ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2010, том 46, № 2, с. 204–209

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ С УХУДШАЮЩИМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

© 2010 г. Е. А. Баркова, П. П. Забрейко

Предложены методы исследования дифференциальных уравнений дробных порядков с производными Капуто и Римана–Лиувилля. Доказаны теоремы существования и единственности решений задачи Коши для дифференциальных уравнений с ухудшающими операторами в шкалах банаховых пространств.

Предлагаемая работа посвящена изучению вопросов существования и единственности решений задач Коши с дробными производными Капуто и Римана–Лиувилля в шкалах (непрерывно вложенных друг в друга) банаховых пространств. Основные результаты опираются на метод, применяемый в работах [1, 2] для дифференциальных уравнений первого порядка, а затем распространенный на общие дифференциальные уравнения высших порядков в работе [3], и являются непосредственным продолжением исследований дифференциальных уравнений дробных порядков в работе [4]. Полученные на этом пути утверждения содержат теоремы существования и единственности решений задач Коши для уравнений с дробными производными, входящими в обе части уравнений.

Рассмотрим две задачи Коши: задачу

$$D^{\alpha}x(t) = f(t, x, D^{\alpha_0}x(t)), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x^{(k)}(0) = \xi_k, \quad k = 0, \ldots, m, \ldots, p-1, \tag{2}$$

$$0 < \alpha_0 < \alpha, \quad m-1 < \alpha_0 \le m, \quad p-1 < \alpha \le p,$$

с дробной производной порядка α в смысле Капуто

$$D^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{p-\alpha-1} x^{(p)}(s)\, ds, \quad p = [\alpha] + 1,$$

и начальными условиями

$$D^{\alpha-k}x(0) = \phi_k, \quad k = 1, \ldots, m, \ldots, p, \tag{3}$$

$$0 < \alpha_0 < \alpha, \quad m-1 < \alpha_0 \le m, \quad p-1 < \alpha \le p,$$

для уравнения (1) с дробной производной порядка α в смысле Римана–Лиувилля

$$D^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^p \int\limits_0^t (t-s)^{p-\alpha-1} x(s)\, ds, \quad p = [\alpha] + 1.$$

Пусть $\mathbb{X}(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ – некоторое семейство банаховых пространств, непрерывно вложенных в отделимое локально выпуклое пространство $\mathbb{X}$, причем для каждого $\mathbb{X}(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ выполняется условие

$$\Big\| \int\limits_0^t x(t)\, dt \Big\|_{\mathbb{X}(\omega)} \le \int\limits_0^t \|x(s)\|_{\mathbb{X}(\omega)}\, ds. \tag{4}$$

Ниже предполагается, что правая часть $f(t,x,y)$ уравнения (1) определена на множестве $[0,T]\times\widetilde{\mathbb{X}}\times\widetilde{\mathbb{X}}$, где $\widetilde{\mathbb{X}}$ – объединение некоторой части $\widetilde{\Omega}\subseteq\Omega$ пространств $\mathbb{X}(\omega)$, принимает значения в $\mathbb{X}$, непрерывна по совокупности переменных на каждом множестве $[0,T]\times\mathbb{X}(\omega)\times\mathbb{X}(\omega)$ $(\omega\in\widetilde{\Omega})$ и, наконец, удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\|_{\mathbb{X}(\omega'')}\le a(\omega',\omega'')\|x_1-x_2\|_{\mathbb{X}(\omega')}+b(\omega',\omega'')\|y_1-y_2\|_{\mathbb{X}(\omega')},$$

где $a(\omega',\omega''), b(\omega',\omega'')$ – определенные на $\widetilde{\Omega}\times\Omega$ функции, принимающие значения в $[0,\infty]$.

Для формулировки соответствующих результатов нам понадобится ряд вспомогательных обозначений. Пусть W – множество пар (ω',ω''), для которых $a(\omega',\omega'')$ и $b(\omega',\omega'')$ конечны; определим для каждой пары (ω',ω'') оператор

$$c(\omega',\omega'')z(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_0)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-\alpha_0-1}\left(\frac{a(\omega',\omega'')}{\Gamma(\alpha_0)}\int\limits_0^s(s-\tau)^{\alpha_0-1}\,d\tau+b(\omega',\omega'')\right)z(s)\,ds.$$

Из определения следует, что $\{c(\omega',\omega''):(\omega',\omega'')\in W\}$ – семейство непрерывных положительных и коммутирующих между собой линейных операторов, действующих в пространстве непрерывных на $[0,T]$ вещественных функций.

Для того чтобы упростить запись, используем обозначение

$$J^\beta x(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t(t-s)^{\beta-1}x(s)\,ds\quad(0<\beta<\infty).$$

В работах [5, 6] приведены основные свойства указанных операторов и дан обзор результатов в этом направлении. Отметим далее, что $J^\beta x(t)$ является ограниченным в семействе банаховых пространств $\mathbb{X}(\omega')$, что следует из неравенства (4). Последнее является общеизвестным фактом. Далее оператор $c(\omega',\omega'')$ можно записать следующим образом:

$$c(\omega',\omega'')z(t)=(a(\omega',\omega'')J^\alpha+b(\omega',\omega'')J^{\alpha-\alpha_0})z(t).$$

Пусть теперь n – произвольное натуральное число и

$$c(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)z(t)=\prod_{j=1}^n c(\omega_{j-1},\omega_j)z(t).$$

Обозначим через W^* множество таких пар (ω',ω''), для которых $\mathbb{X}(\omega')\subseteq\mathbb{X}(\omega'')$, и при любом $n=1,2,\ldots$ существуют цепочки $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n$ такие, что $\omega'=\omega_0$, $\omega''=\omega_n$ и $(\omega_{j-1},\omega_j)\in W$ $(j=1,\ldots,n)$; положим

$$c_n(\omega',\omega'')z(t)=\inf c(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)z(t), \tag{5}$$

где инфимум берется (при фиксированной функции z и фиксированном t) по всем упомянутым выше цепочкам. В дальнейшем в качестве функции $z(t)$ будем рассматривать единичную функцию $1(t)$.

Положим еще

$$h(t)=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\xi_j}{j!}\,t^j$$

в случае, если рассматривается задача (1), (2), и

$$h(t)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\phi_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\,t^{\alpha-j},$$

если рассматривается задача (1), (3).

Теорема 1. *Пусть* $(\omega', \omega'') \in W^*$, *функция* $f(t) = f(t, h(t), D^{\alpha_0}h(t))$ *ограничена в пространстве* $\mathbb{X}(\omega')$ *и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n(\omega', \omega'')1(T)} < 1. \tag{6}$$

Тогда задачи Коши (1), (2) и (1), (3) имеют в $\mathbb{X}(\omega'')$ *определенные на* $[0, T]$ *решения. При этом не существует двух решений* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *задач Коши (1), (2) и (1), (3), разность которых является ограниченной функцией в* $\mathbb{X}(\omega')$.

Доказательство. Пусть $(\omega', \omega'') \in W^*$. Рассмотрим действующий из пространства $\mathbb{C}(\omega')$ в пространство $\mathbb{C}(\omega'')$ нелинейный оператор

$$Ay(t) = f(t, h(t) + J^\alpha y(t), D^{\alpha_0}h(t) + D^{\alpha_0}J^\alpha y(t)). \tag{7}$$

Покажем, что если функция $y_*(t) = f(t, x_*(t), D^{\alpha_0}x_*(t))$ является неподвижной точкой оператора (7), то функция $x_*(t) = h(t) + J^\alpha y_*(t)$ является решением задач Коши (1), (2) или (1), (3). Действительно, если $Ay_*(t) = y_*(t)$, то

$$f(t, h(t) + J^\alpha y_*(t), D^{\alpha_0}h(t) + D^{\alpha_0}J^\alpha y_*(t)) = y_*(t). \tag{8}$$

Применяя к равенству $x_*(t) = h(t) + J^\alpha y_*(t)$ оператор D^α и используя для всех $y_*(t)$ из пространства $\mathbb{X}(\omega')$ свойство $D^\alpha J^\alpha y_* = y_*$ (см. [6]), получаем, что

$$D^\alpha x_*(t) = D^\alpha(h(t) + J^\alpha y_*(t)) = y_*(t).$$

Отсюда в силу (8) вытекает, что функция $x_*(t)$ является решением задачи Коши. Начальные условия обеих задач выполняются по построению.

Покажем далее, что оператор $Ay(t)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|Ay_1(t) - Ay_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le c(\omega', \omega'')(\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{X}(\omega')})(t). \tag{9}$$

Действительно, для любого t, $0 \le t \le T$, имеем

$$\|Ay_1(t) - Ay_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le$$

$$\le \|f(t, h(t) + J^\alpha y_1(t), D^{\alpha_0}h(t) + J^{\alpha-\alpha_0}y_1(t)) - f(t, h(t) + J^\alpha y_2(t), D^{\alpha_0}h(t) + J^{\alpha-\alpha_0}y_2(t))\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le$$

$$\le a(\omega', \omega'')\|J^\alpha y_1(t) - J^\alpha y_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega')} + b(\omega', \omega'')\|J^{\alpha-\alpha_0}y_1(t) - J^{\alpha-\alpha_0}y_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega')} \le$$

$$\le a(\omega', \omega'')J^\alpha\|y_1(t) - y_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega')} + b(\omega', \omega'')J^{\alpha-\alpha_0}\|y_1(t) - y_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega')} =$$

$$= c(\omega', \omega'')(\|y_1(\cdot) - y_2(\cdot)\|_{\mathbb{X}(\omega')})(t).$$

Пусть теперь $(\omega', \omega'') \in W^*$ и для цепочки $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ выполнены условия $\omega' = \omega_0$, $\omega'' = \omega_n$ и $(\omega_{j-1}, \omega_j) \in W$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда из (9) следует, что

$$\|A^n y_1(t) - A^n y_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le c(\omega_{n-1}, \omega_n)\|A^{n-1}y_1(t) - A^{n-1}y_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega_{n-1})} \le \ldots$$

$$\ldots \le c(\omega_{n-1}, \omega_n)\ldots c(\omega_0, \omega_1)\|y_1(t) - y_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega')}.$$

Отсюда с учетом (5) вытекает неравенство

$$\|A^n y_1(t) - A^n y_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \le c_n(\omega', \omega'')\|y_1(t) - y_2(t)\|_{\mathbb{X}(\omega')}. \tag{10}$$

Полученные неравенства позволяют воспользоваться теоремой о неподвижной точке из [1]. Действительно, выбирая в качестве начальной функции y_0 нулевую, получаем, что

$$y_0 - Ay_0 = f(t, h(t), D^{\alpha_0}h(t)) = f_1(t) \tag{11}$$

является ограниченной функцией в $\mathbb{X}(\omega')$. Но тогда в силу равенства (11) для всех T, удовлетворяющих условию (6), последовательные приближения

$$y_{n+1} = Ay_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

сходятся в $\mathbb{X}(\omega'')$ к некоторой функции $y_*(t)$. Далее, оператор (7), как легко показать, является непрерывным как оператор из $\mathbb{C}(\omega'')$ в пространство $\mathbb{C}_\mathbb{X}$ непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в $\mathbb{X}$. Поэтому $y_*(t)$ – неподвижная точка оператора (7). Тем самым первая часть теоремы о существовании решения доказана. Единственность решения задач Коши (1), (2) и (1), (3) очевидным образом следует из неравенств (10).

Рассмотрим теперь частный случай, когда $\Omega = [0, 1]$,

$$a(\omega', \omega'') = \frac{a}{(\omega'' - \omega')^\alpha}, \quad b(\omega', \omega'') = \frac{b}{(\omega'' - \omega')^{\alpha - \alpha_0}};$$

здесь a, b – некоторые постоянные. Отметим, что операторы $c(\omega', \omega'')$ можно записать в виде

$$c(\omega', \omega'') = \frac{aJ^\alpha}{(\omega'' - \omega')^\alpha} + \frac{bJ^{\alpha - \alpha_0}}{(\omega'' - \omega')^{\alpha - \alpha_0}},$$

тем самым

$$c(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{aJ^\alpha}{(\omega_{j-1} - \omega_j)^\alpha} + \frac{bJ^{\alpha - \alpha_0}}{(\omega_{j-1} - \omega_j)^{\alpha - \alpha_0}} \right).$$

Разобьем далее отрезок $\Omega = [0, 1]$ на n равных частей точками $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$. Очевидно, что в этом случае

$$c(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) = \left(\frac{an^\alpha J^\alpha}{(\omega'' - \omega')^\alpha} + \frac{bn^{\alpha - \alpha_0} J^{\alpha - \alpha_0}}{(\omega'' - \omega')^{\alpha - \alpha_0}} \right)^n.$$

Так как $J^\theta 1(t) = \dfrac{t^\theta}{\Gamma(1 + \theta)}$ $(0 < \theta < \infty)$, то

$$c(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) 1(t) = \left(\frac{an^\alpha J^\alpha}{(\omega'' - \omega')^\alpha} + \frac{bn^{\alpha - \alpha_0} J^{\alpha - \alpha_0}}{(\omega'' - \omega')^{\alpha - \alpha_0}} \right)^n 1(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{a^{n-k} b^k n^{n\alpha - k\alpha_0}}{(\omega'' - \omega')^{n\alpha - k\alpha_0}} J^{n\alpha - k\alpha_0} 1(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{a^{n-k} b^k t^{n\alpha - k\alpha_0}}{(\omega'' - \omega')^{n\alpha - k\alpha_0}} \frac{n^{n\alpha - k\alpha_0}}{\Gamma(1 + n\alpha - k\alpha_0)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{a^{n-k} b^k t^{n\alpha - k\alpha_0}}{(\omega'' - \omega')^{n\alpha - k\alpha_0}} \frac{n^{n\alpha - k\alpha_0}}{(n\alpha - k\alpha_0)^{(n\alpha - k\alpha_0)}} \frac{(n\alpha - k\alpha_0)^{(n\alpha - k\alpha_0)}}{\Gamma(1 + n\alpha - k\alpha_0)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{a^{n-k} b^k t^{n\alpha - k\alpha_0}}{(\omega'' - \omega')^{n\alpha - k\alpha_0}} \frac{(n\alpha)^{n\alpha - k\alpha_0}}{(n\alpha - k\alpha_0)^{(n\alpha - k\alpha_0)} \alpha^{(n\alpha - k\alpha_0)}} \frac{(n\alpha - k\alpha_0)^{(n\alpha - k\alpha_0)}}{\Gamma(1 + n\alpha - k\alpha_0)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{a^{n-k} b^k t^{n\alpha - k\alpha_0}}{(\omega'' - \omega')^{n\alpha - k\alpha_0}} \left(\left(1 + \frac{k\alpha_0}{n\alpha - k\alpha_0} \right)^{(n\alpha - k\alpha_0)/k\alpha_0} \right)^{k\alpha_0} \frac{1}{\alpha^{(n\alpha - k\alpha_0)}} \frac{(n\alpha - k\alpha_0)^{(n\alpha - k\alpha_0)}}{\Gamma(1 + n\alpha - k\alpha_0)} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{a^{n-k} b^k t^{n\alpha - k\alpha_0}}{(\omega'' - \omega')^{n\alpha - k\alpha_0}} e^{k\alpha_0} \frac{1}{\alpha^{(n\alpha - k\alpha_0)}} \frac{(n\alpha - k\alpha_0)^{(n\alpha - k\alpha_0)}}{\Gamma(1 + n\alpha - k\alpha_0)}.$$

Далее воспользуемся уточненной [7] формулой Стирлинга

$$\ln\Gamma(z) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{B_1}{1\cdot 2}\,\frac{1}{z} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\,\frac{1}{z^3} + \frac{B_3}{5\cdot 6}\,\frac{1}{z^5} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{m-1}B_m}{(2m-1)\cdot 2m}\,\frac{1}{z^{2m-1}} + \frac{(-1)^m\theta B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)}\,\frac{1}{z^{2m+1}} \quad (0<\theta<1),$$

где $B_n = \dfrac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\,s_{2n}$ – n-е число Бернулли. Из нее вытекает неравенство

$$\ln\Gamma(z+1) \geq \ln\sqrt{2\pi} + (z+1/2)\ln z - z - 1$$

или иначе

$$\Gamma(z+1) \geq \sqrt{2\pi z}\,\frac{z^z}{e}\,e^{-z}.$$

Отсюда получаем неравенство $\dfrac{z^z}{\Gamma(z+1)} \leq \dfrac{e^{z+1}}{\sqrt{2\pi z}}$, которое используем для дальнейших вычислений. В результате получаем

$$c(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)1(t) \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,\frac{a^{n-k}b^k t^{n\alpha-k\alpha_0}}{(\omega''-\omega')^{n\alpha-k\alpha_0}}\,e^{k\alpha_0}\,\frac{\alpha^{k\alpha_0}}{\alpha^{n\alpha}}\,\frac{e\,e^{n\alpha-k\alpha_0}}{\sqrt{2\pi(n\alpha-k\alpha_0)}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\,\frac{a^{n-k}b^k t^{n\alpha-k\alpha_0}}{(\omega''-\omega')^{n\alpha-k\alpha_0}}\,e^{n\alpha+1}\,\frac{\alpha^{k\alpha_0}}{\alpha^{n\alpha}\sqrt{2\pi(n\alpha-k\alpha_0)}} \leq$$

$$\leq \frac{t^{n\alpha}e^{n\alpha+1}}{(\omega''-\omega')^{n\alpha}\alpha^{n\alpha}\sqrt{2\pi n(\alpha-\alpha_0)}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,\frac{a^{n-k}b^k(\omega''-\omega')^{k\alpha_0}\alpha^{k\alpha_0}}{t^{k\alpha_0}} =$$

$$= \frac{t^{n\alpha}e^{n\alpha+1}}{(\omega''-\omega')^{n\alpha}\alpha^{n\alpha}\sqrt{2\pi n(\alpha-\alpha_0)}}\left(a + \frac{(\omega''-\omega')^{\alpha_0}\alpha^{\alpha_0}}{t^{\alpha_0}}\right)^n$$

и, следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)1(t)} \leq$$

$$\leq \frac{t^\alpha e^\alpha}{(\omega''-\omega')^\alpha\alpha^\alpha}\left(a + \frac{b(\omega''-\omega')^{\alpha_0}\alpha^{\alpha_0}}{t^{\alpha_0}}\right) = \frac{at^\alpha e^\alpha}{(\omega''-\omega')^\alpha\alpha^\alpha} + \frac{bt^{\alpha-\alpha_0}e^\alpha}{(\omega''-\omega')^{\alpha-\alpha_0}\alpha^{\alpha-\alpha_0}}.$$

Из приведенных рассуждений следует

Теорема 2. *Предположим, что для функции $f(t,x,y)$ выполнено условие Липшица*

$$\|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\|_{\mathbb{X}(\omega'')} \leq \frac{a}{(\omega''-\omega')^\alpha}\|x_1-x_2\|_{\mathbb{X}(\omega')} + \frac{b}{(\omega''-\omega')^{\alpha-\alpha_0}}\|y_1-y_2\|_{\mathbb{X}(\omega')}$$

для всех $0 \leq \omega' < \omega'' < 1$. Тогда задача Коши (1), (2) при условии, что функции $f(t)$ ограничены в пространстве $\mathbb{X}(\omega')$, имеет единственное, определенное на $[0,T]$ решение в пространстве $\mathbb{X}(\omega'')$ для всех T, удовлетворяющих условию

$$\frac{aT^\alpha e^\alpha}{(\omega''-\omega')^\alpha\alpha^\alpha} + \frac{bT^{\alpha-\alpha_0}e^\alpha}{(\omega''-\omega')^{\alpha-\alpha_0}\alpha^{\alpha-\alpha_0}} < 1.$$

Авторы выражают благодарность рецензенту за серьезный анализ работы и ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Забрейко П.П., Радыно Я.В.* Приложение теории неподвижных точек к задаче Коши для уравнений с ухудшающими операторами // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 2. С. 345–348.
2. *Забрейко П.П.* Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с ухудшающими операторами // Докл. АН БССР. 1989. Т. 23. № 12. С. 1061–1064.
3. *Баркова Е.А., Забрейко П.П.* Задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков с ухудшающими операторами // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 3. С. 472–478.
4. *Баркова Е.А., Забрейко П.П.* Задача Коши для дифференциальных уравнений дробных порядков с ухудшающими правыми частями // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1132–1134.
5. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
6. *Kilbas A.A., Trujillo J.J.* Differential equations of fractional order: methods, results and problems // Applicable Analysis. 2001. Т. 1. № 78. P. 153–192.
7. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., 2003.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники, г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск

Поступила в редакцию
01.08.2007 г.