ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 8, с. 1132–1134

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ С УХУДШАЮЩИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

© 2006 г. Е. А. Баркова, П. П. Забрейко

В настоящей работе рассматриваются условия существования и единственности решений задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах с ухудшающими операторами. Для уравнений первого порядка в работах [1, 2] предложен метод исследования разрешимости задачи Коши, основанный на исследовании сходимости метода последовательных приближений в шкалах (непрерывно вложенных друг в друга) банаховых пространств. В дальнейшем метод был распространен на общие дифференциальные уравнения высших порядков в работе [3], полученные результаты в которой содержат классические теоремы М. Нагумо и Л.В. Овсянникова (см., например, [4–8]) для уравнений целых порядков с ухудшающими операторами. Естественно распространить предложенный метод и на дифференциальные уравнения дробных порядков. Результаты предлагаемой работы содержат теоремы существования и единственности решений задачи Коши для уравнений с дробными производными порядка α в смысле Капуто.

Пусть $\mathbb{X}(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ – некоторое семейство банаховых пространств, непрерывно вложенных в отделимое локально выпуклое пространство $\mathbb{X}$, и пусть $f(t,x)$ – функция, определенная на $[0,T] \times \widetilde{\mathbb{X}}$, где $\widetilde{\mathbb{X}}$ – объединение некоторой части $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ пространств $\mathbb{X}(\omega)$, принимающая значения в $\mathbb{X}$, непрерывная по совокупности переменных на каждом множестве $[0,T] \times \mathbb{X}(\omega)$ $(\omega \in \widetilde{\Omega})$ и, наконец, удовлетворяющая условиям Липшица

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le a(\omega',\omega'')\|x_1 - x_2\|_{\mathbb{X}(\omega')} \quad (\omega' \in \widetilde{\Omega}, \omega'' \in \Omega), \tag{1}$$

где $a(\omega',\omega'')$ – определенная на $\widetilde{\Omega} \times \Omega$ функция со значениями в $[0,\infty]$.

Нас будет интересовать вопрос существования и единственности решений задачи Коши

$$D^\alpha x(t) = f(t,x), \tag{2}$$

$$x^{(k)}(0) = \xi_k, \quad k = 0,\ldots,m-1, \tag{3}$$

где D^α – дробная производная порядка α в смысле Капуто (если $x(t)$ – гладкая функция, то

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} x^{(m)}(s)\,ds \quad (m-1 < \alpha \le m,\ m \in N,\ t > 0),$$

$\alpha > 0$ и m – целое число, удовлетворяющее условию $m-1 < \alpha \le m$). Будем рассматривать ситуации, когда начальные условия ξ_k принадлежат некоторому пространству $X(\omega')$, а решения $x(t)$ – другому более широкому пространству $X(\omega'')$.

Для формулировки соответствующих результатов нам понадобится ряд вспомогательных обозначений. Пусть W – множество пар (ω',ω''), для которых функция $a(\omega',\omega'')$ конечна, $\mathbb{X}(\omega') \subseteq \mathbb{X}(\omega'')$ (с единичной нормой оператора вложения) и при любом $n = 1,2,\ldots$ существуют цепочки $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n$ ($\omega_0 = \omega'$, $\omega_n = \omega''$), для которых $(\omega_{j-1},\omega_j) \in W$ $(j = 1,\ldots,n)$. Положим далее

$$a_n(\omega',\omega'') = \inf \prod_{j=1}^n a(\omega_{j-1},\omega_j),$$

где инфимум берется по всем упомянутым выше цепочкам.

Пусть

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{(a_n(\omega',\omega''))^{1/(n\alpha)}} > 0, \quad \Gamma(\omega',\omega'') = \left\{T:\ 0 < T < \alpha \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{(a_n(\omega',\omega''))^{1/(n\alpha)}}\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $(\omega', \omega'') \in W$ *и* $T \in \Gamma(\omega', \omega'')$ *и, кроме того, функция*

$$h_0(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, \xi_0)\, ds \tag{4}$$

ограничена в $\mathbb{X}(\omega')$. *Тогда задача Коши (2), (3) имеет в* $\mathbb{X}(\omega'')$ *по крайней мере одно определенное на* $[0, T]$ *решение.*

Доказательство. Пусть $(\omega', \omega'') \in W$. Введем в рассмотрение действующий из пространства $\mathcal{C}(\omega')$ непрерывных на $[0, T]$ и принимающих значения в $\mathbb{X}(\omega')$ функций в пространство $\mathcal{C}(\omega'')$ непрерывных на $[0, T]$ и принимающих значения в $\mathbb{X}(\omega'')$ функций нелинейный оператор

$$Ax(t) = x_0(t, \xi_0, \ldots, \xi_{m-1}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))\, ds, \quad \xi_0, \ldots, \xi_{m-1} \in X(\omega'), \tag{5}$$

где

$$x_0(t, \xi_0, \ldots, \xi_{m-1}) = \xi_0 + \frac{\xi_1 t}{1!} + \ldots + \frac{\xi_{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Для доказательства теоремы достаточно установить существование неподвижной точки оператора (5).

Отметим, что из условий (1) вытекает, что оператор (5) удовлетворяет операторному условию Липшица

$$\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le \frac{t^\alpha a(\omega', \omega'')}{\Gamma(\alpha+1)} \|x_1(t) - x_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega')} \quad (0 \le t \le T,\ x_1, x_2 \in \mathbb{X}(\omega')). \tag{6}$$

Действительно, для любого t, $0 \le t \le T$, имеем

$$\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|_{\mathbb{X}(\omega')}\, ds \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(\omega', \omega'') \|x_1(s) - x_2(s)\|_{\mathbb{X}(\omega')}\, ds = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} a(\omega', \omega'') \|x_1(\cdot) - x_2(\cdot)\|_{\mathbb{X}(\omega')},$$

откуда и следует неравенство (6).

Пусть теперь $(\omega', \omega'') \in W$ и, более того, для цепочки $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ выполнены условия $\omega' = \omega_0$, $\omega'' = \omega_n$, $(\omega_{j-1}, \omega_j) \in W$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда для любого t, $0 \le t \le T$, имеем

$$\|A^n x_1(t) - A^n x_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} a(\omega_{n-1}, \omega_n) \|A^{n-1} x_1(t) - A^{n-1} x_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega_{n-1})} \le \cdots$$

$$\cdots \le \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} a(\omega_{n-1}, \omega_n) \ldots a(\omega_0, \omega_1) \|x_1(t) - x_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega')} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда вытекает, что при $0 \le t \le T$ выполняется неравенство

$$\|A^n x_1(t) - A^n x_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} a_n(\omega', \omega'') \|x_1(t) - x_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega')} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

или

$$\|A^n x_1(t) - A^n x_2(t)\|_{\mathcal{C}(\omega'')} \le \frac{T^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} a_n(\omega', \omega'') \|x_1(t) - x_2(t)\|_{\mathcal{C}(\omega')} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Учитывая неравенства (7), можно воспользоваться теоремой о неподвижной точке из [1, 2]. Действительно, выбирая в качестве начальных функций $x^{(k)}(0) = \xi_k$, $k = 1, \ldots, m-1$, нулевые, получаем, что

$$x_0(t) - Ax_0(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, \xi_0)\, ds = h_0(t) \tag{8}$$

является ограниченной функцией в $X(\omega')$. Но тогда в силу равенства (8) и включения $T \in \Gamma(\omega', \omega'')$ получаем, что последовательные приближения $x_{n+1} = Ax_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ сходятся в $\mathcal{C}(\omega'')$ к некоторой функции $x_*(t)$.

Оператор (5), как легко показать, является непрерывным как оператор из $\mathcal{C}(\omega'')$ в пространство $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в $\mathbb{X}$. Поэтому $x_*(t)$ – неподвижная точка оператора (5). Тем самым теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $(\omega', \omega'') \in W$ *и* $T \in \Gamma(\omega', \omega'')$. *Тогда задача Коши (2), (3) не может иметь двух решений* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$, *разность которых является ограниченной функцией в* $\mathbb{X}(\omega')$.

Доказательство очевидным образом следует из неравенств (7).

Рассмотрим частный случай. Допустим, что коэффициенты $a(\omega', \omega'')$ обладают следующим свойством (S): для каждой пары $(\omega', \omega'') \in W$ и каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует такая цепочка $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$, что $\omega_0 = \omega'$, $\omega_n = \omega''$, $(\omega_{j-1}, \omega_j) \in W$ $(j = 1, \ldots, n)$ и $a(\omega_{j-1}, \omega_j) = a_{(n)}(\omega', \omega'')$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда для этой цепочки выполняется неравенство $a_n(\omega', \omega'') \le (a_{(n)}(\omega', \omega''))^n$. Таким образом, верна

Лемма 1. *Пусть функция* $a(\omega', \omega'')$ *обладает свойством (S) и*

$$0 < T < \alpha \varliminf_{n \to \infty} n(a_{(n)}(\omega', \omega''))^{-1/\alpha}.$$

Тогда $T \in \Gamma(\omega', \omega'')$.

Рассмотрим еще более частный случай, когда $\Omega = [0, 1]$, $0 \le \omega' < \omega'' < 1$ и $a(\omega', \omega'') = k(\omega'' - \omega')^{-\gamma}$; здесь k и γ – некоторые положительные постоянные. Очевидно, что свойство (S) выполнено и, более того, $a_{(n)}(\omega', \omega'') = kn^{\gamma}(\omega'' - \omega')^{-\gamma}$, $0 \le \omega' < \omega'' < 1$. Тогда $\varliminf_{n \to \infty} n(a_{(n)}(\omega', \omega''))^{-1/\alpha} = \infty$ для всех $\alpha > \gamma$.

Следовательно, верна

Теорема 3. *Пусть функция* $f(t, x)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le k(\omega'' - \omega')^{-\gamma} \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{X}(\omega')}$$

для всех $0 \le \omega' < \omega'' < 1$. *Тогда задача Коши (2), (3) в случае* $\alpha > \gamma$ *при условии, что функция (4) ограничена в пространстве* $\mathbb{X}(\omega')$, *имеет единственное определенное на* $[0, T]$ *решение в пространстве* $\mathbb{X}(\omega'')$ *при любом* $T \in (0, \infty)$. *В случае* $\alpha = \gamma$ *теорема верна для всех* T, *удовлетворяющих условию* $\{T : \ 0 < T < \alpha((\omega'' - \omega')/k)\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Забрейко П.П.* // VII Всесоюз. конф. по качественной теории дифференц. уравнений. Рига, 1989. С. 14.
2. *Забрейко П.П.* // Докл. АН БССР. 1989. Т. 23. № 12. С. 1061–1064.
3. *Баркова Е.А., Забрейко П.П.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 3. С. 472–478.
4. *Yamanaka T.* // Comment. Math. Univ. St. Paul. 1960. V. 9. P. 7–10.
5. *Овсянников Л.В.* // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. № 4. С. 819–822.
6. *Овсянников Л.В.* // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 1. С. 789–792.
7. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977.
8. *Nisida T.* // J. Differ. Geom. 1977. V. 12. P. 629–633.
9. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
10.04.2005 г.