,\bar{j}$;

4.8. $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$, $M_0(1;2)$, $\bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$;

4.9. $z = \ln 3 \cdot 3^{x+2y} - y^2 x + 7x$, $M_0(-1;1)$, $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j}$;

4.10. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $M_0(5;3)$, $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$;

4.11. $z = (x-y)^3 + xy$, $M_0(2;1)$, $\bar{a} = -3\bar{j} + 4\bar{i}$;

4.12. $z = 2x + 7y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $M_0(3;4)$, $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$;

4.13. $z = \frac{4}{x^2 - y^2}$, $M_0(-1;2)$, $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$;

4.14. $z = (x-y) \cdot e^{-xy}$, $M_0(0;-2)$, $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$;

4.15. $z = 2x^2 + 3\sqrt{xy} + y^2$, $M_0(2;1)$, $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$;

4.16. $z = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{y}{x}}$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$;

4.17. $z = \ln(x + \ln y)$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}$;

4.18. $z = \frac{\sin xy}{x+y}$, $M_0(4;0)$, $\bar{a} = \sqrt{3}\,\bar{i} - \bar{j}$;

4.19. $z = \frac{xy}{x-y}$, $M_0(-2;6)$, $\bar{a} = -\bar{j} + 2\bar{i}$;

4.20. $z = \arccos \frac{y}{x^2}$, $M_0(1;3)$, $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j}$;

4.21. $z = e^{x^2 - 5y^2}$, $M_0(0;1)$, $\bar{a} = \bar{i} - 4\bar{j}$;

4.22. $z = \log_2(x^2 + 3y^2)$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$;

4.23. $z = \dfrac{1}{x^3 y^2}$, $M_0(2;1)$, $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$;

4.24. $z = \dfrac{x + 3y - 5}{2y - x + 1}$, $M_0(2;1)$, $\bar{a} = 12\bar{i} - 5\bar{j}$;

4.25. $z = x \cdot \operatorname{ch} y - y \cdot \operatorname{sh} x$, $M_0(0;0)$, $\bar{a} = 3\bar{j} - 4\bar{i}$.

4.26. $z = \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{y^2} + xy$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = -3\bar{i} - 4\bar{j}$;

4.27. $z = \sqrt[3]{xy - 3y^2 + 5x}$, $M_0(0;3)$, $\bar{a} = 5\bar{i}$;

4.28. $z = xy^3 - 3x^2 y + 5y^2 - 4$, $M_0(0;1)$, $\bar{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\bar{j} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\bar{i}$;

4.29. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$, $M_0(1;3)$, $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$;

4.30. $z = \sqrt{2x^2 - 3y^2}$, $M_0(2;1)$, $\bar{a} = -\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j}$.

Задание 5

Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в указанной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$. В задачах 1–15 поверхность задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, в задачах 16–30 поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$.

5.1. $x(y + z)(xy - z) + 8 = 0$, $M_0(2; 1; 3)$;

5.2. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8 = 0$, $M_0(2; 2; 1)$;

5.3. $y - z + \ln\dfrac{x}{z} = 0$, $M_0(x_0; 1; 1)$;

5.4. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$, $M_0(4; 3; 4)$;

5.5. $\sin x \cdot \cos y - z^2 = 0$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

5.6. $\ln(e^{xy} + z) = 0$, $M_0(0; 4; z_0)$;

5.7. $z^3 - x^3 = y^3$, $M_0(-2; y_0; 0)$;

5.8. $x^2 + y^2 - 2e^z = 0$, $M_0(1; -1; z_0)$;

5.9. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{3} = -1$, $M_0(4; -3; 3)$;

5.10. $3xyz - z^3 = 1$, $M_0(x_0; 1; -1)$;

5.11. $x^y + y^z - 3xyz = 2$, $M_0(1; 2; 0)$;

5.12. $3z^2 = 4e^{x+y} - 3xy^2z^3 + 2, \quad M_0(1; -1; 1);$

5.13. $4z^2 = x^2y^3 + \cos(x + y^2) + 14, \quad M_0(-1; 1; 2);$

5.14. $\operatorname{arctg} zx + \dfrac{y}{z} = xy + \dfrac{\pi}{4}, \quad M_0(3; 2; \dfrac{1}{3});$

5.15. $1 - \dfrac{x^2}{27} - \dfrac{z^3}{3} = y^2, \quad M_0(3; -2; -1);$

5.16. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, \quad M_0(3; 4; z_0);$

5.17. $z = \ln(x^2 + y^2), \quad M_0(1; 0; z_0);$

5.18. $z = \dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8}, \quad M_0(3; -2; z_0);$

5.19. $z = (x-6)^2 + (y-1)^2, \quad M_0(6; 1; z_0);$

5.20. $z = \sin x \cdot \cos y, \quad M_0(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}; z_0);$

5.21. $z = e^{x \cdot \cos y}, \quad M_0(x_0; \pi; \dfrac{1}{e});$

5.22. $z = \operatorname{arcctg} \dfrac{y}{x}, \quad M_0(1; 1; z_0);$

5.23. $z = \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^3}{64}, \quad M_0(3; -2; z_0);$

5.24. $z = \sqrt{4y^2 - x^2 - 2xy}, \quad M_0(-2; 1; 2);$

5.25. $z = \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}, \quad M_0(2; 2; z_0);$

5.26. $z = \arccos \dfrac{x+1}{y}, \quad M_0(0; -1; z_0);$

5.27. $z = 5x^2 + \dfrac{6x}{y}, \quad M_0(-1; y_0; -1);$

5.28. $z = y \ln x + x \ln y, \quad M_0(1; 1; z_0);$

5.29. $z = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + 2y^2 - 5}, \quad M_0(1; 2; 1);$

5.30. $z = \pi - \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{y}, \quad M_0(0; 1; z_0).$

Задание 6

Решите следующие задачи.

6.1. Найдите производную функции $z = xy\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M(3;\ 4)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол 60^0.

6.2. Найдите производную функции $z = x^3 + 3x^2y + \dfrac{x}{y^2} + 3$ в точке $M(1;\ 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(4;\ 5)$.

6.3. Каково направление наибольшего изменения функции $u = x \cdot \sin z - y \cdot \cos z$ в начале координат?

6.4. Даны две функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ и $z = x^2 + y^2 - 3xy$. Найдите угол между градиентами этих функций в точке $M(1;\ 1)$.

6.5. Определите угол между нормальным вектором к поверхности $\ln z = x + 2y - 3 + \ln 3$ в точке $M(1;\ 3;\ 3)$ и осью Oz.

6.6. Докажите, что градиенты скалярных полей $U = x^2yz^3$ и $V = \dfrac{4\sqrt{6}}{x} - \dfrac{\sqrt{6}}{9y} + \dfrac{3}{z}$ в точке $M\left(2;\ \dfrac{1}{3};\ \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ ортогональны.

6.7. Выясните, будут ли градиенты скалярных полей $U = \dfrac{z}{x^3y^2}$ и $V = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{6} \cdot z}$ в точке $M\left(1;\ 2;\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ сонаправлены.

6.8. Выясните, будут ли градиенты скалярных полей $U = \dfrac{x^3y^2}{z}$ и $V = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{6} \cdot z}$ в точке $M\left(1;\ 2;\ \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$ противоположно направлены.

6.9. Найдите наибольшую скорость возрастания функции $U = (xy)^z$ в точке $M(2;\ 1;\ 3)$.

6.10. Найдите величину скорости роста скалярного поля $U = \operatorname{arctg}\dfrac{xz}{y} + \ln(x^2z^2 + y^2)$ в точке $M_0(1;\ 1;\ -1)$ в направлении вектора $\overline{l} = 3\overline{k} - 3\overline{i} - 3\overline{j}$.

6.11. Найдите орт нормального вектора к поверхности $z = \arcsin(xy^2)$ в точке $M(2;\ -1;\ z_0)$.

6.12. Найдите расстояние от точки $N(0;\ 1;\ 0)$ до касательной плоскости к поверхности $x^3 + 4y^2 = \operatorname{tg}(y^2 + z)$ в точке $M\left(1;\ 0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

6.13. Найдите угол между касательными плоскостями к поверхности $yz^3 - \dfrac{z}{x^2 - y} = 2z^2$, проведенными в точках $M_1(2;\ 3;\ 1)$ и $M_2(0;\ 1;\ 0)$.

6.14. Найдите расстояние от касательной плоскости, проведенной к поверхности $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$ в точке $M(0;\ 3;\ 4)$ до начала координат.

6.15. Определите угол между нормальным вектором к поверхности $z = xy^3 - 3x^2y + 5y^2 - 4$ и осью Oy.

6.16. Запишите нормальное уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 26 = 0$ в точке $M(1;\ 3;\ 4)$.

6.17. Запишите уравнение в отрезках касательной плоскости, проведенной к поверхности $x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 - 4z + 4 = 0$ в точке $M(3;\ 1;\ 2)$.

6.18. Найдите объем пирамиды, отсекаемой касательной плоскостью к поверхности $7x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 7 = 0$ в точке $M(1;\ 1;\ 1)$ и координатными плоскостями.

6.19. Каково направление наименьшего роста функции $z = \dfrac{y + \sin x}{x^2 + 2y}$ в точке $M_0(0;\ 1)$?

6.20. Найдите производную функции $z = x^y$ в точке $M(e;\ 1)$ в направлении, составляющем с осью Oy угол 135^0.

6.21. Найдите длину градиента скалярного поля, заданного функцией $U = e^z - \sqrt{xy}$ в точке $M(3;\ 4;\ 0)$.

6.22. Найдите угол между касательной плоскостью к поверхности $x^2yz + 2x^2z - 3xyz + 2 = 0$ в точке $M_0(1;\ 0;\ -1)$ и плоскостью Oxy.

6.23. Найдите направление наибольшего и наименьшего изменения функции $U = \ln(z^2 - x) - y$ в точке $M_0(0;\ 2;\ 1)$.

6.24. Найдите проекцию градиента функции $U = (x^2 - y + 2z)^2$ на ось Oy.

6.25. Составьте параметрические уравнения нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$ в точке $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

6.26. Выясните, будет ли градиент скалярного поля $z = x^2y$ в точке $M(-1;\ 1)$ ортогонален вектору $\overline{l} = \overline{i} + 2\overline{j}$.

6.27. Выясните, будет ли градиент скалярного поля $U = \dfrac{x^2}{2} - 4z + y^2$ в точке $M(1;\ 1;\ -1)$ коллинеарен вектору $\overline{l} = (-2; -4; 8)$.

6.28. Найдите расстояние от касательной плоскости, проведенной к поверхности $z^2 + 4z + x^2 = 0$ в точке $M_0(0;\, 0;\, -4)$, до начала координат.

6.29. Найдите точку пересечения нормали к поверхности $2x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$ в точке $M_0(0;\, -3;\, 4)$ с плоскостью Oxy.

6.30. Найдите угол между касательной плоскостью, проведенной к поверхности $z = e^{x\cdot\cos y}$ в точке $M_0\left(1;\, \pi;\, \dfrac{1}{e}\right)$, и плоскостью $z = 2$.

Задание 7

Разложите по формуле Тейлора в окрестности указанной точки $M_0(x_0; y_0)$ функцию $z = f(x, y)$ до членов второго порядка включительно. Используйте это разложение для приближенного вычисления значения функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$.

7.1. $z = x^y$, $M_0(1;\, 4)$, $M(1{,}02;\, 4{,}05)$;

7.2. $z = \ln(x^3 + y^3)$, $M_0(0;\, 1)$, $M(0{,}09;\, 0{,}99)$;

7.3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $M_0(4;\, 3)$, $M(4{,}05;\, 2{,}93)$;

7.4. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $M_0(1;\, 1)$, $M(1{,}02;\, 1{,}03)$;

7.5. $z = \arcsin\left(x\sqrt{y}\right) - y$, $M_0(0;\, 4)$, $M(0{,}1;\, 3{,}98)$;

7.6. $z = (x - 3y)e^{xy}$, $M_0(1;\, 1)$, $M(1{,}2;\, 1{,}01)$;

7.7. $z(x, y) = 2\dfrac{\sin y}{x}$, $M_0(2;\, 0)$, $M(2{,}2;\, 0{,}02)$;

7.8. $z = \sqrt{2x^2 - 3y^2 + 3}$, $M_0(3;\, 2)$, $M(3{,}1;\, 1{,}8)$;

7.9. $z = \sqrt{5e^y + x^2}$, $M_0(2;\, 0)$, $M(2{,}03;\, 0{,}02)$;

7.10. $z = y^x$, $M_0(2;\, 5)$, $M(1{,}99;\, 5{,}02)$;

7.11. $z = \sin x + \cos y$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{6};\, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\dfrac{\pi}{5};\, \dfrac{2\pi}{5};\right)$;

7.12. $z = \ln\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} - 1\right)$, $M_0(1;\, 1)$, $M(0{,}97;\, 1{,}04)$;

7.13. $z = \sqrt{x^y}$, $M_0(1;\, 2)$, $M(1{,}04;\, 1{,}99)$;

7.14. $z = e^{-xy^2}$, $M_0(0;\, 1)$, $M(0{,}05;\, 0{,}95)$;

7.15. $z = \ln\left(\sin\left(\sqrt{x} - 2y + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, $M_0(0;\, 0{,}5)$, $M(1{,}03;\, 0{,}55)$;

7.16. $z = e^x \cdot \cos y$, $M_0\left(0;\, \dfrac{\pi}{4},\right)$, $M\left(0{,}05;\, \dfrac{23\pi}{90}\right)$;

7.17. $z=\dfrac{x}{\sqrt{y+1}}$, $M_0(2;\,8)$, $M(1{,}99;\,7{,}95)$;

7.18. $z=y\ln\dfrac{x}{y}$, $M_0(e;\,1)$, $M(e+0{,}1;\,1{,}2)$;

7.19. $z=\sqrt{x^2-y^2}$, $M_0(5;\,3)$, $M(5{,}1;\,2{,}95)$;

7.20. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y^3}{x}$, $M_0(1;\,1)$, $M(0{,}98;\,0{,}97)$;

7.21. $z=x^4y^3$, $M_0(1;\,1)$, $M(0{,}98;\,1{,}02)$;

7.22. $z=\sin x\cdot\sin y$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{4};\,\dfrac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\dfrac{23\pi}{90};\,\dfrac{11\pi}{45}\right)$;

7.23. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$, $M_0(1;\,2)$, $M(1{,}02;\,1{,}98)$;

7.24. $z=\sin^2(\sqrt{x}-y)$, $M_0\left(\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2;\,\dfrac{\pi}{6}\right)$, $M\left(\left(\dfrac{61\pi}{180}\right)^2;\,\dfrac{7\pi}{45}\right)$;

7.25. $z=\dfrac{25}{x^4+y^2}$, $M_0(2;\,3)$, $M(1{,}96;\,3{,}2)$;

7.26. $z=\sqrt[3]{x^2+y^2}$, $M_0(1;\,0)$, $M(1{,}02;\,0{,}05)$;

7.27. $z=\ln\left(\sqrt{x}\,y-1\right)$, $M_0(4;\,1)$, $M(4{,}04;\,1{,}1)$;

7.28. $z=\operatorname{ctg}(3x-2y^2)$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{6};\,0\right)$, $M\left(\dfrac{31\pi}{180};\,0{,}02\right)$;

7.29. $z=\sqrt[3]{x+y^2}$, $M_0(11;\,4)$, $M(10{,}98;\,4{,}19)$;

7.30. $z=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$, $M_0(3;\,4)$, $M(3{,}3;\,4{,}4)$.

Задание 8

Для функции $z=f(x,y)$ найдите:

1) полный дифференциал, если

а) x,y – независимые переменные;

б) x,y – функции независимых переменных u,v: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$;

2) локальные экстремумы;

3) наибольшее и наименьшее значения в области D;

4) условный экстремум, если переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $F(x,y)=0$.

8.1. $z=x^2+3(y+2)^2$;

$x = v\sin^2 u,\ y = uv^2 + u\cos v;\quad D:\ x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 4;$

уравнение связи: $x^2 + y^2 - 12 = 0;$

8.2. $z = 3x^2 y + y^3 - 18x - 30y;$

$x = \ln\dfrac{u}{v},\ y = u^2 v + uv^3;\quad D:\ x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 6;$

уравнение связи: $x + y - 6 = 0;$

8.3. $z = xy^2(1 - x - y);$

$x = e^{uv},\ y = \sqrt{\dfrac{u}{v}};\quad D:\ x \le 0, y \ge 0, y - x - 3 \le 0;$

уравнение связи: $-x + y - 3 = 0;$

8.4. $z = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26;$

$x = \cos(uv),\ y = u\sin\left(\dfrac{u}{v}\right);\quad D:\ x \ge -1, x \le 5, y \ge 0, y \le 3;$

уравнение связи: $3x + 5y - 15 = 0;$

8.5. $z = 3x^2 + 3y^2 - x^3 + 4y;$

$x = \operatorname{arctg}\left(u\sqrt{v}\right),\ y = e^{\frac{u}{v}};\quad D:\ y \ge 0, y - x - 3 \le 0, y + x - 3 \le 0;$

уравнение связи: $x + y - 3 = 0;$

8.6. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2;$

$x = \ln\sqrt{u^2 + v},\ y = \dfrac{u}{v}\cos(uv);\quad D:\ x \le 0, y - \dfrac{3}{2}x - 3 \le 0, x + y + 2 \ge 0;$

уравнение связи: $x + y + 2 = 0;$

8.7. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$

$x = u\sin(uv + 3),\ y = v\cos\left(\dfrac{u}{v^2}\right);\quad D:\ -2 \le x \le 1, -1 \le y \le 3;$

уравнение связи: $x - y + 2 = 0;$

8.8. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20;$

$x = (u + v)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{u - v},\ y = \dfrac{u^2 v + uv^2}{u + v};\quad D:\ x \le 7, y \ge 0, y - x - 1 \le 0;$

уравнение связи: $y - x - 1 = 0;$

8.9. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10;$

$x = u\sin\dfrac{u + v}{v},\ y = \sqrt{u^2 - 2uv^2};\quad D:\ |x| + |y| \le 1;$

уравнение связи: $y + x + 1 = 0;$

8.10. $z = x^3 + y^3 - 15xy;$

$x = \arcsin uv,\ \ y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v};\quad D:\ 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 6;$

уравнение связи: $\ 2x + y - 6 = 0;$

8.11. $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x} + y;$

$x = u^v,\ \ y = \ln\dfrac{v}{u+v};\quad D:\ x \ge 0, y \ge 0, y + x \le 3;$

уравнение связи: $x + y - 3 = 0;$

8.12. $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y;$

$x = \dfrac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2},\ \ y = \ln(2vu^2 + 3uv^3);\quad D:\ y \le 0, y - x + 3 \ge 0; 2y + 3x + 6 \ge 0;$

уравнение связи: $\ 2y + 3x + 12 = 0;$

8.13. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2;$

$x = 2^{\sqrt{\frac{u}{v}}},\ \ y = \dfrac{uv}{u^2 + v^2};\quad D:\ -1 \le x \le 3, 0 \le y \le 2;$

уравнение связи: $\ x + 2y - 3 = 0;$

8.14. $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y};$

$x = \cos(3uv + v^2),\ \ y = \sin(u^2 - 2uv^2);\quad D:\ -1 \le x \le 6, -1 \le y \le 2;$

уравнение связи: $\ 3x + 7y - 11 = 0;$

8.15. $z = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 1;$

$x = \arcsin\dfrac{u}{v},\ \ y = \operatorname{arcctg}(uv^2);\quad D:\ -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2;$

уравнение связи: $\ 2x - y = 0;$

8.16. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1;$

$x = \ln\left(uv + \sqrt{u^2 + v^2}\right),\ \ y = \dfrac{uv}{u+v};\quad D:\ -2 \le x \le 1, -1 \le y \le 2;$

уравнение связи: $x + y + 1 = 0;$

8.17. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y;$

$x = \dfrac{\sin uv}{v^2},\ \ y = \dfrac{u}{v}\cos v;\quad D:\ -4 \le x \le 0, y \ge 0, y - x - 4 \le 0;$

уравнение связи: $x - y + 4 = 0;$

8.18. $z = 2x^2 - xy + (y+1)^2 + 7x;$

$x = \dfrac{u}{v^2},\ y = \operatorname{arctg}(u^2 + v); \quad D:\ x \le 0, x + y + 4 \ge 0, y - x - 2 \le 0;$

уравнение связи: $x - y + 2 = 0;$

8.19. $z = x^3 + y^3 - 6xy;$

$x = \cos(v^2),\ y = \sin\dfrac{1}{uv}; \quad D:\ |x| + |y| \le 2;$

уравнение связи: $x + y + 2 = 0;$

8.20. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + 6x + 8;$

$x = \dfrac{\ln u}{v},\ y = e^{u+v^2}; \quad D:\ -2 \le x \le 1; -1 \le y \le 2;$

уравнение связи: $x - y + 1 = 0;$

8.21. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x;$

$x = \dfrac{u+v}{u-v},\ y = \sqrt{u + 2v^2}; \quad D:\ y \ge 0, x \le 0, y - x - 3 \le 0;$

уравнение связи: $x - y + 3 = 0;$

8.22. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y;$

$x = \sqrt{\dfrac{u+v}{v}},\ y = e^{u-v}; \quad D:\ -1 \le x \le 3; -1 \le y \le 3;$

уравнение связи: $x + y - 2 = 0;$

8.23. $z = y^2 x^3 (4 - y - x);$

$x = (u - v)\cos(u + v),\ y = \sin(u^2 - v^2); \quad D:\ x \ge 0; y \le 0; y - x + 2 \ge 0;$

уравнение связи: $x - y - 2 = 0;$

8.24. $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2;$

$x = \ln\dfrac{u+v}{u-v},\ y = e^{uv}; \quad D:\ 0 \le x \le 2; -1 \le y \le 1;$

уравнение связи: $x - y - 1 = 0;$

8.25. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2;$

$x = \operatorname{arctg}\sqrt{u+v},\ y = 5^{u-2v^2}; \quad D:\ x \ge 0; y \ge 0; y + \dfrac{x}{2} \le 2;$

уравнение связи: $x + 2y - 4 = 0;$

8.26. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y;$

$x=\arcsin(u^2+v),\ \ y=\cos\dfrac{u}{v};\quad D:\ x\le 0; y\le 0; y+x+2\ge 0;$

уравнение связи: $x+y+2=0;$

8.27. $z=2x^2-4x+(y+1)^2+xy;$

$x=\ln(e^u+e^v),\ \ y=u^2v-uv^3;\quad D:\ 0\le x\le 1;-2\le y\le 0;$

уравнение связи: $x-y-2=0;$

8.28. $z=1+6x-x^2-xy-y^2;$

$x=\cos u\cdot\sin v,\ \ y=e^u\ln v;\quad D:\ y\ge 0; y-x\le 0; x+y\le 4;$

уравнение связи: $x+y-4=0;$

8.29. $z=y^2+3x^2+4y-6x;$

$x=u\sqrt{v}-\dfrac{v}{\sqrt{u}},\ \ y=uv-\sqrt{4-v^2};\quad D:\ |x|+|y|\le 4;$

уравнение связи: $x-y+4=0;$

8.30. $z=x^2+xy+y^2-2x-y;$

$x=\arccos(u^2-v),\ \ y=\ln(\arcsin uv);\quad D:\ y\le 0; y+x\ge -2; y-x\ge -2;$

уравнение связи: $x-y-2=0.$

Типовой расчет №4
Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений

Задание 1

Выясните, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

1.1. а) $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y_1 = \sin x - 1;$

б) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0, \qquad y_2 = e^{2x} + e^{x};$

1.2. а) $(y-1)dx + x^2 dy = 0, \quad y_1 = 1 + 2e^{\frac{1}{x}};$

б) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0, \qquad y_2 = e^{2x} - e^{-x};$

1.3. а) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y_1 = \dfrac{x}{1-x};$

б) $y^{V} - 4y''' = 0, \qquad y_2 = 1 + x^2;$

1.4. а) $xy^2y' = x^2 + y^3, \quad y_1 = 5x - 1;$

б) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3, \qquad y_2 = (1+x)e^{x};$

1.5.а) $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2, \quad y_1 = x^2 + 1;$

б) $y'' - 3y' = 2 - 6x, \qquad y_2 = 5 + x^2;$

1.6. а) $(xy' - 1)\ln x = 2y, \quad y_1 = \ln^2 x - \ln x;$

б) $y'' - 7y' + 12y = 0, \qquad y_2 = 5e^{3x};$

1.7. а) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0, \quad y_1 = xe^{x};$

б) $y'' - 7y' + 10y = 3e^{2x}, \qquad y_2 = x^2 + 1;$

1.8. а) $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0, \quad y_1 = x;$

б) $y' + 2y = 3\sin^2 x, \qquad y_2 = \sin 2x;$

1.9. а) $2y' + y = \dfrac{x}{y}, \quad y_1 = 2x\ln x;$

б) $9y'' + y = 0, \qquad y_2 = 2\cos\dfrac{x}{3};$

1.10. а) $y'\cos x + y\sin x = 1, \quad y_1 = \cos x + \sin x;$

б) $y'' + 4y = 8\sin 2x; \qquad y_2 = \sin\frac{x}{2};$

1.11. а) $x^2 y' + xy + 1 = 0, \quad y_1 = \frac{2 - \ln x}{x};$

б) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}, \qquad y_2 = (x+1)e^x;$

1.12. а) $xydx + (x+1)dy = 0, \quad y_1 = (x+1)^{e^{-x}};$

б) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x, \qquad y_2 = \sin 2x;$

1.13. а) $xy' + y = y^2, \quad y_1 = \frac{1}{1-2x};$

б) $y'' - y = 5x + 2, \qquad y_2 = x^2 + 1;$

1.14. а) $y' - y = 2x - 3, \quad y_1 = e^x - 2x + 1;$

б) $y'^{\mathrm{V}} + y = 0, \qquad y_2 = e^x \sin x;$

1.15. а) $(x + 2y)y' = 1, \quad y_1 = -\frac{x+2}{2};$

б) $y'' - 7y' + 6y = \sin x, \qquad y_2 = 2(\sin x + 3\cos x);$

1.16. а) $y' = \cos(y - x), \quad y_1 = x + \operatorname{arcctg} 2x;$

б) $y = xy'^2 + y'^2, \qquad y_2 = x^2 - 1;$

1.17. а) $y' = 10^{x+y}, \quad y_1 = x + \lg x;$

б) $y'y'' = 1, \qquad y_2 = (2x+2)^{\frac{1}{2}};$

1.18. а) $y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y_1 = xe^{3x};$

б) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0, \qquad y_2 = 2x^3 - 1;$

1.19. а) $y' + y\operatorname{tg} x = \sec x, \quad y_1 = \sin x + \cos x;$

б) $y'' = 2x - \operatorname{sh} x, \qquad y_2 = \operatorname{ch} x;$

1.20. а) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y_1 = x + 1;$

б) $yy'' - (y')^2 = 0, \qquad y_2 = e^x + x;$

1.21. а) $y' = y^{\frac{3}{2}}, \quad y_1 = xe^x;$

б) $(y'')^2 - 3y'' + 2 = 0, \qquad y_2 = e^x;$

1.22. а) $y' = \cos^2 y, \quad y_1 = \operatorname{arctg} x;$

б) $y' = xy'' + (y'')^2, \qquad y_2 = (x+1)^2;$

1.23. а) $y' = y\cos x, \quad y_1 = \cos 2x;$

б) $xy'' - y' = 0, \qquad y_2 = xe^x;$

1.24. а) $(1-x)dy - ydx = 0, \quad y_1 = x+1;$

б) $y'' - 7y' + 10y = 3e^{2x}, \qquad y_2 = x^2 + 1;$

1.25. а) $y' - \dfrac{y}{x} = x, \quad y_1 = x^2 + 1;$

б) $y'' = xy' + y + 1, \qquad y_2 = e^{2x};$

1.26. а) $y' - 2xy = 2x^3y^2, \quad y_1 = x + 2;$

б) $2y'' = 3y^2, \qquad y_2 = \dfrac{1}{x+3};$

1.27. а) $x^2dy + (3 - 2xy)dy = 0, \quad y_1 = x^2 + \dfrac{1}{x};$

б) $y'' - y'\,\mathrm{tg}\,x + 2y = 0, \qquad y_2 = 5\sin x;$

1.28. а) $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0, \quad y_1 = e^x;$

б) $y'' - \dfrac{2x}{x^2+1}y' + \dfrac{2y}{x^2+1} = 0, \qquad y_2 = x - 3;$

1.29. а) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2, \quad y_1 = 1 - x^2;$

б) $y^{\prime\mathrm{v}} - y^3y'' = 1, \qquad y_2 = e^x - 1;$

1.30. а) $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, \quad y_1 = -x;$

б) $y'' = xy' + y + 1, \qquad y_2 = e^{2x}.$

Задание 2

Для каждого из дифференциальных уравнений а–г найдите общее решение (или общий интеграл). Там, где это указано, решите задачу Коши.

2.1. а) $(2x\sin y + \cos y)dx + (x^2\cos y - x\sin y)dy = 0;$

б) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx;$ в) $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}, \quad y(1) = 0;$

г) $y' + \dfrac{y}{2} = x^2y^2;$

2.2. а) $y' - 2xy = 1, \quad y(0) = 0;$ б) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0;$

в) $(3x^2\ln y + 2xy)dx + \left(\dfrac{x^3}{y} + x^2\right)dy = 0;$ г) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0;$

2.3. а) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = -\dfrac{2}{3}y^4 \sin x, \quad y(0) = 1;$

б) $\left(\dfrac{y}{1+x^2} - \dfrac{2}{xy^2}\right)dx + \left(\mathrm{arctg}\,x - \dfrac{2}{x^2 y}\right)dy = 0;$

в) $(x+y)dx + xdy = 0;$ г) $y' - y\sin x = \sin x \cos x;$

2.4. а) $y' - \dfrac{y}{x} = x;$ б) $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x};$ в) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}, \quad y(0) = \dfrac{9}{4};$

г) $\left[2(x-y) + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\cos x\right]dx + \left[\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - 2(x-y)\right] = 0;$

2.5. а) $\left(\mathrm{tg}\,xy + \dfrac{xy}{\cos^2 xy}\right)dx + \dfrac{x^2}{\cos^2 xy}dy = 0;$

б) $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x, \quad y(0) = 1;$

в) $(x+y)dx + (y-x)dy = 0;$ г) $xy' - 2y = 2x^4;$

2.6. а) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2;$

б) $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x, \quad y(0) = 1;$

в) $(8y+10x)dx + (5y-7x)dy = 0;$

г) $\left(3(x+2y)^2 + ye^{xy} + \sin x\right)dx + \left(6(x+2y)^2 + xe^{xy}\right)dy = 0;$

2.7. а) $\left(\sqrt{\sin y} + 3x^2\cos y\right)dx + \left(\dfrac{x\cos y}{2\sqrt{\sin y}} - x^3\cdot\sin y\right)dy = 0;$ б) $y' + y = 2e^x;$

в) $8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^3, \quad y(1) = \sqrt{2};$ г) $xy' = y\cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right);$

2.8. а) $x\cos\dfrac{y}{x}(ydx + xdy) = y\sin\dfrac{y}{x}(xdy - ydx);$

б) $\left(e^y - ye^{-x}\right)dx + \left(xe^y - ye^{-x}\right)dx = 0, \quad y(0) = 2;$

в) $y' + xy = x^2 + 1;$ г) $y' - \dfrac{y}{x-2} = \dfrac{y^2}{x-2};$

2.9. а) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4;$ б) $xy' = ax + by;$ в) $xy' + y = xy^2\ln x;$

г) $(\sin^2 y - y\sin 2x)dx + (x\sin 2y + \cos^2 x) = 0; \quad y(0) = \pi;$

2.10. а) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0;$

б) $(xy'-y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=x, \quad y(1)=0;$ в) $y'+y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2};$ г) $y'+2y=e^x y^2;$

2.11. а) $3xy'+5y=(4x-5)y^4, \quad y(1)=1;$

б) $xdx+ydy+\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0;$

в) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0;$ г) $xy'=x^2-y;$

2.12. а) $xy'+xy^2=y;$

б) $(ye^{xy}+4x)dx+(xe^{xy}+3y^2)dy=0, \quad y(0)=2;$

в) $y^2+x^2\dfrac{dy}{dx}=xy\dfrac{dy}{dx};$ г) $xy'=x+y, \quad y(0)=0;$

2.13. а) $y'\sin x-y\cos x=1, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0;$

б) $xy'+xy^2=y;$ в) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1\right)dx-\dfrac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}=0;$

г) $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x};$

2.14. а) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2};$

б) $xy'=x^2+2y, \quad y(0)=0;$ в) $y'+\dfrac{y}{x+1}+y^2=0;$

г) $\left(\dfrac{1}{\sin y}-y\sin x\right)dx+\left(\cos x-\dfrac{x\cos y}{\sin^2 y}\right)dy=0;$

2.15. а) $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0;$

б) $\left(x^3-2x^3y\right)dx+\left(x^4-2xy^3\right)dy=0;$

в) $y'+y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0)=3;$ г) $3y^2y'-y^3-x-1=0;$

2.16. а) $2y'+xy=(x+1)y^2;$

б) $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+y\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)dy=0;$

в) $y'=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}, \quad y(1)=-1;$ г) $(2x+1)y'=4x+2y;$

2.17. а) $y=x(y'-x\cos x);$ б) $y'-xy=x^3y^2, \quad y(1)=-\dfrac{7}{2};$

в) $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$; г) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$;

2.18. а) $(4xy+x^2)dy-2y^2dx=0$; б) $x^2y'+xy+1=0,\quad y(1)=2$;

в) $y'-y\,\mathrm{tg}\,x+y^2\cdot\cos x=0$; г) $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$;

2.19. а) $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$; б) $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$;

в) $y-y'\cos x=y^2(1-\sin x)\cos x$; г) $x^2y'=x+\frac{y}{2},\quad y(1)=3$;

2.20. а) $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x,\quad y(e)=\frac{e^2}{2}$; б) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$;

в) $yy'=x-ye^{\frac{y}{x}}$; г) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

2.21. а) $xy'+y=xy^2\ln x$; б) $y'+\frac{x}{1+x^2}y=\frac{1}{x(1+x^2)}$;

в) $\left(2xe^{\sin y}+y\sin x\right)dx+\left(x^2e^{\sin y}\cos y-\cos x\right)dy=0,\quad y(0)=1$;

г) $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$;

2.22. а) $(y+\sqrt{xy})dx=xdy$; б) $xy'+y=y^2\ln x$; в) $y'=2xy-x^3+x$;

г) $\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-\sin x\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}+2y\right)dy=0,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$;

2.23. а) $\left(y^{\frac{1}{2}}+2xy+\frac{1}{x+y}\right)dx+\left(\frac{1}{2}xy^{-\frac{1}{2}}+x^2+\frac{1}{x+y}\right)dy=0,\quad y(0)=2$;

б) $y'=\frac{x+2y}{x}$; в) $y'+\frac{y}{x}=-xy^2$; г) $\frac{dy}{dx}=y\,\mathrm{tg}\,x+\cos x$;

2.24. а) $(x^2+2xy)dx+xydy=0$; б) $y'-\frac{xy}{2(x^2-1)}-\frac{x}{2y}=0$;

в) $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$;

г) $\left(y^3e^{xy^3}+\frac{2x}{x^2+y^2}\right)dx+\left(3y^2e^{xy^3}+\frac{2y}{x^2+y^2}\right)dy=0,\quad y(0)=e$;

2.25. а) $y'+ay=e^{mx}$;

б) $\left(2xe^y-ye^{-x}\right)dx+\left(x^2e^y+e^{-x}\right)dy=0,\quad y(0)=3$;

в) $xy'\sin\frac{y}{x}+x=y\sin\frac{y}{x}$; г) $2y'+xy=(x+1)y^2$;

2.26. а) $y' - \dfrac{y}{x^2} = xy^2$; б) $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$, $y(0) = 0$;

в) $\left(\dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + y^{\frac{1}{3}} - y^{-1}\right)dx + \left(\dfrac{1}{3}xy^{-\frac{2}{3}} + xy^{-2} + x^{\frac{1}{5}}\right)dy = 0$;

г) $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$;

2.27. а) $(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0$;

б) $2(xy' + y) = y^2 \cdot \ln x$, $y(1) = 2$; в) $2x(x^2 + y)dx = dy$;

г) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}} - 3x^2\right)dx + \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(x+y^2)}} + \dfrac{2}{y}\right)dy = 0$;

2.28. а) $\left(\dfrac{y}{\cos^2 xy} - \dfrac{2x}{\sin^2(x^2+y^2)} - 3x^2\right)dx +$

$+\left(\dfrac{x}{\cos^2 xy} - \dfrac{2y}{\sin^2(x^2+y^2)} - 3y^2\right)dy = 0$;

б) $(y^3 - x^2y)dx + (x^3 - 2xy^2)dy = 0$;

в) $y' + \dfrac{y}{x} = xy^2$; г) $(1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$;

2.29. а) $(xy' - 1)\ln x = 2y$; б) $3x^2(1 + \ln y)dx + \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy = 0$;

в) $(x + 2y)dx - xdy = 0$; г) $2(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 2$;

2.30. а) $y' - 2\dfrac{y}{x} = 2xy^2$; б) $y' + y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$;

в) $2x\ln y dx + \dfrac{x^2}{y}dy = 0$, $y(1) = e$; г) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Задание 3

С помощью подходящей замены неизвестной функции (и, при необходимости, независимой переменной) приведите данное уравнение либо к однородному, либо к уравнению с разделяющимися переменными. Получившееся уравнение интегрировать не надо.

3.1. $y' = \dfrac{x+y-1}{2x+2y+1}$;

3.2. $y' = \dfrac{x-y}{x+2y-1}$;

3.16. $y' = \dfrac{-3x+y-6}{x+2}$;

3.17. $y' = \dfrac{2x+3y+1}{4x+6y-3}$;

3.3. $y' = \dfrac{x+3y+1}{2x+6y-1}$;

3.4. $y' = \dfrac{2x+y}{x-y+1}$;

3.5. $y' = \dfrac{x-2y}{2x-4y-2}$;

3.6. $y' = \dfrac{3x-y-1}{x+2y}$;

3.7. $y' = \dfrac{2x+y-2}{6x+3y+1}$;

3.8. $y' = \dfrac{-x+2y+3}{x-1}$;

3.9. $y' = \dfrac{x+3y-1}{2x+6y+3}$;

3.10. $y' = \dfrac{9x+y+1}{3x-2y}$;

3.11. $y' = \dfrac{-2x-y}{4x+3y+2}$;

3.12. $y' = \dfrac{3x+2y-1}{6x+4y}$;

3.13. $y' = \dfrac{x+2}{2x+y-1}$;

3.14. $y' = \dfrac{y+1}{2x-y+3}$;

3.15. $y' = \dfrac{x+5y}{2x+10y+3}$;

3.18. $y' = \dfrac{x+2y+3}{4x+5y}$;

3.19. $y' = \dfrac{3x-5y}{2x+y+1}$;

3.20. $y' = \dfrac{11x+2y}{5x+y+2}$;

3.21. $y' = \dfrac{4x-y}{2x+y+1}$;

3.22. $y' = \dfrac{x+3y+5}{2x+4y+1}$;

3.23. $y' = \dfrac{x-y-1}{2x-3y+1}$;

3.24. $y' = \dfrac{-x+y+2}{2x-3y}$;

3.25. $y' = \dfrac{x-6y+1}{x+5y}$;

3.26. $y' = \dfrac{-x+2y}{2x+2y+1}$;

3.27. $y' = \dfrac{4x-y}{-8x+2y+3}$;

3.28. $y' = \dfrac{x+9y}{x+8y+2}$;

3.29. $y' = \dfrac{2x+7y+3}{x+4y}$;

3.30. $y' = \dfrac{5x-2y-1}{4x+2y}$.

Задание 4

Для каждого из следующих уравнений найдите интегрирующий множитель, с помощью которого приведите их к уравнениям в полных дифференциалах.

4.1 $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)dx + \left(\dfrac{x}{y}-1\right)dy = 0$;

4.2. $(x^2+y)dx - xdy = 0$;

4.3. $(2xy^2-y)dx + (y^2+x+y)\,dy = 0$;

4.4. $(xy^2 + y)dx - x\,dy = 0;$

4.5. $(x\sin y + y\cos y)dx + (x\cos y - y\sin y)dy = 0;$

4.6. $ydx - xdy + \ln x dx = 0;$

4.7. $\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{y^2}\right)dy = 0;$

4.8. $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0;$

4.9. $\left(2xy + x^2 y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0;$

4.10. $2xy^3 dx + (x^2 y^2 - 1)dy = 0;$

4.11. $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0;$

4.12. $y\sqrt{1 - y^2}dx + (x\sqrt{1 - y^2} + y)dy = 0;$

4.13. $ydx + (2x - y^2)dy = 0;$

4.14. $y^2 \cdot \cos x \sin y dx + (y^2 \cdot \sin x \cos y + 1)dy = 0;$

4.15. $(2xy\ln y + y^2 \cdot \cos x)dx + (x^2 + y\sin x)dy = 0;$

4.16. $y(y + e^{-x})dx + (xy - 1)dy = 0;$

4.17. $(x^2 + y^2 + x)dx - 2xydy = 0;$

4.18. $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0;$

4.19. $(3x^2 + y^2)dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y}dy = 0;$

4.20. $ydx + x(y^3 + \ln x)dy = 0;$

4.21. $\dfrac{e^{-y}}{x}dx - \left(\dfrac{2y}{x} + e^{-y}\right)dy = 0;$

4.22. $\left(3x^2 - \dfrac{\cos x}{y}\right)dx + \left(\dfrac{x^3}{y} - \dfrac{\sin y}{y}\right)dy = 0;$

4.23. $(y^2 \operatorname{ch} x + 6x^2 y^4)dx + (\operatorname{sh} y + 4x^3 y^3)dy = 0;$

4.24. $\left(\dfrac{e^y}{x} + \dfrac{y}{x}e^x + 2y\right)dx + \left(e^y + \dfrac{e^x}{x} + x\right)dy = 0;$

4.25. $(2x^3 y^3 + x^2 \cdot \cos x)dx + (3x^4 y^2 - x^2 \cdot \sin y)dy = 0;$

4.26. $\left(3x^2 y^2 + \dfrac{y+1}{y^2}\sin x + \dfrac{x}{y^2}\cos x\right)dx + \left(4x^3 y - \dfrac{\cos x}{y^2}\right)dy = 0;$

4.27. $\left(\dfrac{\ln x+1}{y}+\cos x\right)dx+\left(\dfrac{x\ln x}{y^2}+\dfrac{2\sin x}{y}\right)dy=0;$

4.28. $\left(2y^2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{e^x}{x}\right)dx+\left(2xy-\dfrac{e^y}{x}\right)dy=0;$

4.29. $\left(\dfrac{y}{1+x^2}+y^2\right)dx+(1+xy)dy=0;$

4.30. $\left(\dfrac{2\cos y}{x}+\dfrac{y\cos x}{x^2}\right)dx+\left(\dfrac{\sin x}{x^2}-\sin y\right)dy=0.$

Задание 5

Найдите общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения второго порядка.

5.1. $x(y''-\cos x)=1;$

5.2. $xy''=(1+2x^2)y';$

5.3. $4xy''=4y'+(y')^2;$

5.4. $yy''+(y')^2+3y'=0;$

5.5. $y'''+2x(1+x^2)^{-2}=0;$

5.6. $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x};$

5.7. $xy''=y'(1+y');$

5.8. $yy''+(y')^3=(y')^2;$

5.9. $y'''=2\cos x\cdot\sin^{-3}x;$

5.10. $xy''+y'=y'\ln\dfrac{y'}{x};$

5.11. $\operatorname{tg}x\cdot y''+2(1-y')=0;$

5.12. $yy''=2yy'\ln y+(y')^2;$

5.13. $y'''=xe^{-x};$

5.14. $x\ln x y''=y';$

5.15. $xy''=y'(\ln y'-\ln x+3);$

5.16. $y''=\sqrt{1-(y')^2};$

5.17. $y''=-(2x+1)(x^2+x)^{-2};$

5.18. $xy''+\operatorname{ctg}y'=0;$

5.19. $xy''-y'=x^2e^x;$

5.20. $y^3y''=1;$

5.21. $y''+3(2x+1)(x^2+x-2)^{-2}=0;$

5.22. $xy''+y'=1+x;$

5.23. $y''(e^x+1)+y'=0;$

5.24. $yy''+(y')^2=1;$

5.25. $xy^{\mathrm{V}}=1;$

5.26. $xy'''=y''-xy'';$

5.27. $y''=\cos^4x;$

5.28. $y'(1+(y')^2)=3y'';$

5.29. $\sqrt{1+x^2}\,y''=x;$

5.30. $(1+x)^2y''+(y')^2+1=0.$

Задание 6

Решите задачу Коши.

6.1 $y''\cos y+(y')^2\sin y-y'=0,\quad y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\quad y'(-1)=2;$

6.2. $y'' = 2yy', \qquad y(0) = y'(0) = 1;$

6.3. $y''y^3 + 64 = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2;$

6.4. $x(y'' + y') = y', \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0;$

6.5. $y''' = 3yy', \quad y(0) = y'(0), \quad y''(0) = \dfrac{3}{2};$

6.6. $2yy'' + (y')^2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \dfrac{2}{3};$

6.7. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

6.8. $x(y'' + 1) + y' = 2, \quad y(1) = \dfrac{7}{4}, \quad y'(1) = \dfrac{5}{2};$

6.9. $y'y^2 + yy'' = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2;$

6.10. $y'' + y = (y')^2, \quad y(1) = -\dfrac{1}{4}, \quad y'(1) = \dfrac{1}{2};$

6.11. $e^y(y'' + (y')^2) = 2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2;$

6.12. $(x+1)y'' + x(y')^2 = y', \quad y(1) = -2, \quad y'(1) = 4;$

6.13. $y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

6.14. $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 2;$

6.15. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

6.16. $x(y'' - x) = y', \quad y(1) = y'(1) = 1;$

6.17. $3yy'' = e^y, \quad y(-3) = 0, \quad y'(-3) = 1;$

6.18. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7;$

6.19. $4y^3y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

6.20. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4;$

6.21. $4y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

6.22. $yy'' - 2x(y')^2 = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(1) = \dfrac{1}{2};$

6.23. $2y''' - 3(y')^2 = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1;$

6.24. $y''(1 + \ln x) + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln x, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}, \quad y'(1) = 1;$

6.25. $yy'' = y^4 + (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

6.26. $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1;$

6.27. $xy'' = y' \ln y', \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e;$

6.28. $2y' = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)y'', \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 6;$

6.29. $y''y^3 + 16 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2;$

6.30. $2y'' = 3y^2, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1.$

Задание 7

7.1. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(2; 3)$, если известно, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

7.2. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(0; 1)$, если площадь треугольника, образуемого осью абсцисс, касательной в произвольной точке кривой и радиус-вектором точки касания, постоянна и равна единице.

7.3. Найдите уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый на оси ординат касательной в произвольной точке, равен квадрату ординаты в точке касания.

7.4. Найдите уравнение кривой, для которой треугольник, образованный осью ординат, касательной в произвольной точке кривой и радиус-вектором точки касания, равнобедренный.

7.5. Найдите уравнение кривой, у которой отношение длины отрезка, отсекаемого касательной на оси ординат, к длине отрезка, отсекаемого нормалью на оси абсцисс, есть величина постоянная, равная k.

7.6. Найдите уравнение кривой, для которой треугольник, образованный нормалью с осями координат, равновелик треугольнику, образованному осью абсцисс, касательной и нормалью

7.7. Найдите уравнение кривой, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

7.8. Найдите уравнение кривой, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена как от точки касания, так и от начала координат.

7.9. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(-2; 3)$, если отрезок любой ее нормали, заключенный между осями координат, делится точкой касания в соотношении 1:3, считая от оси ординат.

7.10. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(2; 3)$, если отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении 3:2, считая от оси ординат.

7.11. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1; 2)$, у которой касательная, проведенная в произвольной точке кривой, пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

7.12. Найдите уравнение кривой, проходящей через начало координат, у которой середина отрезка нормали, заключенного между любой точкой кривой и осью абсцисс, лежит на параболе $y^2 = 2x$.

7.13. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(0; -2)$, если тангенс угла наклона касательной в любой ее точке равен ординате этой точки, увеличенной на три единицы.

7.14. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(0; -2)$, если угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен ординате этой точки, увеличенной в три раза.

7.15. Найдите уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в любой ее точке в два раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

7.16. Найдите уравнение кривой, если величина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную в любой ее точке, равна абсциссе точки касания.

7.17. Найдите уравнение кривой, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной в любой ее точке на оси ординат, к радиус-вектору этой точки равно постоянной величине.

7.18. Найдите уравнение кривой, у которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в любой точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

7.19. Найдите уравнение кривой, у которой произведение абсциссы любой ее точки и длины отрезка, отсекаемого нормалью на оси ординат, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

7.20. Найдите уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый от оси ординат касательной, проведенной в любой точке кривой, равен квадрату абсциссы точки касания.

7.21. Найдите уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый от оси ординат касательной, проведенной в любой точке кривой, равен полусумме координат точки касания.

7.22. Найдите уравнение кривой, у которой площадь, заключенная между осями координат, этой кривой и прямой, проходящей через любую точку кривой параллельно оси абсцисс, равна кубу ординаты этой точки.

7.23. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(0; 1)$, если площадь, ограниченная кривой, осями координат и прямой, проходящей через любую точку кривой параллельно оси абсцисс, равна длине соответствующей дуги кривой.

7.24. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(2; -1)$, если угловой коэффициент касательной, проведенной в любой ее точке, пропорционален квадрату ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 3$.

7.25. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1; 5)$, если отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной к этой кривой, равен утроенной абсциссе точки касания.
7.26. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1; 3)$, если в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ (с концом N на оси ординат) имеет проекцию на эту ось, равную 3.
7.27. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1; 1)$, если нормаль, проведенная к этой кривой в произвольной ее точке, обладает свойством: отрезок нормали, заключенный между осями координат, делится этой точкой в отношении 1:2, считая от оси ординат.
7.28. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0\left(2; \frac{1}{e}\right)$, если в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ (с концом N на оси абсцисс) имеет проекцию на эту ось, обратно пропорциональную абсциссе точки M, при этом коэффициент пропорциональности равен 2.
7.29. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(12; 2)$, если в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ (с концом N на оси ординат) имеет длину, равную 20, и образует острый угол с положительным направлением оси ординат.
7.30. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1; 4)$, если в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ (с концом N на оси ординат) имеет проекцию на эту ось, равную 2.

Задание 8

Исследуйте данную систему функций на линейную зависимость на указанном промежутке.

8.1. $\left\{1,\ x-3,\ (x-3)^2,\ (x-3)^3\right\},\ (-\infty; +\infty)$;
8.2. $\left\{\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x\right\},\ (-\infty; +\infty)$;
8.3. $\left\{1,\ x,\ e^x,\ e^{-3x}\right\},\ (-\infty; +\infty)$;
8.4. $\left\{1,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x\right\},\ (-\infty; +\infty)$;
8.5. $\left\{-5,\ \ln(x-2),\ \ln(x+3)\right\},\ (2; +\infty)$;
8.6. $\left\{x,\ e^x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x\right\},\ (-\infty; +\infty)$;
8.7. $\left\{4,\ \sqrt{1+x^2},\ \ln(x+\sqrt{1+x^2})\right\},\ (-\infty; +\infty)$;
8.8. $\left\{3x+3,\ x^2-1,\ x^2+3x+2\right\},\ (-\infty; +\infty)$;
8.9. $\left\{1,\ \sin^2(3x),\ 4\cos^2(3x)\right\},\ (-\infty; +\infty)$;
8.10. $\left\{2^x,\ 4^x,\ 8^x\right\},\ (-\infty; +\infty)$;

8.11. $\left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \cos 2x\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.12. $\left\{e^x,\ \operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.13. $\left\{e^x,\ e^{-4x},\ \cos 2x,\ \sin 2x\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.14. $\left\{3,\ \ln 5x,\ \ln(x^2+1)\right\}$, $(0; +\infty)$;

8.15. $\left\{1,\ \operatorname{ctg} x,\ \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\}$, $(0; \pi)$;

8.16. $\left\{x^3+5x-8,\ x^2-3x+4,\ x^3+2x^2-x\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.17. $\left\{\cos x,\ \sin(x-3),\ \cos(x+2)\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.18. $\left\{e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.19. $\left\{e^{-2x},\ \operatorname{sh} 2x,\ \operatorname{ch} 2x\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.20. $\left\{2,\ \dfrac{x}{3},\ \ln x\right\}$, $(0; +\infty)$;

8.21. $\left\{e^x,\ \operatorname{arcctg} x,\ \operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}\right\}$, $(1; +\infty)$;

8.22. $\left\{1,\ x^2+x,\ x^3,\ (x+1)^3\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.23. $\left\{1,\ x,\ x^2,\ \sin x,\ \cos x\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.24. $\left\{5,\ e^{\sin x},\ e^{\cos x}\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.25. $\left\{e^x,\ \dfrac{\arccos x}{2},\ \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right\}$, $(-1; 1)$;

8.26. $\left\{3x^2+2x+1,\ 4x^2+3x+2,\ 7x^2+5x+3\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.27. $\left\{\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x\right\}$, $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

8.28. $\left\{\sin x,\ \sin(x+2),\ \cos(x-5)\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.29. $\left\{\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ \sin 2x\right\}$, $(-\infty; +\infty)$;

8.30. $\left\{1,\ \arcsin x,\ \arccos x\right\}$, $(-1; 1)$.

Задание 9

Найдите линейное однородное дифференциальное уравнение (наиболее низкого порядка) с постоянными коэффициентами, имеющее данные частные решения.

9.1. $y_1 = \cos x, \quad y_2 = xe^{-x}$;

9.2. $y_1 = x^2, \quad y_2 = e^{-x}\cdot\sin x$;

9.3. $y_1 = x, \quad y_2 = e^{2x},\ y_3 = e^{-3x}$;

9.16. $y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x^2 e^{3x}$;

9.17. $y_1 = \cos x,\ y_2 = e^x,\ y_3 = e^{-x}$;

9.18. $y_1 = x^2 e^{2x}, \quad y_2 = e^x \cos x$;

9.4. $y_1 = x\cos x, y_2 = x;$

9.5. $y_1 = xe^{2x} \cdot \cos x;$

9.6. $y_1 = e^{2x} \cdot \sin x, \quad y_2 = x;$

9.7. $y_1 = x^3, \quad y_2 = e^x;$

9.8. $y_1 = e^{3x} \cdot \cos 2x, \quad y_2 = e^{-x};$

9.9. $y_1 = x^2 e^{3x}, \quad y_2 = x;$

9.10. $y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = e^{-2x}, \ y_3 = e^{2x};$

9.11. $y_1 = e^{2x} \cos x, \quad y_2 = \sin x;$

9.12. $y_1 = x^2 e^{-4x}, \quad y_2 = xe^x;$

9.13. $y_1 = e^{-x} \cdot \cos 2x, \quad y_2 = xe^{3x};$

9.14. $y_1 = \sin 3x, \quad y_2 = x, \ y_3 = e^{-x};$

9.15. $y_1 = xe^{-2x} \cdot \cos 3x, \quad y_2 = x^2;$

9.19. $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-3x} \cdot \cos x, y_3 = e^x;$

9.20. $y_1 = xe^{3x} \cdot \sin 2x;$

9.21. $y_1 = x^2, \quad y_2 = xe^{4x};$

9.22. $y_1 = x\sin x, \quad y_2 = x\cos 3x;$

9.23. $y_1 = x^2 \cdot \sin x, \quad y_2 = x;$

9.24. $y_1 = xe^{-x} \cdot \cos 4x, \quad y_2 = e^{2x};$

9.25. $y_1 = \sin 2x, \quad y_2 = x\cos x;$

9.26. $y_1 = x\cos 2x, \quad y_2 = e^{-3x};$

9.27. $y_1 = e^{-x} \cdot \cos 4x, y_2 = e^x \cdot \sin x;$

9.28. $y_1 = xe^{2x} \cdot \sin 3x, \quad y_2 = x;$

9.29. $y_1 = x\sin 3x, \quad y_2 = xe^{-2x};$

9.30. $y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin 2x.$

Задание 10

Найдите частное решение линейного однородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

10.1. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -1, \ y''(0) = 2;$

10.2. $y''' - 2y'' + 21y' + 58y = 0, \quad y(0) = -1, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 3;$

10.3. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \quad y(1) = e^{-1}, \ y'(1) = 0, \ y''(1) = 2e^{-1};$

10.4. $y''' - 5y'' + 7y' + 13 = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -1, \ y''(0) = 2;$

10.5. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0, \quad y(0) = 5, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 2;$

10.6. $y''' - 7y'' + 17y' + 25y = 0, \quad y(0) = -2, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 2;$

10.7. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = -2, \ y''(0) = 1;$

10.8. $y''' - 2y'' + 2y' - 40y = 0, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = -3, \ y''(0) = 1;$

10.9. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0, \quad y(1) = 3e^2, \ y'(1) = -e^2, \ y''(1) = e^2;$

10.10. $y''' + y'' + 11y' + 51y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = -1, \ y''(0) = 1;$

10.11. $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = -1;$

10.12. $y''' - 4y'' - 2y' + 20y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = -3;$

10.13. $y''' + y'' - y' - y = 0, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 2, \ y''(0) = 1;$

10.14. $y''' + 6y'' + 13y' + 10y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = -1, \ y''(0) = 3;$

10.15. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -1, \ y''(0) = 0;$

10.16. $y''' + y'' - y' + 15y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -1, \ y''(0) = 1;$

10.17. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0, \quad y(1) = -e^2, \ y'(1) = 3e^2, \ y''(0) = e^2;$

10.18. $y''' - 5y'' + 8y' - 6y = 0, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = -2;$

10.19. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -3;$
10.20. $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2;$
10.21. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0, \quad y(1) = e^{-2},\ y'(1) = -3e^{-2},\ y''(1) = 2e^{-2};$
10.22. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = -1;$
10.23. $y''' - 3y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = 3;$
10.24. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1;$
10.25. $y''' - y' = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1;$
10.26. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad y(1) = e,\ y'(1) = -2e,\ y''(1) = 0;$
10.27. $y''' + y'' = 0, \quad y(0) = -3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1;$
10.28. $y''' + y' = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -1;$
10.29. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1;$
10.30. $y''' - y'' + 3y' + 5y = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2.$

Задание 11

Не находя коэффициентов, определите вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

11.1. $y'' - 2y' = \left(e^x + 1\right)^2 x + e^{-x}\left(x\cos x + (x^2 - 3)\sin x\right);$

11.2. $y'' - y' = (x-1)\,\mathrm{sh}^2 x + x\cos 3x + (1 - x^2)\sin 3x;$

11.3. $y'' + 4y = (e^x - 2)\cos^2 x + \dfrac{x+3}{e^{2x}} - \dfrac{e^{x+1}}{4};$

11.4. $y'' + 4y' + 8y = \mathrm{sh}\,2x \cdot \cos 2x + (x+1)^2 e^{-4x} + \dfrac{e^{x-2}}{3};$

11.5. $y'' + y' - 2y = (e^{-x} + e^{2x})^2 (x+4) + \sin(x+2)\, e^x;$

11.6. $y'' + 4y' + 3y = 4 + (2x-3)^2\,\mathrm{ch}\,x + \dfrac{x+4}{e^{3x}} + \dfrac{\sin^2 x}{e^x};$

11.7. $y'' + 9y = \cos^2 \dfrac{3}{2}x \cdot \mathrm{ch}^2 x + (5x+2)e^{3x} + \dfrac{e^{-x+2}}{3};$

11.8. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}(x\cos 2x + (x^2 - x + 4)\sin 2x) + e^x(x-2) + 3;$

11.9. $4y'' - 8y' + 5y = e^{3x}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{e^x} + e^x\right)^2 + (x+1)^2 e^x + e^{-2x}\cdot\sin\dfrac{x}{2};$

11.10. $4y'' - 4y' + 5y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \dfrac{x+1}{2} + \mathrm{sh}^2 x(x+5) - 2;$

11.11. $y'' - 3y' + 2y = x \cdot \mathrm{sh}\,x + (x-5)e^{2x} + e^{-x}(x\cos x + (3 - x^2)\sin x);$

11.12. $y'' + 2y' - 3y = \operatorname{ch} x(2x-3)^2 + \dfrac{x^2-4}{e^{3x}} + (x-1)\sin(x+2);$

11.13. $y'' + y = x \cdot \sin^2 \dfrac{x}{2} \operatorname{sh}^2 x + (x+4)e^x + e^{-x} \cdot x\sin x + 1;$

11.14. $y'' + 6y' = (x+2)^2 \operatorname{sh}^2 \cdot 3x + e^{-2x}(3-x)\cos x + (4+x^2)\sin x);$

11.15. $y'' - y = (2x-5)\operatorname{sh} x + e^x \cdot \cos^2 x + \dfrac{e^x}{2} + 3;$

11.16. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \sin^2(x+3) + e^x(\cos x + (x-2)\sin x) + (x+7)e^{-4x};$

11.17. $3y'' - 2y' - 8y = \left(3xe^{-\frac{2x}{3}}\right)^2 + \operatorname{sh} 2x \cdot \cos^2 x + (x-1)\operatorname{ch} 2x;$

11.18. $y'' - 6y' + 9y = (x+3)^2 \operatorname{ch} 3x + xe^{-x} + (x+1)e^{2x} \cdot \sin 3x);$

11.19. $y'' + 2y' + 5y = \operatorname{sh} x \cos^2 x + (x+1)^2 e^{-2x} + xe^{4x} \cdot \sin x;$

11.20. $y'' - 2y' + 2y = \operatorname{sh} x \cos x + (2x+1)\operatorname{sh}^2 x + e^{-x} \cdot \sin x;$

11.21. $y'' + 6y' + 10y = \operatorname{sh} 3x \cos^2 \dfrac{x-1}{2} + (3-4x)^2 \operatorname{ch} 3x + 2 + e^{-x} \cdot \sin x;$

11.22. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \cdot \cos 5x + (x+3)^2 \cdot \operatorname{sh} 2x + \dfrac{7}{e^{5x+4}} + 3;$

11.23. $y'' - 2y' + 5y = \operatorname{sh} x \cdot \sin^2(x-1) + e^x \cdot \cos(x+2) + (3x-2)^2 \cdot e^{4x};$

11.24. $y'' - 2y' + y = (3x-1) \cdot \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x \cdot \sin x + \dfrac{x-4}{e^x};$

11.25. $y'' - 8y' + 17y = \operatorname{sh}^2 2x \cdot \sin(x-3) + \dfrac{x+1}{e^{4x}} + e^{-x} \cdot \cos x + 3;$

11.26. $y'' - 6y' + 8y = (x+1)^3 \cdot \operatorname{ch}^2 2x + xe^{2x} + (x-1)e^{2x} \cdot \sin 3(x+1);$

11.27. $y'' - 9y = (1-3x)^2 \cdot \operatorname{sh} 3x + (x+1)e^{-3x} \cdot \cos 2x + \dfrac{e^{x+1}}{2} + 5;$

11.28. $y'' - 4y' + 5y = \operatorname{sh}^2 x \cdot \cos^2 \dfrac{x}{2} + e^{-2x}(x\cos x + x^2 \cdot \sin x) + \dfrac{e^{2x}}{3};$

11.29. $y'' + 4y' + 3y = (2+3x)^2 \cdot \operatorname{ch} x + e^{-3x} \cdot \sin^2 x + (2-x)\cos x + \sin x;$

11.30. $y'' + 10y' + 26y = \operatorname{sh} 5x \cdot \cos^2 \dfrac{x}{2} + x \cdot \operatorname{ch} 5x + \dfrac{x+1}{e^{5x}} + 2.$

Задание 12

Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения.

12.1. $y'' + y = \cos 2x + \dfrac{1}{\sqrt{\cos^3 2x}}$;

12.2. $y'' + 4y' + 4y = (x-2)e^{2x} + \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$;

12.3. $y'' - y' = \dfrac{(2-x)\,e^x}{x^3} + 2\cos x - 4\sin x$;

12.4. $y'' + y = \operatorname{ctg} x + (2x-3)e^{-x}$;

12.5. $y'' - y = \dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{x}} + e^{-x}\sin x$;

12.6. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x} + 3\cos 2x - \sin 2x$;

12.7. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x + xe^{2x}$;

12.8. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}} + xe^{-x}$;

12.9. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3} + x^2e^{-x}$;

12.10. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x + e^x \cdot \cos 2x$;

12.11. $y'' - y = \dfrac{1}{e^x+2} + (x+1)e^{2x}$;

12.12. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x} + x\cos x$;

12.13. $y'' - y = \dfrac{1}{x} + xe^{-x}$;

12.14. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x+1} + 2x + 5$;

12.15. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x} + e^{-2x} \cdot \sin x$;

12.16. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^2 x} + 2\cos x - 6\sin x$;

12.17. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \cdot \sqrt{x+1} + xe^x$;

12.18. $y'' + y = \dfrac{2}{\cos^3 x} + \cos x$;

12.19. $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{e^{2x}+1} + e^{-2x}$;

12.20. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{4 + x^2} + \cos x - 2\sin x;$

12.21. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x} + xe^{2x};$

12.22. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} + xe^{-x};$

12.23. $y'' + 9y = 3\,\mathrm{tg}\,3x + \cos 3x + 2\sin 3x;$

12.24. $y'' - 2y' + y = e^x \cdot \sqrt{x+1} + xe^x;$

12.25. $y'' + y' = \dfrac{1}{e^x + 1} + x - 3;$

12.26. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2} + x^2 e^{-x};$

12.27. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x + 2e^{-x};$

12.28. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x + xe^{2x};$

12.29. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 2x}} + \sin x;$

12.30. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x} + \sin x.$

Задание 13

Решите линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений.

13.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}; \end{cases}$

13.16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 4\cos 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t; \end{cases}$

13.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases}$

13.17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}; \end{cases}$

13.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t; \end{cases}$

13.18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t; \end{cases}$

13.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y; \end{cases}$

13.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \operatorname{tg} t; \end{cases}$

13.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x; \end{cases}$

13.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}; \end{cases}$

13.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y; \end{cases}$

13.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}; \end{cases}$

13.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^{t}\sqrt{t}; \end{cases}$

13.11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 2\cos t; \end{cases}$

13.19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y + 40e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + 9e^{-t}; \end{cases}$

13.20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^{2t}; \end{cases}$

13.21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^{t}; \end{cases}$

13.22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y; \end{cases}$

13.23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 2\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y; \end{cases}$

13.24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2e^{t}; \end{cases}$

13.25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + 2\sin t; \end{cases}$

13.26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 16te^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y; \end{cases}$

13.12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y + e^{2t}; \end{cases}$

13.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x - 5e^t \cdot \sin t; \end{cases}$

13.14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}; \end{cases}$

13.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t; \end{cases}$

13.27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^t; \end{cases}$

13.28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y; \end{cases}$

13.29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x; \end{cases}$

13.30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2t. \end{cases}$

Решение типового варианта «Комплексные числа. Многочлены и рациональные дроби»

Задание 1

Даны два комплексных числа $z_1 = 3 - 3i$ и $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Найдите $z_1 + z_2$ и $z_1 - z_2$ (результат запишите в алгебраической форме), $z_1 \cdot z_2$ (результат запишите в тригонометрической форме), $\frac{z_1}{z_2}$ (результат запишите в показательной форме).

Решение

Представим число z_2 в алгебраической форме, вычислив значения тригонометрических функций:

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i.$$

Выполним сложение и вычитание комплексных чисел z_1 и z_2, записанных в алгебраической форме:

$$z_1 + z_2 = (3 - 3i) + (\sqrt{3} + i) = (3 + \sqrt{3}) - 2i,$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 3i) - (\sqrt{3} + i) = (3 - \sqrt{3}) - 4i.$$

Представим число z_1 в тригонометрической форме. Найдем модуль и аргумент z_1:

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \quad \cos\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\arg z_1 = \varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Выполним умножение и деление чисел z_1 и z_2, применив формулы произведения и частного комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = 3\sqrt{2} \cdot 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 6\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 6\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)++i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{12}i}.$$

Задание 2

Дана последовательность комплексных чисел $z_n=\dfrac{6\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi ni}{4}}{4+n^2}$. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Im}\,z_n$, если этот предел существует.

Решение

Преобразуем z_n, применив последовательно формулы

$$\mathrm{sh}\,i\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2},\quad e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

$$z_n=\frac{3\left(e^{\frac{\pi ni}{4}}-e^{-\frac{\pi ni}{4}}\right)}{4+n^2}=\frac{3\left[\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right)-\left(\cos\left(-\frac{\pi n}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi n}{4}\right)\right)\right]}{4+n^2}=$$

$$=\frac{3\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}-\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right)}{4+n^2}=\frac{6\sin\frac{\pi n}{4}}{4+n^2}i.$$

Откуда следует, что $\mathrm{Re}\,z_n=0,\quad \mathrm{Im}\,z_n=\dfrac{6\sin\frac{\pi n}{4}}{4+n^2}.$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Im}\,z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6\sin\frac{\pi n}{4}}{4+n^2}=6\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4+n^2}\cdot\sin\dfrac{\pi n}{4}=0,$ как произведение бесконечно малой последовательности $\dfrac{1}{4+n^2}$ на ограниченную последовательность $\sin\dfrac{\pi n}{4}$.

Задание 3

Проверьте, верно ли равенство $\overline{\left(\dfrac{2+3i}{1-4i}-\dfrac{1}{i}\right)}=-\dfrac{10}{17}-\dfrac{28}{17}i.$ Если нет, приведите правильный ответ.

Решение

Преобразуем левую часть равенства, выполнив указанные действия:

$$\overline{\left(\frac{2+3i}{1-4i}-\frac{1}{i}\right)}=\overline{\left(\frac{(2+3i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)}-\frac{i}{i^2}\right)}=\overline{\left(\frac{-10+11i}{17}+i\right)}=\overline{\left(\frac{-10+28i}{17}\right)}=-\frac{10}{17}-\frac{28}{17}i.$$

Левая часть равна правой, значит, исходное равенство верно.

Задание 4

Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих указанным условиям:

1) $|z|=2;$ 2) $|z+1-2i|=2;$ 3) $\begin{cases}|z+1-2i|<2,\\ 3<\operatorname{Im}z\le 4.\end{cases}$

Решение

1. Пусть $z=x+iy$. Тогда $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ и уравнение $|z|=2$ равносильно уравнению $\sqrt{x^2+y^2}=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=2^2$. Таким образом, уравнение $|z|=2$ есть уравнение окружности с центром в точке $z=0$ и радиусом 2 (Рис. 1).

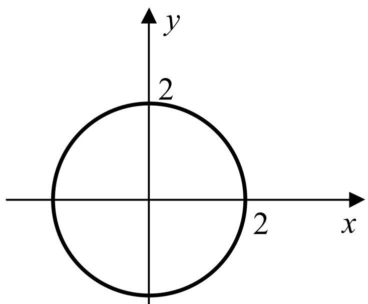

Рис. 1

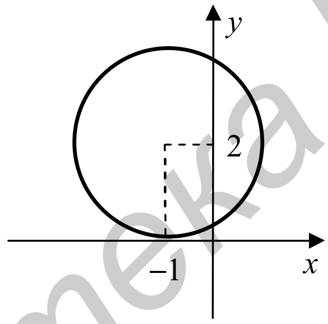

Рис. 2

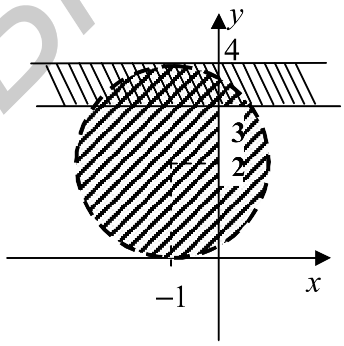

Рис. 3

2. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z+1-2i|=2$, представляет собой окружность с центром в точке $z=-1+2i$ и радиусом 2 (Рис. 2).

Действительно, $|z+1-2i|=|x+iy+1-2i|=|(x+1)+i(y-2)|=$

$=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} \Rightarrow |z+1-2i|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=2^2.$

3. Множество точек, удовлетворяющих первому неравенству системы – круг с центром в точке $z=-1+2i$ и радиусом 2 (окружность не включается). Второе неравенство системы $3<\operatorname{Im}z\le 4$ равносильно неравенству $3<y\le 4$. Множество точек плоскости $\{(x;y)|x\in\measuredangle, 3<y\le 4\}$ – полоса, параллельная оси Ox. Решением системы будет сегмент круга (Рис. 3).

Задание 5

Дано комплексное число $z=-8\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}+i\operatorname{ctg}\dfrac{4\pi}{6}\right)$. Найдите: 1) $(lz)^k$; 2) $m|z|^2$; 3) все значения $\sqrt[n]{m|z|^2}$, если $k=6$, $l=\dfrac{1}{4}$, $m=-1$, $n=4$.

Решение

Запишем данное число z в алгебраической форме: $z=-8(1+i\sqrt{3})=$ $=-8-8\sqrt{3}\,i$. Приведем это число к тригонометрической форме. Для этого найдем его модуль и аргумент:

$$|z|=\sqrt{64+64\cdot 3}=\sqrt{256}=16,$$

$$\varphi=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{-8\sqrt{3}}{-8}=-\pi+\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$$ (Рис. 4).

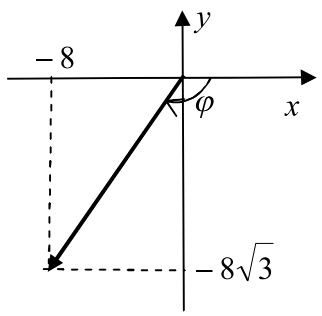

Рис. 4

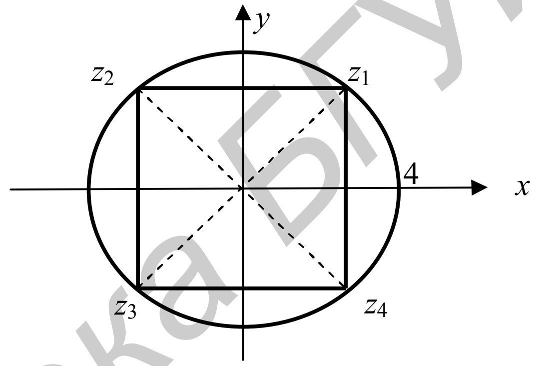

Рис. 5

Тогда, $z=-8-8\sqrt{3}\,i=16\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

1. Найдем теперь $\left(\dfrac{1}{4}z\right)^6=\left(4\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^6=$

$$=4^6\left(\cos\left(\frac{-12\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-12\pi}{3}\right)\right)=4^6(\cos(-4\pi)+i\sin(-4\pi))=4^6=2^{12}=4096.$$

2. Найдем $(-1)|z|^2=-1\cdot 256=-256$.

3. И наконец, найдем все четыре значения корня четвертой степени из числа (–256):

$$\sqrt[4]{-256}=\sqrt[4]{256}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ k=0,1,2,3.$$

$$z_1=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i;$$

$$z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i;$$

$$z_3 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i;$$

$$z_4 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i.$$

Корни z_1, z_2, z_3 и z_4 лежат на окружности радиусом 4 в вершинах квадрата, вписанного в эту окружность (Рис. 5).

Задание 6

Найдите все корни заданных уравнений:

1) $(1-i)z + 2 = 4i$;

2) $3z^2 + iz + 2 = 0$;

3) $z^3 + 4z^2 + 2z + 8 = 0$.

1. Для z_1 (корня уравнения 1)) найдите расстояние до точки $z_0 = 0$.

2. Для уравнения 2) вычислите периметр треугольника с вершинами в точках z_1, z_2, z_3, где z_1 и z_2 – корни уравнения, $z_3 = -1$.

3. Для уравнения 3) напишите уравнение окружности с центром в точке z_1 (z_1 – действительный корень уравнения), на которой лежат остальные корни z_2 и z_3 этого уравнения.

Решение

1. Уравнение $(1-i)z + 2 = 4i$ является линейным относительно z. Чтобы выразить z, разделим числитель на знаменатель, применив правило деления комплексных чисел в алгебраической форме:

$$z = \frac{-2+4i}{1-i} = \frac{(-2+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2-2i+4i+4i^2}{1-i^2} = \frac{-2+2i-4}{1+1} = -3+i.$$

Расстояние между точками $z_1 = -3+i$ и $z_0 = 0$ равно величине

$$|z_1 - z_0| = |-3+i-0| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}.$$

2. Уравнение $3z^2 + iz + 2 = 0$ является квадратным, его корни находятся по формуле

$$z_{1,2} = \frac{-i+\sqrt{D}}{2\cdot 3},$$

где $D = i^2 - 4\cdot 3\cdot 2 = -25$.

Известно, что существуют два различных квадратных корня из любого комплексного числа. Найдем их для дискриминанта $D = -25$:

$$\sqrt{D}=\sqrt{-25}=\sqrt{25(\cos\pi+i\sin\pi)}=5\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right),$$

где $k=0;1$.

При $k=0$, $\sqrt{D}=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=5i,$

при $k=1$, $\sqrt{D}=5\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-5i.$

Следовательно, $z_1=\frac{-i+5i}{6}=\frac{2}{3}i$ и $z_2=\frac{-i-5i}{6}=-i.$

Найдем периметр P треугольника с вершинами в точках $z_1=\frac{2}{3}i,$ $z_2=-i,\quad z_3=-1.$

$$P=|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_1|=\left|\frac{2}{3}i-(-i)\right|+\left|-i-(-1)\right|+\left|-1-\frac{2}{3}i\right|=$$

$$=\left|\frac{5}{3}i\right|+|1-i|+\left|-1-\frac{2}{3}i\right|=\frac{5}{3}+\sqrt{2}+\sqrt{\frac{13}{9}}=\frac{5+\sqrt{13}}{3}+\sqrt{2}.$$

3. Преобразуем левую часть уравнения $z^3+4z^2+2z+8=0,$ сгруппировав слагаемые следующим образом:

$$z^3+4z^2+2z+8=z^2(z+4)+2(z+4)=(z+4)(z^2+2).$$

$$(z+4)(z^2+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-4,\\ z^2+2=0.\end{array}\right.$$

Отсюда видно, что $z_1=-4$ – действительный корень уравнения. Остальные корни z_2 и z_3 являются решениями уравнения $z^2+2=0$:

$$z_{2,3}=\sqrt{-2}=\sqrt{2(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right),\quad k=0;1.$$

При $k=0$, $z_2=\sqrt{2}\,i,$ при $k=1$, $z_3=-\sqrt{2}\,i.$ Итак, корнями уравнения являются числа $z_1=-4$, $z_2=\sqrt{2}i$, $z_3=-\sqrt{2}i.$

Уравнение искомой окружности с центром в точке $z_1=-4$ имеет вид $|z+4|=R.$ Так как оба комплексных корня z_2 и z_3 лежат на окружности, то подставив любой из них в уравнение $|z+4|=R,$ найдем ее радиус R. Подставим вместо z корень $z_2=\sqrt{2}i$:

$$\left|\sqrt{2}i+4\right|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}=R.$$

Следовательно, уравнение искомой окружности имеет вид $|z+4|=3\sqrt{2}.$

Задание 7

Дан многочлен $P_4(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 6z + 8$ с действительными коэффициентами, один из корней которого известен: $z_1 = -1 - i$.

1. Найдите остальные корни многочлена $P_4(z)$.
2. Разложите многочлен $P_4(z)$ на линейные множители.
3. Разложите многочлен $P_4(z)$ на множители, неприводимые на множестве $\measuredangle$.
4. Разложите рациональную дробь $\dfrac{1}{P_4(z)}$ на простейшие дроби.

Решение

1. Если $z_1 = -1 - i$ – корень многочлена $P_4(z)$ с действительными коэффициентами, значит, и сопряженное ему число $z_2 = -1 + i$ также является корнем $P_4(z)$. По следствию из теоремы Безу многочлен $P_4(z)$ делится без остатка на произведение:

$(z - z_1)(z - z_2) = (z + 1 + i)(z + 1 - i) = z^2 + 2z + 2$. Разделим $P_4(z)$ на $z^2 + 2z + 2$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;\; z^4 + z^3 + 4z^2 + 6z + 8 & z^2 + 2z + 2 \\
z^4 + 2z^3 + 2z^2 \phantom{{}+6z+8} & \overline{z^2 - z + 4} \\
\hline
-\;\; -z^3 + 2z^2 + 6z + 8 & \\
-z^3 - 2z^2 - 2z \phantom{{}+8} & \\
\hline
-\;\; 4z^2 + 8z + 8 & \\
4z^2 + 8z + 8 & \\
\hline
0. &
\end{array}
$$

Таким образом, $P_4(z) = (z^2 + 2z + z)(z^2 - z + 4)$.

Решив уравнение $z^2 - z + 4 = 0$, найдем корни квадратного трехчлена $z^2 - z + 4$. Это числа $\dfrac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$. В итоге многочлен $P_4(z)$ имеет 4 корня: $z_1 = -1 - i,\ z_2 = -1 + i,\ z_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{2}i,\ z_4 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i.$

2. Как следует из предыдущего,

$$P_4(z) = (z+1+i)(z+1-i)\left(z - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{15}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{15}}{2}\right).$$

Таким образом, получено разложение $P_4(z)$ на линейные множители.

3. Если линейные множители, полученные в п. 2, попарно перемножить в указанном порядке, то получим разложение $P_4(z)$ на квадратичные множители, неприводимые на множестве $\measuredangle$:

$$P_4(z) = (z^2 + 2z + z)(z^2 - z + 4).$$

4. Разложим $\dfrac{1}{P_4(z)}$ на простейшие дроби по следующей схеме:

$$\frac{1}{P_4(z)} = \frac{1}{z^4 + z^3 + 4z^2 + 6z + 8} = \frac{1}{(z^2 + 2z + 2)(z^2 - z + 4)} =$$
$$= \frac{Az + B}{z^2 + 2z + 2} + \frac{Cz + D}{z^2 - z + 4},$$

где A, B, C, D – неопределенные коэффициенты. Найдем их. Для этого приведем простейшие дроби к общему знаменателю и приравняем числители полученных дробей:

$$(Az + B)(z^2 - z + 4) + (Cz + D)(z^2 + 2z + 2) = 1.$$

Известно, что два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной z. Запишем равенство коэффициентов в виде следующей системы уравнений относительно неизвестных A, B, C, D.

$$\begin{array}{l} z^3: \\ z^2: \\ z^1: \\ z^0: \end{array}\begin{cases} A + C = 0, \\ -A + B + 2C + D = 0, \\ 4A - B + 2C + 2D = 0, \\ 4B + 2D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -C, \\ D = \dfrac{1 - 4B}{2}, \\ -A + B - 2A + \dfrac{1 - 4B}{2} = 0, \\ 4A - B - 2A + 1 - 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -C, \\ D = \dfrac{1 - 4B}{2}, \\ -3A - B = -\dfrac{1}{2}, \\ 2A - 5B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -C, \\ D = \dfrac{1 - 4B}{2}, \\ B = -3A + \dfrac{1}{2}, \\ 2A + 15A - \dfrac{5}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = \dfrac{1}{34}, \\ C = -\dfrac{3}{34}, \\ B = \dfrac{4}{17}, \\ A = \dfrac{3}{34}. \end{cases}$$

Подставив найденные коэффициенты, получим

$$\frac{1}{P_4(z)}=\frac{\frac{3}{34}z+\frac{4}{17}}{z^2+2z+2}+\frac{-\frac{3}{34}z+\frac{1}{34}}{z^2-z+4}=\frac{1}{34}\left(\frac{3z+8}{z^2+2z+2}-\frac{3z-1}{z^2-z+4)}\right).$$

Задание 8

Разложите рациональную дробь $R(x)=\dfrac{2x^2+5x-3}{(x^3-1)^2(x^2-9)(x^2+2x-3)}$ в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами. (Коэффициенты находить не нужно.)

Решение

Разложив многочлен в знаменателе на линейные и неприводимые квадратичные множители с действительными коэффициентами, получим

$$R(x)=\frac{(x+3)(2x-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2(x-3)(x+3)(x+3)(x-1)}=$$

$$=\frac{2x-1}{(x-1)^3(x-3)(x+3)(x^2+x+1)^2}=$$

$$=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}+\frac{D_1x+E_1}{x^2+x+1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

Задание 9

Разложите рациональную дробь $R(x)=\dfrac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x^2+x+2)}$ в сумму простейших дробей и найдите коэффициенты этих разложений.

Решение

Очевидно, $R(x)$ – неправильная дробь, поэтому сначала выделим целую часть этой дроби с помощью деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\;3x^3+2x^2+1 & x^3+3x^2+4x+4 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3+9x^2+12x+12} & 3 \\ -7x^2-12x-11. & \end{array}$$

Таким образом, $R(x)=3-\dfrac{7x^2+12x+11}{(x+2)(x^2+x+2)}$.

Теперь правильную дробь разложим на простейшие дроби:

$$\frac{7x^2+12x+11}{(x+2)(x^2+x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2},$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты. Найдем их (поступая по аналогии с решением задания 7):

$$\frac{7x^2+12x+11}{(x+2)(x^2+x+2)}=\frac{A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+x+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x+2)=7x^2+12x+11. \qquad (1)$$

Это равенство двух многочленов. Они равны при любом значении x, также как и при равенстве коэффициентов при соответствующих степенях x. Используем оба эти свойства. Возьмем $x=-2$. Тогда $4A=15$, $A=\frac{15}{4}$. Для нахождения B и C сравним коэффициенты при x^2 и x^0 многочленов из равенства (1):

$$\begin{matrix} x^2: \\ x^0: \end{matrix}\begin{cases} A+B=7, \\ 2A+2C=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=7-\frac{15}{4}=\frac{13}{4}, \\ 2C=11-\frac{15}{2}=\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\frac{13}{4}, \\ C=\frac{7}{4}. \end{cases}$$

Тогда исходная дробь примет вид

$$R(x)=\frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x^2+x+2)}=3-\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{13x+7}{x^2+x+2}.$$

Решение типового варианта «Интегральное исчисление функций одной переменной»

Задание 1

Вычислите неопределенный интеграл $I = \int \left(\frac{1}{9-x^2} + \frac{x\cos x + \sqrt{x} + 4}{x} \right) dx.$

Решение

Представим данный интеграл I в виде суммы интегралов:

$$I = \int \frac{dx}{9-x^2} + \int \cos x dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int \frac{4}{x} dx.$$

Используя соответствующие табличные интегралы, получим

$$I = \frac{1}{2\cdot 3} \ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + \sin x + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 4\ln|x| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + \sin x + 2\sqrt{x} + 4\ln|x| + C.$$

Задание 2

Найдите неопределенный интеграл $I = \int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x + 1)}.$

Решение

Так как $d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$, запишем исходный интеграл в виде

$$I = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{3\operatorname{tg} x + 1}.$$

Обозначив $\operatorname{tg} x = u$, получим

$$I = \int \frac{du}{3u+1} = \frac{1}{3}\ln|3u+1| = \frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg} x + 1| + C.$$

Задание 3

Вычислите неопределенный интеграл $I = \int x^2 \operatorname{arctg} x dx.$

Решение

Для нахождения интеграла I воспользуемся методом интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du.$

В нашем случае пусть $\operatorname{arctg} x = u$, тогда $x^2 dx = dv$, $v = \frac{x^3}{3}$.

Таким образом,

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^3}{3} d(\operatorname{arctg} x) = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{1+x^2}.$$

Схема вычисления последнего интеграла описана ниже.

Неправильную рациональную дробь $\frac{x^3}{x^2+1}$ представим в виде суммы ее целой части и правильной дроби. Для этого разделим числитель на знаменатель «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 & x^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+x} & x - \text{целая часть} \\ -x & \end{array}$$

$-x$ – остаток.

В итоге неправильную дробь запишем в виде, более удобном для интегрирования: $\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$.

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \int x dx - \int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln\left| x^2+1 \right| + C.$$

Окончательно получаем

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln(x^2+1)}{2} \right) + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{\ln(x^2+1)}{6} + C.$$

Задание 4

Найдите $\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x} dx$.

Решение

Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью. Разделив числитель на знаменатель, представим ее в виде

$$\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x} = x - 2 + \frac{2x^2+10x-5}{x^3+2x^2+5x}.$$

Полученную правильную дробь разложим на простейшие рациональные дроби:

$$\frac{2x^2+10x-5}{x(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5},$$

которые приведем к общему знаменателю

$$\frac{A(x^2+2x+5)+(Bx+C)x}{x(x^2+2x+5)}=\frac{x^2(A+B)+x(2A+C)+5A}{x(x^2+2x+5)}.$$

В итоге получаем равенство двух рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

$$\frac{2x^2+10x-5}{x(x^2+2x+5)}=\frac{x^2(A+B)+x(2A+C)+5A}{x(x^2+2x+5)},$$

из которого следует равенство числителей этих дробей

$$2x^2+10x-5=(A+B)x^2+(2A+C)x+5A.$$

Последнее равенство равносильно равенству коэффициентов при одинаковых степенях x для равных многочленов: коэффициенты при $x^2: 2=A+B$, при $x:10=2A+C$, свободные члены: $-5=5A$.

Отсюда следует: $A=-1; C=12; B=3$.

Таким образом, подынтегральная функция принимает вид

$$\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}=x-2-\frac{1}{x}+\frac{3x+12}{x^2+2x+5},$$

а сам интеграл представляется в виде суммы более простых интегралов:

$$\int\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx=\int(x-2)dx-\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{3x+12}{x^2+2x+5}dx=$$

$$=\frac{(x-2)^2}{2}-\ln|x|+\int\frac{3(x+1)+9}{(x+1)^2+4}dx=\frac{(x-2)^2}{2}-\ln|x|+3\int\frac{x+1}{(x+1)^2+4}d(x+1)+$$

$$+9\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}=\frac{(x-2)^2}{2}-\ln|x|+\frac{3}{2}\ln\left((x+1)^2+4\right)+\frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Задание 5

Вычислите интеграл $\int\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

Решение

Данный интеграл относится к иррациональным интегралам вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}},..., \sqrt[n_s]{x^{m_s}}\right)dx,$ которые сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $x=t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, ..., n_s$. В нашем случае наименьшее общее кратное чисел $n_1=2$ и $n_2=3$ равно 6, поэтому применяем подстановку $x=t^6$.

$$\int_0^{64}\frac{\sqrt[3]{x}dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=\left|\begin{array}{l} x=t^6,\, dx=6t^5dt\\ \sqrt{x}=\left(t^6\right)^{\frac{1}{2}}=t^3\\ \sqrt[3]{x}=\left(t^6\right)^{\frac{1}{3}}=t^2,\, t=\sqrt[6]{x}\\ \left|\frac{x}{t}\right|\frac{1}{1}\left|\frac{64}{2}\right| \end{array}\right|=\int_1^2\frac{t^2\cdot 6t^5dt}{t^6(t^3+t^2)}=6\int_1^2\frac{t^7dt}{t^6\cdot t^2(t+1)}=$$

$$=6\int_1^2\frac{dt}{t(t+1)}=6\left(\int_1^2\frac{dt}{t}-\int_1^2\frac{dt}{t+1}\right)=6\left(\ln|t|\Big|_1^2-\ln|t+1|\Big|_1^2\right)=6(\ln 2-(\ln 3-\ln 2))=$$

$$=6(\ln 4-\ln 3)=6\ln\frac{4}{3}.$$

Задание 6

Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Решение

Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$t=tg\frac{x}{2},\quad x=2\,\mathrm{arctg}\,t,\quad dx=\frac{2tdt}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\left|\frac{x}{t}\right|\frac{0}{0}\left|\frac{\pi/2}{1}\right|=\int_0^1\frac{2dt}{\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot(1+t^2)}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+t+2}=$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\mathrm{arctg}\,3-\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}\right).$$

Задание 7.1

Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{-\pi/10}^{\pi/10}((x^2+x^4)\cdot\sin^3 x+\pi)\,dx.$

Решение

Воспользуемся тем, что интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int_{-\pi/10}^{\pi/10} (x^2+x^4)\cdot\sin^3 x dx + \int_{-\pi/10}^{\pi/10} \pi dx.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=(x^2+x^4)\sin^3 x.$ Она является нечетной, так как $f(-x)=-f(x)$: $((-x)^2+(-x)^4)\cdot\sin^3(-x)=(x^2+x^4)\cdot(-\sin^3 x)=$ $=-(x^2+x^4)\cdot\sin^3 x.$

Согласно свойству определенного интеграла от нечетной функции по промежутку, симметричному относительно нуля, заключаем:

$$\int_{-\pi/10}^{\pi/10} (x^2+x^4)\cdot\sin^3 x = 0.$$

Вычислим $\displaystyle\int_{-\pi/10}^{\pi/10} \pi dx = 2\pi\int_{0}^{\pi/10} dx = 2\pi x\Big|_0^{\pi/10} = \frac{2\pi^2}{5}.$

Задание 7.2

Вычислите определенный интеграл, используя свойства подынтегральной функции:

$$\int_{-\pi/7}^{3\pi/28} \left(\frac{\sin^2 8x}{\cos^4 8x} + \sin(9\pi+7x)\right) dx.$$

Решение

Запишем исходный интеграл как сумму двух интегралов I_1 и I_2:

$$\int_{-\pi/7}^{3\pi/28} \frac{\sin^2 8x}{\cos^4 8x} dx + \int_{-\pi/7}^{3\pi/28} \sin(9\pi+7x) dx = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим интеграл $I_1 = \displaystyle\int_{-\pi/7}^{3\pi/28} \frac{\sin^2 8x}{\cos^4 8x} dx.$

Заметим, что длина промежутка интегрирования равна $\dfrac{3\pi}{28}-\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)=\dfrac{7\pi}{28}=\dfrac{\pi}{4}$, при этом число $\dfrac{\pi}{4}$ является периодом как функции $\sin^2 8x$, так и функции $\cos^4 8x$. Из теории известно, что если T – период функции $f(x)$, то для любого промежутка $[a;b]$ длиной T выполняется равенство $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$ Для нашего случая это позволяет «улучшить» пределы интегрирования в интеграле I_1, т. е.

$$I_1=\int\limits_{-\pi/7}^{3\pi/28}\frac{\sin^2 8x}{\cos^4 8x}dx=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin^2 8x}{\cos^4 8x}dx=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin^2 8x}{\cos^2 8x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 8x}=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^2 8x\cdot\frac{1}{8}d\operatorname{tg}8x=\frac{1}{8}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3 8x}{3}\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{1}{24}(\operatorname{tg}^3 2\pi-\operatorname{tg}^3 0)=0.$$

Рассмотрим теперь интеграл $I_2=\int\limits_{-\pi/4}^{3\pi/28}\sin(9\pi+7x)dx.$

Упростим подынтегральную функцию, используя ее периодичность:
$\sin(9\pi+7x)=\sin(4\cdot 2\pi+\pi+7x)=\sin(\pi+7x)=-\sin 7x.$

Значит, $I_2=\int\limits_{-\pi/7}^{3\pi/28}-\sin 7x dx=-\left(\int\limits_{-\pi/7}^{\pi/7}\sin 7x dx+\int\limits_{\pi/7}^{3\pi/28}\sin 7x dx\right).$

Первый из интегралов равен нулю, как интеграл от нечетной функции $\sin 7x$ по симметричному промежутку $\left[-\frac{\pi}{7};\frac{\pi}{7}\right].$

Вычислим второй из интегралов:

$$\int\limits_{\pi/7}^{3\pi/28}\sin 7x dx=-\frac{1}{7}(\cos 7x)\Bigg|_{\frac{\pi}{7}}^{\frac{3\pi}{28}}=\frac{1}{7}\left(\cos 7\frac{3\pi}{28}-\cos 7\frac{\pi}{7}\right)=\frac{1}{7}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-\cos\pi\right)=$$

$$=\frac{1}{7}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right).$$

В итоге $I_1+I_2=\frac{1}{\sqrt{7}}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

Задание 8

Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(2x+5)^2}.$

Решение

В соответствии с формулой $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ запишем

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(2x+5)^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{(2x+5)^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^b\frac{d(2x+5)}{(2x+5)^2}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b (2x+5)^{-2}d(2x+5) = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x+5}\right)\Bigg|_0^b =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2b+5}-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}.$$

Таким образом, данный несобственный интеграл сходится и равен $\frac{1}{10}$.

Задание 9

Исследуйте сходимость несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \sqrt[3]{x^4}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

Решение

Подынтегральная функция положительна для любого $x \in [1; +\infty]$ и является бесконечно малой при $x \to +\infty$. Действительно,

$$\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}} \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{x^4}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x^3}} \sim \sqrt[3]{x^4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} = \frac{1}{x^{1/6}} \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Поскольку эталонный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ расходится при $\alpha < 1$, исследуемый интеграл расходится в соответствии с признаком сравнения в эквивалентной форме.

Задание 10

Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9x-3x^2}}$.

Решение

Подынтегральная функция является неограниченной в правой окрестности точки $x = 0$. Поэтому в соответствии с формулой $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ запишем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9x-3x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^b \frac{dx}{\sqrt{9x-3x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^b \frac{dx}{\sqrt{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right)}} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\left.\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right)\right|_{\varepsilon}^{1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\left.\left(\frac{2x}{3}-1\right)\right|_{\varepsilon}^{1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)-\arcsin\left(\frac{2\varepsilon}{3}-1\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\arcsin\frac{1}{3}-\arcsin(-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arcsin 1-\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right).$$

Задание 11

Исследуйте сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{3}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x)$ неотрицательна на промежутке $[1;3]$ и является бесконечно большой при $x\to 1+0$. Определим порядок роста этой функции относительно бесконечно большой функции $g(x)=\frac{1}{x-1}$ при $x\to 1+0$.

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)}{(g(x))^{\lambda}}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}:\frac{1}{(x-1)^{\lambda}}=\lim_{x\to 1+0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}}:\frac{1}{(x-1)^{\lambda}}=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\cdot\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-1)^{\lambda}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\lim_{x\to 1+0}(x-1)^{\lambda-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\text{ при }\lambda=\frac{2}{3}.$$

Поскольку $\lambda<1$, данный интеграл сходится в силу предельного признака сравнения. (Для сравнения использована функция $\frac{1}{(x-a)^{2/3}}$. Известно, что $\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\lambda}}$ сходится при $\lambda<1$ и расходится при $\lambda\geq 1$).

Задание 12.1

Найдите главное значение несобственного интеграла первого рода $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{7x+3}{5x^2+8}dx.$

Решение

Найдем главное значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{7x+3}{5x^2+8}dx$ по определению:

$$V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{7x+3}{5x^2+8}dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A} \frac{7x+3}{5x^2+8}dx.$$

Так как $\frac{7x+3}{5x^2+8} = \frac{7x}{5x^2+8} + \frac{3}{5x^2+8}$, причем функция $\frac{7x}{5x^2+8}$ является нечетной, а функция $\frac{3}{5x^2+8}$ – четной, то в соответствии со свойствами интегралов от четных и нечетных функций по симметричному промежутку $[-A; A]$ запишем

$$\int\limits_{-A}^{A} \frac{7x+3}{5x^2+8}dx = \int\limits_{-A}^{A} \frac{7x}{5x^2+8}dx + \int\limits_{-A}^{A} \frac{3}{5x^2+8}dx = 0 + 2\int\limits_{0}^{A} \frac{3dx}{5x^2+8} = 6\int\limits_{0}^{A} \frac{dx}{5x^2+8}.$$

Тогда $V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{7x+3}{5x^2+8}dx = 6\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{0}^{A} \frac{dx}{5x^2+8} = 6\lim\limits_{A\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{5x}{2\sqrt{10}}\Bigg|_0^A =$

$$= \frac{6}{2\sqrt{10}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2\sqrt{10}}.$$

Задание 12.2

Найдите главное значение несобственного интеграла второго рода $\int\limits_{4}^{7} \frac{4x+6}{x-5}dx.$

Решение

Особой точкой подынтегральной функции является $x = 5$. В этом случае главное значение интеграла $\int\limits_{4}^{7} \frac{4x+6}{x-5}dx$ по определению равно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{4}^{5-\varepsilon} \frac{4x+6}{x-5}dx + \int\limits_{5+\varepsilon}^{7} \frac{4x+6}{x-5}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{4}^{5-\varepsilon}\left(4+\frac{26}{x-5}\right)dx + \int\limits_{5+\varepsilon}^{7}\left(4+\frac{26}{x-5}\right)dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left((4x+26\ln|x-5|)\Big|_4^{5-\varepsilon} + (4x+26\ln|x-5|)\Big|_{5+\varepsilon}^{7}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}(4(5-\varepsilon)+26\ln\varepsilon -$$

$$-16-26\ln 1+4\cdot 7+26\ln 2-4(5+\varepsilon)-26\ln\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}(4(5-\varepsilon)-4(5+\varepsilon)+12+$$

$$+26\ln 2) = \lim_{\varepsilon\to 0}(-8\varepsilon)+12+26\ln 2 = 12+26\ln 2.$$

Задание 13.1

Найдите:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями $x = -1,\ x = 4,\ y = 0$ и графиком функции $y = \dfrac{1}{5x^2 + 3x + 4}$;

б) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной этой осью, а также прямыми $x = -1,\ x = 4$ и графиком функции $y = 5x^2 + 3x + 4.$

Решение

1. Площадь фигуры, границы которой заданы уравнениями в декартовой системе координат, находится по формуле

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y(x)dx = \int_{-1}^{4} \frac{dx}{5x^2 + 3x + 4} = \frac{1}{5}\int_{-1}^{4} \frac{d(x+0{,}3)}{(x+0{,}3)^2 + \left(\frac{\sqrt{71}}{10}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{\sqrt{71}} \operatorname{arctg} \frac{10(x+0{,}3)}{\sqrt{71}}\Bigg|_{-1}^{4} = \frac{2}{\sqrt{71}}\left(\operatorname{arctg}\frac{43}{\sqrt{71}} + \operatorname{arctg}\frac{7}{\sqrt{71}}\right).$$

2. Объем тела, полученного вращением фигуры вокруг оси Ox, находится по формуле

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x)dx = \pi \int_{-1}^{4} (5x^2 + 3x + 4)^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{4} (25x^4 + 9x^2 + 16 + 2 \cdot 5x^2 \cdot 3x + 2 \cdot 5x^2 \cdot 4 + 2 \cdot 3x \cdot 4)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{25}{5}x^5 + \frac{9}{3}x^3 + 16x + \frac{30}{4}x^4 + \frac{40}{3}x^3 + \frac{24}{2}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{4} = 8359\frac{1}{6}\pi.$$

Задание 13.2

Найдите:

а) длину дуги циклоиды $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

б) площадь S криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x_1 = x\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\ x_2 = x\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ и дугой циклоиды $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$.

Решение

1. Длина дуги L кривой, заданной параметрически, определяется по формуле

$$L=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt \Rightarrow \text{ для нашего случая}$$

$$L=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{(6(1-\cos t))^2+(6\sin t)^2}\,dt=6\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=12\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-24\left(\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}=-24\left(\cos\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{8}\right)=-24\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\frac{\pi}{8}\right)=12\sqrt{2}+24\cos\frac{\pi}{8}.$$

2. Найдем площадь криволинейной трапеции по формуле

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot x'(t)\,dt=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}6(1-\cos t)\cdot 6(1-\cos t)\,dt=36\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=36\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=36\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}}=$$

$$=36\left(\frac{3}{2}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-2\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{4}(0-1)\right)=36\left(\frac{15\pi}{8}+\frac{7}{4}+\sqrt{2}\right)\approx 335.$$

Задание 13.3

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho_1=12(1+\cos\varphi)$ и $\rho_2=12\cos\varphi$, заданными в полярной системе координат, и лучами $\varphi_1=\dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi_2=\dfrac{\pi}{2}$. Сделайте рисунок.

2. Найдите длину L дуги линии $\rho_1=12(1+\cos\varphi)$, если $\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

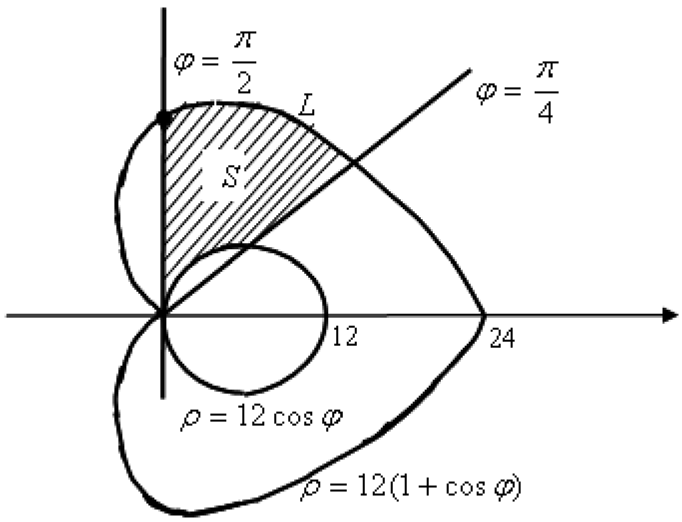

Рис. 1

Решение

1. В соответствии с рис. 1 искомую площадь можно вычислить с помощью следующих интегралов:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho_1^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho_2^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (12\,(1+\cos\varphi)^2)d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (12\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 144(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi-\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= 72\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos\varphi)d\varphi = 72(\varphi+2\sin\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 18\pi + 144\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 98{,}7.$$

2. Для вычисления длины дуги кривой, заданной в полярной системе координат, используем формулу

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{144(1+\cos\varphi)^2 + 144\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi = 24\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 48\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 48\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{8}\right) \cong 15{,}57.$$

Решение типового варианта
«Дифференциальное исчисление функций многих переменных»

Задание 1

Для функции $z = \dfrac{\sqrt{y - x^2 + 4}}{\sqrt{9 + x - y^2}}$:

1) найдите область определения и изобразите ее на плоскости;
2) проанализируйте, является ли найденная область ограниченной, связной, замкнутой;
3) укажите линии (точки) разрыва функции z, если они существуют.

Решение

1. Областью определения функции $z = \dfrac{\sqrt{y - x^2 + 4}}{\sqrt{9 + x - y^2}}$ является множество решений системы неравенств $\begin{cases} y - x^2 + 4 \ge 0, \\ 9 - y^2 + x > 0. \end{cases}$

Изобразим на плоскости xOy множество точек, удовлетворяющих уравнению $y - x^2 + 4 = 0$, т. е. параболу $y = x^2 - 4$, ветви которой направлены вверх, вершина находится в точке (0; –4), точки пересечения с осями координат: (0; –4), (–2; 0), (2; 0). А также множество точек, удовлетворяющих уравнению $9 - y^2 + x = 0$, т. е. параболу $x = y^2 - 9$ с вершиной в точке (–9; 0), ветви которой направлены вправо. Парабола имеет следующие точки пересечения с осями координат: (–9; 0), (0; 3), (0; –3).

Область определения $D(z)$ функции $z = \dfrac{\sqrt{y - x^2 + 4}}{\sqrt{9 + x - y^2}}$ заштрихована на рис. 1 $D(z) = D_1 \cap D_2$, где

$D_1 = \left\{ (x; y) \middle| \, y - x^2 + 4 \ge 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ и

$D_2 = \left\{ (x; y) \middle| \, 9 - y^2 + x > 0, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

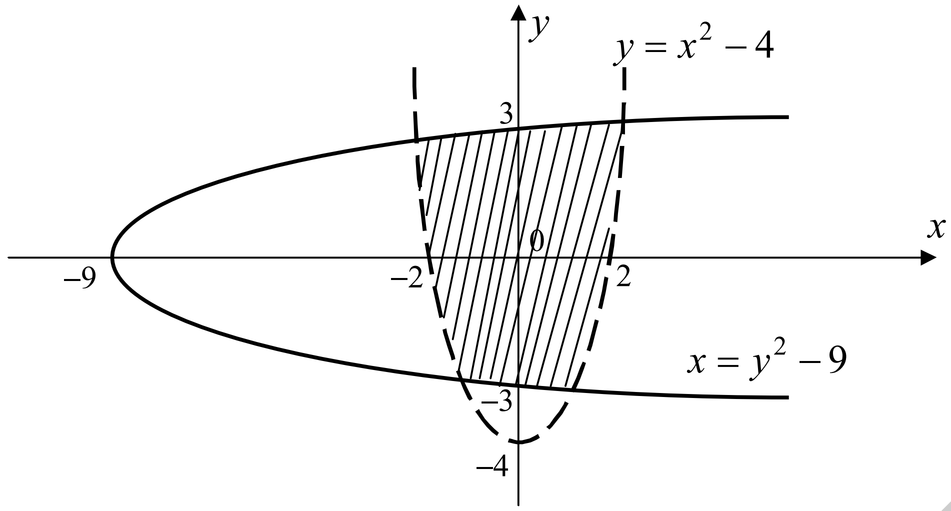

Рис. 1

2. Область определения данной функции является ограниченным, связным и незамкнутым множеством.

3. Точки разрыва функции z заполняют параболу $x = y^2 - 9$.

Задание 2.1

Для функции $z = x^2 - 4x + y^2 + 6x$ напишите уравнение линий уровня и охарактеризуйте тип полученных кривых.

Решение

Уравнения линий уровня имеют вид $x^2 - 4x + y^2 + 6x = C$, где C – произвольная постоянная. Для определения типа этих кривых второго порядка выделим полные квадраты по переменным x и y: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = C + 13$. Тогда при $C < -13$ уравнение определяет пустое множество, при $C = -13$ – точку (2;–3), а при $C > -13$ – окружности с центром в точке (2; –3) и радиусом $\sqrt{C+13}$. Таким образом, функция $z = x^2 - 4x + y^2 + 6x$ принимает постоянные значения в точке (2; –3) и на концентрических окружностях $(x-2)^2 + (y+3)^2 = C + 13$, изображенных на рис. 2.

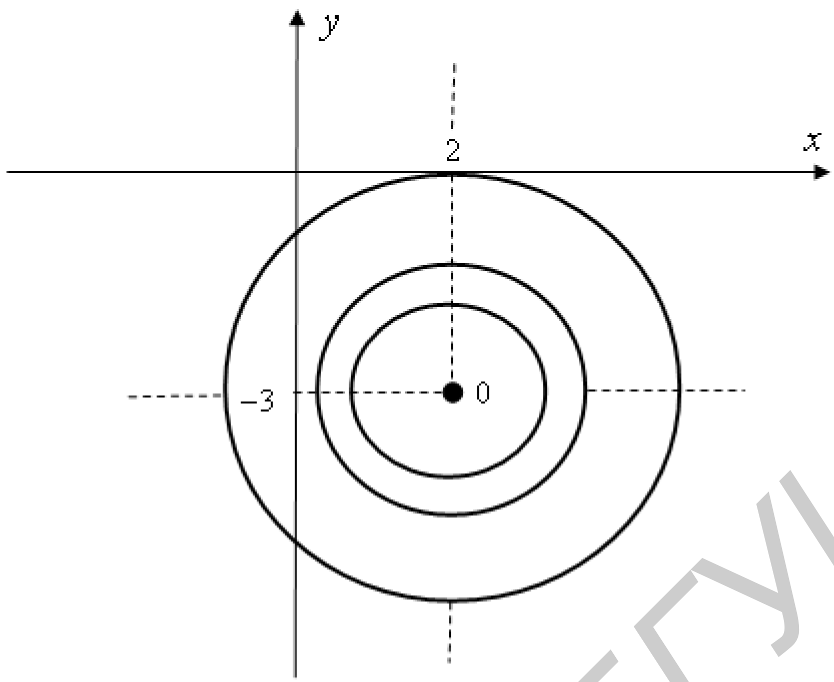

Рис. 2

Задание 2.2

Для функции $u = z - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ напишите уравнения поверхностей уровня и охарактеризуйте тип этих поверхностей.

Решение

Уравнения поверхностей уровня имеют вид $z - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = C$, где C – произвольная постоянная. Как известно, уравнение $z - C = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ является каноническим уравнением эллиптического параболоида с вершиной в точке (0; 0; C). Построим поверхность $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ уровня $C = 0$ методом сечений. Сечением этой поверхности плоскостью $y = 0$ является парабола $z = \frac{x^2}{4}$, плоскостью $x = 0$ – парабола $z = \frac{y^2}{9}$, а плоскостью $z = 1$ – эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 3$. Поверхность $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ схематически изображена на рис. 3.

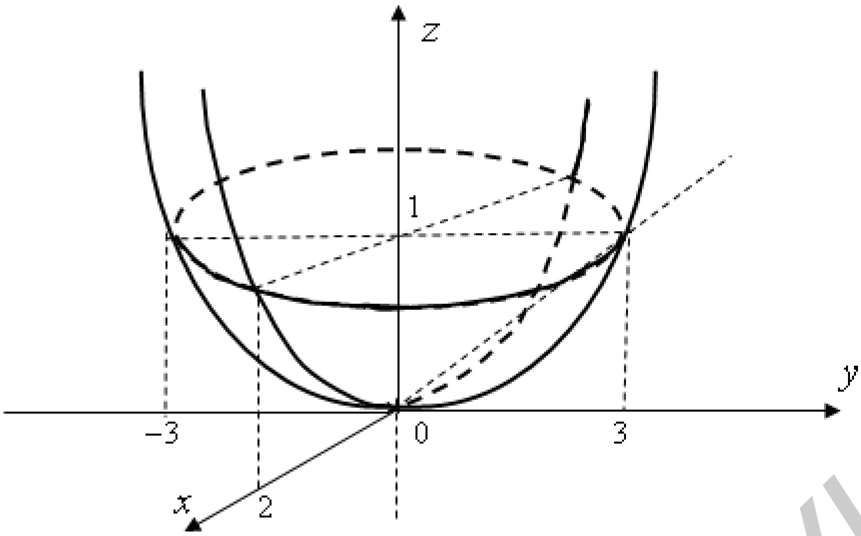

Рис. 3

Задание 3

Найдите предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, если он существует:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to -2}} \dfrac{(x^2 + 4x - 12)(y + 6)}{x^2 - 4}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ y \to 1}} \dfrac{\operatorname{tg}(x + 3)}{xy - 3 - x + 3y}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2}{x^2 - 5xy}$.

Решение

1. Вычислим $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to -2}} \dfrac{(x^2 + 4x - 12)(y + 6)}{x^2 - 4}$.

Так как $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to -2}} (x^2 + 4x - 12)(y + 6) = 0$ и $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to -2}} (x^2 - 4) = 0$, то для нахождения этого предела необходимо раскрыть неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Для этого при условии $\begin{cases} x \neq 2, \\ y \neq -2 \end{cases}$ преобразуем функцию, стоящую под знаком предела:

$$\frac{(x^2 + 4x - 12)(y + 6)}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 6)(y + 6)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{(x + 6)(y + 6)}{(x + 2)},$$

тогда

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to -2}} \frac{(x^2+4x-12)(y+6)}{x^2-4} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to -2}} \frac{(x+6)(y+6)}{(x+2)} = \frac{8\cdot 4}{4} = 8.$$

2. Вычислим $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 1}} \dfrac{\operatorname{tg}(x+3)}{xy+3+x+3y}$.

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 1}} \operatorname{tg}(x+3)=0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 1}} (xy+3+x+3y)=0,$ то для нахождения данного предела необходимо раскрыть неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Воспользуемся замечательным пределом $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,$ из которого следует, что $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$. Таким образом, $tg(x+3)\sim(x+3)$ при $(x+3)\to 0$ $(\Leftrightarrow x\to -3)$.

Разложим знаменатель на множители:

$xy+3+x+3y = x(y+1)+3(y+1)=(x+3)(y+1).$

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 1}} \dfrac{\operatorname{tg}(x+3)}{xy+3+x+3y} = \lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 1}} \dfrac{x+3}{(x+3)(y+1)} = \dfrac{1}{2}.$

3. Вычислим $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2}{x^2-5xy}$.

Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2=0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2-5xy)=0,$ то для нахождения данного предела необходимо раскрыть неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

В соответствии с определением предела функции двух переменных, если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ существует, то он не зависит от способа стремления точки M к точке M_0. Покажем, что данный предел не существует.

Пусть точка M стремится к точке $M_0(0;0)$ по прямой $y=kx,$ т. е. M имеет координаты $(x;kx),$ при этом $x\to 0.$ В этом случае

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{x^2-5xy} = \left\{\begin{matrix} y=kx \\ y\to 0 \Leftrightarrow x\to 0 \end{matrix}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2-5x\cdot(kx)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2-5kx^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1-5k)} = \frac{1}{1-5k}.$$

Поскольку полученный ответ зависит от углового коэффициента k прямой $y = kx$, а значит, определяется способом стремления точки M к точке M_0, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2}{x^2 - 5xy}$ не существует.

Задание 4

Для функции $z = \dfrac{x}{y} - \ln\dfrac{y}{x}$, точки $M_0(2;\,2)$ и вектора $\bar{a} = 12\bar{j} - 5\bar{i}$ найдите:

1) градиент функции в точке M_0;

2) производную в точке M_0 по направлению вектора $\bar{a}$;

3) скорость изменения функции в точке M_0.

Решение

1. Поскольку $\overline{\operatorname{grad}}\, z(M) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}(M);\, \dfrac{\partial z}{\partial y}(M)\right)$, найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{x}{y} - \ln\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{y} - \frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{y} + \frac{1}{x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{x}{y} - \ln\frac{y}{x}\right)'_y = -\frac{x}{y^2} - \frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -\frac{2}{2^2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Таким образом, $\overline{\operatorname{grad}}\, z(M_0) = (1;\,-1)$ и направление этого вектора является направлением наибольшего возрастания функции $z = \dfrac{x}{y} - \ln\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0(2;\,2)$.

2. Для нахождения производной функции z в точке M_0 по направлению вектора $\bar{a}$ используем формулу $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{a}}(M_0) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0)\cdot\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0)\cos\beta$,

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – координаты орта $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Поскольку $|\bar{a}| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$, то $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \left(-\dfrac{5}{13};\ \dfrac{12}{13}\right) = (\cos\alpha;\ \cos\beta)$.

Тогда, учитывая найденные значения $\dfrac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -1$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}(M_0) = 1 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + (-1) \cdot \frac{12}{13} = -\frac{5}{13} - \frac{12}{13} = -\frac{17}{13}.$$

3. Поскольку $\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}(M_0) = -\frac{17}{13} < 0,$ скалярное поле, заданное функцией $z = \frac{x}{y} - \ln\frac{y}{x}$, убывает в точке $M_0(2;\,2)$ по направлению вектора $\bar{a} = 12\bar{j} - 5\bar{i}$ со скоростью $\frac{17}{13}$.

Задание 5

Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z^2 = x \cdot \ln(1 + x + y + z^2) + 2z$ в точке $M_0(-1;\,y_0;\,2)$.

Решение

Поверхность задана неявно уравнением $F(x,\,y,\,z) = 0$, где $F(x,\,y,\,z) = z^2 - 2z - x\ln(1 + x + y + z^2)$. Найдем ординату y_0 точки M_0, подставив в уравнение поверхности известные абсциссу $x_0 = -1$ и аппликату $z_0 = 2$ этой точки:

$$2^2 = -\ln(1 - 1 + y_0 + 2^2) + 2 \cdot 2 \Leftrightarrow \ln(y_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln(y_0 + 4) = \ln 1 \Leftrightarrow y_0 + 4 = 1 \Leftrightarrow y_0 = -3.$$

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $F(x,\,y,\,z) = 0$, в точке M_0 имеют вид (соответственно):

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0 \quad \text{и}$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)},$$

где $M_0(-1;\,-3;\,2)$.

Найдем частные производные функции $F(x,\,y,\,z)$:

$$F'_x = (z^2 - 2z - x\ln(1 + x + y + z^2))'_x = -\ln(1 + x + y + z^2) - \frac{x}{1 + x + y + z^2};$$

$$F'_x(M_0) = -\ln(1 - 1 - 3 + 4) - \frac{-1}{1 - 1 - 3 + 2^2} = 1;$$

$$F'_y = (z^2 - 2z - x\ln(1 + x + y + z^2))'_y = -\frac{x}{1 + x + y + z^2}, \qquad F'_y(M_0) = 1;$$

$$F'_z = (z^2 - 2z - x\ln(1 + x + y + z^2))'_z = 2z - 2 - \frac{2xz}{1 + x + y + z^2}, \qquad F'_z(M_0) = 6.$$

Теперь можно составить уравнение касательной плоскости:

$1 \cdot (x - (-1)) + 1(y - (-3)) + 6(z - 2) = 0$ или $x + y + 6z - 8 = 0$

и уравнение нормали:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{6}.$$

Задание 6

Найдите углы, которые образует с осями координат вектор нормали, проведенный в точке $M_0(1;0;2)$ к поверхности, заданной неявно уравнением $4x^3+y^3-z^2+3xyz=0$.

Решение

Найдем координаты вектора нормали $\overline{n}(M_0)$ к поверхности, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$:

$$\overline{n}(M_0)=(F'_x(M_0),\,F'_y(M_0),\,F'_z(M_0));$$

$$F'_x=(4x^3+y^3-z^2+3xyz)'_x=12x^2+3yz,\qquad F'_x(M_0)=12;$$

$$F'_y=(4x^3+y^3-z^2+3xyz)'_y=3y^2+3xz,\qquad F'_y(M_0)=6;$$

$$F'_z=(4x^3+y^3-z^2+3xyz)'_z=-2z+3xy,\qquad F'_z(M_0)=-4.$$

Таким образом, $\overline{n}(M_0)=(12;6;-4)$. Найдем длину и направляющие косинусы вектора $\overline{n}(M_0)$:

$$|\overline{n}(M_0)|=\sqrt{12^2+6^2+(-4)^2}=\sqrt{144+36+16}=\sqrt{196}=14.$$

$\cos\alpha=\dfrac{n_x}{|\overline{n}|}=\dfrac{12}{14}=\dfrac{6}{7}\Rightarrow\alpha=(\widehat{\overline{n},\overline{i}})=\arccos\dfrac{6}{7}$ – угол между вектором нормали и осью Ox.

$\cos\beta=\dfrac{n_y}{|\overline{n}|}=\dfrac{6}{14}=\dfrac{3}{7}\Rightarrow\beta=(\widehat{\overline{n},\overline{j}})=\arccos\dfrac{3}{7}$ – угол между вектором нормали и осью Oy.

$\cos\gamma=\dfrac{n_z}{|\overline{n}|}=-\dfrac{4}{14}=-\dfrac{2}{7}\Rightarrow\gamma=(\widehat{\overline{n},\overline{k}})=\arccos\left(-\dfrac{2}{7}\right)=\pi-\arccos\dfrac{2}{7}$ – угол между вектором нормали и осью Oz.

Задание 7

Разложите функцию $z=f(x,y)$ по формуле Тейлора второго порядка в окрестности указанной точки $M_0(x_0;y_0)$. Используйте это разложение для приближенного вычисления значения функции $z=f(x,y)$ в точке $M(x;y)$.

$$z=e^{x^2-y},\quad M_0(1;1),\quad M(1{,}01;0{,}98).$$

Решение

Формула Тейлора для функции z в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$ до членов второго порядка имеет вид

$$z(x,y) = z(x_0, y_0) + z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(z''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2z''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + z''_{yy}(y - y_0)^2\right) + R_2.$$

Найдем для данной функции $z = e^{x^2 - y}$ соответствующие частные производные и вычислим их значения в точке $M_0(1;1)$.

$$z(M_0) = e^0 = 1;$$
$$z'_x = e^{x^2-y} \cdot 2x, \quad z'_x(M_0) = 2e^0 = 2;$$
$$z'_y = e^{x^2-y} \cdot (-1), \quad z'_y(M_0) = -e^0 = -1;$$
$$z''_{xx} = 2 \cdot e^{x^2-y} + e^{x^2-y} \cdot (2x)^2, \quad z''_{xx}(M_0) = 2e^0 + 4e^0 = 6;$$
$$z''_{xy} = -2xe^{x^2-y}, \quad z''_{xy}(M_0) = -2e^0 = -2;$$
$$z''_{yy} = -e^{x^2-y} \cdot (-1) = e^{x^2-y}, \quad z''_{yy}(M_0) = e^0 = 1.$$

После подстановки найденных значений частных производных в формулу получим

$$e^{x^2 - y} = 1 + 2(x-1) - (y-1) + \frac{1}{2}\left(6(x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) + (y-1)^2\right) + R_2.$$

Найдем приближенное значение данной функции в точке $M(1{,}01; 0{,}98)$. Для этого подставим ее координаты в полученную формулу:

$$e^{(1,01)^2 - 0,98} \approx 1 + 2 \cdot 0{,}01 + 0{,}02 + \frac{1}{2}\left(6 \cdot 0{,}01^2 + 4 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}02 + 0{,}02^2\right) = 1{,}0409 \approx 1{,}04.$$

Ответ: $e^{x^2-y} = 1 + 2(x-1) - (y-1) + \frac{1}{2}\left(6(x-1)^2 - 4(x-1)(y-1) + (y-1)^2\right) + R_2$;

$z(M) \approx 1{,}04$.

Задание 8

Для функции $z = f(x, y)$ найдите:

1) полный дифференциал, если

а) x, y – независимые переменные;

б) x, y – функции независимых переменных u, v: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$;

2) локальные экстремумы;

3) наибольшее и наименьшее значения в области D;

4) условный экстремум, если переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $F(x, y) = 0$:

$z = 2x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 1; \quad x = v^2 \cdot \sin u, \quad y = uv\cos v.$

Решение

1. Полный дифференциал функции двух переменных имеет вид $dz = z_x^{/}dx + z_y^{/}dy$:

а) пусть x и y – независимые переменные. Найдем:

$z_x^{/} = 4x - 2y + 4,$

$z_y^{/} = -2y - 2x,$

$dz = z_x^{/}dx + z_y^{/}dy = (4x - 2y + 4)dx + (-2y - 2x)dy = 2(2x - y + 2)dx - 2(y + x)dy;$

б) пусть x, y – функции независимых переменных u, v: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, тогда

$dz = z_x^{/}dx + z_y^{/}dy = \left(z_x^{/} \cdot x_u^{/} + z_y^{/} \cdot y_u^{/}\right)du + \left(z_x^{/} \cdot x_v^{/} + z_y^{/} \cdot y_v^{/}\right)dv.$

Найдем частные производные $x_u^{/}, x_v^{/}, y_u^{/}, y_v^{/}$:

$x_u^{/} = v^2 \cos u, \quad x_v^{/} = 2v\sin u, \quad y_u^{/} = v\cos v, \quad y_v^{/} = u(\cos v - v\sin v).$

Тогда $dz = \left(2(2x - y + 2) \cdot v^2 \cos u - 2(y + x) \cdot v\cos v\right)du +$
$+ \left(2(2x - y + 2) \cdot 2v\sin u - 2(y + x) \cdot u(\cos v - v\sin v)\right)dv.$

2. Для нахождения локальных экстремумов решим систему $\begin{cases} z_x^{/} = 0, \\ z_y^{/} = 0 \end{cases}$ и найдем стационарные точки функции z. Затем с помощью достаточных условий экстремума проверим, являются ли они точками экстремума, и если – да, то какого.

Напомним достаточные условия существования локального экстремума.

Пусть точка M_0 – стационарная точка функции z, т. е. $z_x^{/}(M_0) = 0$ и $z_y^{/}(M_0) = 0.$ Введем обозначения:

$$A = z_{xx}^{//}(M_0), \quad B = z_{xy}^{//}(M_0), \quad C = z_{yy}^{//}(M_0), \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta > 0$, то точка M_0 является точкой экстремума, при этом:

1) M_0 – точка локального минимума, если $A > 0,$

2) M_0 – точка локального максимума, если $A < 0.$

Если $\Delta < 0,$ точка M_0 не является точкой локального экстремума.

Если $\Delta = 0,$ необходимы дополнительные исследования.

Находим стационарные точки функции z:

$$\begin{cases} z_x^{/} = 0, \\ z_y^{/} = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 2y + 4 = 0, \\ -2y - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}, \\ y = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, $A\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ – стационарная точка.

Найдем частные производные второго порядка данной функции:
$z_{xx}^{//} = 4$; $z_{xy}^{//} = -2$; $z_{yy}^{//} = -2$.

Составим и вычислим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 4 = -12$. Поскольку $\Delta < 0$, точка $A\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$ не является точкой экстремума.

Таким образом, данная функция не имеет локальных экстремумов.

3. Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в некоторой замкнутой ограниченной области D необходимо:

а) найти стационарные точки функции, принадлежащие области D, и вычислить в них значения функции;

б) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D;

в) из всех найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Как показано в п. 2, рассматриваемая функция не имеет локальных экстремумов. Изучим ее поведение на границах области D.

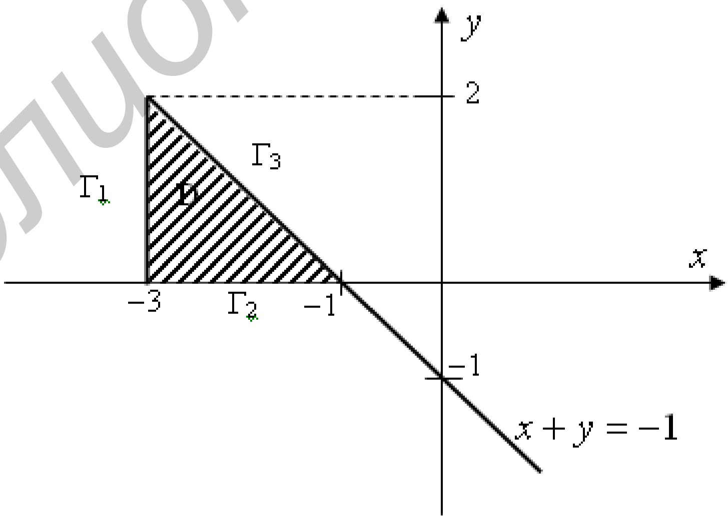

Рис. 4

1. Пусть Γ_1 – отрезок прямой $x = -3$, $y \in [0; 2]$.

Исследуем вид и поведение функции z на этой границе. При $x = -3$ $z(y) = -y^2 + 6y + 7$.

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $z(y)$ одной переменной y на отрезке $[0; 2]$.

$z'_y = -2y + 6, \quad z'_y = 0 \Leftrightarrow -2y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = 3.$

Поскольку $y = 3 \notin [0; 2]$, вычислим значения функции $z(y) = -y^2 + 6y + 7$ на концах отрезка $[0; 2]$.

$z(0) = 7; \quad z(2) = 15.$

2. Перейдем к границе Γ_2 : $y = 0, \quad x \in [-3; -1]$.

Подставляя $y = 0$ в функцию $z = 2x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 1$, получаем $z(x) = 2x^2 + 4x + 1, \quad x \in [-3; -1]$.

$z'_x = 4x + 4, \;\; z'_x = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Вычислим значение $z(-1) = -1$ и значение этой функции на конце отрезка $z(-3) = 7$.

3. Перейдем к границе Γ_3 : $y = -1 - x, \quad x \in [-3; -1]$.

Подставляя $y = -1 - x$ в исследуемую функцию $z = 2x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 1$, получаем

$z(x) = 3x^2 + 4x, \;\; x \in [-3; -1];$

$z'_x = 6x + 4, \;\; z'_x = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}.$

Точка $x = -\dfrac{2}{3}$ не принадлежит отрезку $[-3; -1]$:

Найдем значения функции $z(x)$ на концах отрезка $[-3; -1]$:

$z(-3) = 15; \;\; z(-1) = -1.$

Подведем окончательные итоги: среди найденных значений $z(-1; 0) = -1$, $z(-3; 0) = 7$, $z(-3; 2) = 15$ выберем наибольшее и наименьшее значения исследуемой функции в области D:

$z_{\text{наиб}} = z(-3; 2) = 15; \quad z_{\text{наим}} = z(-1; 0) = -1.$

4. Для нахождения условного экстремума составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda F(x, y)$ и исследуем ее на локальный экстремум, который для функции $z(x, y)$ будет условным экстремумом.

Найдем стационарные точки функции Лагранжа:

$L(x, y, \lambda) = 2x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 1 + \lambda(x + y + 1);$

$L'_x = 4x - 2y + 4 + \lambda, \;\; L'_y = -2y - 2x + \lambda, \;\; L'_\lambda = x + y + 1.$

$$\begin{cases} 4x-2y+4+\lambda=0, \\ -2y-2x+\lambda=0, \\ x+y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{2}{3}, \\ y=-\dfrac{1}{3}, \\ \lambda=-2. \end{cases}$$

Точка $M\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ является единственной точкой возможного условного экстремума. Чтобы выяснить, является ли она точкой условного экстремума, найдем в этой точке второй дифференциал функции Лагранжа. Если $d^2L(M)>0$ при всех значениях $dx,\ dy,$ не равных нулю одновременно, то это точка условного минимума, если при тех же условиях $d^2L(M)<0,$ то M – точка условного максимума.

Формула для d^2L имеет вид

$$d^2L=L_{xx}^{//}dx^2+2L_{xy}^{//}dxdy+L_{yy}^{//}dy^2.$$

Так как $L_{xx}^{//}(M)=4;\ \ L_{xy}^{//}(M)=-2;\ \ L_{yy}^{//}(M)=-2,$ то

$$d^2L(M)=4dx^2-4dxdy-2dy^2.$$

Для выяснения знака $d^2L(M)$ используем связь между dx и dy, которая выражается уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0,$$

где $F=x+y+1$ – левая часть уравнения связи $F(x,y)=0$.

В нашем случае $F_x^{/}=1,\ \ F_y^{/}=1,$ значит, $dx+dy=0,$ т. е. $dx=-dy.$ С учетом этого условия $d^2L(M)$ можно переписать в виде

$$d^2L(M)=4dx^2-4dxdy-2dy^2\Big|_{dx=-dy}=4dy^2+4dy^2-2dy^2=6dy^2>0,$$

если $dy\neq 0.$

Значит, точка $M\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ является точкой условного минимума, а сам условный минимум равен

$$z_{\text{усл min}}=z\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)=-\frac{11}{9}.$$

Решение типового варианта «Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений»

Задание 1

Выясните, являются ли функции $y_1=(x+1)e^{-x}$ и $y_2=xe^{-x}$ решениями дифференциального уравнения $xydx+(x+1)dy=0$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

Решение.

По определению, функция y является решением данного дифференциального уравнения на промежутке $(-\infty;+\infty)$, если подстановка этой функции в уравнение обращает его в верное тождество по x на этом промежутке.

Разделим уравнение на dx, чтобы получить уравнение, содержащее производную $\dfrac{dy}{dx}$: $\quad xy+(x+1)\dfrac{dy}{dx}=0.$

Найдем производные данных функций y_1 и y_2:

$y_1'=e^{-x}+(x+1)e^{-x}(-1)=e^{-x}(1-x-1)=-xe^{-x};$

$y_2'=(xe^{-x})'=e^{-x}+xe^{-x}(-1)=e^{-x}(1-x).$

Подставим y_1 и y_1' в уравнение:

$$x(x+1)e^{-x}+(x+1)(-xe^{-x})=0 \Leftrightarrow e^{-x}(x^2+x-x^2-x)=0 \Leftrightarrow 0=0.$$

Получено тождество для всех $x\in(-\infty;+\infty)$. Это означает, что $y_1=(x+1)e^{-x}$ – решение дифференциального уравнения на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

Подставим теперь y_2 и y_2' в данное уравнение:

$$x\cdot xe^{-x}+(x+1)e^{-x}(1-x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-x}(x^2+1-x^2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-x}=0.$$

Это равенство не выполняется ни для каких $x\in(-\infty;\,+\infty)$, т. е. функция $y_2=xe^{-x}$ не является решением данного уравнения.

Задание 2

Для каждого из дифференциальных уравнений а–г найдите общее решение (или общий интеграл). Там, где это указано, решите задачу Коши.

а) $y'-y=\sin x\cdot\cos x;$

б) $(x+y)\,dx=xdy,\quad y(1)=1;$

в) $y'-y\,\mathrm{tg}\,x+y^2\cdot\cos x=0;$

г) $(\ln y-5y^2\cdot\sin 5x)\,dx+\left(\dfrac{x}{y}+2y\cos 5x\right)dy=0,\quad y(0)=e.$

Решение

1. Уравнение $y' - y = \sin x \cdot \cos x$ является линейным уравнением первого порядка. Его можно решать различными методами: методом вариации произвольной постоянной, методом Бернулли, методом интегрирующего множителя.

Выберем, например, последний метод. Интегрирующий множитель для линейного уравнения $y' + p(x)y = q(x)$ имеет вид $r(x) = e^{\int p(x)dx}$. В нашем случае $p(x) = -1$, поэтому $r(x) = e^{\int -dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$.

Умножим уравнение на эту функцию: $y'e^{-x} - ye^{-x} = e^{-x}\sin x \cdot \cos x$.

Левую часть уравнения запишем в виде: $\dfrac{d}{dx}(ye^{-x})$, а правую часть – в виде $\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$. Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dx}(ye^{-x}) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x \quad \text{или} \quad d(ye^{-x}) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x dx.$$

Интегрируя обе части, получаем $ye^{-x} = \dfrac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x dx$. Интеграл справа вычисляется по частям:

$$\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-x}}{5}(-\sin 2x - 2\cos 2x) + C.$$

Тогда $ye^{-x} = -\dfrac{e^{-x}}{10}(\sin 2x + 2\cos x) + C$, откуда окончательно получаем

$y = -\dfrac{1}{10}(\sin 2x + 2\cos x) + Ce^{x}$ – общее решение уравнения.

2. Решим задачу Коши: $(x+y)dx = xdy, \quad y(1) = 1$.

Поскольку коэффициенты $(x+y)$ и x этого уравнения являются однородными функциями первого порядка, то данное уравнение является однородным уравнением. Такие уравнения приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными, если заменить неизвестную функцию y новой неизвестной функцией $u = u(x)$ по формуле $y = u \cdot x$, тогда $dy = udx + xdu$. Выполним замену неизвестной функции y на новую неизвестную функцию u:

$$(x+ux)dx = x(udx + xdu) \Leftrightarrow (x + ux - ux)dx = x^2du \Leftrightarrow xdx = x^2du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \dfrac{dx}{x} = du \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ u = \ln|x| + \ln C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ u = \ln C|x| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ y = x\ln C|x|. \end{array}\right.$$

Решим задачу Коши: $y(1) = 1$.

$1 = 1\cdot\ln C \quad \Leftrightarrow \quad \ln C = \ln e \quad \Leftrightarrow \quad C = e.$

Таким образом, $y = x \cdot \ln e|x|$ – искомое частное решение.

3. Решим уравнение $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$

Это уравнение является уравнением Бернулли. Проинтегрируем его методом Бернулли. Заменим неизвестную функцию y произведением двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$:

$y = u \cdot v,$ тогда $y' = u'v + uv'.$

Подставив y и y' в исходное уравнение, получим:

$$u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x + u^2 v^2 \cos x = 0 \Leftrightarrow u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = -u^2 v^2 \cos x. \quad (1)$$

Выберем функцию v такой, чтобы $v' - v \operatorname{tg} x = 0$. Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{tg} x dx.$$

В качестве функции v возьмем одно из решений этого уравнения.

$$\ln|v| = -\ln|\cos x| \Rightarrow |v| = \frac{1}{|\cos x|}.$$

Возьмем $v(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. Подставив найденную функцию v в уравнение (1), получим

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = -u^2 \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 \cdot \cos x \quad \text{или} \quad u' = -u^2, \quad \text{т. е.} \quad \frac{du}{dx} = -u^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u^2} = -dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{u} = -(x + C) \Rightarrow \quad u = \frac{1}{x + C}.$$

Поскольку $y = u \cdot v$, то общее решение уравнения имеет вид $y = \dfrac{1}{(x + C)\cos x}$.

4. Решим задачу Коши

$$(\ln y - 5y^2 \sin 5x)\, dx + \left(\frac{x}{y} + 2y \cos 5x\right) dy = 0, \quad y(0) = e.$$

Обозначим $P(x, y) = \ln y - 5y^2 \sin 5x, \quad Q(x, y) = \dfrac{x}{y} + 2y \cos 5x.$

Вычислим $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y} - 10y \sin 5x, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y} - 10y \sin 5x.$$

Поскольку $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в области $\{\, y > 0,\ x \in \measuredangle \,\}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Это означает, что в указанной области существует такая функция $u(x,y)$, полный дифференциал которой совпадает с левой частью данного уравнения:

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

В соответствии с условием задачи $du = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = C$ – общий интеграл данного уравнения.

Найдем функцию $u(x,y)$ по ее частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + C(y).$$

В нашем случае

$$u(x,y) = \int (\ln y - 5y^2 \sin 5x)dx + C(y) = x\ln y + y^2 \cos 5x + C(y). \qquad (2)$$

Чтобы найти $C(y)$, воспользуемся равенством $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$, т. е. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{y} + 2y\cos 5x.$ С другой стороны, можно найти $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, используя представление функции u в виде (2):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x\ln y + y^2 \cos 5x + C(y))'_y = \frac{x}{y} + 2y\cos 5x + C'(y).$$

В итоге получим систему, из которой находим $C'(y)$, а затем – $C(y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{y} + 2y\cos 5x + C'(y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{x}{y} + 2y\cos 5x \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x}{y} + 2y\cos 5x + C'(y) = \frac{x}{y} + 2y\cos 5x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad C'(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C(y) = \overline{C}.$$

Подставим $C(y)$ в равенство (2): $u(x,y) = x\ln y + y^2 \cos 5x + \overline{C}$.

Теперь находим общий интеграл данного уравнения, имеющий вид $u(x,y) = C$:

$$x\ln y + y^2 \cos 5x + \overline{C} = C \quad \Leftrightarrow \quad x\ln y + y^2 \cos 5x = \widetilde{C},$$

где $\widetilde{C} = C - \overline{C}$ – произвольная постоянная.

Решим задачу Коши: $y(0) = e$.

$$0 \cdot \ln e + e^2 \cos 0 = \widetilde{C} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{C} = e^2.$$

Таким образом, $x\ln y + y^2 \cdot \cos 5x = e^2$ – искомый частный интеграл.

Задание 3

Приведите данное уравнение либо к однородному, либо к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подходящей замены неизвестной функции (и, возможно, независимой переменной). Получившееся уравнение интегрировать не нужно.

а) $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 3}$; б) $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$.

Решение

Для уравнений вида $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ подходящая замена неизвестной функции зависит от главного определителя системы $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$ Если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то после замены неизвестной функции y на новую неизвестную функцию $u(x)$ по формуле $u(x) = a_1x + b_1y$, уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то система имеет единственное решение (α, β), тогда совместная замена неизвестной функции y и независимой переменной x по формулам $\begin{cases} y = y_1 + \beta, \\ x = x_1 + \alpha \end{cases}$ приводит данное уравнение к однородному.

1. Рассмотрим уравнение $y' = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 3}$.

Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Поскольку $\Delta = 0$, уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функции $u(x) = 2x + y$. Выразим $y = u - 2x \Rightarrow y' = u' - 2$.

Подставив в уравнение, получим

$u' - 2 = \dfrac{u - 1}{2u + 3} \quad \Leftrightarrow \quad u' = \dfrac{u - 1}{2u + 3} + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{5u + 5}{2u + 3}$ – уравнение с разделяющимися переменными.

2. Рассмотрим уравнение $y' = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$.

Вычислим $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Поскольку $\Delta \neq 0$, нужно определить α и β, позволяющие сделать совместную замену неизвестной функции и независимой переменной, в результате чего уравнение превратится в однородное.

Для нахождения α и β решим систему $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Таким образом, $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{3}, \\ \beta = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 - \dfrac{1}{3}, \\ y = y_1 + \dfrac{1}{3} \end{cases}$ – искомая замена независимой переменной (x на x_1) и функции ($y(x)$ на $y_1(x)$), в результате которой уравнение приводится к однородному. Очевидно, что $dx = dx_1$, $dy = dy_1$.

Выполнив замену переменных, получим уравнение

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2\left(x_1 - \frac{1}{3}\right) - \left(y_1 + \frac{1}{3}\right) + 1}{x_1 - \frac{1}{3} - 2\left(y_1 + \frac{1}{3}\right) + 1} \Leftrightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1 - y_1}{x_1 - 2y_1}. \tag{3}$$

Поскольку $(2x_1 - y_1)$ и $(x_1 - 2y_1)$ – однородные функции первого порядка, уравнение (3) является однородным. Такое уравнение соответствует условию задачи.

Задание 4

Для данного уравнения $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0$ найдите интегрирующий множитель, с помощью которого приведите уравнение к уравнению в полных дифференциалах.

Решение

Обозначим $P(x, y) = x^2 - \sin^2 y$, $Q(x, y) = x \cdot \sin 2y$. Найдем $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2\sin y \cos y$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \sin 2y$. Поскольку $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ и при этом функция $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = \dfrac{-2\sin 2y}{x\sin 2y} = -\dfrac{2}{x}$ зависит только от одной переменной x, то для данного уравнения существует интегрирующий множитель

$\mu(x) = e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx} = e^{-2\ln x} = \dfrac{1}{x^2}$. После умножения исходного уравнения на

$\mu = \dfrac{1}{x^2}$ должно получиться уравнение в полных дифференциалах. Проверим это:

$$\frac{1}{x^2}(x^2 - \sin^2 y)dx + \frac{1}{x^2}x\sin 2y dy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \frac{\sin 2y}{x}dy = 0.$$

Пусть $P_1\ (x, y) = 1 - \dfrac{\sin^2 y}{x^2}$, $\quad Q_1(x, y) = \dfrac{\sin 2y}{x}$. Вычислим $\dfrac{\partial P_1}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q_1}{\partial x}$.

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right) = -\frac{2\sin y\cos y}{x^2} = -\frac{\sin 2y}{x^2}.$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin 2y}{x}\right) = -\frac{\sin 2y}{x^2}.$$

Так как $\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial x}$, то интегрирующий множитель $\mu(x)$ найден верно и полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Задание 5

Найдите общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения $xy'' + y' + x + 5 = 0$.

Решение

Данное уравнение не содержит явно искомую функцию y и допускает понижение порядка с помощью введения новой функции $z = z(x)$ по формуле $z = y'$. В результате получаем уравнение первого порядка $xz' + z + x + 5 = 0$, которое является линейным.

Разделим все члены последнего уравнения на коэффициент при z' и преобразуем уравнение к каноническому виду $z' + p(x)z = q(x)$:

$$z' + \frac{z}{x} = -1 - \frac{5}{x}.$$

Для полученного уравнения находим интегрирующий множитель $\mu = e^{\int p(x)dx}$. В нашем случае $p(x) = \dfrac{1}{x}$, поэтому интегрирующий множитель имеет вид $\mu = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln|x|} = |x|$.

Умножаем обе части уравнения на $|x|$:

$$z'|x| + \frac{7}{x}|x| = \left(-1 - \frac{5}{x}\right)|x|.$$

Раскрывая $|x|$ с разными знаками для $x > 0$ и $x < 0$, в обоих случаях получаем уравнение

$z'x + z = -x - 5.$

Поскольку левая часть уравнения представляет собой производную произведения $z'x + z = (zx)'$, то последнее уравнение принимает вид:

$(zx)' = -x - 5.$

Интегрируя полученное уравнение, находим его общее решение:

$$\int (zx)'dx = \int (-x-5)dx \;\Rightarrow\; zx = -\frac{x^2}{2} - 5x + C_1 \;\Rightarrow\; z = -\frac{x}{2} - 5 + \frac{C_1}{x}.$$

Возвращаясь к функции y по формуле $y' = z$, получаем еще одно дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = -\frac{x}{2} - 5 + \frac{C_1}{x} \quad \text{или} \quad dy = \left(-\frac{x}{2} - 5 + \frac{C_1}{x}\right)dx.$$

Интегрируя обе части уравнения, получаем

$$y = -\frac{x^2}{4} - 5x + C_1 \ln|x| + C_2.$$

Следовательно, $y = -\dfrac{x^2}{4} - 5x + C_1 \ln|x| + C_2$ – общее решение искомого дифференциального уравнения.

Задание 6

Решите задачу Коши $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

Решение

Данное уравнение не содержит явно независимую переменную и допускает понижение порядка с помощью введения новой функции $z = z(y)$ по формуле $z = y'$. Тогда $y'' = \dfrac{dz}{dy}z$ и уравнение принимает вид

$2yzz' + y^2 - z^2 = 0.$

Полученное уравнение является уравнением Бернулли.

Для искомого решения $z \neq 0$, $y \neq 0$. Делением всех членов уравнения на коэффициент при z' преобразуем уравнение к каноническому виду:

$$z' - \frac{z}{2y} = -\frac{y}{2z}.$$

Общее решение будем искать в виде $z = u(y) \cdot v(y)$, тогда $z' = u'v + uv'$. Подставляя эти выражения вместо z и z' в последнее уравнение, получим

$$u'v + uv' - \frac{uv}{2y} = -\frac{y}{2uv} \quad \text{или} \quad u'v + u\left(v' - \frac{v}{2y}\right) = -\frac{y}{2uv}.$$

В качестве функции $v = v(y)$ возьмем одно из решений уравнения

$$v' - \frac{v}{2y} = 0.$$

После разделения переменных приходим к уравнению

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{2y},$$

интегрируя которое, получим:

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C| \quad \text{или} \quad v = C \cdot \sqrt{|y|}.$$

В силу начального условия $y(0) = 1$ заключаем, что $y > 0 \Rightarrow |y| = y \Rightarrow$ $\Rightarrow v = C \cdot \sqrt{y}$. Выберем одну из таких функций, полагая, например, $C = 1$. Тогда $v = \sqrt{y}$.

Находим теперь функцию $u = u(y)$ из уравнения $u' \cdot \sqrt{y} = -\dfrac{y}{2u \cdot \sqrt{y}}$, откуда

$$u' = -\frac{1}{2u}.$$

После разделения переменных приходим к уравнению

$$2udu = -dy,$$

интегрируя которое, получим

$u^2 = -y + C_1$ или $u = \pm\sqrt{C_1 - y}$.

Значит,

$z = \pm\sqrt{y} \cdot \sqrt{C_1 - y}$ или $z = \pm\sqrt{C_1 y - y^2}$.

Учитывая начальные условия $y'(0) = 1,\ y(0) = 1$, что (в силу замены $z = y'$) соответствует условию $z(1) = 1 > 0$, для нахождения константы C_1 выбираем функцию $z = \sqrt{C_1 y - y^2}$.

Тогда

$$1 = \sqrt{C_1 - 1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2.$$

Следовательно,

$$z = \sqrt{2y - y^2}.$$

Возвращаясь к функции y по формуле $y' = z$, приходим к дифференциальному уравнению

$$y'' = \sqrt{2y - y^2}.$$

Разделяя в нем переменные, получим уравнение

$$\frac{dy}{\sqrt{2y - y'}} = dx,$$

интегрируя которое, находим:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-(y-1)^2+1}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \arcsin(y-1) = x + C_2.$$

В силу начального условия $y(0)=1$ определяем значение произвольной постоянной C_2:

$$\arcsin 0 = 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Значит, решением искомой задачи Коши является функция, заданная уравнением $\arcsin(y-1) = x$.

Задание 7

Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1;2)$ и удовлетворяющей условию: произведение абсциссы точки касания на абсциссу точки пересечения нормали с осью абсцисс равно удвоенному квадрату расстояния от начала координат до точки касания.

Решение

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка данной кривой, тогда уравнение нормали, проведенной к этой кривой в точке M, имеет вид

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

где X, Y – текущие координаты точек нормали.

Точку пересечения нормали с осью абсцисс обозначим A. Находим координаты точки A:

$$0 - y = -\frac{1}{y}(X - x) \quad \Rightarrow \quad X = x + yy'.$$

Значит, $A(x + yy', 0)$.

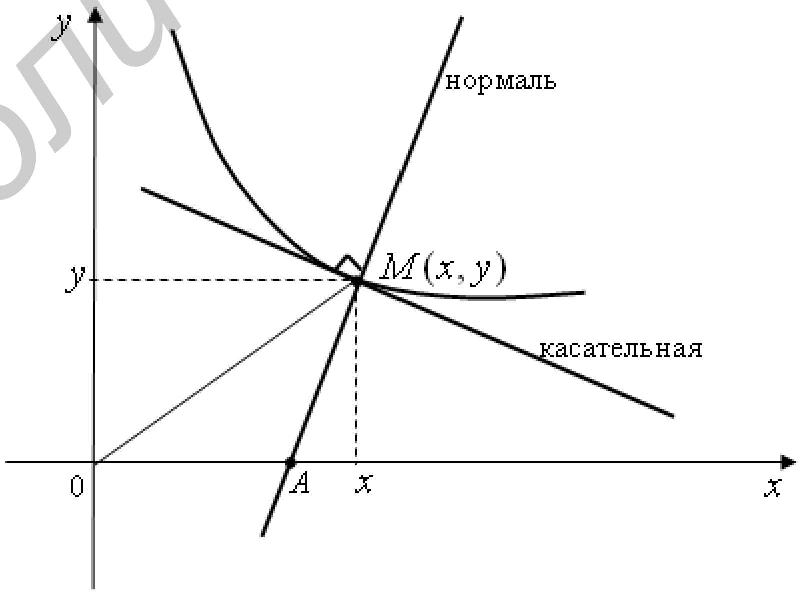

Рис. 1

Учитывая, что $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, получаем дифференциальное уравнение искомой кривой:

$$x \cdot (x + yy') = 2(x^2 + y^2) \text{ или } xyy' = x^2 + 2y^2.$$

Так как функции xy и $(x^2 + 2y^2)$ являются однородными функциями второго порядка, то последнее уравнение представляет собой однородное уравнение.

Будем использовать подстановку $y = ux$, где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция . Тогда $y' = u'x + u$.

В результате подстановки указанных выражений вместо y и y', последнее уравнение принимает вид

$$xux(u'x + u) = x^2 + 2u^2x^2 \quad \text{или} \quad x^3uu' = x^2 + u^2x^2.$$

Для искомого решения $x \neq 0$, так как кривая проходит через точку $M_0(1; 2)$.

После разделения переменных приходим к уравнению

$$\frac{udu}{1 + u^2} = \frac{dx}{x},$$

интегрируя которое, получим:

$$\frac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln|x| + \ln|C| \text{ или } \sqrt{1 + u^2} = |Cx|.$$

Значит,

$$u = \pm\sqrt{C^2x^2 - 1}$$

и, следовательно, учитывая, что $u = \dfrac{y}{x}$, получим

$$y = \pm x\sqrt{C^2x^2 - 1}.$$

В соответствии с начальным условием $y(1) = 2 > 0$ находим значение произвольной постоянной C, подставляя $x = 1$, $y = 2$ в функцию $y = x\sqrt{C^2x^2 - 1}$:

$$2 = 1 \cdot \sqrt{C^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad C^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad C = \pm\sqrt{5}.$$

Итак, $y = x\sqrt{5x^2 - 1}$ – искомая интегральная кривая.

Задание 8

Исследуйте линейную зависимость данной системы функций на указанном промежутке:

1) $\left\{\sin x, \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right), \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\right\}, \quad (-\infty; +\infty);$

2) $\left\{1, \ln(x - 1), \ln(x^2 + 1)\right\}, \quad (1; +\infty);$

3) $\left\{e^{-x} \cdot \sin 3x,\ e^{-x} \cdot \cos 3x\right\}, \quad (-\infty; +\infty).$

Решение

1. Покажем, что существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, не равные нулю одновременно, для которых в интервале $-\infty < x < +\infty$ справедливо тождество

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \alpha_3 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0. \qquad (4)$$

Полагая в равенстве (4) последовательно $x = 0,\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{3}$, получаем однородную систему трех уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\alpha_3}{2} = 0, \\ \dfrac{\alpha_1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\alpha_2}{2} + \alpha_3 = 0, \\ \dfrac{\sqrt{3}\alpha_1}{2} + \alpha_2 + \dfrac{\sqrt{3}\alpha_3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2 + \sqrt{3}\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \sqrt{3}\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \sqrt{3}\alpha_1 + 2\alpha_2 + \sqrt{3}\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\sqrt{3}\alpha_3, \\ \alpha_1 + \sqrt{3}(-\sqrt{3}\alpha_3) + 2\alpha_3 = 0, \\ \sqrt{3}\alpha_1 + 2(-\sqrt{3}\alpha_3) + \sqrt{3}\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\sqrt{3}\alpha_3, \\ \alpha_1 = \alpha_3, \\ \sqrt{3}\alpha_3 + 2(-\sqrt{3}\alpha_3) + \sqrt{3}\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\sqrt{3}\alpha_3, \\ \alpha_1 = \alpha_3, \\ 0 \cdot \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = C, \\ \alpha_2 = -\sqrt{3}C, \\ \alpha_3 = C, \end{cases}$$

где $C \in \measuredangle$.

Таким образом, однородная система имеет бесконечное множество решений. Возьмем, например, $C = 1$. Тогда для набора чисел $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -\sqrt{3}$, $\alpha_3 = 1$ выполняется тождество

$$1 \cdot \sin x - \sqrt{3} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Это означает, что система функций линейно зависима на $\measuredangle$.

2. Покажем, что система функций $\left\{1, \ln(x-1), \ln(x^2+1)\right\}, \quad (1, +\infty)$ линейно независима на промежутке $(1; +\infty)$.

Составим равенство

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \ln(x-1) + \alpha_3 \ln(x^2+1) = 0 \qquad (5)$$

и покажем, что оно выполняется для $\forall x \in (1;+\infty)$ только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Продифференцируем равенство (5) по переменной x:

$$\frac{\alpha_2}{x-1} + \frac{2x\alpha_3}{x^2+1} = 0. \qquad (6)$$

Поскольку функции $y_1 = \dfrac{1}{x-1}$ и $y_2 = \dfrac{2x}{x^2+1}$ линейно независимы на промежутке $(1;+\infty)$ так как $(y_1 \neq ky_2$, где $k \in \measuredangle$), то равенство (6) выполняется для всех $x \in (1;+\infty)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Подставив эти значения в равенство (5), получим $\alpha_1 = 0$.

Таким образом, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, что означает линейную независимость данной системы функций на промежутке $(1;+\infty)$.

3. Определим, при каких значениях α_1 и α_2 выполняется тождество

$$\alpha_1 e^{-2x}\sin 3x + \alpha_2 e^{-2x}\cos 3x \equiv 0, \qquad x \in (-\infty;+\infty).$$

Разделим обе его части на $e^{-2x} \neq 0$ для любого $x \in \measuredangle$, получим

$$\alpha_1 \sin 3x + \alpha_2 \cos 3x \equiv 0, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Пусть $x = 0$, тогда $\alpha_2 = 0$ и, значит,

$$\alpha_1 \sin 3x \equiv 0, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Так как функция $\sin 3x$ не равна тождественно нулю, получим, что $\alpha_1 = 0$.

Значит, тождество $\alpha_1 e^{-2x}\cdot\sin 3x + \alpha_2 e^{-2x}\cdot\cos 3x \equiv 0$ имеет место в интервале $-\infty < x < +\infty$ только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Следовательно, данная система функций линейно независима на $\measuredangle$.

Задание 9

Найдите линейное однородное дифференциальное уравнение (наиболее низкого порядка) с постоянными коэффициентами, имеющее данные частные решения $y_1(x) = x^2 e^{-3x}$, $\quad y_2(x) = \sin 2x$.

Решение

Так как линейное однородное дифференциальное уравнение ЛОДУ (наиболее низкого порядка) с постоянными коэффициентами имеет частное решение $y_1(x) = x^2 e^{-3x}$, то число $\lambda = -3$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 3$.

Учитывая, что функция $y_2(x) = \sin 2x$ представляет собой частное решение искомого уравнения, заключаем, что комплексное число $2i$ является простым корнем характеристического уравнения, и, значит, сопряженное ему комплексное число $-2i$ также является простым корнем характеристического уравнения.

Следовательно характеристическое уравнение, составленное для искомого ЛОДУ, имеет вид

$$(\lambda+3)^3(\lambda-2i)(\lambda+2i)=0 \Leftrightarrow (\lambda^3+9\lambda^2+27\lambda+27)(\lambda^2+4)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^5+9\lambda^4+31\lambda^3+63\lambda^2+108\lambda+108=0.$$

Зная характеристическое уравнение, составляем искомое дифференциальное уравнение

$$y^{v}+9y'^{v}+31y'''+63y''+108y'+108y=0.$$

Задание 10

Найдите частное решение линейного однородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y'''-3y''+9y'+13y=0, \quad y(0)=y'(0)=0, \quad y''(0)=1.$$

Решение

Для данного уравнения составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+13=0.$$

Находим его корни:

$$\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+13=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+13)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2+3i,\ \lambda_3=2-3i.$$

Фундаментальную систему решений образуют функции

$$e^{-x},\ e^{2x}\cos 3x,\ e^{2x}\sin 3x.$$

Следовательно, общее решение искомого уравнения будет иметь вид

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}\cos 3x+C_3e^{2x}\sin 3x.$$

Для нахождения частного решения подставляем начальные условия $y(0)=y'(0)=0, \quad y''(0)=1$ в выражения для y, y', y'':

$$\begin{cases} y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}\cos 3x+C_3e^{2x}\sin 3x, \\ y'=-C_1e^{-x}+C_2(2e^{2x}\cos 3x-3e^{2x}\sin 3x)+C_3(2e^{2x}\sin 3x+3e^{2x}\cos 3x), \\ y''=C_1e^{-x}+C_2(-5e^{2x}\cos 3x-12e^{2x}\sin 3x)+C_3(-5e^{2x}\sin 3x+12e^{2x}\cos 3x). \end{cases}$$

В результате подстановки начальных условий получаем линейную неоднородную систему относительно постоянных C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ -C_1+2C_2+3C_3=0, \\ C_1-5C_2+12C_3=1 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1=\frac{1}{18}, C_2=-\frac{1}{18}, C_3=\frac{1}{18}.$$

Следовательно, искомое частное решение определяется формулой

$$y=\frac{1}{18}e^{-x}-\frac{1}{18}e^{2x}(\cos 3x-\sin 3x).$$

Задание 11

Не находя коэффициентов, определите вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 4e^{2x}(x+1)\cos^2\frac{3}{2}x + 2\,\mathrm{sh}\,2x\,(x^2 + x - 2)\sin 3x.$$

Решение

Попытаемся представить правую часть $f(x)$ данного уравнения в виде суммы функций специального вида

$$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, степеней n и m, соответственно $\alpha, \beta \in \measuredangle$. Для этого понизим степень $\cos^2\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos 3x)$, запишем по определению $\mathrm{sh}\,2x = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$, после чего правая часть $f(x)$ примет вид

$$f(x) = 4e^{2x}(x+1)\cos^2\frac{3}{2}x + 2\,\mathrm{sh}\cdot 2x\,(x^2 + x - 2)\sin 3x =$$

$$= 2e^{2x}(x+1)(1+\cos 3x) + (e^{2x} - e^{-2x})(x^2 + x - 2)\sin 3x = 2e^{2x}(x+1) +$$

$$+ e^{2x}(2(x+1)\cos 3x + (x^2 + x - 2)\sin 3x) - e^{-2x}(x^2 + x - 2)\sin 3x = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),$$

где $f_1(x) = 2e^{2x}(x+1)$, $f_2(x) = e^{2x}(2(x+1)\cos 3x + (x^2 + x - 2)\sin 3x)$,
$f_3(x) = -e^{-2x}(x^2 + x - 2)\sin 3x$.

В соответствии с принципом суперпозиции решений частное решение y^* данного уравнения является суммой $y_1^* + y_2^* + y_3^*$ частных решений уравнений

$$y'' - 4y' + 13y = f_i(x), \quad i = 1, 2, 3.$$

Для нахождения y_i^* составим характеристическое уравнение и определим его корни:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 2 + 3i,\ \lambda_2 = 2 - 3i.$$

Определим теперь вид частного решения y_1^* уравнения с правой частью $f_1(x)$:

$$y'' - 4y' + 13y = 2e^{2x}(x+1).$$

Так как коэффициент $\alpha = 2$ в показателе экспоненты не является корнем характеристического уравнения, частное решение y_1^* имеет вид

$$y_1^* = (Ax + B)e^{2x}.$$

Для правой части $f_2(x) = e^{2x}(2(x+1)\cos 3x + (x^2 + x - 2)\sin 3x)$ коэффициент в показателе экспоненты $\alpha = 2$, а коэффициент β аргумента тригонометрических функций $\sin 3x$ и $\cos 3x$ равен 3. Поскольку число

$\alpha + i\beta = 2 + 3i$ является простым комплексным корнем характеристического уравнения, частное решение y_2^* имеет вид

$$y_2^* = xe^{2x}((Cx^2 + Dx + E)\cos 3x + (Fx^2 + Gx + H)\sin 3x).$$

Для правой части $f_3(x) = -e^{-2x}((x^2 + x - 2)\sin 3x + 0 \cdot \cos 3x)$ аналогично находим: $\alpha = -2, \quad \beta = 3, \quad \alpha + \beta i = -2 + 3i$. Поскольку последнее число не является корнем характеристического уравнения, частное решение y_3^* имеет вид

$$y_3^* = e^{-2x}((Mx^2 + Nx + L)\cos 3x + (Kx^2 + Px + Q)\sin 3x).$$

Так как искомое частное решение y^* равно сумме $y_1^* + y_2^* + y_3^*$, окончательно получаем

$$y^* = (Ax + B)e^{2x} + xe^{2x}((Cx^2 + Dx + E)\cos 3x + (Fx^2 + Gx + H)\sin 3x) +$$
$$+ e^{-2x}((Mx^2 + Nx + L)\cos 3x + (Kx^2 + Px + Q)\sin 3x).$$

Задание 12

Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения

$$y'' + 4y = \frac{2}{\cos 2x} + e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x).$$

Решение

Известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = y_0 + y^*,$$

где y_0 – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения, а y^* – частное решение линейного неоднородного уравнения. Заметим, что в нашем случае правая часть уравнения $f(x) = \dfrac{2}{\cos 2x} + e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x)$ состоит из двух слагаемых $f_1(x) = \dfrac{2}{\cos 2x}, \quad f_2(x) = e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x)$, второе из которых является функцией специального вида, а первое – нет. Обсудим вначале метод решения данного уравнения.

Рассмотрим два вспомогательных уравнения: $y'' + 4y = \dfrac{2}{\cos 2x}$ и $y'' + 4y = e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x)$.

Методом вариации произвольных постоянных найдем y_1 – общее решение первого уравнения $y'' + 4y = \dfrac{2}{\cos 2x}$, которое запишем в виде

$$y_1 = y_0 + y_1^*,$$

где y_0 – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y'' + 4y = 0$, а y_1^* – частное решение линейного неоднородного уравнения $y'' + 4y = \dfrac{2}{\cos 2x}$.

Затем методом подбора найдем y_2^* – частное решение второго уравнения $y'' + 4y = e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x)$, правая часть которого является функцией специального вида.

В силу принципа суперпозиции решений частное решение y^* исходного линейного неоднородного уравнения имеет вид $y^* = y_1^* + y_2^*$, а значит, искомое общее решение $y = y_0 + y_1^* + y_2^*$.

Приступим теперь к решению данного уравнения. Для соответствующего линейного однородного уравнения $y'' + 4y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$, которое имеет простые комплексно-сопряженные корни $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Следовательно, общее решение линейного однородного уравнения определяется формулой $y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения $y'' + 4y = \dfrac{2}{\cos 2x}$ будем искать в виде

$$y_1 = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x,$$

где функции $C_1'(x), C_2'(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\cos 2x + 2C_2'(x)\sin 2x = \dfrac{2}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Для решения полученной системы применим формулы Крамера. Находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{2}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -2\frac{\sin 2x}{\cos 2x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{2}{\cos 2x} \end{vmatrix} = \cos 2x \frac{2}{\cos 2x} = 2.$$

Определяем функции $C_1'(x), C_2'(x)$ по следующим формулам:

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Для нашего случая $C_1'(x) = -\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}, \quad C_2' = 1.$

Интегрируя последние уравнения, находим $C_1(x), C_2(x)$.

$$\int C_1'(x)dx = -\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C_1,$$

$$\int C_2'(x)dx = \int dx \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = x + C_2.$$

Подставляя найденные функции $C_1(x), C_2(x)$, получаем общее решение y_1 линейного неоднородного уравнения $y'' + y = \dfrac{2}{\cos 2x}$:

$$y_1 = \left(C_1 + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\right)\cos 2x + (C_2 + x)\sin 2x.$$

В выражении справа отделяем y_0 – общее решение однородного уравнения от y_1^* – частного решения неоднородного уравнения:

$$y_1 = y_0 + y_1^* = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + x\sin 2x,$$

где $y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ – общее решение соответствующего однородного уравнения; $y_1^* = \dfrac{1}{2}\ln|\cos 2x|\cos 2x + x\sin 2x$ – частное решение неоднородного уравнения.

Теперь осталось найти y_2^* – частное решение линейного неоднородного уравнения $y'' + 4y = e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x)$.

Так как правая часть уравнения имеет вид $f(x) = e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x)$, причем коэффициент в показателе экспоненты $\alpha = 2$, а коэффициент аргумента тригонометрической функции $\beta = 2$, получаем число $\alpha + i\beta = -2 + 2i$, которое не является корнем характеристического уравнения.

Значит, частное решение будем искать в виде

$$y_2^* = e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Находим производные первого и второго порядков функции y_2^*:

$$(y_2^*)' = -2e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{-2x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$$

$$(y_2^*)'' = 4e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) - 4e^{-2x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$+ e^{-2x}(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x).$$

Чтобы найти коэффициенты A и B, подставим выражения для $y_2^*, (y_2^*)', (y_2^*)''$ в уравнение $y'' + 4y = e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x)$:

$$4e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) - 4e^{-2x}(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$+ e^{-2x}(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) =$$
$$+ e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x) \Leftrightarrow e^{-2x}\cos 2x(-8B + A) + e^{-2x}\sin 2x(8A + B) =$$
$$= e^{-2x}(\cos x - \sin 2x).$$

После деления обеих частей полученного равенства на e^{-2x} $(e^{-2x} \neq 0$ для любого $x \in \measuredangle)$ приравняем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в левой и правой частях равенства:

$$\begin{cases} A - 8B = 1, \\ 8A + B = -1. \end{cases}$$

Решением этой системы являются числа $A = -\dfrac{7}{65}$, $B = -\dfrac{9}{65}$.

Следовательно, частное решение y_2^* уравнения $y'' + 4y = e^{-2x}(\cos 2x - \sin 2x)$ найдено:

$$y_2^* = e^{-2x}\left(-\frac{7}{65}\cos 2x - \frac{9}{65}\sin 2x\right).$$

Как было указано выше, решение y^* исходного линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\cos 2x + x\sin 2x +$$
$$+ e^{-2x}\left(-\frac{7}{65}\cos 2x - \frac{9}{65}\sin 2x\right),$$

а его общее решение определяется формулой

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\cos 2x + x\sin 2x +$$
$$+ e^{-2x}\left(-\frac{7}{65}\cos 2x - \frac{9}{65}\sin 2x\right).$$

Задание 13

Решите линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$$

Решение

Приведем данную систему к линейному неоднородному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами. Для этого дифференцируем первое уравнение по t и подставляем выражение для y'_t из второго уравнения системы:

$$\begin{cases} x''_{tt} = x'_t + y'_t + \sin t, \\ y'_t = -2x - y + \sin t + \cos t \end{cases} \Rightarrow x''_{tt} = x'_t - 2x - y + \sin t + \cos t + \sin t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x''_{tt} - x'_t + 2x + y = 2\sin t + \cos t.$$

Выражаем y из первого уравнения системы:

$$y = x'_t - x + \cos t\,.$$

Подставляя выражение для y в последнее уравнение, получим линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$$x''_{tt} - x'_t + 2x + x'_t - x + \cos t = 2\sin t + \cos t \Leftrightarrow x''_{tt} + x = 2\sin t. \qquad (7)$$

Составляем соответствующее линейное однородное уравнение и находим его общее решение:

$$x''_{tt} + x = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

его корнями являются комплексно-сопряженные числа $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Значит, общее решение однородного уравнения определяется по формуле

$$x_0 = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Так как правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(t) = e^{ot}(0 \cdot \cos t + 2\sin t)$, причем коэффициент в показателе экспоненты $\alpha = 0$, а коэффициент аргумента тригонометрической функции $\beta = 1$, получим число $\alpha + i\beta = i$, которое является простым корнем характеристического уравнения. Значит, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x^* = t(A\cos t + B\sin t).$$

Находим производные первого и второго порядков функции x^*:

$$(x^*)' = A\cos t + B\sin t + t(-A\sin t + B\cos t).$$

$$(x^*)'' = -2A\cos t + 2B\sin t - At\cos t - Bt\sin t.$$

Для нахождения коэффициентов A и B подставляем выражения для $(x^*)', (x^*)''$ в неоднородное уравнение (7):

$$-2A\sin t + 2B\cos t - At\cos t - Bt\sin t + At\cos t + Bt\sin t = 2\sin t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2A\sin t + 2B\cos t = 2\sin t.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ в обеих частях равенства, получим систему:

$$\begin{cases} -2A = 2, \\ \ \ 2B = 0, \end{cases}$$

решением которой являются числа $A = -1,\ B = 0$.

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид $x^* = -t\cos t$. Общее решение этого уравнения определяется по формуле $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\cos t$. Подставляя найденные значения для x и $(x_t)' = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \cos t + t\sin t$ в равенство $y = x_t' - x + \cos t$, находим вторую искомую функцию:

$$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \cos t + t\sin t - C_1 \cos t - C_2 \sin t + t\cos t + \cos t =$$
$$= C_1(\sin t + \cos t) + C_2(\cos t - \sin t) + t\sin t + t\cos t.$$

Таким образом, общее решение искомой системы найдено:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\cos t, \\ y = -C_1(\sin t + \cos t) + C_2(\cos t - \sin t) + t\sin t + t\cos t. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Апатенок, Р. Ф. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок. – Минск : – Выш. шк., 1986. – 272 с.

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : Наука, 1984. – 335 с.

3. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 224 с.

4. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 4-е изд. – Ростов н/Д : Феникс, 1997. – 512 с.

5. Герасимович, А. И. Математический анализ : справ. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск : Выш. шк., 1989. – 286 с.; Ч. 2 / А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. Б. Сугак. – Минск : Выш. шк., 1990. – 271 с.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч.1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : Изд. дом «Оникс 21 век» : Мир и Образование, 2002. – 304 с.

7. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992. – 384 с.

8. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1989. – 734 с.

9. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1 – 429 с. ; Т. 2 – 560 с.

10. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2007. – 288 с.

11. Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 1 : Аналитическая геометрия / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк. – Минск : БГУИР, 2002. – 112 с. ; Ч. 2 : Линейная алгебра / А. А. Карпук, Р. М. Жевняк, В. В. Цегельник. – Минск : БГУИР, 2004. – 154 с. ; Ч. 3 : Введение в анализ / Н. Н. Третьякова, Т. М. Пушкарева, О. Н. Малышева. – Минск : БГУИР, 2005. – 116 с. ; Ч. 4 : Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. А. Карпук [и др.]. – Минск : БГУИР, 2006. – 107 с.

12.Третьякова, Н. Н. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Сборник задач с решениями / Н. Н. Третьякова, Т. М. Пушкарева. – Минск : Бестпринт, 2003. – 90 с.

13. Черняк, А. А. Высшая математика для студентов инженерно-экономических специальностей +CD / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк. – Минск : Харвест, 2008. – 715 с.

Св. план 2012, резерв

Учебное издание

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В 3-х частях

Часть 2

Черняк Жанна Альбертовна
Величковский Валерий Витальевич
Жабик Альбина Михайловна и др.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Дифференциальные уравнения

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *Л. А. Киселева*

Подписано в печать 07.05.2013. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 8,02. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 300 экз. Заказ 515.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6