

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра метрологии и стандартизации

**В.Н. Сеница**

***ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ  
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА ИХ ОБРАБОТКИ***

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

для студентов специальности I-54 01 01  
«Метрологическое обеспечение информационных систем и сетей»

В 3-х частях

Часть 1

**АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ**

Минск 2005

УДК 621.391.24 (075.8)  
ББК 32.811.3  
С 38

Рецензент:  
доцент кафедры электроники, канд. физ.-мат. наук  
В.Т. Першин

**Синица В.Н.**

С 38 Измерительные сигналы и функциональные устройства их обработки:  
Лаб. практикум для студ. спец. I-54 01 01 «Метрологическое обеспечение  
информационных систем и сетей». В 3 ч. Ч. 1: Анализ измерительных  
сигналов / В.Н. Синица. – Мн.: БГУИР, 2005. – 76 с.: ил.  
ISBN 985-444-888-6 (ч. 1)

В часть 1 лабораторного практикума включены четыре лабораторные работы: «Исследование временных и спектральных характеристик детерминированных измерительных сигналов»; «Корреляционный анализ детерминированных измерительных сигналов»; «Анализ статистических характеристик и параметров случайных измерительных сигналов»; «Исследование дискретизации и восстановления детерминированных измерительных сигналов». Приведены краткие теоретические сведения по анализу временных, спектральных, корреляционных и статистических характеристик электрических измерительных сигналов. Указаны цели работ, описана методика их выполнения с применением ПЭВМ.

УДК 621.391.24 (075.8)  
ББК 32.811.3

ISBN 985-444-888-6 (ч. 1)  
ISBN 985-444-887-8

© Синица В.Н., 2005  
© БГУИР, 2005

# 1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ»

## 1.1 Цель работы

Изучить временные и спектральные характеристики основных видов электрических измерительных видео- и радиосигналов путём моделирования на ПЭВМ.

## 1.2 Краткие теоретические сведения

**Измерительным сигналом (ИС)** называется материальный носитель информации, представляющий собой некоторый физический процесс, содержащий количественную информацию об измеряемой физической величине.

ИС в виде тока и/или напряжения, изменяющихся во времени, называется **электрическим сигналом S(t)**. Условно электрические сигналы подразделяются на **видеосигналы и радиосигналы**.

ИС, полученные с помощью разнообразных преобразователей (датчиков) сигналов неэлектрической природы, называются **первичными** или **видеосигналами**, и они, как правило, могут передаваться только по проводным линиям связи.

Для передачи ИС в виде видеосигнала на большие расстояния без проводников его преобразуют в **радиосигнал** (материальный носитель электромагнитные волны). **Радиосигналы** представляют собой модулированные видеосигналом по амплитуде (АМ), частоте (ЧМ) либо фазе (ФМ) **высокочастотные колебания**, называемые сигналами-переносчиками, или несущими сигналами. Один из параметров радиосигнала, который функционально связан с видеосигналом (измеряемой физической величиной), называется **информативным**.

Свойства видео- и радиосигналов, связанные с возможностями передачи информации и прохождения их через различные электрические цепи, удобно рассматривать, представляя ИС в виде **суммы гармонических составляющих** (гармоник), называемой его **спектром**. Спектр ИС изучают в виде зависимости амплитуд (**спектр амплитуд**) и начальных фаз его гармоник (**спектр фаз**) от их частоты.

Следовательно, для изучения свойств ИС используется как **временной**, так и **спектральный** (частотный) анализ.

### 1.2.1 Временные и спектральные характеристики видеосигналов

*Временные и спектральные характеристики периодических сигналов*

Сигналы **бесконечные** во времени, для которых выполняется условие

$$S(t) = S(t + n \cdot T), \quad (1.1)$$

(где  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $T$  – период повторения сигнала,  $\omega = 2 \cdot \pi / T$  – круговая частота), называются **периодическими**. Физически сигнал может рассматриваться как периодический, если время его существования во много раз превы-

шает его период повторения  $T$ . Если условие (1.1) не выполняется, то такие сигналы являются **непериодическими** (в частности **одинокими**).

Разложение периодического сигнала  $S(t)$  на гармонические составляющие называется **спектральным анализом** и осуществляется в виде **ряда Фурье**, который в компактной тригонометрической форме может быть записан как

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t - \varphi_n). \quad (1.2)$$

Коэффициенты ряда:  $a_0$  – постоянная составляющая,  $A_n$  – амплитуды и  $\varphi_n$  – фазы  $n$ -х гармоник ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \text{постоянная составляющая (вольт, ампер)} - a_0 &= \frac{1}{T} \cdot \int_S S(t) dt; \\ \text{амплитуды косинусоидальных гармоник} - a_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_S S(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt; \\ \text{амплитуды синусоидальных гармоник} - b_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_S S(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt; \\ \text{модуль амплитуд гармоник (вольт, ампер)} - A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \\ \text{фазы гармоник (радиан)} - \varphi_n &= \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right). \end{aligned} \right\} (1.3)$$

Совокупность коэффициентов  $a_n$ ,  $b_n$  или  $A_n$ , которые являются амплитудами гармоник с **размерностью напряжения или тока**, образует **амплитудный спектр** сигнала, а  $\varphi_n$  – **фазовый спектр в радианах**.

Рассмотрим во времени функцию сигнала (рисунок 1.1, *a*), представляющую собой периодическое гармоническое колебание (одну гармонику), записанное в виде

$$S(t) = U_m \cdot \cos(\omega_1 \cdot t - \varphi_0), \quad (1.4)$$

где  $U_m$  – амплитуда,  $\omega_1 = 2 \cdot \pi / T_1$  – частота ( $T_1$  – период),  $\varphi_0 = \omega_1 \cdot \Delta t$  – начальная фаза колебания ( $\Delta t$  – временной сдвиг относительно точки отсчёта  $t = 0$ ). Этот сигнал в частотном диапазоне представляет собой **одну спектральную линию** как в спектре амплитуд (рисунок 1.1, *б*), так и в спектре фаз (рисунок 1.1, *в*).

В общем случае периодический сигнал  $S(t)$  (рисунок 1.2, *a*) содержит в спектре амплитуд (рисунок 1.2, *б, в, д*) и в спектре фаз (рисунок 1.2, *з*) **бесконечное** количество спектральных линий.

За **ширину спектра** принимают частотный интервал  $\Delta\omega_c$ , в пределах которого заключается энергия сигнала не меньше некоторого наперёд заданного уровня.

Поэтому чаще всего интересуются амплитудным спектром, который позволяет судить о количественном вкладе тех или иных гармоник в энергию периодического сигнала.

Поскольку точка временного отсчёта функции сигнала при анализе его спектра может выбираться **произвольно**, получаемые фазовые спектры  $\varphi_n$  для одного и того же сигнала будут **отличаться** на величину **начального** фазового сдвига  $\varphi_0$ , а модули амплитудных спектров  $A_n$  будут одинаковыми.

Таким образом, спектр периодического сигнала  $S(t)$  является **дискретным (линейчатым)**, то есть состоит из спектральных линий, соответствующих частотам  $0, \omega_1, 2 \cdot \omega_1, \dots, n \cdot \omega_1$ . Каждая гармоника переносит долю энергии сигнала на **частотах, кратных частоте следования сигнала  $\omega_1$** .

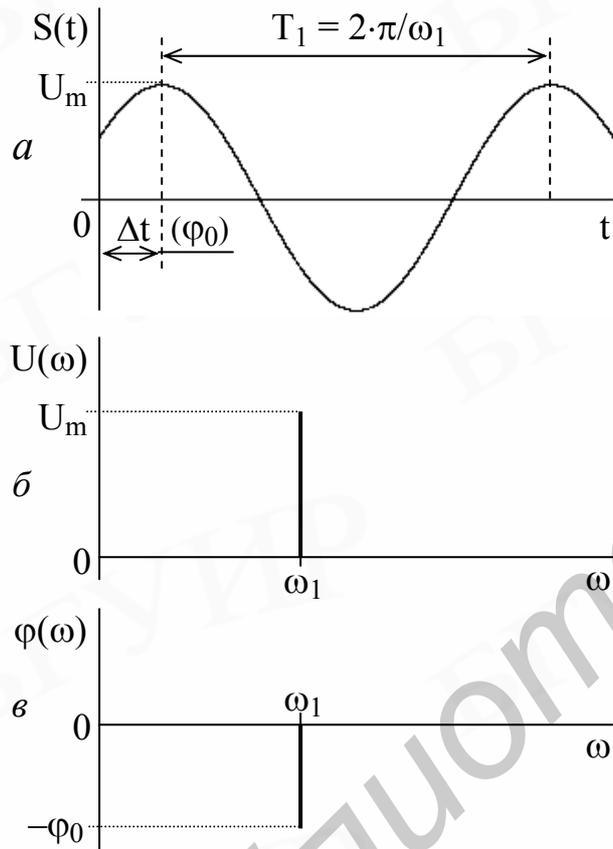


Рисунок 1.1

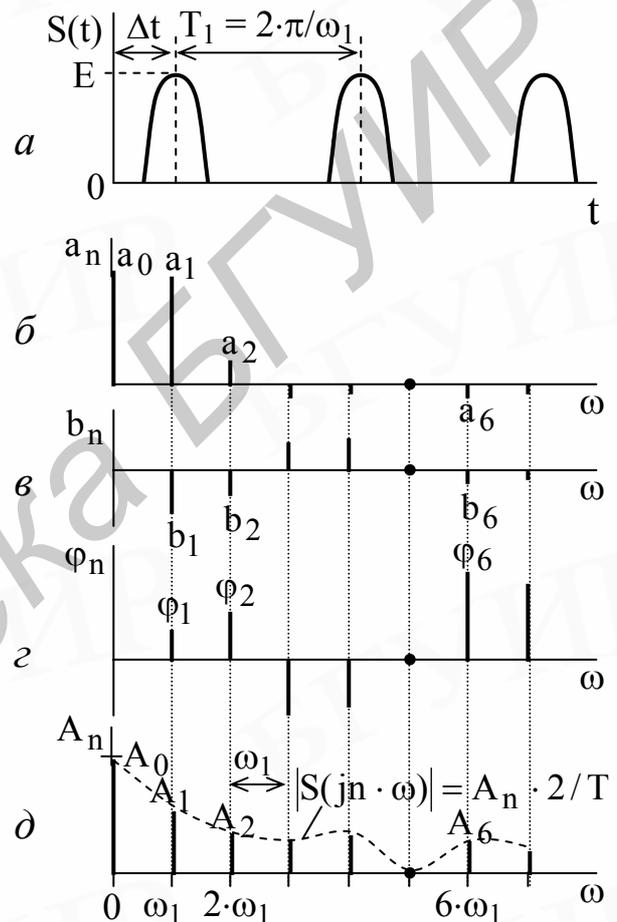


Рисунок 1.2

Для анализа прохождения сигналов через цепи используется запись ряда Фурье в **комплексной** форме:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j(n \cdot \omega_1 \cdot t - \psi_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{C}_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t}, \quad (1.5)$$

$$\hat{C}_n = C_n \cdot e^{-j \cdot \psi_n} = \frac{1}{T} \cdot \int S(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t} dt, \quad \psi_n = \arctg \left( \frac{\text{Im}[\hat{C}_n]}{\text{Re}[\hat{C}_n]} \right), \quad C_n = \frac{A_n}{2} \quad (1.6)$$

**комплексные амплитуды** и **фазы** гармоник. Действительная часть  $\text{Re}[\hat{C}_n]$  есть **чётная**, а мнимая часть  $\text{Im}[\hat{C}_n]$  – **нечётная** функция частоты  $n \cdot \omega_1$ .

При изменении в (1.5) знака числа  $n$  получаем изменение знака частоты, то есть векторы  $\hat{C}_n \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t}$  и  $\hat{C}_n \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t}$  отличаются противоположным направлением вращения, однако, складываясь, эти две комплексные величины образуют вещественное число. Поэтому отрицательная частота (минус  $n \cdot \omega_1$ ) – понятие не физическое, а математическое.

Множество коэффициентов  $C_n$  комплексного ряда Фурье, рассматриваемых как функция частоты, называется **комплексным спектром** сигнала, который является **двусторонним** или **теоретическим** (рисунок 1.3, а).

Графически периодический сигнал можно представить в виде бесконечной суммы векторов, вращающихся при изменении времени (рисунок 1.3, б), а на комплексной плоскости – суммарным вектором, где при изменении частоты точка конца вектора будет описывать траекторию, называемую **годографом** (рисунок 1.3, в).

Из (1.2) и (1.5) следует, что по заданному спектру сигнала можно выполнить **синтез** (воспроизведение) функции сигнала  $S(t)$ .

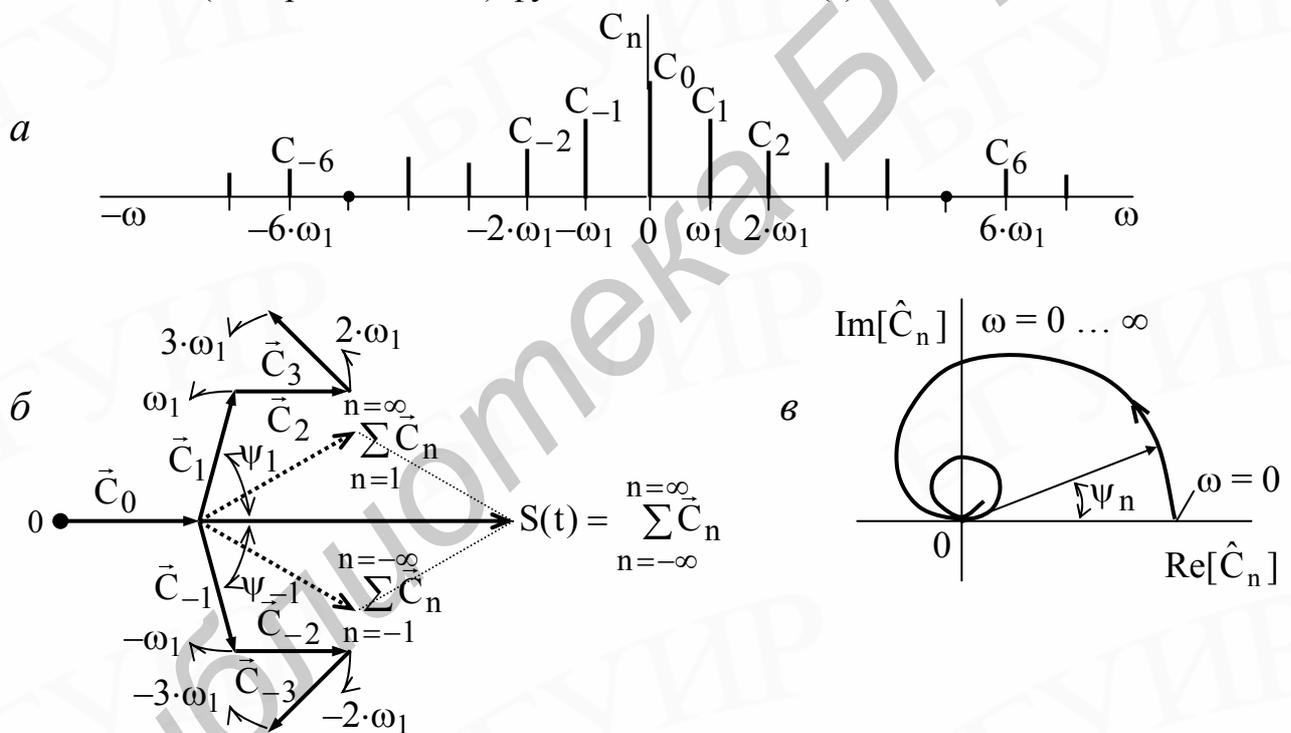


Рисунок 1.3

#### Пример спектрального представления периодического сигнала

Рассмотрим разложение в ряд Фурье (спектр) видеосигнала в виде периодической последовательности прямоугольных импульсов (рисунок 1.4, а), с длительностью  $\tau$ , периодом повторения  $T$ , амплитудой  $E$  и отношением  $q = T/\tau$  – называемым скважностью. При выбранной точке времени начала отсчёта функция сигнала  $U(t)$  будет чётной и на отрезке времени  $T$  записывается в виде

$$U(t) = \begin{cases} E, & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2; \\ 0, & \text{при } -T/2 \leq t < -\tau/2 \text{ и } \tau/2 < t \leq T/2. \end{cases} \quad [B] \quad (1.7)$$

Так как функция  $U(t)$  чётная, то, как следует из (1.3), коэффициенты  $b_n = 0$ .

По формулам (1.3) с учётом (1.7) находим постоянную составляющую

$$U_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cdot dt = \frac{E \cdot \tau}{T} = \frac{E}{q} \quad [B] \quad (1.8)$$

и амплитуды  $n$ -х гармоник с учётом, что  $\omega_1 = 2 \cdot \pi / T$  :

$$U_n = a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) dt = \frac{2 \cdot E}{T \cdot n \cdot \omega_1} \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t) \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2 \cdot E}{q} \cdot \frac{\sin(n \cdot \pi / q)}{n \cdot \pi / q} \quad [B]. \quad (1.9)$$

Следовательно, для последовательности прямоугольных видеоимпульсов разложение в спектр имеет вид

$$U(t) = \frac{E}{q} \cdot \left[ 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot \pi / q)}{n \cdot \pi / q} \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) \right] \quad [B]. \quad (1.10)$$

Амплитудный спектр  $U_n$  сигнала  $U(t)$  показан на рисунке 1.4, б, в для двух значений длительности импульса  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в предположении, что период повторения импульсов  $T$  одинаков.

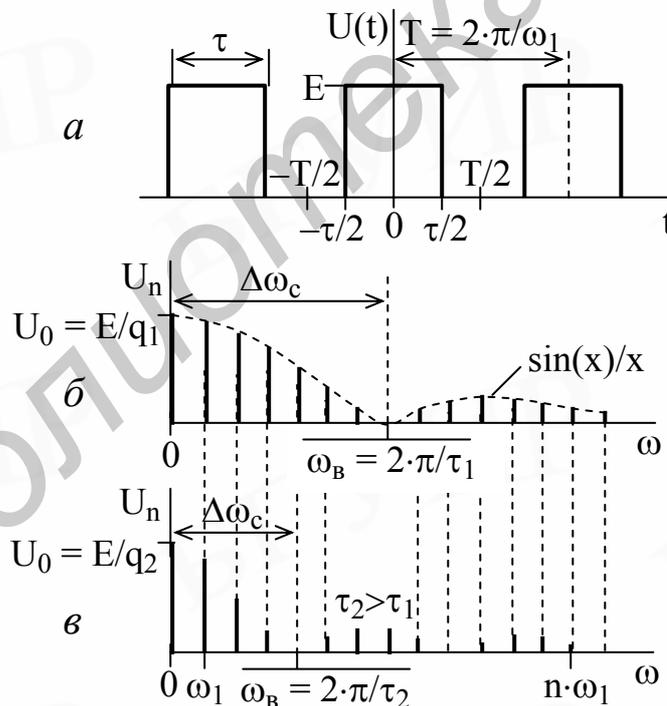


Рисунок 1.4

Обычно для прямоугольного видеоимпульса **ширина спектра**  $\Delta\omega_c$  ограничивается верхней частотой спектра  $\omega_B$ , соответствующей первому нулю огибающей амплитуд гармоник (см. рисунок 1.4, б, в). Тогда

$$\Delta\omega_c = \omega_B = 2 \cdot \pi / \tau, \quad (1.11)$$

то есть **ширина спектра** зависит **только от длительности импульса**, причём **чем меньше** длительность импульса, **тем шире** спектр.

*Спектральные характеристики непериодических сигналов*

Разложение (1.2) периодической функции  $S(t)$  в тригонометрический ряд может быть обобщено на случай непериодической функции  $S(t)$ , если применить **предельный переход**, полагая, что **период  $T$  стремится к бесконечности**. Тогда частота  $\omega_1 = 2 \cdot \pi / T$ , определяющая интервал между соседними гармониками (см. рисунок 1.2,  $\delta$ ), стремится к бесконечно малому приращению  $d\omega$ , а величина  $n \cdot \omega_1 = n \cdot d\omega$  становится непрерывно изменяющейся частотой  $\omega$ , то есть спектр сигнала становится **сплошным**. При этом интеграл (1.6)

$$\hat{C}_n = \frac{1}{T} \cdot \int_T S(t) \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_1 \cdot t} dt$$

при  $T \rightarrow \infty$  преобразуется к виду

$$C(j\omega) = \frac{d\omega}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt. \quad (1.12)$$

Из (1.12) следует, что непериодический сигнал можно представить в виде бесконечного количества гармонических колебаний **с бесконечно малыми амплитудами**, что неудобно на практике. Поэтому спектр непериодического сигнала рассматривают в виде функции **спектральной плотности**, показывающей, какое напряжение приходится на единицу полосы частот:

$$S(j\omega) = C(j\omega) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt \text{ [В/Гц]}. \quad (1.13)$$

Выражение (1.5) преобразуется к виду

$$S(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} d\omega \text{ [В]}. \quad (1.14)$$

Функция частоты  $S(j\omega) = S(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)}$ , где  $S(\omega)$  – модуль спектральной плотности (функция чётная), который называют **амплитудным спектром**, а  $\varphi(\omega)$  – **фазовым спектром** (функция нечётная). Соотношения (1.13) и (1.14), связывающие временную функцию  $S(t)$  и её спектральную плотность  $S(j\omega)$ , соответственно называются **прямым и обратным преобразованиями Фурье**.

Между спектральной плотностью  $S(j\omega)$  непериодического (одиночного) сигнала и комплексными коэффициентами  $\hat{C}_n$  ряда Фурье для этого же, но периодического сигнала существует связь

$$\hat{C}_n = S(jn \cdot \omega) \cdot \frac{1}{T} \text{ [В]} \quad \text{или} \quad S(jn \cdot \omega) = \hat{C}_n \cdot T \text{ [В/Гц]}, \quad (1.15)$$

причём  $|S(jn \cdot \omega)|$  с точностью до множителя  $1/T$  или  $2/T$  является **оггибающей** дискретной последовательности  $C_n$  или  $A_n$  (см. рисунок 1.2,  $\delta$ ).

## 1.2.2 Временные и спектральные характеристики радиосигналов

### Однотональный АМ-сигнал

В этом случае гармоническое высокочастотное (ВЧ) колебание (несущее)  $U_H(t) = U_{mH} \cdot \cos(\omega_H \cdot t + \varphi_0)$  (рисунок 1.5, а) модулируется сигналом (видео-сигналом), изменяющимся по гармоническому закону

$$U_M(t) = U_{mM} \cdot \cos(\Omega_M \cdot t - \psi_0),$$

где  $U_{mH}$  и  $U_{mM}$  – амплитуда;  $\omega_H$  и  $\Omega_M$  – частота;  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  – начальная фаза (рисунок 1.5, б).

Изменение амплитуды ВЧ-колебания можно записать в виде

$$U_{mH}(t) = U_{mH} \cdot [1 + m \cdot \cos(\Omega_M \cdot t - \psi_0)], \quad (1.16)$$

где 
$$m = b \cdot \frac{U_{mM}}{U_{mH}} - \quad (1.17)$$

коэффициент модуляции ( $b$  – коэффициент пропорциональности).

Тогда временная функция АМ-сигнала записывается как

$$U_{AM}(t) = U_{mH} \cdot [1 + m \cdot \cos(\Omega_M \cdot t - \psi_0)] \cdot \cos(\omega_H \cdot t + \varphi_0) \quad (1.18)$$

и имеет вид, показанный на рисунке 1.5, в.

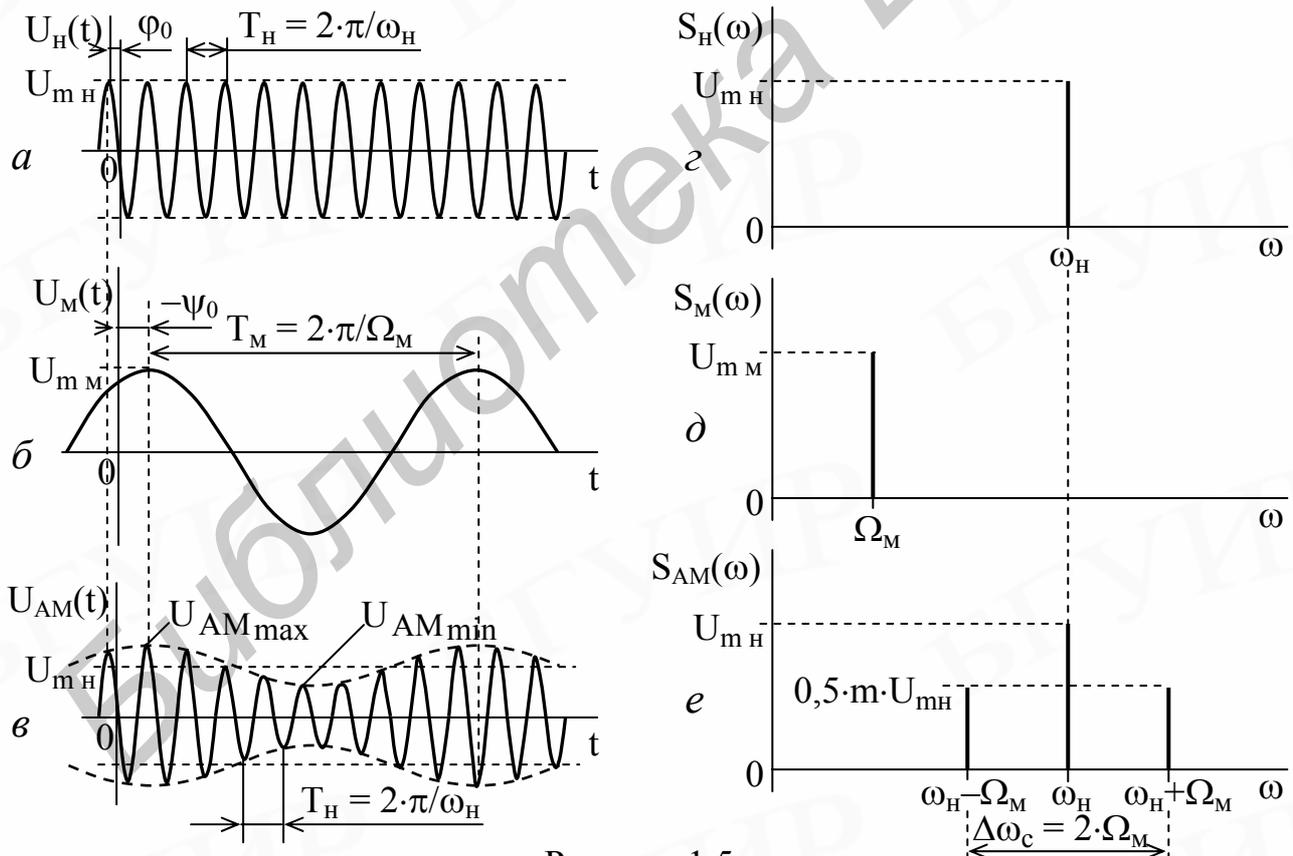


Рисунок 1.5

Наблюдение АМ-сигнала на экране осциллографа позволяет измерить коэффициент модуляции  $m$  по формуле

$$m = (U_{AMmax} - U_{AMmin}) / (U_{AMmax} + U_{AMmin}). \quad (1.19)$$

Для нахождения спектра АМ-сигнала преобразуем (1.18), используя тригонометрические формулы, к виду

$$U_{AM}(t) = U_{mH} \cdot \cos(\omega_H \cdot t + \varphi_0) + 0,5 \cdot m \cdot U_{mH} \cdot \cos[(\omega_H + \Omega_M) \cdot t + \varphi_0 - \psi_0] + 0,5 \cdot m \cdot U_{mH} \cdot \cos[(\omega_H - \Omega_M) \cdot t + \varphi_0 + \psi_0] . \quad (1.20)$$

Первое слагаемое в (1.20) представляет собой немодулированное ВЧ-колебание частотой  $\omega_H$ . Второе и третье слагаемые с частотами  $(\omega_H + \Omega_M)$  и  $(\omega_H - \Omega_M)$  называются соответственно **нижней и верхней боковыми составляющими**, амплитуды которых одинаковы и равны  $0,5 \cdot m \cdot U_{mH}$ . Спектры ВЧ-колебания  $S_H(\omega)$ , модулирующего сигнала  $S_M(\omega)$  и АМ-сигнала  $S_{AM}(\omega)$ , соответственно показаны на рисунке 1.5, *з*, *д*, *е*. Из спектральной диаграммы (спектрограммы) видно, что ширина спектра АМ-сигнала равна **удвоенной** частоте модулирующего сигнала

$$\Delta\omega_c = 2 \cdot \Omega_M . \quad (1.21)$$

#### Многотональный АМ-сигнал

Если спектр модулирующего сигнала  $S_M(\omega)$  содержит ряд гармонических составляющих с различными частотами (рисунок 1.6, *а*), то каждое из них в спектре АМ-сигнала создаёт соответственно верхнюю и нижнюю боковые составляющие, **образующие** (рисунок 1.6, *б*) **верхнюю и нижнюю боковые полосы**. Из рисунка 1.6, *б* видно, что ширина спектра АМ-сигнала  $S_{AM}(\omega)$  зависит от **максимального** значения частоты  $\Omega_{mM}$  составляющей в спектре модулирующего сигнала и равна

$$\Delta\omega_c = 2 \cdot \Omega_{mM} . \quad (1.22)$$

Амплитуды боковых составляющих многотонального АМ-сигнала определяются как

$$U_{BN} = 0,5 \cdot m_N \cdot U_{mH} , \quad (1.23)$$

где  $m_N$  – парциальный коэффициент модуляции, который согласно (1.17) зависит от амплитуды N-й составляющей модулирующего сигнала.

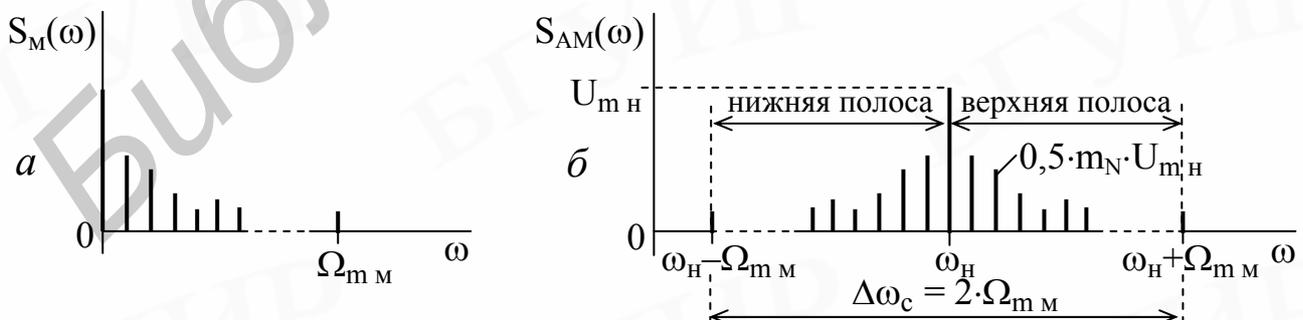


Рисунок 1.6

*Фазо- и частотно-модулированные сигналы*

Фазо- и частотно-модулированные сигналы (ФМ и ЧМ) характеризуются тем, что в несущем ВЧ-колебании  $U_H(t) = U_{mH} \cdot \cos(\omega_H \cdot t + \varphi)$  при постоянной амплитуде  $U_{mH}$  соответственно **изменяется текущая фаза  $\varphi$  либо мгновенная частота  $\omega_H$**  (рисунок 1.7, а). Поскольку  $\Psi(t) = \omega_H \cdot t + \varphi$  определяет текущее значение фазового угла, называемое полной фазой, то оба вида модуляции называют **угловой** модуляцией (УМ), то есть

$$U_{УМ}(t) = U_{mH} \cdot \cos[\Psi(t)] . \quad (1.24)$$

При ФМ

$$U_{ФМ}(t) = U_{mH} \cdot \cos[\omega_H \cdot t + k_\varphi \cdot U_M(t)] , \quad (1.25)$$

где  $k_\varphi$  [рад/В] – коэффициент пропорциональности для ФМ,  $\omega_H$  – частота ВЧ-колебания без модуляции. Предельное значение  $\pm \Delta\varphi_D = \pm U_{M\max}(t) \cdot k_\varphi$  называется девиацией фазы.

При ЧМ изменяется **мгновенная частота** –  $\omega(t) = \omega_H + k_\omega \cdot U_M(t)$  – и её предельное значение –  $\pm \Delta\omega_D = \pm U_{M\max}(t) \cdot k_\omega$  – называется **девиацией частоты** ( $k_\omega$  [рад/(В·с)] – коэффициент пропорциональности для ЧМ). Так как мгновенная частота УМ-сигнала

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}, \text{ то текущая фаза } \Psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(t) dt + \text{const} . \quad (1.26)$$

Если  $U_M(t)$  – **плавно изменяющийся сигнал**, то нет внешних различий между сигналами ФМ и ЧМ.

*Однотональный ЧМ-сигнал*

В этом случае мгновенная частота ЧМ-сигнала изменяется по гармоническому закону (рисунок 1.7, а):

$$\omega(t) = \omega_H + \Delta\omega_D \cdot \cos(\Omega_M \cdot t) . \quad (1.27)$$

Подставив (1.27) в (1.26), получим

$$\Psi(t) = \omega_H(t) + \beta \cdot \sin(\Omega_M \cdot t + \psi_0) , \quad (1.28)$$

где  $\beta = \Delta\omega_D / \Omega_M$  – индекс частотной модуляции,  $\psi_0$  – начальная фаза (константа интегрирования).

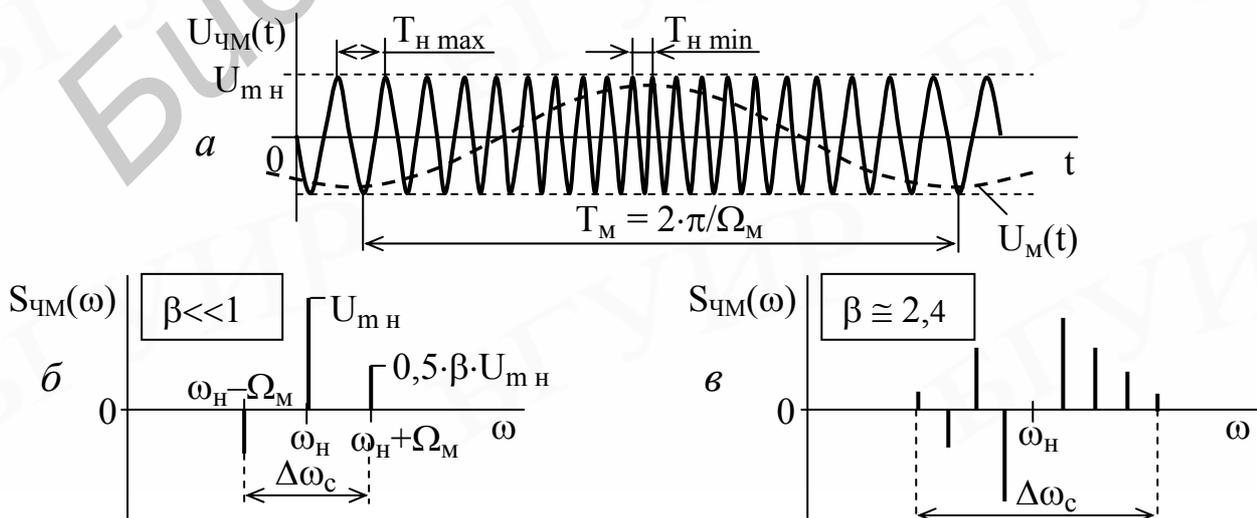


Рисунок 1.7

Подставив (1.28) в (1.24), получим выражение для ЧМ-сигнала в виде

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_{\text{мн}} \cdot \cos[\omega_{\text{н}} \cdot t + \beta \cdot \sin(\Omega_{\text{М}} \cdot t) + \psi_0] . \quad (1.29)$$

Представим (1.29) при  $\psi_0 = 0$  в виде суммы гармонических составляющих:

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_{\text{мн}} \cdot \cos[\beta \cdot \sin(\Omega_{\text{М}} \cdot t)] \cdot \cos(\omega_{\text{н}} \cdot t) - \\ - U_{\text{мн}} \cdot \sin[\beta \cdot \sin(\Omega_{\text{М}} \cdot t)] \cdot \sin(\omega_{\text{н}} \cdot t) . \quad (1.30)$$

В случае  $\beta \ll 1$  можно считать, что  $\cos[\beta \cdot \sin(\Omega_{\text{М}} \cdot t)] \cong 1$  и  $\sin[\beta \cdot \sin(\Omega_{\text{М}} \cdot t)] \cong \beta \cdot \sin(\Omega_{\text{М}} \cdot t)$ , тогда

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_{\text{мн}} \cdot \cos(\omega_{\text{н}} \cdot t) - \beta \cdot U_{\text{мн}} \cdot \sin[\beta \cdot \sin(\Omega_{\text{М}} \cdot t)] \cdot \sin(\omega_{\text{н}} \cdot t) = U_{\text{мн}} \times \\ \times \cos(\omega_{\text{н}} \cdot t) + 0,5 \cdot \beta \cdot U_{\text{мн}} \cdot \cos(\omega_{\text{н}} + \Omega_{\text{М}}) \cdot t - 0,5 \cdot \beta \cdot U_{\text{мн}} \cdot \cos(\omega_{\text{н}} - \Omega_{\text{М}}) \cdot t . \quad (1.31)$$

Следовательно, при  $\beta \ll 1$  спектр ЧМ-сигнала содержит колебание частотой  $\omega_{\text{н}}$  и две боковые составляющие на частотах  $(\omega_{\text{н}} + \Omega_{\text{М}})$  и  $(\omega_{\text{н}} - \Omega_{\text{М}})$ , то есть ширина спектра равна

$$\Delta\omega_{\text{с}} = 2 \cdot \Omega_{\text{М}} .$$

(1.32)

Сравнение спектров однотонального сигнала  $U_{\text{ЧМ}}(t)$  (1.31) с  $U_{\text{АМ}}(t)$  (1.20) показывает, что ЧМ-сигнал отличается только фазой  $-180^\circ$  нижней боковой составляющей (рисунок 1.7, б). Индекс  $\beta$  играет ту же роль, что и коэффициент  $m$ .

При  $\beta > 1$  необходимо пользоваться соотношениями

$$\cos[\beta \cdot \sin(\Omega_{\text{М}} \cdot t)] = J_0(\beta) + 2 \cdot J_2(\beta) \cdot \cos(2 \cdot \Omega_{\text{М}} \cdot t) + 2 \cdot J_4(\beta) \cdot \cos(4 \cdot \Omega_{\text{М}} \cdot t) + \dots \\ + \sin[\beta \cdot \sin(\Omega_{\text{М}} \cdot t)] = 2 \cdot J_1(\beta) \cdot \cos(\Omega_{\text{М}} \cdot t) + 2 \cdot J_3(\beta) \cdot \cos(3 \cdot \Omega_{\text{М}} \cdot t) + \dots , \quad (1.33)$$

где  $J_n(\beta)$  – функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка от аргумента  $\beta$ .

С учётом (1.33) соотношение (1.30) можно преобразовать к виду

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_{\text{мн}} \cdot J_0(\beta) \cdot \cos(\omega_{\text{н}} \cdot t) + U_{\text{мн}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\beta) \cdot \cos(\omega_{\text{н}} + n \cdot \Omega_{\text{М}}) \cdot t + \\ + U_{\text{мн}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot J_n(\beta) \cdot \cos(\omega_{\text{н}} - n \cdot \Omega_{\text{М}}) \cdot t . \quad (1.34)$$

Из (1.34) следует, что при  $\beta > 1$  спектр однотонального ЧМ-сигнала содержит **бесконечное** число гармонических составляющих (ширина спектра бесконечна) с частотами  $(\omega_{\text{н}} + n \cdot \Omega_{\text{М}})$  и  $(\omega_{\text{н}} - n \cdot \Omega_{\text{М}})$ , симметрично расположенными относительно частоты несущего колебания  $\omega_{\text{н}}$ , и для  $n$  – нечётного, имеющие фазу минус  $180^\circ$ . Амплитуда  $n$ -й боковой составляющей равна

$$U_n = J_n(\beta) \cdot U_{\text{мн}} , \quad (1.35)$$

однако, начиная с  $n = \beta + 1$ , боковые составляющие можно не учитывать, так как их амплитуды становятся весьма малыми, и ими можно пренебречь. Поэтому можно считать, что однотональный ЧМ-сигнал занимает полосу частот

$$\Delta\omega_c = 2 \cdot \Omega_M \cdot (\beta + 1), \quad (1.36)$$

а если  $\beta \gg 1$ , то можно допустить, что

$$\Delta\omega_c \cong 2 \cdot \Omega_M \cdot \beta \cong 2 \cdot \Delta\omega_d, \quad (1.37)$$

то есть ширина спектра приблизительно равна удвоенной девиации частоты.

На рисунке 1.7, б, в, показаны спектры ЧМ-сигналов при различных индексах  $\beta$ . Графики функций Бесселя различного порядка «n» приведены на рисунке 1.8. Из графиков функций Бесселя видно, что при  $\beta \cong 2,4$  функция  $J_0(\beta)$  проходит через нуль, то есть будет **отсутствовать** несущее колебание, а при  $\beta \cong 3,83$  функция  $J_1(\beta)$  равна нулю, что указывает на **отсутствие** в спектре первой пары боковых составляющих. При дальнейшем увеличении индекса  $\beta$  в спектре будут **появляться** и **исчезать** соответствующие гармонические составляющие, что связано с перераспределением энергии между ними. **Чем выше порядок** функции Бесселя, тем **протяжённее** участок увеличения  $\beta$ , где она имеет малые значения.

**Следовательно, при одинаковом однотономальном модулирующем сигнале спектр ЧМ- и ФМ-сигналов сложнее спектра АМ-сигналов.**

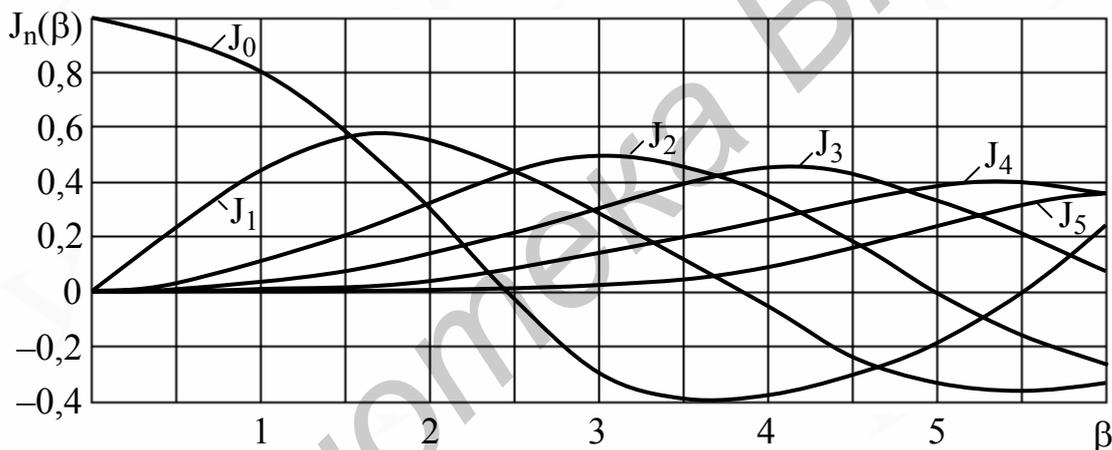


Рисунок 1.8

### Многотональный ЧМ-сигнал

Особенностью многотонального ЧМ- и ФМ-сигналов является то, что кроме частот  $(\omega_H \pm n \cdot \Omega_M)$  в их спектрах присутствуют составляющие с **комбинационными** частотами вида  $(\omega_H \pm \Omega_{1M} \pm \Omega_{2M})$ , амплитуды которых  $(U_k = U_{mH} \cdot \beta_1 \cdot \beta_2 / 2)$  зависят от произведения парциальных индексов модуляции  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , соответствующих гармоник модулирующего сигнала. Следовательно, в спектре возможны составляющие с частотами  $(\omega_H \pm n_1 \cdot \Omega_{1M} \pm \dots \pm n_N \cdot \Omega_{NM})$ , где  $n_1, \dots, n_N$  — целые числа, включая нуль.

### 1.2.3 Устройство для наблюдения модуля амплитуд спектров сигналов

Такое устройство называется спектроанализатором (рисунок 1.9) и работает как узкополосный приёмник сигналов. Через входное устройство (ВУ) сигнал  $U(t)$  поступает на узкополосный перестраиваемый фильтр ( $\Phi$ ), который вы-

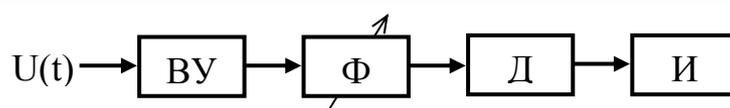


Рисунок 1.9

деляет напряжение гармоники в спектре сигнала; это напряжение детектируется (Д) и отображается на индикаторе (И).

### 1.3 Краткие сведения о программе SAS

Программа SAS предназначена для временного и спектрального анализов, а также спектрального (гармонического) синтеза сигналов.

**Окно программы содержит два поля:** левое и правое.

На рисунке 1.10 приведено окно программы с указанием номеров позиций, используемых для ввода и измерения параметров временных и спектральных характеристик сигналов, а также для установки режимов анализа.

Для получения справки нажмите клавишу «Н».

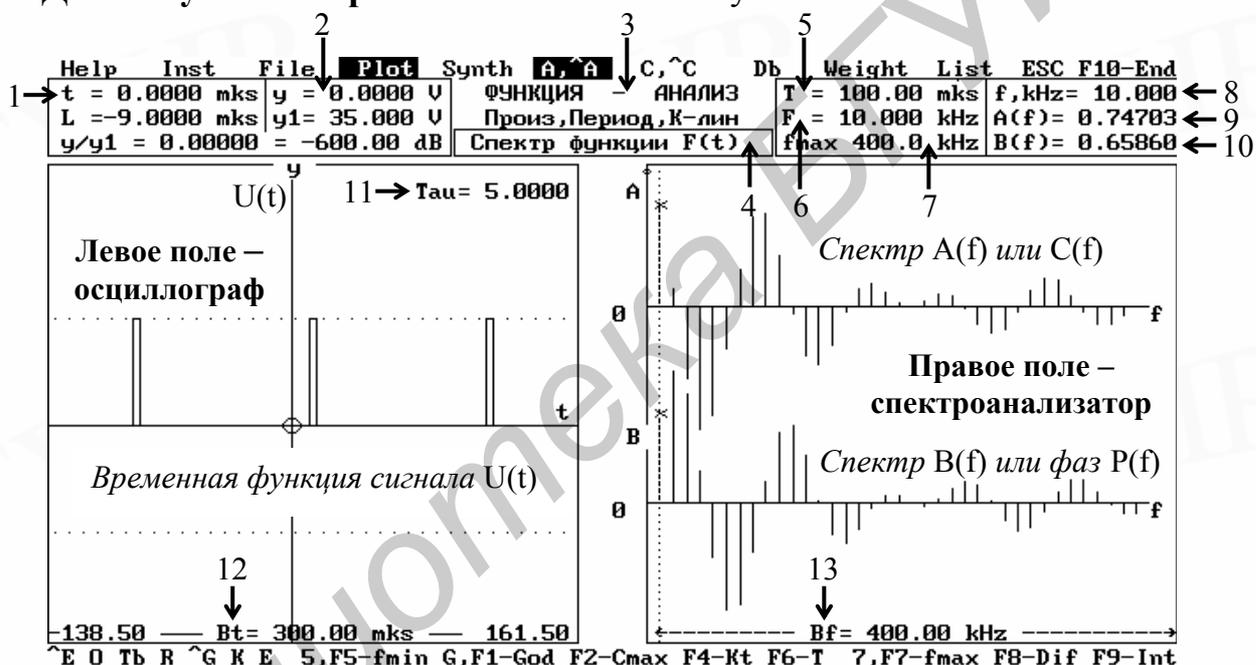


Рисунок 1.10

#### Левое поле

Представляет собой экран виртуального цифрового осциллографа и предназначено для наблюдения, построения, изменения и измерения параметров временных характеристик сигналов  $U(t)$ .

Для построения, изменения и измерения параметров в контролируемой точке временных характеристик сигналов используется **измерительная линия с маркером** (перекрестие).

**Перемещение измерительной линии по оси времени** осуществляется нажатием клавиш «←» (влево) и «→» (вправо), а с **меньшим шагом** – при удерживании клавиши «Ctrl».

**Установка маркера по оси напряжения** осуществляется нажатием клавиш «↑» (вверх) и «↓» (вниз), а с **меньшим шагом** – нажатием клавиш «Page Up» (вверх) и «Page Down» (вниз) при удерживании клавиши «Ctrl».

**Для установки маркера измерительной линии в заданную точку координат:** нажать клавишу «Т» и ввести координату времени (см. рисунок 1.10 поз. 4), затем нажать «Enter»; нажать клавишу «У» и ввести координату напряжения (поз. 4), затем нажать «Enter».

**Стирание** временных характеристик осуществляется нажатием клавиши «Ctrl+E».

Знак «○» отображает контролируемый или вводимый узел функции  $U(t)$ .

#### *Правое поле*

Представляет собой экран виртуального цифрового спектроанализатора и предназначено для наблюдения, изменения и измерения параметров спектральных характеристик сигналов  $S(j\omega)$  в виде действительной  $A(f)$  и мнимой  $B(f)$  части, или модуля  $C(f)$  и фазы  $P(f)$ .

Измерительная линия **автоматически** появляется в этом поле после нажатия клавиш «А» или «С», включающих режим спектрального анализа сигнала.

**Перемещение измерительной линии** по оси частот осуществляется нажатием клавиш «←» (влево) и «→» (вправо), а с **меньшим шагом** – при удерживании клавиши «Ctrl».

**Переход с правого поля на левое поле и обратно** осуществляется клавишей «Tab» или нажатием клавиш «А», «С» и «Р».

При необходимости повторным нажатием клавиш «Р», «А», «С», «S» и «O» можно **обновлять** наблюдаемые графики.

#### **Программа SAS позволяет:**

- строить, рассчитывать, наблюдать, изменять и измерять временные функции периодических и непериодических видео- и радиосигналов;
- рассчитывать, наблюдать, изменять и измерять действительную и мнимую части, модуль и фазу спектра периодических и непериодических видео- и радиосигналов;
- рассчитывать, наблюдать, изменять и измерять спектры производных и интегралов от функции сигнала;
- наблюдать и измерять распределение энергии в спектре сигналов (теорема Парсеваля);
- наблюдать годографы спектров на плоскости и в пространстве, а также динамику их изменения в заданном частотном диапазоне спектра;
- осуществлять синтез сигналов по спектру, наблюдать, измерять и сравнивать сигналы, синтезированные по заданным частотным полосам (вплоть до отдельных гармоник) или изменениям исходных спектров.

### **1.4 Порядок выполнения работы**

Работа выполняется в соответствии с заданным вариантом. Запишите требуемые для его выполнения данные, приведенные в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Варианты данных для выполнения

№	$U_T(t)$	$U_{VI}(t)$	$U_{AM}(t)$	$U_{RI}(t)$	$U_{ЧМ}(t)$
---	----------	-------------	-------------	-------------	-------------

вари-анта	Имя файла	$K_u$ , раз	$U_0$ , В	$\tau_c$ , мкс	Имя файла	$K_t$ , раз	Имя файла	Имя файла	Имя файла
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	M80K	0,5	30	-2	V110K5	1,4	AM10K50	R15K4	FM20B2'4

Библиотека БГУИР

Окончание таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	M64K	0,7	-25	-4	VI10K10	1,2	AM10K80	RI10K5	FM20B3'8
3	M50K	1,2	15	-6	VI20K5	1,2	AM20K50	RI16K8	FM25B2'4
4	M40K	1,5	-10	-8	VI20K10	0,8	AM20K80	RI20K10	FM25B3'8
5	M32K	2,0	5	8	VI25K4	1,5	AM40K60	RI25K8	FM40B2'4
6	M25K	0,6	-5	10	VI25K8	0,5	AM40K90	RI32K15	FM40B3'8
7	M20K	0,7	10	12	VI32K2	1,5	AM50K30	RI40K20	FM50B2'4
8	M16K	0,5	-15	14	VI32K4	0,7	AM50K70	RI50K15	FM50B3'8
9	M10K	0,4	25	16	VI40K2	0,5	AM80K20	RI64K16	FM80B2'4
10	M5K	1,2	-30	18	VI40K4	1,5	AM80K90	RI80K20	FM80B3'8

*Смысловое значение имени файла*

M80K – гармонический сигнал частотой 80 кГц.

VI10K5 – видеоимпульсы частотой 10 кГц и длительностью 5 мкс.

AM10K50 – амплитудно-модулированный сигнал с частотой модуляции 10 кГц и коэффициентом модуляции  $m = 50\%$ .

RI5K4 – радиоимпульсы частотой 5 кГц и длительностью 4 мкс.

FM20B2'4 – частотно-модулированный сигнал с частотой модуляции 20 кГц и индексом модуляции  $\beta = 2,4$ .

*Запуск программы*

Запустите программу SAS с помощью ярлыка «СпектрИС» из папки «Часть1» находящейся в папке «ИСиФУиО».

**1.4.1 Анализ временных и спектральных характеристик видеосигналов**

*Анализ характеристик периодического гармонического (однотонального) сигнала*

Для доступа к библиотеке DATA, содержащей файлы с данными сигналов, нажмите «F». На экране появится подменю работы с файлами данных и содержание библиотеки DATA. Для вызова анализируемого сигнала нажмите «2» и наберите заданное имя файла для  $U_{\Gamma}(t)$ .

**Примечание** Для исправления ошибок при наборе имени файла используйте клавишу «←» – стирание символа слева от курсора.

Нажмите «Enter» и ждите появления сообщения «Файл имя.DAT вызван».

**Примечание** При ошибочном вызове другого или отсутствующего файла повторите вызов нажатием «2» и набором имени требуемого файла.

Для возврата в основное меню нажмите «5», а затем для наблюдения осциллограммы (графика) временной функции сигнала нажмите «P». На поле осциллографа появится изображение сигнала  $U_{\Gamma}(t)$  и измерительная линия с маркером.

Зарисуйте график сигнала.

Измерьте амплитуду сигнала  $U_m$ . Для этого, перемещая маркер клавишами стрелка «↑ ↓» и «← →», установите его в точку соответствующую амплитуде  $U_m$  функции сигнала, запишите полученное значение (поз. 2).

Для анализа комплексного спектра сигнала нажмите клавишу «A». На поле спектроанализатора появятся спектрограммы (графики) в виде спектральных

линий напряжения, верхний график – действительной и нижний – мнимой составляющих (гармоник) спектра. Измерительная линия автоматически перемещается на поле спектроанализатора.

Для наблюдения спектра в положительной (физической) области частот нажмите клавишу буквы «О» и зарисуйте наблюдаемые графики.

Нажмите клавишу «С». Отобразится график спектра модуля амплитуд напряжения гармоник (верхний) и спектра их фаз (нижний). Зарисуйте наблюдаемые графики. Запишите значения периода  $T$  (поз. 5) и частоты  $F$  (поз. 6) сигнала  $U_T(t)$ .

Перемещая измерительную линию (маркер) клавишами «← →», установите её на наблюдаемую спектральную линию (гармонику). Запишите её частоту  $f$  (поз. 8), относительную амплитуду  $C(f)$  (поз. 9) и фазу  $P(f)$  (поз. 10).

Нажмите клавишу «F2», запишите напряжение  $C_{\max}$  (поз. 4).

Учитывая, что спектр комплексный и содержит составляющие на частотах плюс и минус  $f$ , определите амплитуду напряжения гармоники как

$$U_m(f) = 2 \cdot C_{\max} \cdot \quad (1.38)$$

Нанесите измеренные временные параметры сигнала и его спектра на соответствующие рисунки графиков. Сравните значение  $U_m(f)$  с  $U_m$ .

Объясните полученные результаты.

Нажатию клавиши «Р» перейдите на поле сигнала. Измените амплитуду  $U_m$  сигнала в  $K_u$  раз. Для этого нажмите клавишу «F5», наберите в поз. 4 заданное значение  $K_u$  и нажмите «Enter». Эта установка соответствует теореме умножения сигнала на число  $K_u$ .

Зарисуйте график сигнала.

Измерьте амплитуду сигнала  $U_m$ . Для этого, перемещая маркер клавишами «↑ ↓» и «← →», установите его в точку, соответствующую амплитуде  $U_m$  функции сигнала, запишите полученное значение (поз. 2).

Для анализа спектра сигнала нажмите клавишу «С». Установите маркер на наблюдаемую спектральную линию. Нажмите клавишу «F2», запишите  $C_{\max}$  (поз. 4) и определите амплитуду напряжения гармоники по (1.38). Сравните значение  $U_m(f)$  с  $U_m$ .

Объясните полученный результат.

Нажатию клавиши «Р» перейдите на поле сигнала. Добавьте к сигналу постоянное напряжение  $U_0$ . Для этого нажмите клавишу «Т» и наберите в поз. 4 значение  $t = 0$ , нажмите «Enter», затем «Y» и наберите в поз. 4 с обратным знаком заданное значение  $U_0$ , нажмите «Enter». Нажатию клавиши буквы «О» перенесите начало координат в точку расположения маркера. Функция сигнала сдвигается по оси напряжения на заданное значение  $U_0$ . Эта установка соответствует теореме суммирования сигналов.

Зарисуйте график сигнала и измерьте максимальное значение его напряжения.

Для анализа спектра сигнала нажмите клавишу «А» и зарисуйте наблюдаемые графики. Нажмите клавишу «С» и зарисуйте наблюдаемые графики спектра.

Установите поочередно маркер клавишами «← →» на наблюдаемые спектральные линии и запишите их частоту  $f$  (поз. 8), относительную амплитуду  $C(f)$  (поз. 9) и фазу  $P(f)$  (поз. 10). Нажмите клавишу «F2», запишите напряжение  $C_{\max}$  (поз. 4) – максимальное значение составляющей спектра.

Определите абсолютное значение постоянной составляющей спектра  $U_0$

$$U_0 = C_{\max} \cdot C(f = 0) , \quad (1.39)$$

где  $C(f = 0)$  – относительное значение составляющей на частоте  $f = 0$ . Определите амплитуду напряжения гармоники как

$$U_m(f) = 2 \cdot C_{\max} \cdot C(f) . \quad (1.40)$$

Сравните значение  $U_m(f)$  с  $U_m$ .

Нанесите измеренные параметры сигнала и его спектра на соответствующие рисунки графиков. Объясните полученные результаты.

Нажатием клавиши «Р» перейдите на поле сигнала. Сместите сигнал по оси времени на величину  $\tau_c$ . Для этого нажмите «Y» и наберите в поз. 4  $y = 0$ , нажмите «Enter», затем нажмите «Т» и наберите в поз. 4 заданное значение  $\tau_c$ , нажмите «Enter». Нажатием буквы «О» перенесите начало координат в точку расположения маркера. Эта установка соответствует теореме сдвига (задержки) сигналов по оси времени. Зарисуйте график сигнала.

Определите фазу гармонического сигнала, соответствующую его смещению во времени от начала отсчёта, на время  $\tau_c$  как

$$\varphi_c = \tau_c \cdot 360^\circ / T , \quad (1.41)$$

где  $T$  – период сигнала.

Для анализа спектра сигнала нажмите клавишу «А» и зарисуйте наблюдаемые графики. Нажмите клавишу «С» и зарисуйте наблюдаемые графики спектра.

Установите поочередно маркер клавишами «← →» на наблюдаемые спектральные линии и запишите их частоту  $f$  (поз. 8), относительную амплитуду  $C(f)$  (поз. 9) и фазу  $P(f)$  (поз. 10). Сравните рассчитанное значение фазы сигнала  $\varphi_c$  с измеренной фазой  $P(f)$  для гармоники.

Нанесите измеренные параметры спектра сигнала на соответствующие рисунки графиков. Объясните полученные результаты.

Нажмите клавишу «F10», затем клавишу «Пробел».

*Анализ характеристик полигармонического (многотонального) сигнала в виде периодической последовательности и одиночного прямоугольных импульсов.*

Для вызова анализируемого сигнала нажмите «F», затем «2». Наберите имя заданного файла  $U_{VI}(t)$  и нажмите «Enter». После вызова требуемого файла сигнала нажмите "5", а затем "Р". Зарисуйте график сигнала.

Измерьте амплитуду импульсов  $U_m$ . Для этого установите маркер клавишами «↑ ↓» и «← →» в точку, соответствующую амплитуде  $U_m$  функции сиг-

нала, запишите полученное значение (поз. 2).

Измерьте длительность импульсов  $\tau_{и}$ . Для этого, устанавливая маркер клавишами «← →» сначала в точку начала  $t_{н}$  и конца  $t_{к}$  любого импульса, снимите показания в поз. 1. Рассчитайте значение  $\tau_{и} = t_{к} - t_{н}$  и сравните с выводимым в поз. 11. Рассчитайте ширину спектра сигнала, определяемую по первому нулю в огибающей спектра, как  $\Delta f_{с} = 1/\tau_{и}$ .

Для анализа действительной и мнимой частей спектра сигнала нажмите «А», затем букву «О». Зарисуйте наблюдаемые графики.

Для анализа спектра модуля амплитуд и спектра фаз нажмите «С». Зарисуйте наблюдаемые графики. Запишите значения периода  $T$  (поз. 5) и частоты  $F$  (поз. 6) сигнала  $U_{VI}(t)$ .

Перемещая маркер клавишами «← →», измерьте и запишите частоты первой  $f_1$  и второй  $f_2$  гармоник спектра (поз. 8). Рассчитайте значение частотного интервала между гармониками спектра  $\Delta F = f_2 - f_1$ .

Измерьте ширину спектра сигнала  $\Delta f_{с}$ , ограниченную верхней частотой  $f_{в}$ . Для этого установите маркер на частоту, соответствующую первому обращению в нуль огибающей амплитуд гармоник, запишите значение  $f_{в}$  (поз. 8). Ширина спектра сигнала  $\Delta f_{с} = f_{в}$ , сравните ее с рассчитанным значением через  $\tau_{и}$ .

Нажмите клавишу «F2», запишите напряжение  $C_{max}$  (поз. 4) – максимальное значение составляющей спектра.

Определите абсолютное значение постоянной составляющей спектра  $U_0$  по (1.39).

Измерьте величину полной энергии сигнала  $E$ , а также энергию  $E(f_{в})$ , содержащуюся в полосе частот от 0 до  $f_{в}$ . Для этого нажмите «Е», на правом поле отобразится график распределения по спектру относительного значения энергии сигнала  $E(f)/E$ . Установите маркер на частоту  $f_{в}$  и запишите значение  $E(f_{в})/E$  (поз. 4). Нажмите «F2» и запишите значение полной энергии сигнала  $E$  (поз. 4). Рассчитайте абсолютное значение энергии сигнала в полосе частот от 0 до  $f_{в}$  как  $E(f_{в}) = E/[E(f_{в})/E]$ .

Нанесите измеренные временные параметры сигнала и его спектра на соответствующие рисунки графиков. Объясните полученные результаты.

Нажатием клавиши «Р» перейдите на поле сигнала. Измените длительность импульсов  $\tau_{и}$  данного сигнала. Для этого нажмите «F4», введите в поз. 4 заданное значение  $Kt$  и нажмите «Enter». Нажмите «Р». Запишите значение  $\tau_{и}$ , равное «Гау» в поз. 11. Рассчитайте ширину спектра сигнала, определяемую по первому нулю в огибающей спектра как  $\Delta f_{с} = 1/\tau_{и}$ .

Для анализа спектра сигнала нажмите «С».

Измерьте ширину спектра сигнала  $\Delta f_{с}$ , ограниченную частотой  $f_{в}$ . Для этого установите маркер на частоту, соответствующую первому обращению в

нуль огибающей амплитуд гармоник, запишите значение  $f_B$  (поз. 8). Ширина спектра сигнала  $\Delta f_c = f_B$ , сравните ее с рассчитанным выше значением через  $\tau_{и}$ .

Нажмите клавишу «F2», запишите напряжение  $C_{max}$  (поз. 4). Определите абсолютное значение постоянной составляющей спектра  $U_0$  по (1.39).

Измерьте величину полной энергии сигнала  $E$ , а также энергию  $E(f_B)$ , содержащуюся в полосе частот от 0 до  $f_B$ . Для этого нажмите "E", на правом поле отобразится график распределения по спектру относительного значения энергии сигнала  $E(f)/E$ . Установите маркер на частоту  $f_B$  и запишите значение  $E(f_B)/E$  (поз. 4). Нажмите «F2» и запишите значение полной энергии сигнала  $E$  (поз. 4). Рассчитайте абсолютное значение энергии сигнала в полосе частот от 0 до  $f_B$  как  $E(f_B) = E/[E(f_B)/E]$ .

Нанесите измеренные временные параметры сигнала и его спектра на соответствующие рисунки графиков.

Сравните параметры изменённого сигнала и его спектра с параметрами, полученными для исходного сигнала. Объясните полученные результаты.

Нажатием клавиши «P» перейдите на поле сигнала. Введите время смещения (задержки) данного сигнала  $\tau_c$  относительно начала отсчёта оси времени. Для этого нажмите «Y», введите цифру «0» (поз. 4) и нажмите «Enter», затем «T», введите в поз. 4 заданное значение  $\tau_c$  и нажмите «Enter». Нажатием буквы «O» перенесите начало координат в точку расположения маркера. Эта установка соответствует теореме смещения сигналов по оси времени.

Для анализа действительной и мнимой частей спектра сигнала нажмите «A» и зарисуйте наблюдаемые графики. Нажмите клавишу «C» и зарисуйте наблюдаемые графики.

Сравните временные параметры задержанного сигнала и его спектра с параметрами предыдущего сигнала. Объясните полученные результаты.

Нажатием клавиши «P» переведите маркер на поле сигнала. Выполните синтез сигнала по спектру заданному в полосе частот от 0 до частоты  $f_B$ , которая соответствует первому обращению в нуль огибающей амплитуд гармоник. Для этого нажмите «S», затем «C». Установите маркер на частоту  $f_B$ , нажмите «2» (белая полоса показывает заданную полосу частот спектра) и затем «Enter». На левом поле появляется синтезированный сигнал, совмещённый с исходным сигналом.

Зарисуйте график сигналов.

Сравните временные и спектральные параметры синтезированного и исходного сигналов. Объясните полученные результаты.

Нажатием клавиши «P» перейдите на поле сигнала. Преобразуйте данный сигнал в непериодический (одиночный импульс) нажатием клавиш «I», затем «F2» и «P». Это изменение отображается в поз. 3. Зарисуйте график сигнала.

Для анализа спектральной плотности напряжения действительной и мнимой частей спектра сигнала нажмите «A». Зарисуйте наблюдаемые графики спектральной плотности.

Для анализа спектральной плотности модуля напряжения и фазы нажмите «С». Зарисуйте наблюдаемые графики.

Измерьте ширину спектра сигнала  $\Delta f_c$ , ограниченную частотой  $f_B$ . Для этого установите маркер на частоту, соответствующую первому минимуму спектральной плотности модуля напряжения, запишите значение  $f_B$  (поз. 8). Ширина спектра сигнала  $\Delta f_c = f_B$ .

Нажмите клавишу «F2», запишите значение спектральной плотности  $C_{\max}$  (поз. 4). Рассчитайте соответствующее ей напряжение постоянной составляющей  $U_0$  для случая периодического сигнала как

$$U_0 = 2 \cdot C_{\max} / T, \quad (1.42)$$

сравните его с полученным значением  $U_0$  в предыдущем случае.

Измерьте величину полной энергии сигнала  $E$ . Для этого нажмите «Е», а затем «F2» и запишите значение  $E$  (поз. 4).

Сравните временные и спектральные параметры одиночного импульса с параметрами периодической последовательности импульсов. Объясните полученные результаты. Нажатием клавиши «Р» перейдите на поле сигнала.

#### **1.4.2 Анализ временных и спектральных характеристик радиосигналов**

##### *Анализ характеристик однотонового АМ-сигнала*

Для вызова анализируемого сигнала нажмите «F», затем «2». Наберите имя заданного файла  $U_{AM}(t)$  и нажмите «Enter». После вызова требуемого файла сигнала нажмите «5», а затем «Р». Зарисуйте график сигнала.

Определите значение коэффициента модуляции  $m$ . Для этого, перемещая маркер клавишами «↑ ↓» и «← →», совместите его с точкой максимальной  $U_{\max}$  и затем минимальной  $U_{\min}$  амплитуды сигнала, запишите полученные значения (поз. 2). Рассчитайте значение коэффициента модуляции как

$$m = (U_{\max} - U_{\min}) / (U_{\max} + U_{\min}). \quad (1.43)$$

Для анализа действительной и мнимой частей спектра сигнала нажмите «А», затем букву «О». Зарисуйте наблюдаемые графики.

Для анализа спектра модуля амплитуд и спектра фаз нажмите «С». Зарисуйте наблюдаемые графики. Запишите значения периода  $T$  (поз. 5) и частоты  $F$  (поз. 6) огибающей изменения амплитуды  $U_{AM}(t)$  (модулирующего сигнала).

Перемещая маркер клавишами «← →», измерьте и запишите частоты несущего колебания  $f_0$ , нижней  $f_{н.б}$  и верхней  $f_{в.б}$  боковых составляющих (поз. 8), а также их относительные амплитуды  $C(f_0)$ ,  $C(f_{н.б})$  и  $C(f_{в.б})$  (поз. 9). Нажмите «F2», запишите напряжение  $C_{\max}$  (поз. 4) – максимальное значение составляющей спектра.

Рассчитайте значение частотного интервала между гармониками спектра  $\Delta F = f_0 - f_{н.б}$  и ширины спектра сигнала  $\Delta f_c = f_{в.б} - f_{н.б}$ . Рассчитайте по составляющим спектра значение коэффициента модуляции как

$$m = 2 \cdot C(f_B) / C(f_0) \quad (1.44)$$

и сравните его с рассчитанным выше значением по временной функции.

Нанесите измеренные временные параметры сигнала и его спектра на соответствующие рисунки графиков. Объясните полученные результаты.

Нажатием клавиши «Р» перейдите на поле сигнала.

*Анализ характеристик многотонального АМ-сигнала (периодической последовательности радиоимпульсов)*

Для вызова анализируемого сигнала нажмите «F», затем «2». Наберите имя заданного файла  $U_{RI}(t)$  и нажмите «Enter». После вызова требуемого файла сигнала нажмите «5», а затем «Р». Зарисуйте график сигнала.

Измерьте амплитуду импульсов  $U_m$ . Для этого установите маркер клавишами «↑ ↓» и «← →» в точку, соответствующую амплитуде  $U_m$  функции сигнала, запишите полученное значение (поз. 2).

Измерьте длительность импульсов  $\tau_{и}$ . Для этого устанавливая маркер клавишами «← →» сначала в точку начала  $t_{н}$  и конца  $t_{к}$  любого импульса, снимите показания в поз. 1. Рассчитайте значение  $\tau_{и} = t_{к} - t_{н}$  и сравните с выводимым в поз. 11. Рассчитайте ширину спектра сигнала, определяемую между левым и правым нулями огибающей центрального «лепестка» спектра как  $\Delta f_c = 2/\tau_{и}$ .

Для анализа спектра модуля амплитуд и спектра фаз нажмите «С», затем букву «О». Зарисуйте наблюдаемые графики. Запишите значения периода  $T$  (поз. 5) и частоты  $F$  (поз. 6) импульсного сигнала  $U_{RI}(t)$ .

Перемещая маркер клавишами «← →», измерьте и запишите частоты составляющих спектра: несущего колебания  $f_0$  (центральная), первой от  $f_0$  слева  $f_{1н}$  и справа  $f_{1в}$  (поз. 8), а также их относительные амплитуды  $C(f_0)$ ,  $C(f_{1н})$  и  $C(f_{1в})$  (поз. 9). Нажмите «F2», запишите напряжение  $C_{max}$  (поз. 4) – максимальное значение составляющей спектра.

Определите значение частотного интервала между гармониками спектра  $\Delta F = f_0 - f_{1н}$ .

Измерьте ширину спектра сигнала, ограниченную частотами левого  $f_{н,б}$  и правого  $f_{в,б}$  нулями огибающей центрального «лепестка» спектра.

Для этого установите маркер клавишами «← →» в соответствующие точки спектра и запишите значение  $f_{н,б}$  и  $f_{в,б}$  (поз. 8). Ширина спектра сигнала  $\Delta f_c = f_{в,б} - f_{н,б}$ , сравните с рассчитанным выше значением через  $\tau_{и}$ .

Нанесите измеренные временные параметры сигнала и его спектра на соответствующие рисунки графиков. Объясните полученные результаты. Сравните спектры сигналов  $U_{RI}(t)$  и  $U_{VI}(t)$ , сделайте вывод.

Нажатием клавиши «Р» перейдите на поле сигнала.

*Анализ характеристик однотонового ЧМ-сигнала*

Для вызова анализируемого сигнала нажмите «F», затем «2». Наберите имя заданного файла  $U_{ЧМ}(t)$  и нажмите «Enter». После вызова требуемого файла сигнала нажмите «5», а затем «Р». Зарисуйте график сигнала.

Измерьте амплитуду сигнала  $U_m$ . Для этого установите маркер клавишами стрелка « $\uparrow \downarrow$ » и « $\leftarrow \rightarrow$ » в точку, соответствующую амплитуде  $U_m$  функции сигнала, запишите полученное значение (поз. 2).

Определите значение минимального текущего периода ЧМ-сигнала. Для этого нажмите клавишу «j», наберите в поз. 4 значение  $j = 2$  и нажмите «Enter».

Запишите значение  $t(2)$  (поз. 8 или поз. 1).

Для анализа действительной и мнимой частей спектра сигнала нажмите «A», затем букву «O». Зарисуйте наблюдаемые графики.

Запишите значения периода  $T$  (поз. 5) и частоты  $F$  (поз. 6) модулирующего сигнала.

Перемещая маркер клавишами « $\leftarrow \rightarrow$ », измерьте и запишите частоты и фазы всех составляющих спектра с относительной амплитудой  $C(f)$  в (поз. 9) не менее 0,1:  $f_{н.б}$  (нижних боковых),  $f_0$  (несущего колебания – центрального) и  $f_{в.б}$  (верхних боковых) в (поз. 8), а также  $P(f_{н.б})$ ,  $P(f_0)$  и  $P(f_{в.б})$  в (поз. 10).

Определите значения: частотного интервала  $\Delta F$  между соседними гармониками спектра; девиации частоты  $\Delta f_d = [0,5/t(2)] - f_0$ ; индекса модуляции  $\beta = \Delta f_d / F$ ; ширины спектра сигнала  $\Delta f_c = 2 \cdot F \cdot (\beta + 1)$  и  $\Delta f_c = f_{в.б} - f_{н.б}$ , где  $f_{в.б}$  и  $f_{н.б}$  – частоты, соответствующие значению  $C(f) \cong 0,1$  (поз. 9). Сравните полученные значения  $\Delta f_c$ .

Нанесите измеренные временные параметры сигнала и его спектра на соответствующие рисунки графиков. Объясните полученные результаты.

## 1.5 Контрольные вопросы

1.5.1 Что такое спектр сигнала, какие у него характеристики и параметры?

1.5.2 Чем отличаются спектры периодических сигналов от спектров непериодических? Объяснить принцип работы спектроанализатора.

1.5.3 От чего зависят расстояния между спектральными линиями и ширина спектра сигналов?

1.5.4 В чём различие спектров видеосигналов и радиосигналов?

1.5.5 От чего зависит ширина центрального «лепестка» в спектре прямоугольного радиоимпульса?

1.5.6 Какой спектр у однотонового и многотонового АМ-сигнала, чем они отличаются и как определяется ширина их спектров?

1.5.7 Что зависит от коэффициента модуляции во временной функции и в спектре АМ-сигнала?

1.5.8 Что такое девиация частоты и как определяется индекс частотной модуляции?

1.5.9 От чего зависит ширина спектра ЧМ-сигнала, как она определяется при индексе модуляции  $\beta \ll 1$ ,  $\beta > 1$  и  $\beta \gg 1$ ?

1.5.10 При каком индексе модуляции в спектре ЧМ-колебания с тональной модуляцией отсутствуют несущая, первая пара боковых частот?

1.5.11 Чем отличаются спектры однотонального и многотонального ЧМ-сигнала?

### **Литература**

1 Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Сов. радио, 1986. С. 16–109; 423–444.

2 Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 1988. С. 16–135.

3 Радиотехнические цепи и сигналы / Под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. С. 19–120.

## 2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ»

### 2.1 Цель работы

2.1.1 Изучить корреляционный анализ детерминированных сигналов.

2.1.2 Исследовать автокорреляционные и взаимокорреляционные функции различных импульсных измерительных сигналов.

2.1.3 Изучить взаимосвязь корреляционных функций сигналов с их временными и спектральными характеристиками.

### 2.2 Краткие теоретические сведения

Важными временными характеристиками, расширяющими представления о сигналах и их свойствах, являются **взаимокорреляционные функции (ВКФ)** и **автокорреляционные функции (АКФ)**. ВКФ устанавливают временную связь между сигналом  $S_1(t)$  и другим смещаемым на время  $\tau$  сигналом  $S_2(t-\tau)$ , а АКФ – между сигналом  $S(t)$  и его копией  $S(t-\tau)$ . АКФ является частным случаем функции ВКФ, когда сигналы  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  идентичны.

Как известно, при смещении сигнала по оси времени изменяется только его фазовый спектр, что и приводит к изменению во времени взаимодействия между двумя сигналами.

#### 2.2.1 ВКФ сигнала

Для оценки временной связи между двумя различными комплексными сигналами  $\hat{S}_1(t)$  и  $\hat{S}_2(t)$  используется ВКФ, которая определяется выражениями:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_1(t) \cdot \hat{S}_2^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_1(t + \tau) \cdot \hat{S}_2^*(t) dt [B^2 \cdot c]; \quad (2.1)$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_2(t) \cdot \hat{S}_1^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_2(t + \tau) \cdot \hat{S}_1^*(t) dt [B^2 \cdot c]. \quad (2.2)$$

Учитывая, что величина

$$S_{12}(j\omega) = S_1(j\omega) \cdot S_2^*(j\omega) \quad (2.3)$$

есть взаимная спектральная плотность для сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ , ВКФ связана с взаимным энергетическим спектром двух сигналов  $W_{12}(\omega) = |S_{12}(j\omega)|^2$  парой преобразований Фурье:

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot \tau} d\omega [B^2 \cdot c] \quad (2.4)$$

и

$$W_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau [B^2 / \Gamma \tau^2]. \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Основные свойства ВКФ

1.  $R_{12}(\tau) = E_{12}(\tau)$ , где  $E_{12}(\tau)$  – взаимная энергия сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ .
2. При  $\tau = 0$  ВКФ необязательно достигает абсолютного максимума (рисунок 2.1). Например, максимум ВКФ синусоидального и косинусоидального сигналов с одинаковым периодом  $T$  имеет место при  $\tau = T/4$ .
3. ВКФ может не обладать свойством чётности или нечётности относительно  $\tau = 0$ .
4.  $R_{21}(\tau) \neq R_{12}(\tau)$ ,  $R_{12}(\tau) = R_{21}^*(\tau)$  и  $R_{21}(\tau) = R_{12}^*(\tau)$ .
5. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что сигналы с конечной энергией имеют ВКФ конечной длительности.
6. Длительность ВКФ двух импульсных сигналов равна сумме их длительностей.
7. Если, например,  $S_2(t)$  является дельта-импульсом с равномерным бесконечно широким энергетическим спектром, то ВКФ существует со всеми сигналами и имеет форму  $S_1(t)$  (рисунок 2.2).
8. Если  $S_2(t)$  – функция эрмитова, функция свёртки сигналов совпадает с ВКФ:

$$R_{12}(\tau) = S_1(t) \otimes S_2(t - \tau). \quad (2.6)$$

9. Для двух сигналов с не перекрывающимися спектрами или не перекрывающимися во времени, а также для ортогональных ВКФ равна нулю, то есть они не имеют взаимной энергии и некоррелированы.

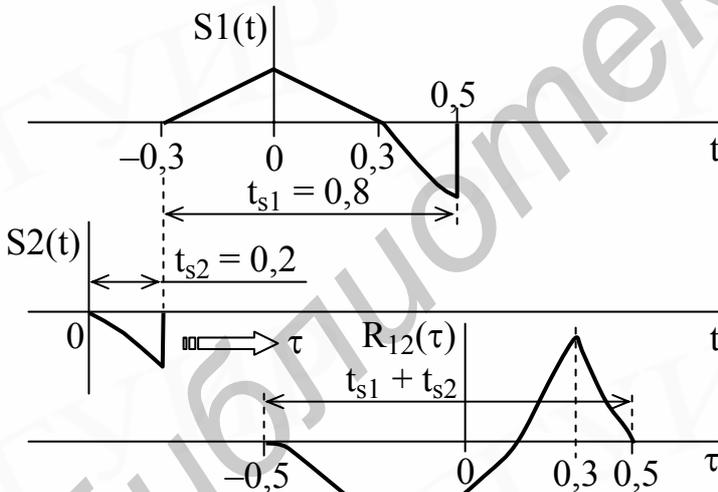


Рисунок 2.1

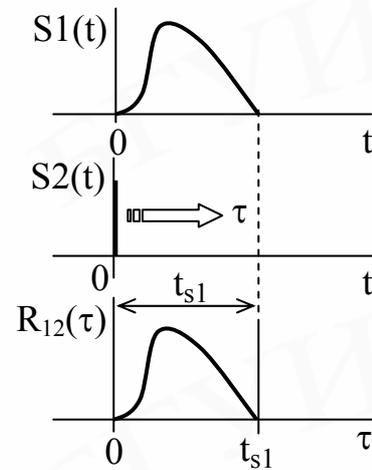


Рисунок 2.2

### 2.2.3 АКФ сигналов конечной длительности

АКФ  $R(\tau)$  вводится для количественной оценки степени отличия сигнала  $S(t)$  и его копии, смещаемой во времени  $S(t-\tau)$ , и определяется как их скалярное произведение, характеризующее изменение взаимной энергии от временного смещения (сдвига или задержки)  $\tau$ :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot S(t - \tau) dt \quad [B^2 \cdot c]. \quad (2.7)$$

Для комплексного сигнала

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(t) \cdot \hat{S}^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(t + \tau) \cdot \hat{S}^*(t) dt, \quad (2.8)$$

откуда видно, что АКФ есть свёртка сигнала  $S(t)$  с его зеркальным отображением во времени  $S(-t)$ , то есть

$$R(\tau) = S(t) \otimes S(-t - \tau). \quad (2.9)$$

Очевидно, что  $\hat{R}^*(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}^*(t) \cdot \hat{S}(t - \tau) dt = \hat{R}(-\tau)$ , и, следовательно, ком-

плексная АКФ обладает свойствами функции Эрмита, то есть её модуль и действительная часть являются чётными функциями, а фаза и мнимая часть – нечётными функциями временного сдвига  $\tau$ .

На рисунке 2.3 показан сигнал, в виде «пачки» из трёх одинаковых прямоугольных импульсов, с одинаковым интервалом  $T$ , и его АКФ. Максимальное значение АКФ при  $\tau = 0$  равно  $3 \cdot E$  – утроенной энергии одного импульса.

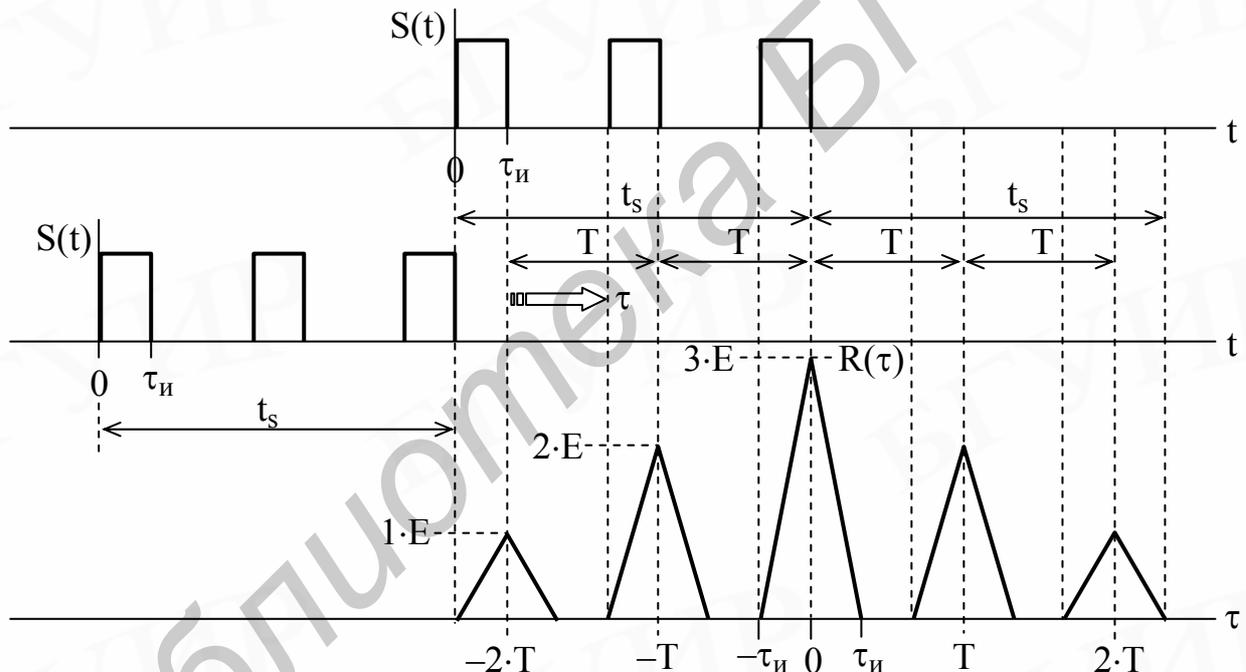


Рисунок 2.3

В случае АМ-сигнала, когда  $S(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_H \cdot t + \Theta_0)$ , его АКФ определяется как

$$R_{AM}(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega_H \cdot \tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cdot A(t - \tau) dt = \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega_H \cdot \tau) \cdot R_A(\tau), \quad (2.10)$$

то есть равна произведению АКФ огибающей  $R_A(\tau)$  и ВЧ-заполнения (рисунок 2.4).

АКФ для импульсного сигнала с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) с большой базой  $B = \Delta\omega_d \cdot t_{и}$  определяется как

$$R_{\text{ЛЧМ}}(\tau) = \frac{U_{\text{H}}^2 \cdot t_{\text{и}}}{2} \cdot \left[ \frac{\sin(\Delta\omega_{\text{д}} \cdot \tau / 2)}{\Delta\omega_{\text{д}} \cdot \tau / 2} \right] \cdot \cos(\omega_{\text{H}} \cdot \tau), \quad (2.11)$$

где  $U_{\text{H}}$  и  $\omega_{\text{H}}$  – амплитуда и частота несущего колебания;  $\Delta\omega_{\text{д}}$  и  $t_{\text{и}}$  – девиация и длительность импульса. АКФ имеет огибающую «лепестковой» структуры вида  $\sin(x)/x$  (рисунок 2.5). Ширина центрального «лепестка» обратно пропорциональна девиации частоты в импульсе  $\Delta\tau = 2 \cdot \pi / \Delta\omega_{\text{д}}$ . Практическая значимость применения ЛЧМ-импульсов состоит в том, что можно добиться существенно их «сжатия» во времени, при этом амплитуда сигнала АКФ будет больше  $U_{\text{H}}$  и может значительно превысить уровень шумов.

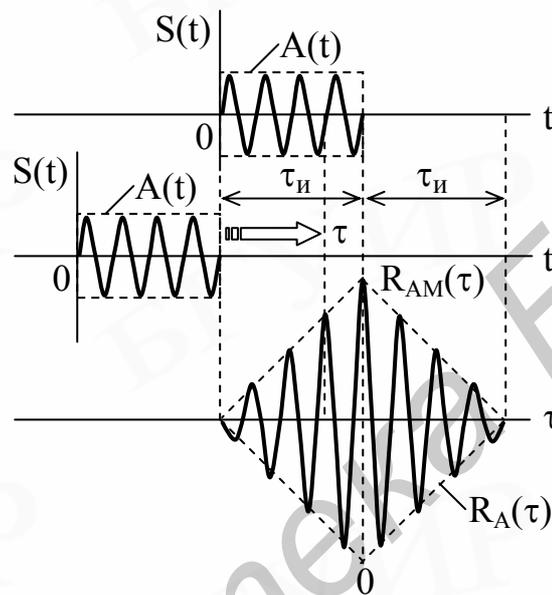


Рисунок 2.4

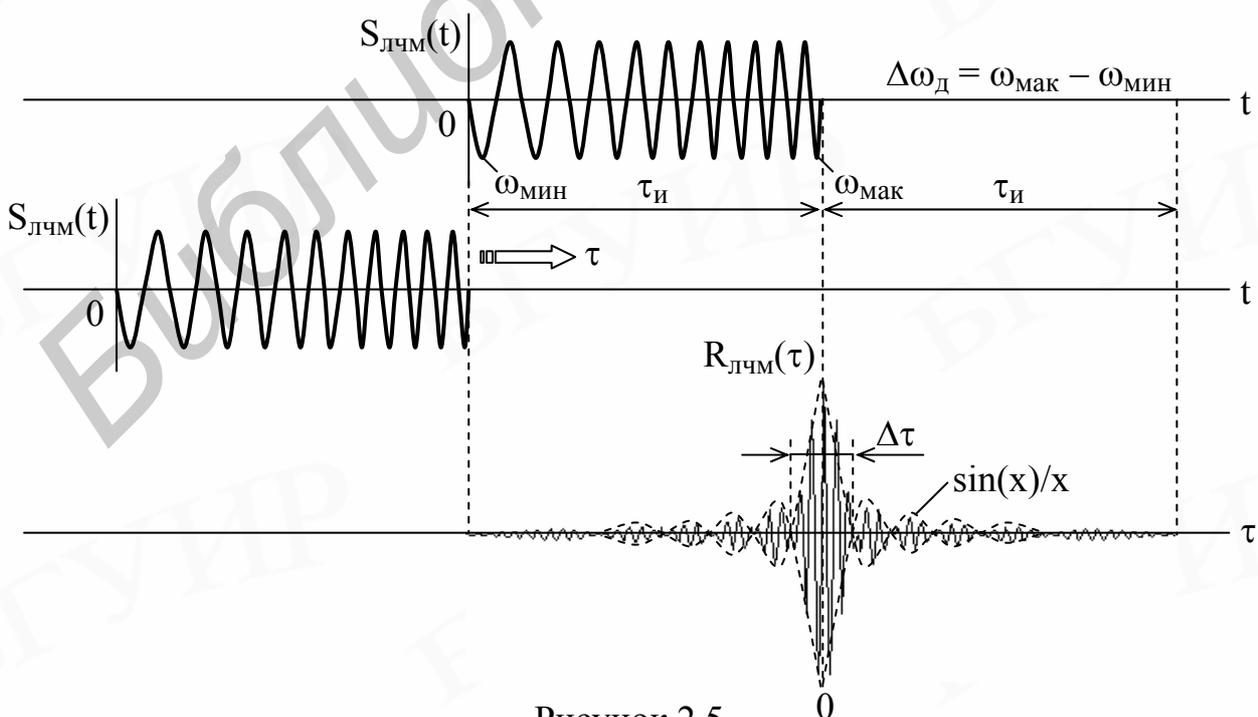


Рисунок 2.5

### 2.2.4 АКФ периодических сигналов

Периодические сигналы являются бесконечно протяжёнными во времени, и, следовательно, имеют бесконечно большую энергию. Для таких сигналов АКФ определяется в пределах одного периода  $T$  в единицах средней мощности, то есть

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{S}(t + n \cdot T) \cdot \hat{S}^*(t + n \cdot T - \tau) dt = R(\tau - n \cdot T) [B^2], \quad (2.12)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Таким образом, АКФ периодического сигнала является периодической функцией (рисунок 2.6) с периодом, равным периоду  $T$  сигнала, и не даёт представления о времени прихода сигнала.

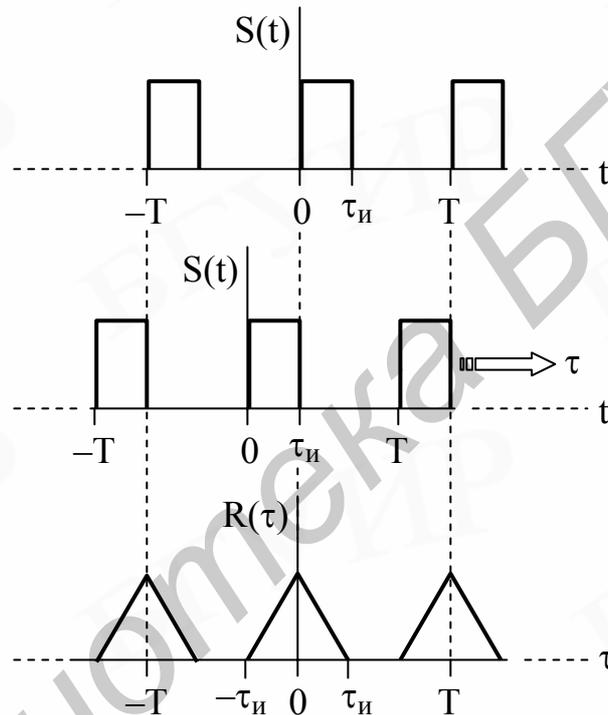


Рисунок 2.6

### 2.2.5 АКФ неограниченно протяжённых сигналов

Для неограниченно протяжённых сигналов считают, что они получаются из некоторого импульсного сигнала, когда его длительность  $\tau_n$  стремится к бесконечности. Тогда АКФ определяется средней взаимной мощностью сигнала и его копии:

$$R(\tau) = \lim_{\tau_n \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} S(t) \cdot S(t - \tau) dt. \quad (2.13)$$

### 2.2.6 АКФ дискретного во времени сигнала

Сигналы с дискретной во времени структурой широко используются для кодирования измерительной информации.

Дискретный во времени сигнал представляется целым числом « $m$ » равных интервалов дискретизации его длительности, на которых сигнал  $S_m$  может при-

нимать фиксированные значения. В этом случае для АКФ операцию интегрирования можно заменить операцией суммирования, а переменную  $\tau$  изменять дискретно на величину интервала дискретизации сигнала, и АКФ принимает вид

$$R(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (S_m \cdot S_{m-n}), \quad (2.14)$$

где  $n$  – целое число, указывающее, на сколько интервалов дискретизации сдвинута копия сигнала. АКФ дискретного сигнала при  $n = 0$  равна энергии сигнала.

### 2.2.7 АКФ сигналов Баркера

Сигналы Баркера – это дискретные во времени сигналы, которые принимают фиксированные значения, кодируемые, например, числами 1 и  $-1$  (рисунок 2.7). Сигналы Баркера можно реализовать при числе интервалов дискретизации  $m = 2, 3, 4, 5, 7, 11$  и  $13$ . АКФ таких сигналов обладают следующим уникальным свойством: их значения при всех  $n \neq 0$  равны некоторому единичному уровню, а при  $n = 0$  в « $m$ » раз превышают единичный уровень (см. рисунок 2.7), что позволяет улучшить обработку сигнала на фоне помех.

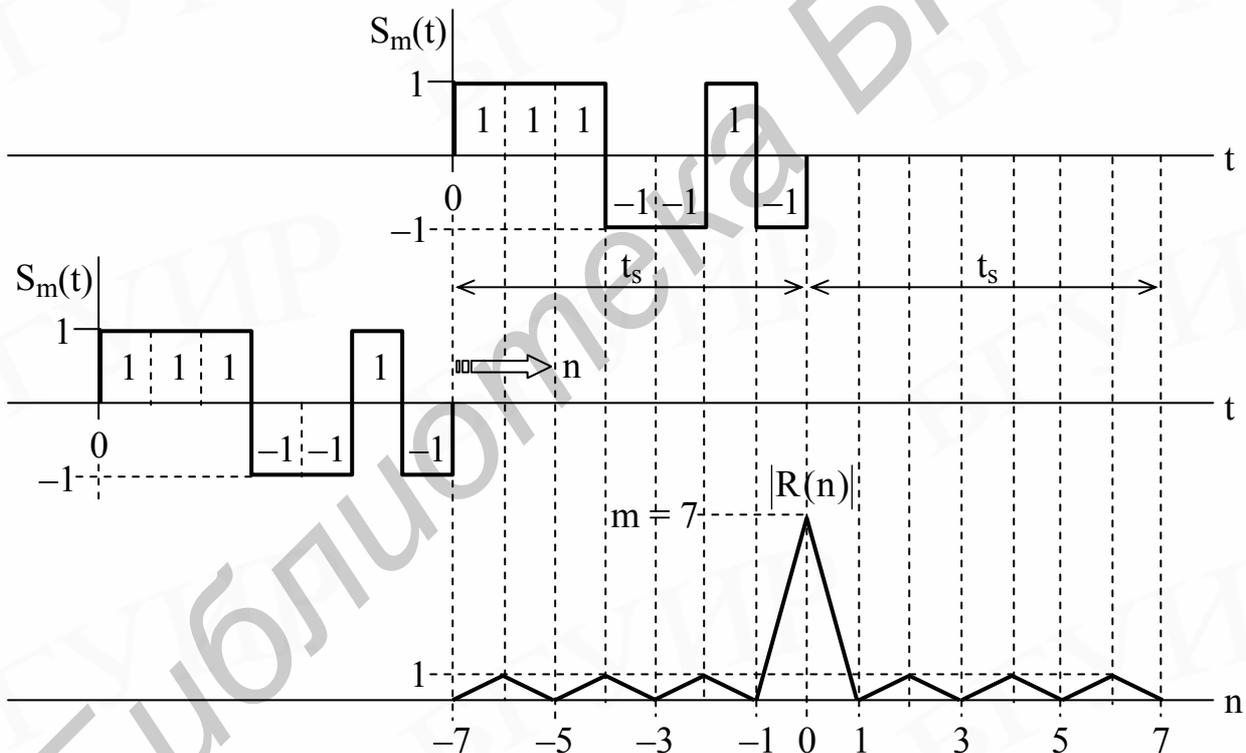


Рисунок 2.7

### 2.2.8 Основные свойства АКФ

1. АКФ существует для всех сигналов.
2. Для фиксированного момента времени  $\tau$  АКФ равна площади, ограниченной осью абсцисс и графиком функции, описывающей произведение сигналов  $S(t) \cdot S(t-\tau)$ , то есть общей площадью перекрытия двух сигналов.
3. АКФ характеризует как положение сигналов на оси времени, так и скорость их изменения.

4. Длительность АКФ импульсных сигналов равна удвоенной их длительности.

5. При  $\tau = 0$  АКФ равна энергии сигнала:

$$R(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{S}(t)|^2 dt = E_s [B^2 \cdot c]. \quad (2.15)$$

6. При любом значении временного сдвига  $\tau$  модуль АКФ не превосходит энергии сигнала

$$|R(\tau)| \leq R(\tau = 0) = E_s. \quad (2.16)$$

7. АКФ функция чётная  $R(\tau) = R(-\tau)$ .

8. АКФ является симметричной кривой с центральным экстремумом, который всегда положителен.

9. В зависимости от вида сигнала  $S(t)$  функция АКФ может иметь как монотонно убывающий, так и колеблющийся характер.

10. АКФ обращается в нуль при значениях  $\tau$ , когда сигналы становятся ортогональными или не перекрываются во времени.

### 2.2.9 Связь между энергетическим спектром сигнала и его АКФ

На основании теоремы о свёртке функций сигналов  $S(t)$  и  $S(-t)$  имеем

$$S(t) \otimes S(-t) \Leftrightarrow S(j\omega) \cdot S^*(j\omega) = |S(j\omega)|^2, \quad (2.17)$$

где  $S(j\omega)$  и  $S^*(j\omega)$  – спектральная плотность сигнала  $S(t)$  и  $S(-t)$ ;  $|S(j\omega)|^2 = W(\omega)$  – спектральная плотность энергии (энергетический спектр) сигнала. Тогда

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cdot S^*(t - \tau) dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot \tau} d\omega [B^2 \cdot c] \quad (2.18)$$

$$\text{и} \quad W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \tau} d\tau [B^2 / \Gamma \text{ц}^2]. \quad (2.19)$$

Выражения (2.18) и (2.19) называются соотношениями Винера-Хинчина, и из них следует, что АКФ сигнала  $S(t)$  и его энергетический спектр взаимно связаны между собой преобразованиями Фурье.

Можно утверждать, что чем шире энергетический спектр сигнала, тем меньше интервал корреляции  $\tau_k$ , то есть меньше величина  $\tau$ , в пределах которого  $R(\tau) \neq 0$ .

В энергетическом спектре отсутствуют сведения о фазовой характеристике спектра сигнала, поэтому сигналы, у которых модуль спектральной плотности одинаков, имеют одну и ту же АКФ. Например, АКФ синусоидального и косинусоидального гармонических сигналов одинаковы.

### 2.2.10 Обобщённая структурная схема коррелометра

Схема содержит переменную линию задержки (ЛЗ) сигнала во времени, перемножитель и интегратор (рисунок 2.8). Коррелируемые сигналы  $S_1(t)$  и

$S_2(t)$  соответственно подаются на вход умножителя и ЛЗ. Сигнал  $S_2(t)$ , задержанный в ЛЗ на время  $\tau$ , умножается с сигналом  $S_1(t)$ , и полученный результат поступает на интегратор. Сигнал на выходе интегратора является функцией корреляции  $R_{12}(\tau)$ .

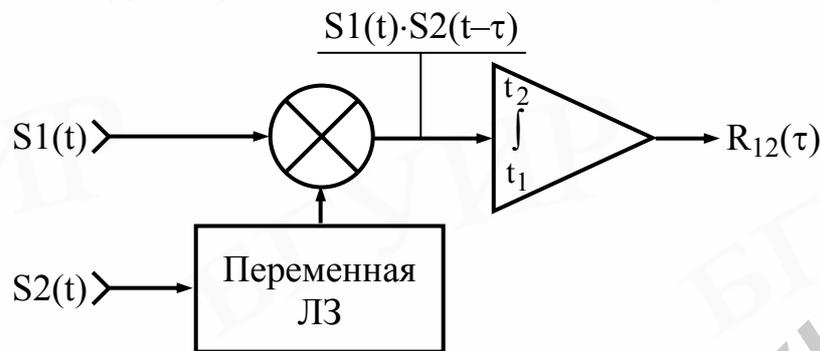


Рисунок 2.8

### 2.3 Краткие сведения о программе CORREL

Программа CORREL предназначена для ввода временных зависимостей  $S(t)$  детерминированных ИС и получения их КФ.

Программа обеспечивает расчёт и визуальное отображение временных характеристик импульсных сигналов  $S(t)$  и их корреляционных  $R(\tau)$  (АКФ и ВКФ). Расчёт КФ двух сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  осуществляется для дискретных значений временного сдвига сигнала  $\tau$  в пределах их длительности  $[t_1, t_2]$  по формуле (2.1) и (2.2). КФ отображаются в динамике по мере изменения значения  $\tau$  при сдвиге слева направо.

Формирование изображений временных зависимостей импульсных сигналов  $S(t)$  осуществляется тремя способами:

**РИСОВАТЬ КУРСОРОМ** – с помощью маркера, управляемого с клавиатуры клавишами стрелок « $\uparrow \downarrow$ » и « $\leftarrow \rightarrow$ ». Для формирования временной характеристики сигнала  $S(t)$  с помощью маркера необходимо нажатием клавиш « $\uparrow \downarrow$ » (с шагом маркера по оси напряжения  $\Delta S = 2$  В) и « $\leftarrow \rightarrow$ » (с шагом маркера по оси времени  $\Delta t = 5$  мкс) последовательно помещать маркер в заданные значения координат точек  $S(t)$  и вводить их нажатием «Enter». При анализе ВКФ переход между полем ввода ИС  $S_1(t)$  или  $S_2(t)$  осуществляется нажатием клавиш «Page Up» (вверх) и «Page Down» (вниз).

**ПО ФОРМУЛЕ** – по математическому выражению (формуле) временной характеристики  $S(t)$ . Формирование сигналов по формулам осуществляется выбором заданных формул, выводимых в окне программы, в соответствии с которыми программа формирует  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ . При анализе АКФ сигналы  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  формируются одновременно по одной и той же формуле. Выбор набора формул при ВКФ-анализе для  $S_1(t)$  и для  $S_2(t)$  производится нажатием клавиши «Tab», а выбор требуемой формулы осуществляется клавишами « $\uparrow \downarrow$ » с последующим нажатием «Enter». Амплитуда для всех сигналов программно фиксированна и соответственно равна  $U = 10$  В.

ИЗ ФАЙЛА – выбором соответствующего файла, содержащего данные о временной характеристике  $S(t)$ . Формирование сигналов с помощью созданных файлов данных осуществляется выбором заданных имён файлов, выводимых в окне программы, по данным которых программа формирует  $S1(t)$  и  $S2(t)$ . Выбор файлов осуществляется клавишами «↑ ↓» и последующим нажатием «Enter».

Выполнение программы осуществляется в интерактивном режиме, при котором формируются диалоговые окна, содержащие соответствующие указания для выполнения необходимых действий. После нажатия клавиши «Esc» программа возвращается в исходное окно.

При анализе АКФ и ВКФ сигналов возможен вывод результатов для двух режимов отображения функций:  $R12(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S1(t) \cdot S2(t - \tau) dt$  – сигнал  $S2(t)$  сдвигается во времени относительно  $S1(t)$ ;  $R21(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S1(t - \tau) \cdot S2(t) dt$  – сигнал  $S1(t)$  сдвигается во времени относительно  $S2(t)$ .

Выполнение корреляционного анализа сигналов осуществляется клавишей «→» с временным шагом  $\Delta\tau = 10$  мкс.

## 2.4 Порядок выполнения работы

Работа выполняется в соответствии с заданным вариантом, по данным, приведенным в таблице 2.1 и 2.2.

Таблица 2.1

Для АКФ			Для ВКФ		
№ варианта	ПО ФОРМУЛЕ	ИЗ ФАЙЛА	№ варианта	ПО ФОРМУЛЕ	ИЗ ФАЙЛА
	№ формулы из табл. 2.2	№ файла из табл. 2.2		№ формул из табл. 2.2	№ файла из табл. 2.2
1	1; 3; 4	1; 11	1	2-3; 5-9	1; 3; 9
2	2; 7; 10	2; 10	2	1-5; 7-8	2; 4; 10
3	3; 5; 9	3; 9	3	2-8; 4-7	5; 6; 9
4	6; 7; 8	4; 8	4	3-7; 2-9	7; 8; 10
5	3; 4; 5	5; 7	5	1-7; 5-8	1; 9; 11
6	1; 7; 10	6; 11	6	1-3; 8-9	2; 3; 10
7	3; 6; 9	7; 10	7	3-4; 2-5	4; 5; 9
8	2; 7; 8	8; 9	8	3-5; 1-8	6; 7; 10
9	4; 6; 9	1; 2	9	5-7; 1-9	8; 9; 11
10	1; 5; 7	3; 4	10	3-8; 6-9	1; 6; 10

Таблица 2.2

Для АКФ				Для ВКФ			
№ п/п	ПО ФОРМУЛЕ	№ п/п	ИЗ ФАЙЛА	№ п/п	ПО ФОРМУЛЕ	№ п/п	ИЗ ФАЙЛА
1	$E \cdot \sin(\omega \cdot t) / \omega \cdot t$	1	1pram	1	$E \cdot \sin(\omega \cdot t) / \omega \cdot t$	1	1pr_pr
2	$E \cdot \exp(-a \cdot  t )$	2	2treg	2	$E \cdot \exp(-a \cdot  t )$	2	2pr_pr
3	$E \cdot \exp(-a \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	3	3treg	3	$E \cdot \exp(-a \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	3	3pr_pr
4	$E \cdot \exp[a \cdot (t+t_n/2) - 1]$	4	4mean	4	$E \cdot \exp[a \cdot (t+t_n/2) - 1]$	4	4pr_tr
5	$E \cdot t^2$	5	5pila	5	$E \cdot t^2$	5	5tr_tr
6	$E \cdot [1 - \exp[1 - a \cdot (t+t_n/2)]]$	6	6prps	6	$E \cdot [1 - \exp[1 - a \cdot (t+t_n/2)]]$	6	6tr_tr
7	$E \cdot \cos(\omega \cdot t + b \cdot t^2/2)$	7	7prps	7	$E \cdot \cos(\omega \cdot t + b \cdot t^2/2)$	7	7tr_tr
8	$E \cdot (1 - a \cdot t^2)$	8	8barc	8	$E \cdot (1 - a \cdot t^2)$	8	8tr_tr
9	$E \cdot \cos(\omega \cdot t)$	9	9barc	9	$E \cdot \cos(\omega \cdot t)$	9	9de_tr
10	$E \cdot (t+b)^2$	10	10barc	10	$E \cdot (t+b)^2$	10	10de_tr
		11	11trap			11	11sn_kv

#### Запуск программы

Запустите программу CORREL с помощью ярлыка «КоррелИС» из папки «Часть 1», находящейся в папке «ИСиФУиО», и затем нажмите «Enter».

Прочтите приведенные сведения АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ и ВЗАИМОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ.

#### 2.4.1 Автокорреляционный анализ импульсных сигналов

В окне меню ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ нажатием клавиш «↑ ↓» выберите АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ и нажмите «Enter». Появляются окна СИГНАЛ 1 и СИГНАЛ 2 для отображения графиков временной функции сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ , а также меню «Выбор способа получения сигнала». Нажатием клавиш «↑ ↓» выберите ПО ФОРМУЛЕ и нажмите «Enter». В появившейся таблице формул для временных функций сигналов  $S(t)$  нажатием клавиши «Tab» выберите левый или правый столбец формул и нажатием клавиш «↑ ↓» требуемую формулу и затем нажмите «Enter». Появляются графики временной функции сигнала  $S_1(t)$  и его копии  $S_2(t)$ , а также значения максимального напряжения сигналов  $U$  (в В) и их длительности  $\tau_n$  (в мкс). Запишите значения  $U$  и  $\tau_n$ , зарисуйте в масштабе наблюдаемые графики сигналов.

Для расчёта значений  $R(\tau)$  нажмите клавишу «Insert». В появившемся окне « $R(\tau)$  РАСЧЁТ» приведено количество расчётных точек  $N$  и значений АКФ  $R(\tau)$ , запишите их.

Нажатием клавиш «↑ ↓» выберите в меню «ВЫБРАТЬ  $R(\tau)$ » верхнее выражение для АКФ, когда сигнал  $S_2(t-\tau)$  сдвигается во времени относительно  $S_1(t)$ , и нажмите «Enter». Нажимая клавишу «→», изменяйте с шагом  $\Delta\tau = 10$  мкс значение сдвига  $\tau$  сигнала  $S_2(t)$ , перемещая его в крайнее правое положение. При этом занесите значения, отображаемые в окне «Величина сдвига (мкс)  $\tau$ » и в поле « $R(\tau)$ », в нижеприведенную таблицу 2.3. Запишите значение

$R(0) = R(\tau = 0)$ . Формат записи значений « $R(\tau)$ » и « $R(0)$ » как  $3,2 \cdot 10^{-n}$  (всего три значащих цифры, две после запятой).

Таблица 2.3

КФ номер	$\tau$ , мкс			.	.	.	.	.	.	.		
	$R(\tau)$ , $B^2 \cdot c$			.	.	.	.	.	.	.		
	$R(\tau)/R(0)$			.	.	.	.	.	.	.		

График нормированной АКФ сигнала  $R(\tau)/R(0)$  отображается в окне КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ.

По данным таблицы 2.3 постройте в масштабе график  $R(\tau)/R(0)$ .

Нажатием клавиши «Esc» вернитесь в начальное окно программы и нажмите «Enter».

Повторите анализ  $R(\tau)$  для варианта, когда сигнал  $S_1(t-\tau)$  сдвигается во времени относительно  $S_2(t)$ . Для этого выберите в меню «ВЫБРАТЬ  $R(\tau)$ » нижнее выражение для автокорреляционной функции.

Аналогично получите АКФ для других сигналов заданных в виде формул (см. таблица 2.2).

Нажатием клавиши «Esc» вернитесь в начальное окно программы и нажмите «Enter».

Выполните подобным образом анализ АКФ сигналов, заданных в виде файла. Для этого в меню «Выбор способа получения сигнала» нажатием клавиш « $\uparrow \downarrow$ » выберите ИЗ ФАЙЛА и нажмите «Enter». В появившемся столбце имён файлов для временных функций сигналов  $S(t)$  нажатием клавиш « $\uparrow \downarrow$ » выберите требуемое имя файла (см. таблица 2.2) и затем нажмите «Enter».

Аналогично получите АКФ для других сигналов, заданных в виде файла (см. таблица 2.2).

Сделайте анализ полученных результатов и соответствующие выводы.

#### 2.4.2 Взаимокорреляционный анализ импульсных сигналов

В окне меню ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ нажатием клавиш « $\uparrow \downarrow$ » выберите ВЗАИМОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ и нажмите «Enter». В окне меню «Выбор способа получения сигнала» нажатием клавиш « $\uparrow \downarrow$ » выберите ПО ФОРМУЛЕ и нажмите «Enter». В появившейся таблице формул для временных функций сигналов  $S(t)$  нажатием клавиши «Tab» выберите левый или правый столбец формул и нажатием клавиш « $\uparrow \downarrow$ » требуемую формулу для первого сигнала  $S_1(t)$ , нажмите «Enter». Появится график временной функции сигнала  $S_1(t)$ . Аналогично выберите требуемую формулу для второго сигнала  $S_2(t)$  и нажмите «Enter». Появится график временной функции сигнала  $S_2(t)$ .

Запишите значения максимального напряжения сигналов  $U$  (в В) и их длительности  $\tau_{и}$  (в мкс), зарисуйте в масштабе наблюдаемые графики сигналов.

Для расчёта значений  $R(\tau)$  нажмите клавишу «Insert». В появившемся окне « $R(\tau)$  РАСЧЁТ» приведено количество расчётных точек  $N$  и значений ВКФ  $R(\tau)$ , запишите их.

Нажатием клавиш «↑ ↓» выберите в меню «ВЫБРАТЬ  $R(\tau)$ » верхнее выражение для ВКФ, когда сигнал  $S_2(t-\tau)$  сдвигается во времени относительно  $S_1(t)$ , и нажмите «Enter». Нажимая клавишу «→», изменяйте с шагом  $\Delta\tau = 10$  мкс значение сдвига  $\tau$  сигнала  $S_2(t)$ , перемещая его в крайнее правое положение. При этом занесите значения, отображаемые в окне «Величина сдвига (мкс)  $\tau$ » и в поле « $R\tau$ » в таблицу, аналогичную таблице 2.3. График нормированной ВКФ сигналов  $R(\tau)/R(0)$  отображается в окне КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ. Запишите значение  $R(0) = R(\tau = 0)$ .

По данным таблицы 2.3 постройте в масштабе график  $R(\tau)/R(0)$ .

Нажатием клавиши «Esc» вернитесь в начальное окно программы и нажмите «Enter».

Повторите анализ  $R(\tau)$  для варианта, когда сигнал  $S_1(t-\tau)$  сдвигается во времени относительно  $S_2(t)$ . Для этого выберите в меню «ВЫБРАТЬ  $R(\tau)$ » нижнее выражение для ВКФ.

Аналогично получите ВКФ для других сигналов, заданных в виде формул (см. таблица 2.2).

Нажатием клавиши «Esc» вернитесь в начальное окно программы и нажмите «Enter».

Выполните подобным образом анализ ВКФ сигналов, заданных в виде файла. Для этого в меню «Выбор способа получения сигнала» нажатием клавиш «↑ ↓» выберите ИЗ ФАЙЛА и нажмите «Enter». В появившемся столбце имён файлов для временных функций сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$  нажатием клавиш «↑ ↓» выберите требуемое имя файла (см. таблицу 2.2) и затем нажмите «Enter». Одновременно появятся графики временных функций сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ .

Аналогично получите ВКФ для других сигналов, заданных в виде файла (см. таблица 2.2).

Сделайте анализ полученных результатов и соответствующие выводы.

## 2.5 Контрольные вопросы

2.5.1 Дать определение АКФ и ВКФ.

2.5.2 Какова размерность АКФ и ВКФ для периодических сигналов и конечной длительности?

2.5.3 Каков физический смысл АКФ и ВКФ сигналов?

2.5.4 Какие изменения происходят в спектре сигнала при его смещении во времени?

2.5.5 Назвать основные свойства АКФ и ВКФ.

2.5.6 Как определяется АКФ для АМ-сигнала?

2.5.7 Как определяется АКФ для дискретных во времени сигналов?

2.5.8 В чём преимущества АКФ дискретных сигналов Баркера и импульсного сигнала с ЛЧМ?

2.5.9 Объяснить взаимосвязь между энергетическим спектром сигнала и его АКФ.

2.5.10 Объяснить взаимосвязь между взаимными энергетическими спектрами сигналов и их ВКФ.

### **Литература**

1 Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Сов. радио, 1986. С. 67–72.

2 Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 1988. С. 73–87.

3 Радиотехнические цепи и сигналы / Под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. С. 22–26; 54–56.

4 Денисенко А.Н., Стеценко О.А. Теоретическая радиотехника. – М.: Издательство стандартов, 1993. С. 59–83.

### 3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК И ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ»

#### 3.1 Цель работы

3.1.1 Изучить методику анализа статистических характеристик случайных сигналов.

3.1.2 Приобрести навыки определения интегрального и дифференциального законов распределения и числовых параметров случайных эргодических сигналов.

3.1.3 Исследовать законы распределения вероятностей и плотностей вероятности мгновенных значений параметров случайных эргодических сигналов.

#### 3.2 Краткие теоретические сведения

##### 3.2.1 Измерительный сигнал как случайный процесс

Так как информация, содержащаяся в измерительном сигнале (ИС) об измеряемом явлении (объекте), подвергается воздействию, вызванному большим количеством случайных причин, которые не могут быть точно учтены, а также она заранее не известна и может быть предсказана с вероятностью меньше 1, то такой сигнал следует рассматривать как случайный процесс (СП). СП – это процесс, описываемый случайной функцией времени  $x(t)$ , которая при всех или некоторых значениях времени  $t_n$ , называемых сечениями СП, является случайной величиной  $x(t_n)$ . Следовательно, СП можно рассматривать как бесконечную совокупность случайных величин  $x(t_n)$ , то есть СП совмещает в себе черты случайной функции  $x(t)$  и случайной величины  $x(t_n)$ .



Рисунок 3.1

В этом случае для описания свойств сигнала используются методы статистической радиотехники, которые базируются на теории СП. Многократное наблюдение ИС характеризуется **совокупностью (ансамблем)** случайных функций времени  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_j(t)$  (рисунок 3.1). Если зафиксировать значение

времени  $t_n$  (сечение), случайный сигнал представляет случайную величину  $x(t_n)$ . Одна из этих случайных функций  $x_j(t)$ , после её измерения ставшая известной (детерминированной) функцией времени (см. рисунок 3.1), называется **реализацией** случайного сигнала.

Случайные сигналы характеризуются усреднёнными характеристиками, которые определяются методами теории вероятности.

В зависимости от того, непрерывно или дискретно множество значений, принимаемых случайным процессом  $x(t)$  в области его определения, различают **непрерывные, дискретные и смешанные (непрерывно-дискретные) СП**.

СП подразделяются на **стационарные и нестационарные**. **Стационарными** называются СП, статистические характеристики которых не изменяются во времени. В качестве нестационарного СП (сигнала) можно назвать электрический шум удаляющегося источника помехи, статистические характеристики которого изменяются во времени.

Стационарные СП подразделяются на **эргодические и неэргодические**. **Эргодическими** называются такие СП, вероятностные характеристики которых можно определить по одной из реализаций  $x_j(t)$ , производя усреднение по достаточно длинному интервалу времени  $T$ , и полученный результат усреднения по времени будет совпадать (с вероятностью близкой к 1) с результатом усреднения по ансамблю реализаций. Большинство СП (сигналов) обладает свойством эргодичности.

### 3.2.2 Законы распределения вероятности случайных величин

Случайная величина  $X$  полностью описывается **законом распределения вероятности**, устанавливающим связь между возможными текущими её значениями  $x$  и соответствующими им вероятностями  $P(x)$ . Очевидно, что подобный закон распределения существует только для случайной дискретной величины. Так как случайная непрерывная величина  $X$  имеет бесчисленное множество возможных значений  $x$ , вероятность  $P(x)$  для каждого из них **равна нулю**. В этом случае можно оценить только вероятность нахождения случайной непрерывной величины  $X$  в различных областях возможных значений.

Для количественной характеристики вероятности распределения случайной непрерывной величины  $X$  принимается функция

$$F(x) = P(X \leq x), \quad (3.1)$$

где  **$P(X \leq x)$  – вероятность того, что случайная величина  $X$  не превосходит текущего значения  $x$** . Функция  $F(x)$  является законом распределения вероятности случайной величины  $X$ , которая называется **интегральным законом распределения**, или **функцией распределения**.

*Свойства функции  $F(x)$ :*

- 1)  $F(-\infty) = 0$ ;  $F(\infty) = 1$ ;
- 2)  $P(x_2) > F(x_1)$  при  $x_2 > x_1$ ;
- 3)  $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ .

Функция распределения  $F(x)$  безразмерна и в общем случае является неубывающей, её значения находятся в пределах от 0 до 1 (рисунок 3.2, а). Для случайной дискретной величины  $X$ , имеющей  $n$  возможных значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые принимаются с вероятностями соответственно  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , функция распределения записывается следующим образом:

$$F(x) = \sum_{k=1}^n P_k \cdot \sigma(x - x_k), \quad P_k = P(X = x_k), \quad (3.2)$$

где  $\sigma(x - x_k)$  – единичная функция (функция Хевисайда), равная

$$\sigma(x - x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq x_k; \\ 0 & \text{при } x < x_k. \end{cases} \quad (3.3)$$

Функция распределения случайной дискретной величины представляется ступенчатой кривой со скачками (рисунок 3.2, б), равными  $P_k$  в точках  $x_k$ , и постоянными значениями на интервале  $(x_{k-1}, x_k)$ . Закон смешанной величины  $X$  имеет вид, показанный на рисунке 3.2, в.

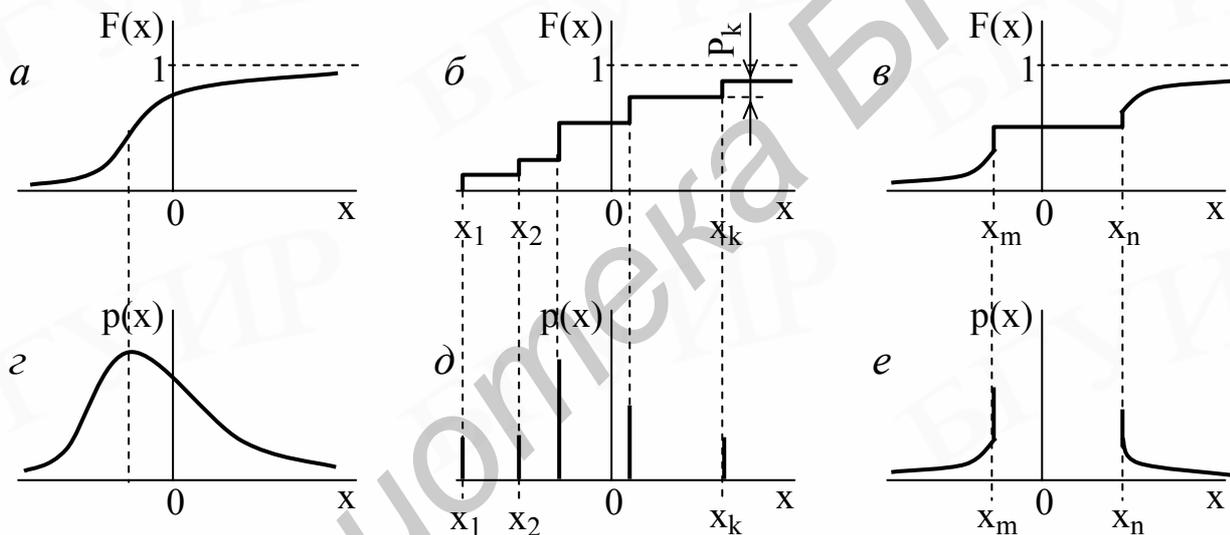


Рисунок 3.2

Функция распределения в интегральной форме мало наглядна, и данный закон неоднозначно определяет случайную величину, то есть может существовать несколько разных случайных величин, имеющих одну и ту же функцию распределения. Поэтому более широко применяется **дифференциальный закон распределения**, называемый функцией плотности распределения вероятности, или плотности распределения (рисунок 3.2, г, д, е), определяемый как

$$p(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}, \quad \left[ \frac{1}{x} \right], \quad (3.4)$$

где  $F(x + \Delta x) - F(x) = P[x \leq X < (x + \Delta x)] = p(x)dx$  – **вероятность того, что случайная величина  $X$  принимает значения в интервале от  $x$  до  $(x + \Delta x)$** . Плотность распределения имеет размерность, обратную случайной величины  $X$ , а её значения пропорциональны вероятностям  $P(x)$ .

Свойства функции  $p(x)$ :

1)  $p(x) > 0$  – функция положительная;

2)  $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$  – условие нормировки;

3)  $P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$  – вероятность попадания величины  $X$  в заданный интервал;

ный интервал;

4)  $\int_{-\infty}^x p(x) dx = F(x)$  – вероятность нахождения величины  $X$  в заданной области.

ласти.

Для случайной дискретной величины плотность распределения равна

$$p(x) = F'(x) = \sum_{k=1}^n P_k \cdot \frac{d\sigma(x - x_k)}{dx} = \sum_{k=1}^n P_k \cdot \delta(x - x_k), \quad (3.5)$$

где  $\delta(x - x_k)$  – дельта-функция (функция Дирака), равная

$$\delta(x - x_k) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = x_k; \\ 0 & \text{при } x \neq x_k. \end{cases} \quad (3.6)$$

Таким образом, для случайной дискретной величины плотность  $p(x)$  **равна нулю** для всех  $x$ , кроме  $x = x_k$  (см. рисунок 3.2, д). С учётом условия нормировки  $\sum_{k=1}^n P_k = 1$ .

Исчерпывающими вероятностными характеристиками системы  $n$  случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  являются  **$n$ -мерные законы распределения**, которые определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n); \\ p_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{d^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dx_1, dx_2, \dots, dx_n}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Оперировать  $n$ -мерным законом распределения практически невозможно. Поэтому при анализе СП рассматривают, как правило, одномерную  $p_1(x_1; t_1)$  и двумерную  $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$  плотности вероятности.

Многомерная функция распределения и плотность вероятности системы случайных величин обладают свойствами, аналогичными свойствам соответствующих законов для одной случайной величины.

**Одномерная плотность** вероятности  $p_1(x_1; t_1)$  определяет характер распределения значений случайной функции, описывающей СП, в произвольно заданный момент времени  $t_1$  и не позволяет выявить взаимосвязь значений, принимаемых случайной функцией в различные моменты времени.

Одномерный закон распределения стационарного СП не зависит от време-

ни, то есть  $p_1(x_1; t_1) = p_1(x; t+\tau) = p_1(x)$ .

**Двумерная плотность** вероятности  $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$  определяет характер распределения случайной функции в произвольно выбранные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  с учётом взаимосвязи значений, принимаемых случайной функцией в эти моменты времени.

Двумерный закон распределения стационарного СП зависит только от разности  $\tau = t_2 - t_1$ , то есть  $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; \tau)$ .

### 3.2.3 Числовые характеристики СП

Наиболее широко применяются особые числовые характеристики, называемые **моментными**.

**Начальными моментными** являются функции

$$\bar{x}^n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot p(x, t) dx, \quad (3.8)$$

которые есть среднее значение  $n$ -й степени случайной величины.

**Математическое ожидание** (МО) – это начальная моментная функция первого порядка (одномерная), характеризующая изменение среднего значения случайной величины или СП от времени.

*МО определяется как:*

1) для случайных нестационарных сигналов:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x, t) dx, [B]; \quad (3.9)$$

2) для случайных стационарных сигналов характеризует **постоянную составляющую сигнала** (значение постоянного напряжения в сигнале)

для непрерывной величины  $x$  – 
$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx, [B]; \quad (3.10)$$

для дискретной величины  $x$  – 
$$m_x = \sum_{k=1}^N x_k \cdot p(x_k), [B]; \quad (3.11)$$

3) для случайных стационарных эргодических сигналов:

$$m_x = \bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) dt, [B]. \quad (3.12)$$

**Ковариационная функция** – это начальная моментная функция второго порядка (двумерная), характеризующая зависимость МО произведений двух СП  $X$  и  $Y$ , взятых в различные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$B_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot y_2 \cdot p_2(x, y; t_1, t_2) dx dy. \quad (3.13)$$

**Центральными моментными** являются функции

$$\bar{\mu}_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x}(t))^n \cdot p(x, t) dx, \quad (3.14)$$

которые есть среднее значение n-й степени возможного отклонения величины случайного СП от его среднего значения.

**Дисперсия** – это центральная моментная функция второго порядка, характеризующая изменение средней величины возможных отклонений значений случайных СП относительно МО от времени.

*Дисперсия определяется как:*

1) для случайных нестационарных сигналов:

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))^2 \cdot p(x, t) dx, [B^2]. \quad (3.15)$$

Квадратный корень из дисперсии есть **среднее квадратическое отклонение (СКО)**;

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}, [B]; \quad (3.16)$$

2) для случайных стационарных сигналов характеризует **среднюю мощность переменной составляющей**:

$$\text{для непрерывной величины } x - D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot p(x) \cdot dx, [B^2]; \quad (3.17)$$

$$\text{для дискретной величины } x - D_x = \sum_{k=1}^N (x_k - m_x)^2 \cdot p(x_k) \cdot \Delta x, [B^2];$$

(3.18)

СКО характеризует среднее значение переменной составляющей сигнала:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}, [B]; \quad (3.19)$$

3) для случайных стационарных эргодических сигналов:

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [x(t) - m_x]^2 dt, [B]. \quad (3.20)$$

**Корреляционная функция** – это центральная двумерная (второго порядка) моментная функция, характеризующая степень статистической связи между двумя случайными ИС  $X$  и  $Y$ , взятыми в различные моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  ( $t_2 - t_1 = \tau$ ), которая называется **взаимной корреляционной функцией (ВКФ)**:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x) \cdot (y_2 - m_y) \cdot p_2(x, y; t_1, t_2) dx_1 dy_2. \quad (3.21)$$

В случае одинаковых сигналов  $X$  и  $Y$  ВКФ называется **автокорреляционной функцией (АКФ)**:

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)] \cdot [x_2 - m(t_2)] \cdot p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (3.22)$$

и при  $t_1 = t_2$  очевидно, что её значение **равно дисперсии**  $R_X(t_1, t_1) = D_X(t_1)$ .

Если реализация эргодического сигнала  $S(t)$ , а её спектральная плотность

$$S(j\omega) = \int_{-T}^T S(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} dt, \quad [B/\Gamma\text{ц}], \quad (3.23)$$

то **спектральная плотность мощности**  $N(\omega)$ , называемая **энергетическим**

**спектром** сигнала, равна  $N(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{2 \cdot T}$ ,  $[B^2/\Gamma\text{ц}]$ . (3.24)

Для случайных стационарных сигналов функции спектральной плотности мощности  $N_{xy}(j\omega)$  и  $N_x(\omega)$  взаимно связаны с корреляционными функциями  $R_{xy}(\tau)$  и  $R_x(\tau)$  парой преобразований Фурье (теорема Винера-Хинчина):

для ВКФ –

$$N_{xy}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-j\omega \cdot \tau} d\tau, \quad R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} N_{xy}(j\omega) \cdot e^{j\omega \cdot \tau} d\omega. \quad (3.25)$$

для АКФ –

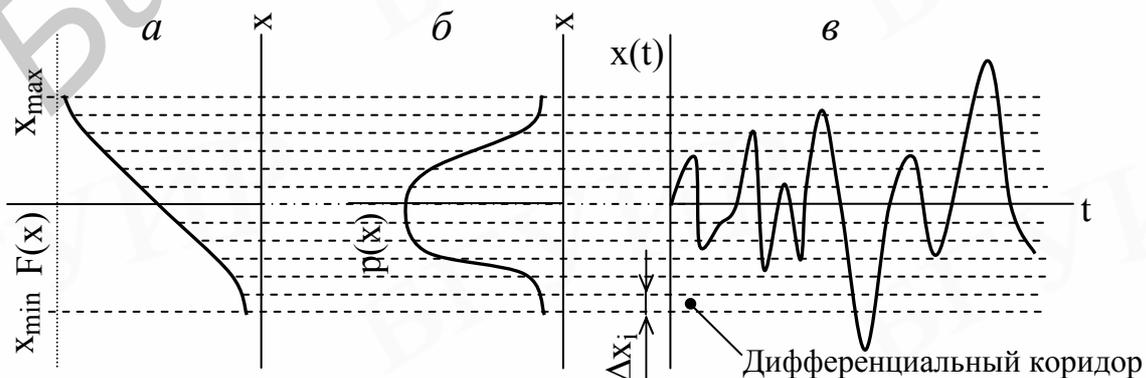
$$N_x(\omega) = 4 \cdot \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau, \quad R_x(\tau) = \int_0^{\infty} N_x(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\omega. \quad (3.26)$$

### 3.2.4 Методика моделирования случайных эргодических сигналов

В основу метода моделирования случайных сигналов с различными законами распределения положен алгоритм преобразования [4] независимых случайных значений  $y_k$  с равномерной плотностью вероятности  $p(y_k)$  и функцией распределения  $F(y_k)$  в интервале  $(a, b)$  в случайные значения  $x_k$  с требуемым законом распределения  $p(x_k)$ . Алгоритм преобразования осуществляется по формуле

$$x_k = F^{-1}(y_k) \cdot \left( \frac{y_k - a}{b - a} \right), \quad (3.27)$$

где  $F^{-1}(y_k)$  – функция, обратная функции распределения  $F(y_k)$ .



$a$  – функция распределения,  $b$  – плотность вероятности,  
 $v$  –реализация случайного процесса  $x(t)$

### Рисунок 3.3

При практической реализации метода [5] анализу подвергается случайный сигнал  $x(t)$  в пределах изменения его мгновенных значений от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$  (рисунок 3.3, а). При этом исследованию подвергаются усечённые распределения так, чтобы

$$F(x_{\min}) + [1 - F(x_{\max})] \ll 1.$$

#### 3.2.5 Методика анализа законов распределения случайных эргодических сигналов

Проводится  $M$  экспериментов, в результате каждого из которых формируется одна реализация  $x_j(t)$  случайного сигнала  $x(t)$ , где  $j = 1 \dots M$  ( $M \geq 2000$ ). В определённый момент времени  $t_n$  фиксируются значения реализации  $x_j(t_n)$  (см. рисунок 3.1), представляющие  $M$  числовых значений  $x_j = x_j(t_n)$  случайной величины, соответствующей сечению случайного сигнала  $x(t)$  в момент  $t_n$ .

Для определения вида и параметров анализируемого закона распределения весь диапазон значений  $x(t)$  (от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$ ) разбивается на  $N = 30$  интервалов (дифференциальных коридоров)  $\Delta x_i$ , где  $i = 1 \dots N$  (см. рисунок 3.3, б и в). После выполнения каждого эксперимента фиксируется число  $n_i$  попаданий случайных чисел  $x_j$  в интервал  $\Delta x_i$ . За оценки вероятности  $P_i$  попадания значений случайной величины  $x_j(t_n)$  в  $i$ -й дифференциальный коридор принимается отношение  $P_i(x) = \frac{n_i}{M}$ , которое при усреднении по времени для эргодического

сигнала по своему содержанию совпадает с отношением  $P_i(x) = \frac{\Delta t_i}{T}$ ,

где  $\Delta t_i$  – суммарное время пребывания значений любой из реализаций  $x_j(t_n)$  в  $i$ -м дифференциальном коридоре,  $T$  – длительность реализации. Если временной интервал  $T$  разбить на элементарные временные дискреты  $dt$  так, что  $T = M \cdot dt$ , то можно записать  $\Delta t_i = n_i \cdot dt$  и

$$P_i(x) = \frac{\Delta t_i}{T} = \frac{n_i \cdot dt}{M \cdot dt} = \frac{n_i}{M}, \quad (3.28)$$

где  $M = \sum_{i=1}^N n_i$ .

Оценку плотности распределения в каждом из дифференциальных коридоров можно определить следующим образом;

$$p_i(x) = \frac{P_i(x)}{\Delta x_i}. \quad (3.29)$$

Пользуясь полученными результатами, то есть значениями  $p_i(x)$ ,  $x_i$ , и  $\Delta x_i$ , можно построить ступенчатую кривую  $p(x)$ , которая называется гистограммой плотности распределения (рисунок 3.4).

Площадь под каждым фрагментом гистограммы в пределах  $\Delta x_i$  численно равна площади, занимаемой кривой распределения  $p(x)$  на данном интервале.

Количество  $N$  дифференциальных коридоров должно быть в пределах 10...30. Дальнейшее увеличение их количества не приводит к получению более точного закона  $p(x)$ , так как с ростом  $N$  уменьшается величина интервала  $\Delta x_i$ , что ухудшает условия для точного измерения  $p_i$ .

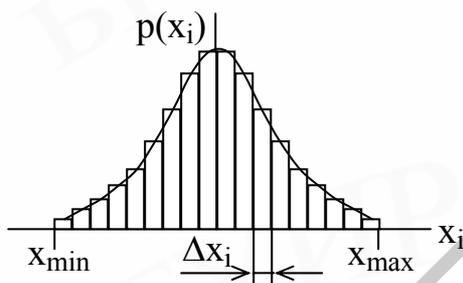


Рисунок 3.4

### 3.2.6 Обработка результатов статистических данных

Результаты статистических данных позволяют вычислить оценки математического ожидания (МО)  $m_x$ , дисперсии  $D_x$  или среднего квадратического отклонения (СКО)  $\sigma_x$  случайного сигнала  $x(t)$ :

$$m_x = \sum_{i=1}^N x_i \cdot p_i(x) ; \quad D_x = (\sigma_x)^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 \cdot p_i(x) . \quad (3.30)$$

При вычислении  $m_x$  и  $D_x$  по этим формулам учитывается, что если значение реализации случайного сигнала  $x(t)$  попадает в  $i$ -й дифференциальный коридор, то ему предписывается значение  $x_i$  – середина дифференциального коридора.

Функция распределения  $F(x)$  определяется как

$$F_i(x) = \sum_{x=-\infty}^x P_i(x) . \quad (3.31)$$

Вероятность попадания значения  $x(t)$  в интервал  $[x_1, x_2]$  равна

$$P\{x_1 \leq x \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) . \quad (3.32)$$

### 3.2.7 Обобщённая структурная схема статистического анализатора

Схема содержит дискриминаторы уровня (формирующие дифференциальные коридоры), накопители числа значений, попавших в дифференциальные коридоры и блок обработки данных, который формирует закон плотности распределения  $p(x)$  мгновенных значений  $x(t)$  (рисунок 3.5).

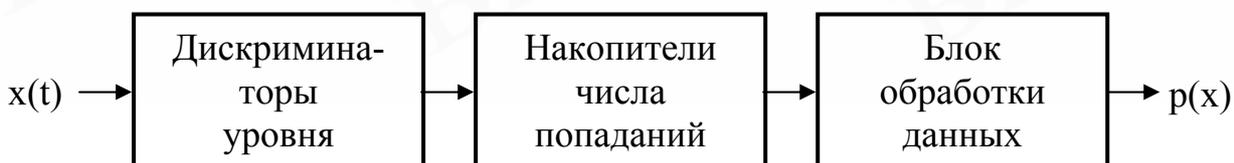


Рисунок 3.5

### 3.3 Краткие сведения о программе STAT\_ZAK

Программа предназначена для анализа законов распределения вероятности временных значений реализаций случайных сигналов  $x(t)$  с предварительно заданными значениями математического ожидания  $m_x$  и среднего квадратического отклонения  $\sigma_x$ .

Программа обеспечивает анализ законов распределения вероятности следующих случайных сигналов:

- узкополосного;
- клиппированного;
- синусоидального со случайной начальной фазой;
- пилообразного со случайным параметром временного сдвига.

Программа формирует на экране дисплея информационные окна, содержание которых изменяется в зависимости от режима работы. Окно анализа разбито на следующие области:

- область для отображения реализации сигнала  $x(t)$  в В;
- область для отображения точек, местоположение которых вдоль оси абсцисс  $x$  (ось напряжения), поделённой от  $x_{\min}$  ( $-7,5$  В) до  $x_{\max}$  ( $7,5$  В) на 30 дифференциальных коридоров шириной  $0,5$  В, определяется случайными мгновенными значениями сигнала (значением случайных чисел)  $x_j$ . В этой же области отображаются гистограмма одномерного закона распределения плотности вероятности  $p(x)$  и аппроксимирующая её огибающая.

- таблица статистических данных – количества точек  $n_i$  в соответствующем  $i$ -м дифференциальном коридоре;

- меню для установки необходимых значений математического ожидания  $m_x$ , дисперсии  $\sigma_x$  и других исходных данных случайного сигнала  $x(t)$ .

Выбор анализируемого случайного сигнала  $x(t)$  осуществляется в исходном окне нажатием клавиш « $\uparrow \downarrow$ », а выбор его параметра и значений данных  $m_x$  и  $\sigma_x$ , а также других – нажатием клавиш « $\leftarrow \rightarrow$ ». Подтверждение выбранного режима работы и данных осуществляется нажатием «Enter», а возврат в предыдущее окно – нажатием клавиши «Esc».

Область отображения точек, попадающих в  $i$ -й дифференциальный коридор, заполняется после выбора данных и нажатия «Enter».

Формирование гистограмм  $p(x)$  и заполнение таблицы статистических данных осуществляется удерживанием нажатой или многократным нажатием клавиши « $\leftarrow \rightarrow$ ». После каждого нажатия этой клавиши анализируется состояние  $i$ -го дифференциального коридора и заполняется один столбец таблицы. При

достижении  $i = 30$  будет полностью сформирована гистограмма  $p(x)$  и аппроксимирующая её огибающая.

Удерживанием нажатой или многократным нажатием клавиши «←» можно стереть гистограмму и её огибающую, а также содержание таблицы статистических данных.

### 3.4 Порядок выполнения работы

#### Запуск программы

Запустите программу STAT\_ZAK с помощью ярлыка «СлучИС» из папки «Часть 1», находящейся в папке «ИСиФУиО», и затем нажмите «Enter».

#### 3.4.1 Анализ статистических характеристик и параметров мгновенных значений случайного узкополосного сигнала $x(t)$

В окне главного меню нажатием клавиш «↑ ↓» выберите УЗКОПОЛОСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ СИГНАЛ и нажмите «Enter». В появившемся окне УЗКОПОЛОСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ СИГНАЛ с полем ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ: «СИГНАЛА  $x(t)$ »; «ОГИБАЮЩЕЙ  $U(t)$ »; «ФАЗЫ  $\varphi(t)$ » – внимательно изучите и запишите краткую информацию об этом сигнале.

В меню поля ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ нажатием клавиш «← →» выберите позицию  $x(t)$  и нажмите «Enter». Появляется окно ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЗКОПОЛОСНОГО СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА И ЕГО ПАРАМЕТРОВ, содержащее меню УСТАНОВИТЬ и поля – УСТАНОВЛЕННЫ, «ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА  $x(t)$ », «РЕАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА  $x(t)$ » и СТАТИСТИЧЕСКИЙ РЯД.

В меню УСТАНОВИТЬ в соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.1 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 1 значение математического ожидания (МО)  $m_x$  и затем среднее квадратическое отклонение (СКО)  $\sigma_x$ , нажимая после каждого выбора «Enter».

Таблица 3.1

№ варианта		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигнал № 1	МО, В	$m_{x1}$	$m_{x2}$	$m_{x3}$	$m_{x4}$	$m_{x5}$	$m_{x1}$	$m_{x4}$	$m_{x3}$	$m_{x4}$	$m_{x5}$
	СКО, В	$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x3}$	$\sigma_{x4}$	$\sigma_{x5}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x4}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x1}$
Сигнал № 2	МО, В	$m_{x4}$	$m_{x5}$	$m_{x1}$	$m_{x2}$	$m_{x3}$	$m_{x4}$	$m_{x2}$	$m_{x2}$	$m_{x3}$	$m_{x5}$
	СКО, В	$\sigma_{x3}$	$\sigma_{x4}$	$\sigma_{x5}$	$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x5}$	$\sigma_{x3}$	$\sigma_{x5}$	$\sigma_{x5}$	$\sigma_{x2}$

Ознакомиться с появившимся видом реализации  $x(t)$  и характером попадания точек в дифференциальные коридоры вдоль оси  $x$  на плоскости  $[p(x), x]$ .

Многократным нажатием или удерживанием нажатой клавиши «→» получить график гистограммы  $p(x)$  и её огибающей. При этом автоматически заполняется таблица статистических данных в поле СТАТИСТИЧЕСКИЙ РЯД, показывающая количество точек  $n_i$ , попавших в  $i$ -й дифференциальный коридор.

Зарисовать график гистограммы  $p(x)$  и её огибающей, занести значения  $n_i$  в таблицу 3.2. Пользуясь выражениями (3.28) и (3.29), рассчитать значения  $P_i(x)$ ,  $p_i(x)$  и занести их в таблицу 3.2.

Таблица 3.2

№ i-го диф. коридора	1	2	3	4	.....	28	29	30
Число попаданий $n_i$					.....			
Вероятность $P_i(x)$					.....			
Плотность $p_i(x)$ , 1/B					.....			
$(x_i - m_x)$ , B					.....			

Нанести на график плотности распределения численные значения  $p_i(x)$ .

Вычислить оценки МО  $m_x$  и дисперсии  $D_x$ , пользуясь (3.30), а также  $\sum_{i=1}^N P_i(x)$ .

Указать на графике плотности распределения значения  $x = m_x$  и  $x = \sigma_x$ .

По данным  $P_i(x)$  из таблицы 3.2 согласно (3.31) построить график функции интегрального закона распределения  $F_i(x)$  случайного узкополосного сигнала.

Определить по формуле (3.32) вероятность попадания мгновенного значения случайного сигнала в интервал  $[-2, 1]$  В.

Нажать «Esc». В соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.1 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 2 значение  $m_x$  и затем  $\sigma_x$ , нажимая после каждого выбора «Enter».

Получить и зарисовать график гистограммы  $p(x)$  и её огибающей, занести значения  $n_i$  в таблицу 3.2. Определить значения  $m_x$  и  $D_x$ . Нанести на график плотности распределения численные значения  $p_i(x)$ ,  $x = m_x$  и  $x = \sigma_x$ .

Сделать выводы из проведенного анализа.

### 3.4.2 Анализ статистических характеристик и параметров мгновенных значений огибающей случайного узкополосного сигнала $U(t)$

Нажав дважды «Esc», вернуться в окно УЗКОПОЛОСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ СИГНАЛ.

В меню ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ нажатием клавиш «← →» выбрать позицию  $U(t)$  и нажать «Enter». В меню УСТАНОВИТЬ в соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.3 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 1 значение  $\sigma_x$ , а затем нажать «Enter».

Таблица 3.3

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Сигнал № 1	СКО, В	$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x3}$	$\sigma_{x4}$	$\sigma_{x5}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x3}$	$\sigma_{x4}$	$\sigma_{x5}$	$\sigma_{x1}$
Сигнал № 2	СКО, В	$\sigma_{x3}$	$\sigma_{x4}$	$\sigma_{x5}$	$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x5}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x5}$	$\sigma_{x3}$	$\sigma_{x4}$

Ознакомиться с появившимся видом реализации  $U(t)$  и характером попадания точек в дифференциальные коридоры вдоль оси  $U$  на плоскости  $[p(U), U]$ .

Нажатием клавиши «←→» получить график гистограммы  $p(U)$  и её огибающей, а также заполненную таблицу статистических данных.

Зарисовать график гистограммы  $p(U)$  и её огибающей, занести значения  $n_i$  в таблицу 3.4. Пользуясь выражениями (3.28) и (3.29), рассчитать значения  $P_i(U)$ ,  $p_i(U)$  и занести их в таблицу 3.4.

Таблица 3.4

№ i-го диф. коридора	1	2	3	4	.....	28	29	30
Число попаданий $n_i$					.....			
Вероятность $P_i(U)$					.....			
Плотность $p_i(U)$ , 1/В					.....			
$(U_i - m_U)$ , В					.....			

Нанести на график плотности распределения численные значения  $p_i(U)$ . Вычислить оценки  $m_U$  и  $D_U$ , пользуясь (3.30). Указать на графике закона распределения численные значения  $U = m_U$  и  $U = \sigma_U$ .

По пяти характерным точкам данных  $P_i(U)$  из таблицы 3.4 построить график функции интегрального закона распределения огибающей  $F_i(U)$  случайного узкополосного сигнала.

Нажать «Esc». В соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.3 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 2 значение  $\sigma_x$ , а затем нажать «Enter».

Получить и зарисовать график гистограммы  $p(U)$  и её огибающей, занести значения  $n_i$  в таблицу 3.4. Определить значения  $m_U$  и  $D_U$ . Указать на графике плотности распределения численные значения  $U = m_U$  и  $U = \sigma_U$ .

Сделать выводы из проведенного анализа.

### 3.4.3 Анализ статистических характеристик и параметров мгновенных значений фазы случайного узкополосного сигнала $\varphi(t)$

Нажав дважды «Esc», вернуться в окно УЗКОПОЛОСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ СИГНАЛ.

В меню ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ нажатием клавиш «← →» выбрать позицию  $\varphi(t)$  и нажать «Enter». В меню УСТАНОВИТЬ в соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.5 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 1 значение МО  $m_\varphi$ , а затем нажать «Enter».

Таблица 3.5

№ варианта		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигнал № 1	МО, рад.	$m_{\varphi 1}$	$m_{\varphi 2}$	$m_{\varphi 3}$	$m_{\varphi 4}$	$m_{\varphi 5}$	$m_{\varphi 2}$	$m_{\varphi 3}$	$m_{\varphi 4}$	$m_{\varphi 5}$	$m_{\varphi 1}$
Сигнал № 2	МО, рад.	$m_{\varphi 4}$	$m_{\varphi 5}$	$m_{\varphi 1}$	$m_{\varphi 2}$	$m_{\varphi 3}$	$m_{\varphi 4}$	$m_{\varphi 2}$	$m_{\varphi 3}$	$m_{\varphi 1}$	$m_{\varphi 5}$

Ознакомиться с появившимся видом  $\varphi(t)$  и характером попадания точек в дифференциальные коридоры вдоль оси  $\varphi$  на плоскости  $[p(\varphi), \varphi]$ .

Нажатием клавиши « $\leftarrow$ » получить график гистограммы  $p(\varphi)$  и её огибающей, а также заполненную таблицу статистических данных.

Зарисовать график гистограммы  $p(\varphi)$  и её огибающей, занести значения  $n_i$  в таблицу 3.6. Пользуясь выражениями (3.28) и (3.29), рассчитать значения  $P_i(\varphi)$ ,  $p_i(\varphi)$  и занести их в таблицу 3.6.

Таблица 3.6

№ i-го диф. коридора	1	2	3	4	.....	28	29	30
Число попаданий $n_i$					.....			
Вероятность $P_i(\varphi)$					.....			
Плотность $p_i(\varphi)$ , 1/рад.					.....			
$(\varphi_i - m_{\varphi})$ , рад.					.....			

Нанести на график плотности распределения численные значения  $p_i(\varphi)$ . Вычислить оценки  $m_{\varphi}$  и  $D_{\varphi}$ , пользуясь (3.30). Указать на графике плотности распределения численные значения  $\varphi = m_{\varphi}$  и  $\varphi = \sigma_{\varphi}$ .

По данным  $P_i(x)$  из таблицы 3.6 согласно (3.31) построить график интегрального закона распределения  $F_i(\varphi)$  случайного узкополосного сигнала.

Нажать «Esc». В соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.5 нажатием клавиш « $\leftarrow$ » выбрать для случайного сигнала № 2 значение  $m_{\varphi}$ , а затем нажать «Enter».

Получить и зарисовать график гистограммы  $p(\varphi)$  и её огибающей, занести значения  $n_i$  в таблицу 3.6. Определить значения  $m_{\varphi}$  и  $D_{\varphi}$ . Указать на графике плотности распределения численные значения  $\varphi = m_{\varphi}$  и  $\varphi = \sigma_{\varphi}$ .

Сделать выводы из проведенного анализа.

#### **3.4.4 Анализ статистических характеристик и параметров мгновенных значений случайного клипированного сигнала**

Нажав трижды «Esc», вернуться в окно главного меню и нажатием клавиш « $\uparrow$ » выбрать КЛИППИР. СЛУЧАЙНЫЙ СИГНАЛ, затем нажать «Enter».

В появившемся окне КЛИППИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ СИГНАЛ внимательно изучите и запишите краткую информацию об этом сигнале, а затем нажмите «Enter».

Появляется окно ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КЛИППИРОВАННОГО СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА, содержащее меню «Установить значение» и поля – «ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА  $y(t)$ », «РЕАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ  $x(t)$  и  $y(t)$ » и СТАТИСТИЧЕСКИЙ РЯД.

Таблица 3.7

№ варианта		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигнал № 1	$y_0, B$	-3	-2	0	2	3	-3	-3	0	-3	0
	$A, B$	1	2	3	4	5	3	4	1	2	4
Сигнал № 2	$y_0, B$	0	2	3	-3	-2	0	3	-2	2	-2
	$A, B$	2	3	1	5	3	5	3	4	5	1

В меню «Установить значение» в соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.7 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 1 значения уровня ограничения  $y_0$  и амплитуды «А», нажимая после каждого выбора «Enter».

Изучить на поле «РЕАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ  $x(t)$  и  $y(t)$ » формирование из исходного сигнала  $y(t)$  клиппированного сигнала  $x(t)$ , вид которого определяется уровнем ограничения  $y_0$ .

Нажатием клавиши «→» получить для  $x(t)$  график гистограммы  $p(x)$ , а также заполненную таблицу статистических данных.

Зарисовать график гистограммы  $p(x)$  и занести значения  $n_i$  в таблицу 3.8.

Таблица 3.8

№ $i$ -го диф. коридора	1	2	3	4	.....	28	29	30
Число попаданий $n_i$					.....			
Вероятность $P_i(x)$					.....			
Плотность $p_i(x), 1/B$					.....			
$(x_i - m_x), B$					.....			

Используя статистические данные из таблицы 3.8, определить согласно (3.28) вероятности  $P[y(t) > y_0]$  и  $P[y(t) < y_0]$ , то есть веса  $\delta$ -функций  $\delta(x-A)$  и  $\delta(x+A)$ , а также  $p_i(x)$  по (3.29), характеризующих закон плотности распределения клиппированного сигнала.

Нанести на график плотности распределения численные значения  $p_i(x)$ .

Вычислить оценки  $m_x$  и  $D_x$ , пользуясь (3.30), а также  $\sum_{i=1}^N P_i(x)$ . Указать на графике плотности распределения численные значения  $x = m_x$  и  $x = \sigma_x$ .

По данным  $P_i(x)$  из таблицы 3.8 согласно (3.31) построить график интегрального закона распределения  $F_i(x)$  клиппированного сигнала.

Нажать «Esc». В соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.7 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 2 значения  $y_0$  и «А», нажимая после каждого выбора «Enter».

Получить и зарисовать график гистограммы  $p(x)$ , занести значения  $p_i$  в таблицу 3.8. Определить вероятности  $P[y(t) > y_0]$  и  $P[y(t) < y_0]$  и значения  $m_x$  и  $D_x$ . Указать на графике плотности распределения численные значения  $x = m_x$  и  $x = \sigma_x$ .

Сделать выводы из проведенного анализа.

### 3.4.5 Анализ статистических характеристик и параметров мгновенных значений гармонического сигнала со случайной фазой

Нажав трижды «Esc», вернуться в окно главного меню и нажатием клавиш «↑ ↓» выбрать SIN СИГНАЛ СО СЛУЧАЙНОЙ ФАЗОЙ и нажать «Enter».

В появившемся окне ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ФАЗОЙ внимательно изучите и запишите краткую информацию об этом сигнале, а затем нажмите «Enter».

Появляется окно ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА СО СЛУЧАЙНОЙ ФАЗОЙ, содержащее меню УСТАНОВИТЬ и поля – УСТАНОВЛЕНЫ, «ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА  $x(t)$ », «РЕАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА  $x(t)$ » и ТАБЛИЦА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ.

В меню УСТАНОВИТЬ в соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.9 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 1 значения МО  $m_x$  и амплитуды А, нажимая после каждого выбора «Enter».

Таблица 3.9

№ варианта		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигнал № 1	$m_x, B$	-2	-1	2	2	3	-2	0	0	-3	0
	A, B	2	3	4	5	6	3	4	1	2	4
Сигнал № 2	$m_x, B$	3	2	-2	-1	-2	2	-2	-2	2	-2
	A, B	5	2	2	5	3	5	2	4	5	1

Ознакомиться с появившемся видом реализации  $x(t)$  и характером попадания точек в дифференциальные коридоры вдоль оси  $x$  на плоскости  $[p(x), x]$ .

Нажатием клавиши «→» получить график гистограммы  $p(x)$  и её огибающей, а также заполненную таблицу статистических данных.

Зарисовать график гистограммы  $p(x)$  и её огибающей, занести значения  $p_i$  в таблицу 3.10.

Пользуясь выражениями (3.28) и (3.29), рассчитать значения  $P_i(x)$ ,  $p_i(x)$  и занести их в таблицу 3.10.

Таблица 3.10

№ i-го диф. коридора	1	2	3	4	.....	28	29	30
----------------------	---	---	---	---	-------	----	----	----

Число попаданий $n_i$					.....			
Вероятность $P_i(x)$					.....			
Плотность $p_i(x), 1/B$					.....			
$(x_i - m_x), B$					.....			

Нанести на график плотности распределения численные значения  $p_i(x)$ . Определить минимальные значения  $P_i(x)$  и  $p_i(x)$ . Вычислить оценки  $m_x$  и  $D_x$ , пользуясь (3.30), а также  $\sum_{i=1}^N P_i(x)$ . Указать на графике плотности распределения численные значения  $x = m_x$  и  $x = \sigma_x$ .

По данным  $P_i(x)$  из таблицы 3.10 согласно (3.31) построить график интегрального закона распределения  $F_i(x)$  гармонического сигнала.

Нажать «Esc». В соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.9 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 2 значения  $m_x$  и  $A$ , нажимая после каждого выбора «Enter».

Получить и зарисовать график гистограммы  $p(x)$  и её огибающей, занести значения  $n_i$  в таблицу 3.10. Определить минимальные значения  $P_i(x)$  и  $p_i(x)$ . Определить значения  $m_x$  и  $D_x$ . Указать на графике плотности распределения численные значения  $x = m_x$  и  $x = \sigma_x$ . Сделать выводы из проведенного анализа.

### 3.4.6 Анализ статистических характеристик и параметров мгновенных значений пилообразного сигнала со случайным временным сдвигом

Нажав трижды «Esc», вернуться в окно главного меню и нажатием клавиш «↑ ↓» выбрать ПИЛООБРАЗНЫЙ СИГНАЛ СО СЛУЧАЙНЫМ СДВИГОМ и нажать «Enter».

В появившемся окне ПИЛООБРАЗНЫЙ СИГНАЛ СО СЛУЧАЙНЫМ СДВИГОМ внимательно изучите и запишите краткую информацию об этом сигнале, а затем нажмите «Enter».

Появляется окно ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИЛООБРАЗНОГО СИГНАЛА СО СЛУЧАЙНОЙ ФАЗОЙ, содержащее меню УСТАНОВИТЬ и поля – УСТАНОВЛЕННЫ, «ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА  $x(t)$ », «РЕАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА  $x(t)$ » и ТАБЛИЦА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ.

В меню УСТАНОВИТЬ в соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.11 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 1 значения МО  $m_x$  и амплитуды  $A$ , нажимая после каждого выбора «Enter».

Таблица 3.11

№ варианта		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Сигнал № 1	$m_x, B$	-2	-1	0	2	3	-2	2	0	-3	0
	$A, B$	1	2	3	4	5	5	1	1	2	4
Сигнал	$m_x, B$	2	2	-2	-2	-2	2	-2	-2	2	-2

№ 2	A, B	5	4	2	2	5	2	4	4	5	1
-----	------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ознакомиться с появившимся видом реализации  $x(t)$  и характером попадания точек в дифференциальные коридоры вдоль оси  $x$  на плоскости  $[p(x), x]$ .

Нажатием клавиши «→» получить график гистограммы  $p(x)$  и её огибающей, а также заполненную таблицу статистических данных.

Зарисовать график гистограммы  $p(x)$  и её огибающей, занести значения  $n_i$  в таблицу 3.12.

Таблица 3.12

№ i-го диф. коридора	1	2	3	4	.....	28	29	30
Число попаданий $n_i$					.....			
Вероятность $P_i(x)$					.....			
Плотность $p_i(x)$ , 1/B					.....			
$(x_i - m_x)$ , B					.....			

Пользуясь выражениями (3.28) и (3.29), рассчитать значения  $P_i(x)$ ,  $p_i(x)$  и занести их в таблицу 3.12.

Нанести на график плотности распределения численные значения  $p_i(x)$ .

Вычислить оценки  $m_x$  и  $D_x$ , пользуясь (3.30), а также  $\sum_{i=1}^N P_i(x)$ . Указать на графике плотности распределения численные значения  $x = m_x$  и  $x = \sigma_x$ .

По данным  $P_i(x)$  из таблицы 3.12 согласно (3.31) построить график интегрального закона распределения  $F_i(x)$  анализируемого сигнала.

Нажать «Esc». В соответствии с заданным вариантом из таблицы 3.11 нажатием клавиш «← →» выбрать для случайного сигнала № 2 значения  $m_x$  и  $A$ , нажимая после каждого выбора «Enter».

Получить и зарисовать график гистограммы  $p(x)$  и её огибающей, занести значения  $n_i$  в таблицу 3.12. Определить значения  $m_x$  и  $D_x$ . Указать на графике плотности распределения численные значения  $x = m_x$  и  $x = \sigma_x$ .

Сделать выводы из проведенного анализа.

### 3.5 Контрольные вопросы

3.5.1 Дать определения понятиям «случайная величина», «случайный сигнал», «случайный стационарный сигнал», «случайный эргодический сигнал».

3.5.2 Дать определение закону вероятности распределения и плотности вероятности случайного сигнала.

3.5.3 Указать основные свойства интегрального и дифференциального законов распределения.

3.5.4 Что характеризует одномерная и двумерная плотность вероятности?

3.5.5 Что характеризует автокорреляционная функция случайного сигнала?

3.5.6 Дать определения математического ожидания и дисперсии случайных стационарных сигналов, пояснить их физический смысл.

3.5.7 Нарисовать реализации стационарных случайных сигналов с разными математическими ожиданиями и дисперсиями.

3.5.8 Пояснить, как связано изменение скорости временной функции эргодического сигнала с видом распределения плотности вероятности?

3.5.9 Пояснить методику моделирования случайных сигналов и измерения их статистических характеристик, используемых в лабораторной работе.

3.5.10 Как связаны между собой спектральная плотность мощности и автокорреляционная функции случайных сигналов?

### **Литература**

1 Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Сов. радио, 1986. С. 109–118.

2 Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 2000. С. 136–158.

3 Радиотехнические цепи и сигналы / Под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1991. С. 403–418.

4 Тихонов В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991. С. 9–20.

5 Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982. С. 296–297.

## 4 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТИЗЦИИ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ»

### 4.1 Цель работы

4.1.1 Изучить принцип дискретизации сигналов, а также исследовать временные и спектральные характеристики функции выборки.

4.1.2 Изучить процесс дискретизации и восстановления сигналов с ограниченным спектром по теореме Котельникова.

4.1.3 Изучить погрешности дискретизации и восстановления сигналов.

4.1.4 Исследовать временные и спектральные характеристики системы базисной (отсчётной) функции.

4.1.5 Исследовать преобразование временных и спектральных характеристик при дискретизации и восстановлении сигналов с ограниченным и неограниченным спектром.

### 4.2 Краткие теоретические сведения

Все первичные природные сигналы макромира непрерывны по времени и размеру. В сущности любой дискретный сигнал как физический процесс является сигналом аналоговым.

Преобразование непрерывных ИС в дискретные позволяет осуществить временное **уплотнение** канала передачи, разделяя сигналы по времени, а их преобразование путём квантования по уровню и кодирования в цифровую форму расширяет возможности обработки.

#### 4.2.1 Дискретизация сигналов и погрешность датирования отсчётов

**Дискретизация** – это преобразование непрерывного во времени сигнала  $S(t)$  в последовательность его мгновенных значений (отсчётов)  $S_d(t_n) = S(t_n)$ , соответствующих моментам времени  $t_n = n \cdot \Delta t$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ ,  $\Delta t$  – интервал времени, называемый **шагом дискретизации**, а обратная ему величина  $f_d = 1/\Delta t$  – **частотой дискретизации**.

Дискретизация бывает **равномерной** ( $\Delta t = \text{const}$ ) и **неравномерной** ( $\Delta t$  – переменная величина). На практике наибольшее распространение получила равномерная дискретизация, так как в этом случае алгоритмы дискретизации и последующего восстановления сигнала, а также соответствующая аппаратура относительно просты.

По способу получения дискретных значений различают **аналитическую** и **физическую** дискретизации.

При **аналитической** (математической) дискретизации, используемой в расчётах, длительность импульса выборки отсчёта  $\tau_B$  принимается равной нулю (рисунок 4.1, б) и дискретизированное значение  $S_d(t_n)$  (рисунок 4.1, в) определяется мгновенным значением сигнала  $S(t_n)$  (рисунок 4.1, а), следовательно, погрешность датирования отсчёта принципиально отсутствует.

Тогда идеальным дискретизированным сигналом  $S_d(t_n)$  является последовательность дельта-импульсов  $\delta(t - t_n)$  нулевой длительности модулированных по амплитуде (рисунок 4.1, в) и аналитически может быть записан в виде

$$S_d(t_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(t) \cdot \delta(t - t_n) . \quad (4.1)$$

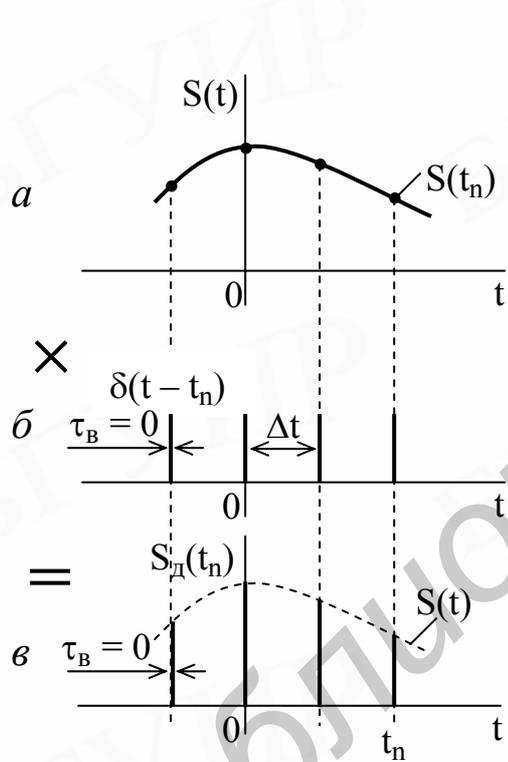


Рисунок 4.1

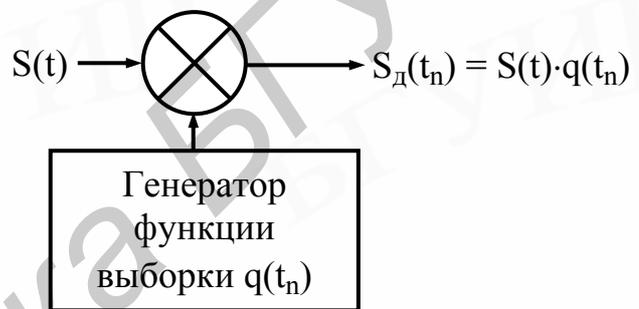


Рисунок 4.2

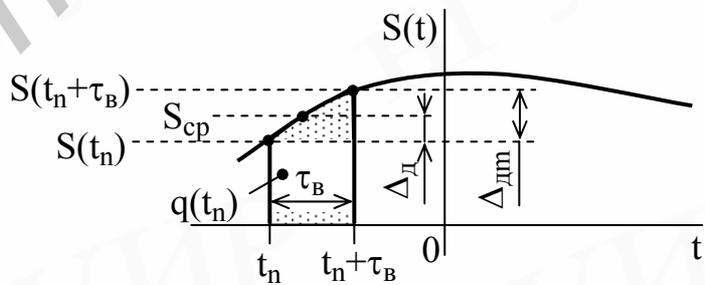


Рисунок 4.3

При физической дискретизации аппаратными средствами, содержащими перемножитель сигналов и генератор функции выборки (рисунок 4.2), дискретизация осуществляется с помощью импульса выборки отсчёта конечной длительности  $\tau_B \neq 0$  (рисунок 4.3), называемого функцией выборки  $q(t_n)$ . Поэтому амплитуда дискретизированных значений или значение датирования отсчёта может находиться в диапазоне от  $S(t_n)$  до  $S(t_n + \tau_B)$ .

Поскольку дискретизированное значение  $S(t_n + \tau_B)$  относят, как правило, к моменту времени  $t_n$ , то возникает погрешность датирования отсчёта  $\Delta_d = S(t_n) - S_{cp}$ , максимальное значение которой  $\Delta_{dm} = S(t_n + \tau_B) - S(t_n)$ ,

где  $S_{cp}$  – некоторое значение сигнала  $S_{cp} \in [S(t_n); S(t_n + \tau_B)]$ , зависящая от длительности  $\tau_B$  и реализации устройств дискретизирующих сигнал.

Длительность импульса выборки  $\tau_B$  исходя из допустимой неравномерности  $\Delta q(f)$  его спектра  $q(k \cdot f_d)$  в пределах полосы частот от 0 до  $f_B$  (рисунок 4.4, з) выбирается как

$$\tau_B \ll 2 \cdot \Delta t . \quad (4.2)$$

#### 4.2.2 Дискретизация и восстановление ИС по теореме Котельникова

В измерительной технике широко используется критерий совпадения значений дискретного сигнала  $S_d(t_n)$  с мгновенными значениями непрерывного сигнала  $S(t)$ , так как он удобен для аналитического восстановления с помощью компьютера и отличается простотой реализации и достаточно высокой точностью. В этом случае дискретизация и восстановление сигнала осуществляется согласно теореме Котельникова.

**Теорема Котельникова** – если сигнал  $S(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле (кусочно-непрерывен, имеет конечное число экстремумов), обладает конечным спектром с граничной частотой  $f_B$  и дискретизирован равномерно с интервалом  $\Delta t \leq 1/(2 \cdot f_B)$ , то есть  $f_d \geq 2 \cdot f_B$ , то он может быть восстановлен по всей совокупности его дискретных значений  $S_d(t_n)$  без погрешности.

Непрерывный сигнал  $S(t)$  может быть восстановлен в виде суммы произведений отсчётных значений  $S_d(t_n)$  (коэффициентов ряда Котельникова) на ортонормированный базис функций (БФ)  $\varphi_n(t)$ , называемой рядом Котельникова, который является одним из видов обобщённого ряда Фурье:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_d(t_n) \cdot \varphi_n(t), \quad \text{где } \varphi_n(t) = \frac{\sin[2 \cdot \pi \cdot f_B \cdot (t - t_n)]}{2 \cdot \pi \cdot f_B \cdot (t - t_n)}. \quad (4.3)$$

Функции  $\varphi_n(t)$  являются **неограниченными** во времени и **ортгоналными** на интервале времени  $t$  от  $-\infty$  до  $\infty$  (рисунок 4.4, ж), то есть

$$\varphi_n(k \cdot \Delta t) = \begin{cases} 1, & \text{при } k = n \text{ или } t = n \cdot \Delta t; \\ 0, & \text{при } k \neq n \text{ или } t = k \cdot \Delta t; \end{cases} \quad (4.4)$$

а их **спектральная плотность** (рисунок 4.4, з) **конечна** и отвечает условиям

$$\begin{aligned} \text{амплитудная} - \varphi_n(f) &= \begin{cases} \varphi_0 = \text{const} & \text{при } |f| < f_B; \\ 0 & \text{при } |f| \geq f_B; \end{cases} \\ \text{фазовая} - \psi_n(f) &= -2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $t_0 = t - t_n$  – временной сдвиг. Следовательно, ширина спектра  $\Delta f_c$  сигнала  $S(t)$  и функций  $\varphi_n(t)$  одинакова и равна  $f_B$  (рисунок 4.4, е).

Квадрат нормы (энергия) базисной функции  $\varphi_n(t)$  равен  $\|\varphi_n(t)\|^2 = \Delta t$ .

#### 4.2.3 Дискретизация непрерывных сигналов и преобразование их спектров

Допустим, что непрерывный сигнал  $S(t)$  (рисунок 4.4, а) имеет спектр конечной ширины (рисунок 4.4, б) и выбран интервал дискретизации  $\Delta t$ , удовле-

творяющий условию  $\Delta t = 1/(2 \cdot f_B)$ . Функция **сигнала-выборки**  $q(t_n)$  представляет **прямоугольный импульс единичной амплитуды** длительностью  $\tau_B$  и периодом повторения  $\Delta t$  или с частотой следования  $f_D = 2 \cdot f_B$  (рисунок 4.4, в). Тогда спектр модуля амплитуд гармоник функции выборки  $q(t_n)$  описывается выражением

$$q(k \cdot f_D) = \tau_B \cdot f_D \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot f_D \cdot \tau_B)}{k \cdot \pi \cdot f_D \cdot \tau_B} \right) \quad (4.6)$$

и состоит из составляющих с частотами  $k \cdot f_D$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ ), амплитуды которых изменяются по закону  $\sin(x)/x$  (рисунок 4.4, з).

Дискретизированный сигнал получается в результате перемножения непрерывного сигнала  $S(t)$  на последовательность сигнала-выборки  $q(t_n)$  и записывается как

$$S_D(t_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(t) \cdot q(t_n), \quad (4.7)$$

он является последовательностью амплитудно-модулированных импульсов (АИМ-сигналом) (рисунок 4.4, д).

На основании теоремы о произведении двух сигналов  $S(t)$  и  $q(t_n)$  спектр дискретного сигнала  $S_D(t_n)$  определяется свёрткой их спектров

$$S_D(f) = S(f) \otimes q(k \cdot f_D), \quad (4.8)$$

и представляет собой **периодическое повторение спектра** непрерывного (исходного) сигнала  $S(t)$  с интервалом, равным  $f_D$  (рисунок 4.4, е).

#### 4.2.4 Дискретизация сигналов конечной длительности с неограниченным спектром

Сигнал конечной длительности  $t_s$  имеет **бесконечно широкий спектр**. Однако на практике всегда можно условно определить верхнюю граничную частоту  $f_B$  спектра, выше которой суммарная энергия всех составляющих спектра мала по сравнению с полной энергией сигнала (рисунок 4.5, а). В этом случае сигнал длительностью  $t_s$  приближённо можно определить некоторым числом  $N$  выборок с шагом  $\Delta t = 1/(2 \cdot f_B)$ , причём

$$N \geq 1 + (t_s / \Delta t) = 1 + 2 \cdot f_B \cdot t_s. \quad (4.9)$$

Число  $N$  называют иногда числом **степеней свободы, или базой** сигнала.

Сигнал конечной длительности аппроксимируется рядом Котельникова с конечным числом членов:

$$S(t) = \sum_{n=-N}^N \left[ S_D(t_n) \cdot \frac{\sin[2 \cdot \pi \cdot f_B \cdot (t - t_n)]}{2 \cdot \pi \cdot f_B \cdot (t - t_n)} \right]. \quad (4.10)$$

Сигнал  $S(t)$ , представленный в виде такого ряда, **воспроизводится точно только в точках отсчётов**  $t_n = n \cdot \Delta t$ . В промежутках между отсчётами возникает ошибка аппроксимации, которая возрастает у краёв интервала времени  $t_s$ . С

увеличением частоты  $f_b$  возрастает база сигнала  $N$  и сигнал аппроксимируется точнее.

При дискретизации сигналов с неограниченным спектром соседние области периодического спектра  $S_d(f)$  будут перекрываться, что приведёт при восстановлении к погрешности. Для её уменьшения перед дискретизацией можно сделать спектр сигнала ограниченным, пропустив его через фильтр нижних

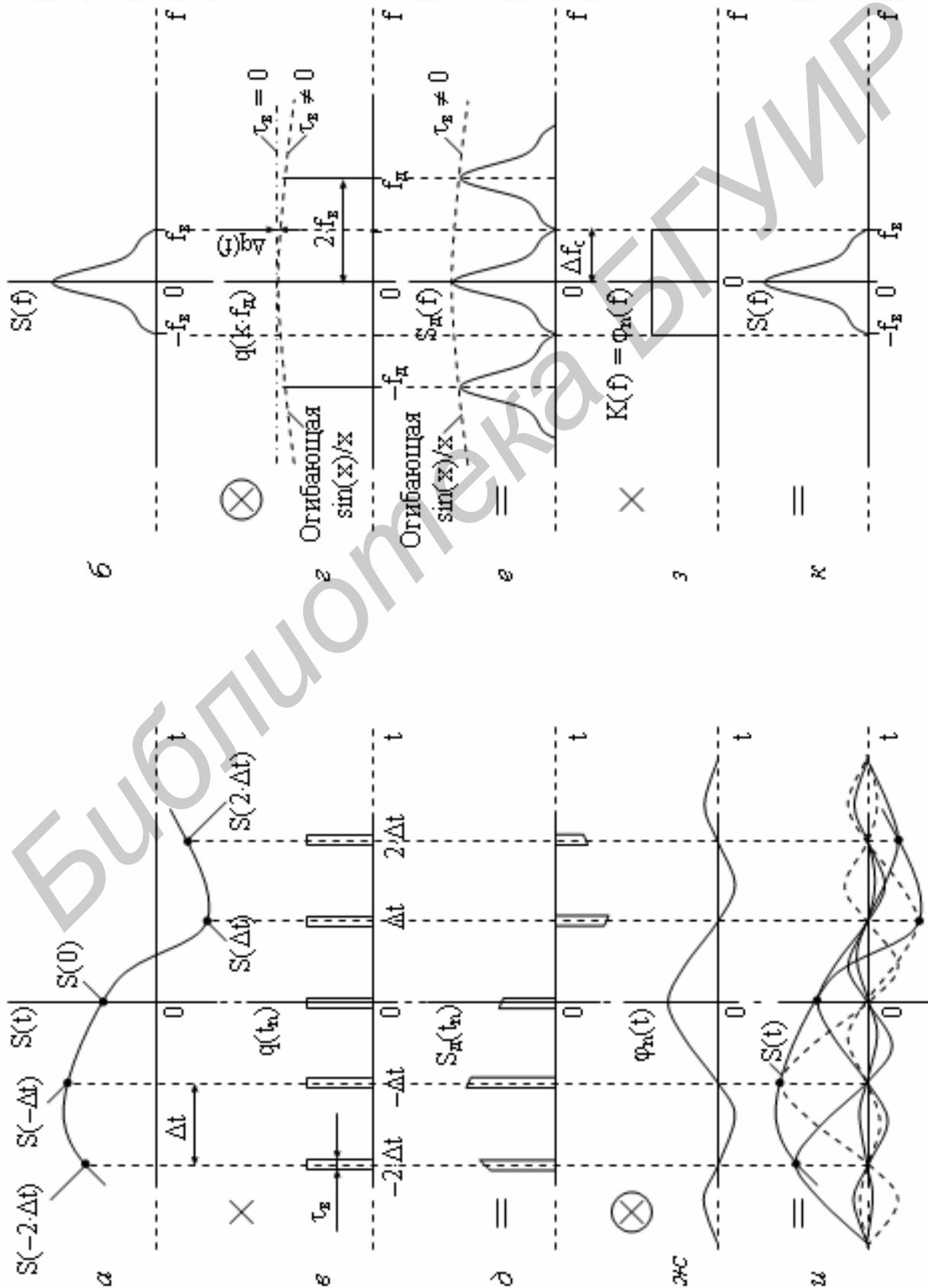


Рисунок 4.4

частот (ФНЧ) с амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)  $K(f)$ , близкой к прямоугольной и граничной частотой  $f_B$  (см. рисунок 4.5, *a*). При этом сигнал исказится, но в этом случае результирующая ошибка при восстановлении получается приблизительно в 2 раза меньше, чем при непосредственной дискретизации сигнала. Кроме того, при наличии широкополосного шума на входе ФНЧ на его выходе дисперсия шума и соответственно погрешность дискретизации уменьшаются.

#### 4.2.5 Восстановление (синтез) непрерывного сигнала

Для восстановления непрерывного сигнала  $S(t)$  из дискретизированного сигнала  $S_d(t_n)$  необходимо выделить из спектра  $S_d(f)$  ту часть, которая с точностью до постоянного множителя совпадает со спектром  $S(f)$  сигнала  $S(t)$ . Это можно сделать, пропуская  $S_d(t_n)$  через идеальный ФНЧ с граничной частотой  $f_B$  и  $K(f) = \varphi_n(f)$  (рисунок 4.4, *з*), что соответствует перемножению спектров  $S_d(f)$  и БФ  $\varphi_n(f)$  (см. рисунок 4.4, *e* и *з*), то есть спектр восстановленного сигнала (рисунок 4.4, *к*)

$$S(f) = S_d(f) \cdot \varphi_n(f). \quad (4.11)$$

А согласно теореме обратимости частоты и времени перемножение спектров  $S_d(f)$  и  $\varphi_n(f)$  соответствует свёртке временных функций сигналов  $S_d(t_n)$  и  $\varphi_n(t)$  (см. рисунок 4.4, *д* и *ж*), то есть восстановленный сигнал (рисунок 4.4, *и*)

$$S(t) = S_d(t_n) \otimes \varphi_n(t). \quad (4.12)$$

Из (4.3, 4.5 и 4.12) следует, что точное значение функции  $S(t)$  в определённый момент времени  $t_i$  зависит от всех выборок, взятых из  $S(t)$  как до этого момента, так и после него. На выходе же реального ФНЧ напряжение в момент  $t_i$  является суммой напряжений от всех выборок, поступивших только в моменты времени, предшествующие  $t_i$ .

Суммарный сигнал на выходе ФНЧ, создаваемый всеми выборками,

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = K_0 \cdot \tau_B \cdot 2 \cdot f_B \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ S_d(t_n) \cdot \frac{\sin[2 \cdot \pi \cdot f_B \cdot (t - t_n - t_0)]}{2 \cdot \pi \cdot f_B \cdot (t - t_n - t_0)} \right]. \quad (4.13)$$

Таким образом, выходной сигнал отличается от исходного постоянным коэффициентом ( $K_0 \cdot \tau_B \cdot 2 \cdot f_B$ ) и задержкой во времени на величину  $t_0$ , где  $K_0$  – постоянный коэффициент передачи ФНЧ в полосе частот от 0 до  $f_B$ ,  $t_0$  – определяется крутизной фазочастотной характеристики (ФЧХ) фильтра.

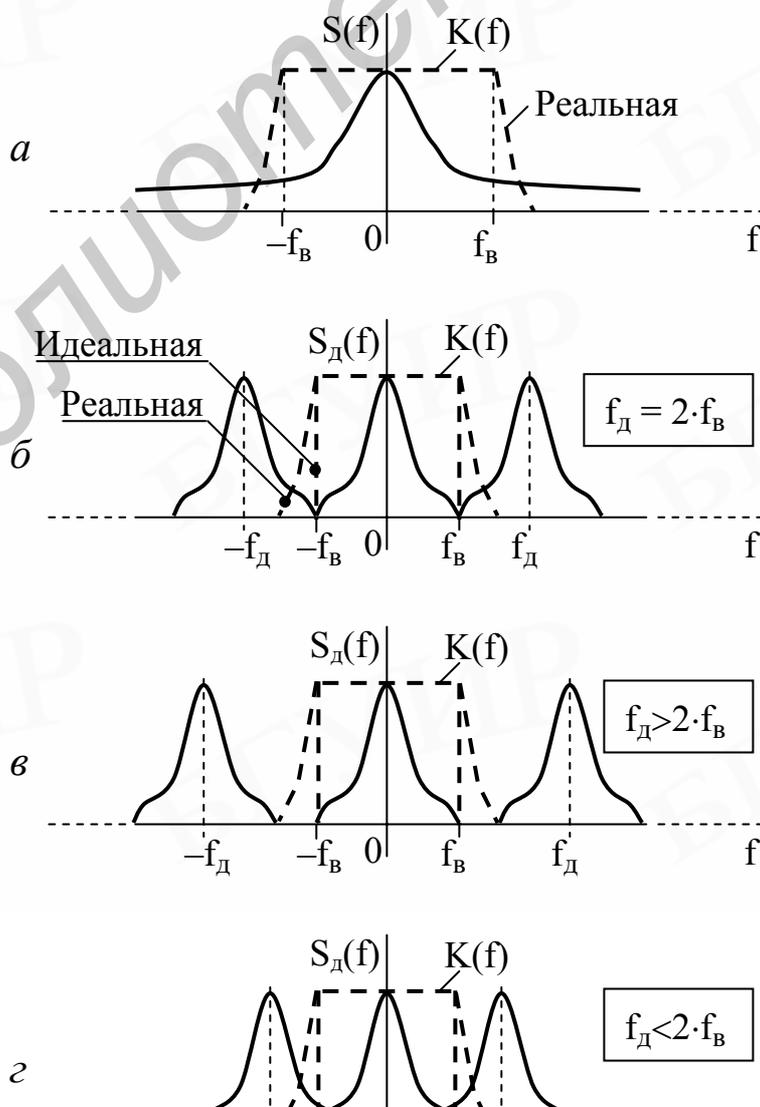
#### 4.2.6 Погрешности восстановления непрерывного сигнала

Если спектр непрерывного сигнала  $S(t)$  ограничен частотой  $f_B$  и интервал дискретизации  $\Delta t$  удовлетворяет условию  $\Delta t = 1/(2 \cdot f_B)$ , то период повторения спектра  $S_d(f)$  дискретизированного сигнала равен  $f_d = 2 \cdot f_B$ , так что соседние части его спектра не перекрываются (рисунок 4.5, б). В этом случае ошибка восстановления сигнала возникает из-за неидеальной формы  $K(f)$  ФНЧ, которая имеет монотонно спадающий вид (см. рисунок 4.5 б) и вследствие этого неполное подавление соседних частей спектра. Поэтому восстановленный сигнал будет отличаться по форме от исходного непрерывного сигнала.

Интервал между выборками  $\Delta t$  при дискретизации сигнала  $S(t)$  можно взять меньше, чем  $\Delta t < 1/(2 \cdot f_B)$ . Тогда частота  $f_d$  и период повторения спектра  $S_d(f)$  увеличатся, что при идеальной форме  $K(f)$  не должно привести к повышению точности воспроизведения сигнала. С учётом реальной формы  $K(f)$  ошибка восстановления сигнала уменьшится, так как подавление соседних частей спектра увеличится за счёт большего интервала между ними (рисунок 4.5, в).

Таким образом, уменьшение интервала между выборками при дискретизации сигнала с ограниченным спектром по сравнению с  $\Delta t = 1/(2 \cdot f_B)$  допустимо. При практическом применении дискретизации сигнала выбирают интервал дискретизации  $\Delta t$  в 2 ... 5 раз меньше необходимой величины  $\Delta t = 1/(2 \cdot f_B)$ .

В случае выбора  $\Delta t > 1/(2 \cdot f_B)$  или  $f_d < 2 \cdot f_B$  при восстановлении сигнала  $S(t)$  возникает погрешность, обусловленная частичным перекрытием соседних частей спектра  $S_d(f)$ , а также неидеальной формой  $K(f)$  ФНЧ (рисунок 4.5, г).



#### 4.2.7 Дискретизация узкополосного сигнала

Пусть задан сигнал

$$S(t) = A(t) \cdot \cos[\psi(t)] , \quad (4.14)$$

спектр которого находится в узкой полосе частот от  $f_1$  до  $f_2$ , причём в пределах полосы  $\Delta f = f_2 - f_1$  он необязательно симметричен относительно центральной частоты  $f_0 = (f_1 + f_2)/2$ , и выполняется условие  $(\Delta f/f_0) \ll 1$ .

К такому узкополосному сигналу относится амплитудно-модулированный (АМ) сигнал:

$$S(t) = A(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) , \quad (4.15)$$

где  $A(t)$  – огибающая АМ-сигнала,  $f_0$  – частота несущего колебания.

Так как фаза несущего колебания при чистой АМ постоянна, то передавать её нет необходимости. Следовательно, АМ-сигнал вполне определяется значениями своих амплитуд, взятыми через интервал  $\Delta t = 1/(2 \cdot F_B)$ , где  $F_B$  – верхняя частота в спектре модулирующей функции  $A(t)$ , то есть в спектре передаваемого сообщения.

В случае частотно-модулированного (ЧМ) сигнала

$$S(t) = A_0 \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \Theta(t)] , \quad (4.16)$$

его мгновенная частота изменяется как  $f(t) = f_0 + \left(\frac{\Theta(t)}{dt}\right)/(2 \cdot \pi)$ . Если девиация

частоты  $f_d$  (максимальное отклонение частоты  $f(t)$  от  $f_0$ ) велика по сравнению с  $F_B$ , то ширину спектра ЧМ-сигнала можно считать равной  $2 \cdot f_d$ . Следовательно, для дискретизации ЧМ-сигнала достаточно задавать его фазу  $\Theta(t_n)$  в отсчётных точках с интервалом времени  $\Delta t = 1/(2 \cdot f_d)$ .

При смешанной АМ и ЧМ в каждой отсчётной точке нужно брать выборку амплитуды и фазы.

#### 4.2.8 Дискретизация спектров сигналов

Из симметрии преобразований Фурье (теоремы обратимости частоты и времени) для сигналов с конечной длительностью (рисунок 4.6, а) можно сформулировать теорему, аналогичную теореме Котельникова, но не для временных выборок, а для спектральных (рисунок 4.6, б).

Заменив  $t$  на  $f$  и наоборот, а также  $2 \cdot f_B$  на длительность сигнала  $t_s$ , получим

$$S(jf) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ S(jk \cdot \Delta f) \cdot \frac{\sin[t_s \cdot \pi \cdot (f - k \cdot \Delta f)]}{t_s \cdot \pi \cdot (f - k \cdot \Delta f)} \right], \quad (4.17)$$

где  $\Delta f = 1/t_s$  – интервал выборки спектра.

Таким образом, спектр сигнала с конечной длительностью полностью определяется выборками, взятыми с интервалом  $\Delta f$ .

Ограничивая спектр согласно указаниям в п. 4.2.4 частотой  $f_B = N \cdot \Delta f$  ( $k = N$ ), общее число спектральных выборок (степеней свободы)  $N \geq 1 + (2 \cdot f_B / \Delta f) = 1 + 2 \cdot f_B \cdot t_s$ , то есть совпадает с числом  $N$  (4.9) при временной дискретизации сигнала.

Так как спектральная плотность  $S(jf)$  величина комплексная, то фактическое количество выборок оказывается вдвое больше. Однако, учитывая, что действительная часть  $\text{Re}[S(jf)]$  – чётная функция частоты, а мнимая часть  $\text{Im}[S(jf)]$  – нечётная функция, число независимых отсчётных значений спектра сокращается вдвое и равно  $N$ .

При дискретизации спектров сигналов, по аналогии с дискретизацией сигналов во времени, исходный сигнал  $S(t)$  преобразуется в периодически повторяющийся с периодом  $T \geq t_s$  (см. рисунок 4.6, а).

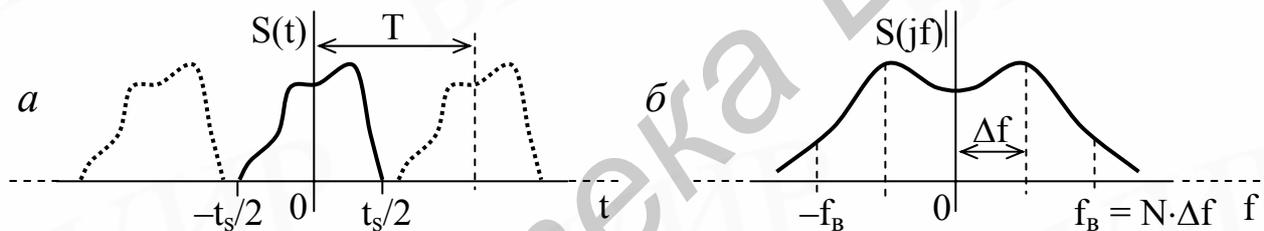


Рисунок 4.6

#### 4.2.9 Преобразование дискретного сигнала в амплитудно-модулированный непрерывным сигналом

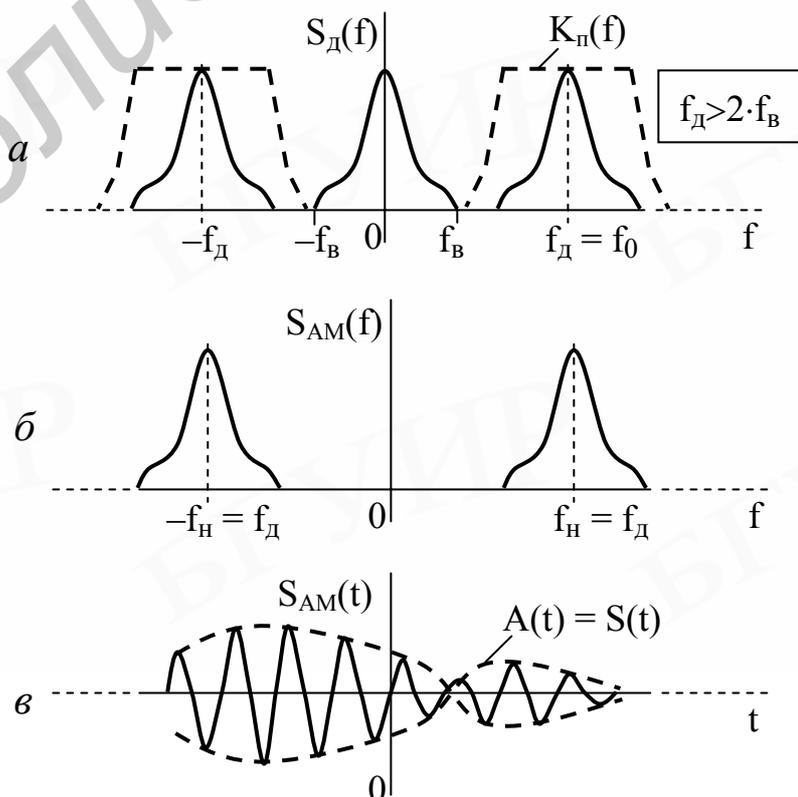


Рисунок 4.7

Преобразование сигнала  $S_d(t_n)$  в АМ-сигнал  $S_{AM}(t) = A(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_H \cdot t)$  можно осуществить путём выделения части периодического спектра  $S_d(f)$  с помощью полосового фильтра с формой АЧХ  $K_{\Pi}(f)$ , близкой к прямоугольной, и со средней частотой  $f_0 = n \cdot f_d$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) (рисунок 4.7, а и б). Частота несущего колебания АМ-сигнала будет равна  $f_H = n \cdot f_d$ , а его огибающая  $A(t)$  будет соответствовать непрерывному сигналу  $S(t)$  (рисунок 4.7, в).

### 4.3 Порядок выполнения работы

Работа выполняется в соответствии с заданным вариантом, запишите требуемые для его выполнения данные, приведенные в таблице 4.1.

Таблица 4.1

№ варианта	$U_B(t)$		$U_B(t)$	$U_O(t)$	$U_H(t)$
	Имя файла	Kt, раз	Имя файла	Имя файла	Имя файла
1	SV1	1000	SBF1	SOS1	SNS1
2	SV2	1500	SBF2	SOS2	SNS2
3	SV3	2000	SBF3	SOS3	SNS3
4	SV4	2500	SBF4	SOS4	SNS4
5	SV5	1000	SBF5	SOS5	SNS5
6	SV6	1500	SBF6	SOS6	SNS6
7	SV7	2000	SBF7	SOS7	SNS7
8	SV8	2500	SBF8	SOS8	SNS8
9	SV9	1000	SBF9	SOS9	SNS9
10	SV10	1500	SBF10	SOS10	SNS10

*Смысловое значение имени файла сигнала*

SV1 – первый сигнал выборки.

SBF1 – первый сигнал базисной функции ряда Котельникова.

SOS1 – первый сигнал с ограниченным спектром.

SNS1 – первый сигнал с неограниченным спектром.

*Запуск программы*

Запустите программу SAS с помощью ярлыка «ДискретИС» из папки «Часть 1», находящейся в папке «ИСиФУиО».

Краткие сведения о программе SAS приведены на с. 16 и 17.

**4.3.1 Анализ временных и спектральных характеристик сигнала-выборки**

Для доступа к библиотеке DATA, содержащей файлы с данными сигналов, нажмите «F». На экране появится подменю работы с файлами данных и содержание библиотеки DATA. Для вызова анализируемого сигнала нажмите «2» и наберите заданное имя файла для  $U_B(t)$ .

**Примечание** Для исправления ошибок при наборе имени файла используйте клавишу «←» – стирание символа слева от курсора.

Нажмите «Enter» и ждите появления сообщения «Файл имя.DAT вызван».

**Примечание** При ошибочном вызове другого или отсутствующего файла повторите вызов нажатием «2» и набором имени требуемого файла.

Для возврата в основное меню нажмите «5», а затем для наблюдения осциллограммы (графика) временной функции сигнала нажмите «P». На поле осциллографа появится изображение сигнала  $U_B(t)$  и измерительная линия с маркером. Зарисуйте график сигнала.

Запишите значение  $\tau_b = \tau_b$  – длительность импульса выборки в мкс (поз. 11) и рассчитайте ширину спектра сигнала, определяемую по первому нулю в огибающей спектра как  $\Delta f_c = 1/\tau_{и}$ .

Для наблюдения графиков модуля напряжения амплитуд гармоник спектра сигнала (верхний) и спектра фаз (нижний) нажмите клавишу «C». Измерительная линия автоматически перемещается на правое поле.

Запишите значения периода  $T$  (поз. 5) и частоты  $F$  (поз. 6) сигнала  $U_B(t)$ . Зарисуйте наблюдаемые графики.

Перемещая измерительную линию (маркер) клавишами "← →", установите её последовательно на наблюдаемые спектральные линии (гармоники). Запишите их частоту  $f$  (поз. 8) и относительную амплитуду  $C(f)$  (поз. 9). Убедитесь, что относительные значения амплитуд гармоник  $C(f)$  практически не изменяются.

Нанесите измеренные параметры сигнала  $U_B(t)$  и его спектра на соответствующие рисунки графиков. Объясните полученные результаты.

Нажатием клавиши «P» переведите маркер на поле сигнала. Измените длительность  $\tau_b$  сигнала  $U_B(t)$  в  $Kt$  раз. Для этого нажмите «F4», введите в поз. 4 заданное значение  $Kt$  и нажмите «Enter». Нажмите «P». Зарисуйте график сигнала.

Запишите значение длительности импульса  $\tau_b = \tau_b$  в мкс (поз. 11) и рассчитайте ширину спектра сигнала, определяемую по первому нулю в огибающей спектра как  $\Delta f_c = 1/\tau_{и}$ .

Для наблюдения графиков спектра нажмите «C». Зарисуйте наблюдаемые графики. Перемещая измерительную линию клавишами «← →», измерьте относительные значения максимальной и минимальной амплитуд гармоник спектра  $C(f)$  (поз. 9).

Нанесите измеренные параметры сигнала  $U_B(t)$  и его спектра на соответствующие рисунки графиков. Сравните временные параметры изменённого сигнала и его спектра с параметрами исходного. Объясните полученные результаты.

### **4.3.2 Анализ временной и спектральной характеристик сигнала базисной функции**

Для вызова анализируемого сигнала нажмите «F», затем «2». Наберите имя заданного файла  $U_B(t)$  и нажмите «Enter». После вызова требуемого файла сигнала нажмите «5», а затем «P». Нажмите клавишу «T», введите «0» в поз. 4 и нажмите «Enter», а затем «P». Зарисуйте график сигнала. Запишите значение длительности сигнала  $\tau = \tau_6$  в мкс (поз. 11).

Измерьте интервал длительности  $\Delta t$  между левым и правым нулями центрального «лепестка» сигнала. Для этого, устанавливая маркер клавишами «← →» в заданные точки, снимите показания  $t_L$  и  $t_P$  в поз. 1. Определите значение  $\Delta t = t_P - t_L$ . Рассчитайте ширину спектра сигнала как  $\Delta f_c = 1/\Delta t$ .

Для наблюдения графиков спектральной плотности модуля напряжения (верхний) и фаз (нижний) нажмите клавишу «C». Зарисуйте наблюдаемые графики.

Нажатием «E» отобразите и зарисуйте график распределения по спектру относительного значения энергии сигнала  $E(f)/E$ . Определите ширину спектра сигнала  $\Delta f_c = f_B$ . Для этого установите маркер на частоту  $f_B$ , соответствующую уровню после резкого спада спектра, запишите значение  $f_B$  (поз. 8) и округлите его до ближайшего значения, кратного 50 кГц. Сравните полученное значение  $\Delta f_c$  с рассчитанным. Запишите значение  $E(f)/E$  в поз. 4.

Нанесите измеренные параметры сигнала  $U_B(t)$  и его спектра на соответствующие рисунки графиков. Объясните полученные результаты.

### **4.3.3 Анализ преобразования временных и спектральных характеристик сигнала с ограниченным спектром при его дискретизации**

Для вызова анализируемого сигнала  $U_0(t)$  нажмите «F», затем «2». Наберите имя заданного файла  $U_0(t)$  и нажмите «Enter». После вызова требуемого файла сигнала нажмите «5», а затем «P». Нажмите клавишу «T», введите «0» в поз. 4 и нажмите «Enter», а затем «P». Зарисуйте график сигнала. Запишите значение длительности сигнала  $\tau = \tau_5$  в мкс (поз. 11).

Для наблюдения графиков спектральной плотности модуля напряжения (верхний) и фаз (нижний) нажмите клавишу «C». Зарисуйте наблюдаемые графики.

Нажатием «E» отобразите график распределения по спектру относительного значения энергии сигнала  $E(f)/E$ . Определите ширину спектра сигнала  $\Delta f_c = f_B$ . Для этого, удерживая нажатой клавишу «Ctrl», установите маркер клавишами «← →» на частоту  $f_B$ , соответствующую относительному уровню спектра  $S(f) \cong 0,01$  (поз. 9), запишите значение  $f_B$  (поз. 8) и округлите его до ближайшего значения, кратного 50 кГц. Запишите значение  $E(f)/E$  в поз. 4.

Рассчитайте значение необходимого временного интервала выборки мгновенных значений сигнала  $U_0(t)$  для его дискретизации как  $\Delta t = 1/(2 \cdot f_B)$ .

Нанесите измеренные параметры сигнала  $U_0(t)$  и его спектра на соответствующие рисунки графиков. Объясните полученные результаты.

Нажатием клавиши «Р» перейдите на поле сигнала. Снимите отсчёты мгновенных значений сигнала  $U_n(t_n)$  в точках выборок  $t_n = n \cdot \Delta t$ . Для этого клавишами «← →» установите измерительную линию в левую точку начала сигнала и запишите в таблицу 4.2 значение  $t_1$  (поз. 1), затем установите маркер клавишами «↑ ↓» на пересечение с линией сигнала и запишите в таблицу 4.2 значение отсчёта  $U_1$  (поз. 2). Последовательно устанавливая клавишей «→» измерительную линию с интервалом  $\Delta t$  во временные точки выборок  $t_n$  (поз. 1) и устанавливая маркер клавишами «↑ ↓» на пересечение с линией сигнала, снимите отсчёты мгновенных значений сигнала  $U_n$  (поз. 2), записывая  $t_n$  и  $U_n$  в таблицу 4.2.

Таблица 4.2

Значение времени выборки $t_n$ , мкс								...	
Значение сигнала $U_n$ , В								...	

Для удаления изображения исходного сигнала, удерживая нажатой клавишу «Ctrl», нажмите «Е». Установите режим построения дискретного сигнала по его выборкам в виде дельта-импульсов. Для этого нажмите «I» и затем «F3», в поз. 3 должен отобразиться режим «Дельта». Нажмите «Р».

Выполните построение дискретного сигнала по данным таблицы 4.2. Для этого, последовательно устанавливая измерительную линию клавишами «← →» в заданную временную точку выборки  $t_n$  (поз. 1), затем, устанавливая маркер клавишами «↑ ↓» на заданное значение  $U_n$  (поз. 2) и нажимая «Enter», введите требуемые выборки дискретного сигнала из таблицы 4.2. Зарисуйте в масштабе построенный график дискретного сигнала.

Для наблюдения графиков спектра дискретного сигнала нажмите «С». Зарисуйте наблюдаемые графики. Убедитесь, что спектр дискретного сигнала периодический. Измерьте частоту периода повторения спектра  $f_d$ . Для этого, удерживая нажатой клавишу «Ctrl», клавишами «← →» установите измерительную линию в точку первого правого максимума от начала координат и запишите значение  $f_d$  (поз. 8). Нанесите измеренное значение  $f_d$  и  $f_b = f_d/2$  на график спектра.

Сравните параметры дискретного сигнала и его спектра с параметрами исходного непрерывного сигнала. Объясните, чем они отличаются?

#### **4.3.4 Анализ преобразования временных и спектральных характеристик дискретного сигнала при его восстановлении**

Выполните восстановление дискретного сигнала по его спектру, заданному в полосе частот от 0 до  $f_b$  (значение  $f_b$  определено в п. 4.3.3), что соответствует его прохождению через фильтр нижних частот (ФНЧ) с идеальной прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) с граничной частотой, рав-

ной  $f_b$ . Для этого нажмите «S», затем «C», а затем «F2» и введите в поз. 4 значение  $\Delta f_c = f_b$ , нажмите «Enter». На графике спектра белая полоска указывает заданную (отфильтрованную) для восстановления сигнала область спектра. Нажмите «Enter». На графике дискретного сигнала появляется совмещённый с ним восстановленный сигнал. Убедитесь, что его значения совпадают с заданными выборками и во всех точках с исходным непрерывным сигналом (п. 4.3.3). Зарисуйте наблюдаемые сигналы. Объясните полученный результат.

Нажатием клавиши «Tab<sub>→</sub>←» переведите маркер на поле сигнала. Для удаления изображения восстановленного сигнала, удерживая нажатой клавишу «Ctrl», нажмите «E».

Выполните синтез сигнала по спектру заданному в полосе частот от 0 до  $1,5 \cdot f_b$ , что соответствует его прохождению через ФНЧ с граничной частотой, равной  $1,5 \cdot f_b$ . Для этого нажмите «C», а затем «F2» и введите в поз. 4 значение  $\Delta f_c = 1,5 \cdot f_b$ , нажмите «Enter». На графике спектра белая полоска указывает отфильтрованную для восстановления сигнала область спектра. Нажмите «Enter». На графике дискретного сигнала появляется совмещённый с ним восстановленный сигнал. Убедитесь, что его значения не совпадают с заданными выборками и исходным непрерывным сигналом (п. 4.3.3). Зарисуйте наблюдаемые сигналы. Объясните полученный результат.

#### **4.3.5 Анализ преобразования временных и спектральных характеристик сигнала с неограниченным спектром при его дискретизации и восстановлении**

Для вызова анализируемого сигнала  $U_H(t)$  нажмите «F», затем «2». Наберите имя заданного файла  $U_H(t)$  и нажмите «Enter». После вызова требуемого файла сигнала нажмите «5», а затем «P». Нажмите клавишу «T», введите «0» в поз. 4 и нажмите «Enter», а затем «P». Зарисуйте график сигнала. Запишите значение длительности сигнала  $T_{au} = t_s$  в мкс (поз. 11).

Для наблюдения графиков спектральной плотности модуля напряжения (верхний) и фаз (нижний) нажмите клавишу «C». Зарисуйте наблюдаемые графики.

Нажатием «E» отобразите график распределения по спектру относительного значения энергии сигнала  $E(f)/E$ . Определите ширину спектра сигнала  $\Delta f_c = f_b$ . Для этого, удерживая нажатой клавишу «Ctrl», установите маркер клавишами «← →» на частоту  $f_b$ , соответствующую первому обращению в нуль относительного уровня спектра  $S(f)$  (поз. 9), запишите значение  $f_b$  (поз.8). Запишите значение  $E(f)/E$  в поз. 4.

Выполните синтез сигнала по спектру, заданному в полосе частот от 0 до  $f_b$ . Для этого нажмите «S», затем «C», а затем «F2» и введите в поз. 4 значение  $\Delta f_c = f_b$ , нажмите «Enter». На графике белая полоска указывает отфильтрованную для синтеза ширину спектра сигнала. Нажмите «Enter». На графике исходного сигнала появляется совмещённый с ним сигнал с ограниченным спектром. Зарисуйте наблюдаемые сигналы. Объясните, почему сигналы не совпадают?

Рассчитайте значение необходимого временного интервала выборки  $\Delta t = 1/(2 \cdot f_B)$  мгновенных значений сигнала  $U_n(t)$  с ограниченным спектром для его дискретизации.

Нажатием клавиши «Tab → ←» переведите маркер на поле сигнала. Снимите отсчёты мгновенных значений синтезированного сигнала  $U_n(t_n)$  в точках выборок  $t_n = n \cdot \Delta t$ . Для этого клавишами «← →» установите измерительную линию в левую точку начала исходного сигнала и запишите в таблицу 4.2 значение  $t_1$  (поз. 1), затем установите маркер клавишами «↑ ↓» на пересечение с линией сигнала и запишите в таблицу 4.2 значение отсчёта  $U_1$  (поз. 2). Последовательно устанавливая клавишей «← →» измерительную линию с интервалом  $\Delta t$  во временные точки выборок  $t_n$  (поз. 1) и, устанавливая маркер клавишами «↑ ↓» на пересечение с линией сигнала, снимите отсчёты мгновенных значений сигнала  $U_n$  (поз. 2), записывая  $t_n$  и  $U_n$  в таблицу 4.2.

Установите режим построения дискретного сигнала по его выборкам в виде дельта-импульсов. Для этого нажмите «I» и затем «F3», в поз. 3 должен отобразиться режим «Дельта». Нажмите «P». Для удаления изображения исходного сигнала, удерживая нажатой клавишу «Ctrl», нажмите «E».

Выполните построение дискретного сигнала по данным таблицы 4.2. Для этого, последовательно устанавливая измерительную линию клавишами «← →» в заданную временную точку выборки  $t_n$  (поз. 1), затем устанавливая маркер клавишами «↑ ↓» на заданное значение  $U_n$  (поз. 2) и нажимая «Enter», введите требуемые выборки дискретного сигнала из таблицы 4.2. Зарисуйте в масштабе построенный график дискретного сигнала.

Для наблюдения графиков спектра дискретного сигнала нажмите «C». Зарисуйте наблюдаемые графики. Убедитесь, что спектр дискретного сигнала периодический. Измерьте частоту периода повторения спектра  $f_d$ . Для этого, удерживая нажатой клавишу «Ctrl», клавишами «← →» установите измерительную линию в точку первого правого максимума от начала координат и запишите значение  $f_d$  (поз. 8). Нанесите измеренное значение  $f_d$  и  $f_B = f_d/2$  на график спектра.

Сравните параметры дискретного сигнала и его спектра с параметрами исходного непрерывного сигнала. Объясните, чем они отличаются?

Выполните восстановление дискретного сигнала по его спектру, заданному в полосе частот от 0 до  $f_B$  (значение  $f_B$  определено в п. 4.3.5), что соответствует его прохождению через ФНЧ с идеальной прямоугольной АЧХ с граничной частотой, равной  $f_B$ . Для этого нажмите «S», затем «C», а затем «F2» и введите в поз. 4 значение  $\Delta f_c = f_B$ , нажмите «Enter». На графике спектра белая полоска указывает отфильтрованную для восстановления сигнала область спектра. Нажмите «Enter». На графике дискретного сигнала появляется совмещённый с ним восстановленный сигнал. Убедитесь, что его значения совпадают с за-

данными выборками и во всех точках с исходным непрерывным сигналом (п. 4.3.5). Зарисуйте наблюдаемые сигналы. Объясните полученный результат.

#### **4.4 Контрольные вопросы**

4.4.1 Объяснить принцип дискретизации сигналов и чем обусловлена погрешность датирования отсчётов?

4.4.2 Дать формулировку и объяснить физический смысл теоремы Котельникова.

4.4.3 Что общее и в чём отличие ряда Котельникова и Фурье?

4.4.4 Как связаны временные и спектральные свойства базисной (отсчётной) функции с дискретизируемым сигналом?

4.4.5 Объяснить преобразование спектров непрерывных сигналов при их дискретизации?

4.4.6 В чём особенность дискретизации сигналов конечной длительности?

4.4.7 Как осуществляется восстановление исходных сигналов и за счёт чего возникают погрешности?

4.4.8 Объяснить дискретизацию узкополосных модулированных сигналов.

4.4.9 Как осуществляется дискретизация спектров сигналов конечной длительности?

4.4.10 Объяснить преобразование дискретного сигнала в амплитудно-модулированный непрерывным сигналом?

#### **Литература**

1 Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Сов. радио, 1986. С. 59–62.

2 Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 1988. С. 116–120.

3 Радиотехнические цепи и сигналы / Под редакцией К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. С. 66–73.

Св. план 2005, поз. 106

Учебное издание

**Синица Виктор Николаевич**

**ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ  
И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА ИХ ОБРАБОТКИ**

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

для студентов специальности I-54 01 01  
«Метрологическое обеспечение информационных систем и сетей»

В 3-х частях

Часть 1

**АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ**

Редактор Н.В. Гриневич

Корректор Е.Н. Батурчик  
Компьютерная вёрстка В.М. Задоля

---

Подписано в печать  
Гарнитура «Таймс».  
Уч.-изд. л. 4,0.

Формат 60x84 1/16.  
Печать ризографическая.  
Тираж 100 экз.

Бумага офсетная.  
Усл. печ. л.  
Заказ 391.

---

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»  
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.  
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности № 02330/0131518 от 30.04.2004.  
220013, Минск, П.Бровки,6

Библиотека БГУИР