АБЕЛЕВ ИНТЕГРАЛ. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. УЛЬТРАЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. ПСЕВДОЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. УНИКУРСАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
г. Минск, Республика Беларусь

Жишкевич С.А., Козак А. В., Севрук В. Г., Подольский К.И.

Теслюк В.Н. - доцент, кандидат физико-математических наук

Современная теория эллиптических функций создавалась в результате совместной работы выдающихся математиков XIX в. Систематическое исследование эллиптических интегралов было начало Лежандром еще в конце XVIII в. Работы Лежандра послужили отправным пунктом исследований Абеля и Якоби. Их идея рассматривать вместо эллиптического интеграла обратную функцию привела к открытию эллиптических функций и их двоякой переодичности. Абель рассматривает область эллиптических интегралов и задачу их обращения как частный случай аналогичной задачи для алгебраической функции. Говоря о первых исследованиях нельзя умолчать о Гауссе. Гаусс был первым математиком, рассматривавшим эллиптические функции. Так же громадная роль в этом деле выпала Вейерштрассу.

Рассмотрим интеграл алгебраического выражения, $\int \mathrm{R(x,y)\,dx}$, где R - знак рациональной функции по отношению к своим аргументам и y является иррациональной функцией от x, определяемой уравнением какой-либо кривой $\mathrm{F(x,y)} = 0$. Такой интеграл носит название абелева интеграла, связанного с кривой $\mathrm{F(x,y)} = 0$.

Выражая y, как функцию от x, из уравнения $\mathrm{F(x,y)} = 0$ имеем $\mathrm{y} = \sqrt[n]{\mathrm{P(x)}}$, где $\mathrm{P(x)}$ представляет целую рациональную функцию от x.

При n=2 и степени функции $\mathrm{P(x)}$, не выше второй, имеем простейшие интегралы рассматриваемого вида. Эти интегралы приводятся к интегралам рационального вида и, следовательно, теоретически всегда вычисляются в конечном виде. Если же степень функции $\mathrm{P(x)}$ выше второй или показатель n>2, то соответствующие интегралы вообще не могут быть выражены какой-либо конечной комбинацией элементарных, алгебраических и логарифмических функций. Если некоторые их этих интегралов вычисляются в конечном виде, то лишь в редких, по существу исключительных случаях.

Наиболее простыми из абелевых интегралов и вместе с тем наиболее исследованными являются эллиптические интегралы. К исследованию их привела в своё время задача вычисления длин дуги эллипса, и потому за ними сохранилось название эллиптических.

В общем виде эллиптический интеграл можно представить в таком виде: $\int F\left\{x, \sqrt{P(x)}\right\} dx$, где F - знак рациональной функции по отношению к своим аргументам, а $P(x)$ является многочленом 3-й или 4-й степени. Оба последних случая легко приводятся один к другому, так что, если под знаком корня имеется многочлен 3-й степени $P(x) = A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$, то это случай мы можем привести к такому, чтобы под корнем был бы уже многочлен 4-й степени. С этой целью используется подстановка $x = a + \frac{1}{z}$, где a не является корнем многочлена $\mathrm{P(x)}$. Многочлен $\mathrm{P(x)}$ тогда преобразуется к виду $\frac{1}{z^4}\ \{(A_0a^3 + A_1a^2 + A_2a + A_3)z^4 + (3A_0a^2 + 2A_1 + A_2)z^3 + (3A_0a + A_1)z^2 + A_0z\}$, и интеграл $\int F\left\{x, \sqrt{P(x)}\right\} dx$ приводится к виду $\int F\{z, \sqrt{P_1(z)}\}\, dz$, где $P_1(z)$ является многочленом 4-й степени. Поэтому вполне достаточно при исследовании эллиптического интеграла ограничиться лишь случаем подкоренного выражения 4-й степени.

Если уравнение кривой $F(x,y) = 0$, связанной с абелевым интегралом $\int \mathrm{R(x,y)}\, \mathrm{d}y$, y определяется в виде $\sqrt[n]{P(x)}$ и показатель корня n>2 или подкоренное выражение P(x) представляет целый алгебраический многочлен выше 4-й степени, то такие интегралы носят название "ультраэллиптических". Ультраэллиптические интегралы, так же, как и эллиптические, вообще не выражаются какой-либо конечной комбинацией элементарных символов. Преобразованием, аналогичным преобразованию эллиптических интегралов, они могут быть приведены путем выделения в процессе преобразования алгебраической и логарифмической части к нескольким определённого вида интегралам, которые уже не вычисляются в конечном виде. Эти интегралы являются трансцендентными функциями и могут быть выражены лишь бесконечными рядами.

В некоторых частных случаях интегралы, формально соответствующие определению эллиптических или ультраэллиптических, выражаются конечной комбинацией элементарных функций. Такие интегралы носят общее название псевдоэллиптических. Обычным приёмом при их вычислении служит какая-либо подстановка, приводящее интегрируемое выражение или к рациональной форме, или также к иррациональной, но допускающей интегрирование в конечном виде.

Плоская алгебраическая кривая, заданная уравнением $F(x,y) = 0$, называется уникурсальной, если текущие координаты её x и y могут быть выражены как рациональные функции некоторого переменного параметра t. Это свойство уникурсальной кривой имеет важное значение для теории интегрирования иррациональных алгебраических функций, так как абелев интеграл $\int \mathrm{R(x,y)\,dx}$, связанный с уникурсальной кривой $F(x,y) = 0$ подстановками $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$, в силу этого свойства приводится к рациональной форме $\int R\{f_1(t), f_2(t)\} f_1'(t)\, dt$, т.е вычисляется в конечном виде.

Основную теорему об уникурсальных кривых можно формулировать так: "если плоская алгебраическая кривая имеет максимальное число двойных точек, допускаемое её порядком, то она уникурсальна".

Справедлива и обратная теорема: "если кривая - уникурсальна, то она имеет максимальное число двойных точек , допускаемое её порядком".

При этом число двойных точек включается все особые точки, изолированные, точки высшей кратности, пересчитанные на двойные, и точки, недоступные обозрению по внешнему виду кривой, мнимые и двойные точки в бесконечно удаленных круговых точках.

Если кривая имеет r двойных точек, а максимальное число двойных точек, допускаемое её порядком, равно δ, то разность (δ-r), т.е недостающее до максимума число её двойных точке, называется дефектом кривой. Уникурсальная кривая тогда может быть определена как кривая, дефект которой равен нулю.

В заключение хотелось бы отметить, что применение эллиптических интегралов находит все большее применение на практике. Первоначальные приложения эллиптических функций к задаче колебаний маятника распространялись затем на задачи динамики твердого тела, закреплённого в неподвижной точке, нашли себе место в теории гироскопа и других задачах механики. С развитием теории упругости эллиптические функции нашли себе применение в её задачам. Максвелл использовал эллиптические интегралы в своих работах по электричеству и магнетизму. Изучение электрических плоских полей, встречающихся в ряде задач электротехники, например в расчете электромашин, вопросы плоского движения жидкости, ряд задач аэродинамики при их решении нуждаются теперь в теории эллиптических функций. Таким образом, видно, что в настоящее время теория эллиптических функций крепко внедрилась в практику, и поле её приложения все расширяется.

Список использованных источников:

1. Тимофеев А. Ф. Интегрирование функций/ А. Ф. Тимофеев. - СССР, 1948 г., - 179 с.
2. А. М. Журавский Справочник по эллиптическим функциям/ А. М. Журавский. - СССР, 1941 г.

МНОГОСЛОЙНЫЙ ПЕРСЕПТРОН В ПРОГРАММИРОВАНИИ ИГР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

г. Минск, Республика Беларусь

Шарай В.В.

Мардвилко Т.С. – к-т физико-математических наук

В работе исследуется проблема предсказания с использованием многослойных нейронных сетей. Написана программа, визуализирующая процесс обучения сети.

Сегодня компьютеры не только заняли огромную нишу в проведении досуга, но и мы являемся незаменимыми помощниками во многих областях человеческой деятельности. Исследователи все чаще и чаще обращают свой взор в сторону «умных машин» при работе с большими объемами данных, в сферах опасных для жизни человека и др. Неудивительно стремление ученых научить компьютеры принимать решения, “мыслить” и обучаться. Уже сейчас разработано немало алгоритмов позволяющих в той или иной степени решать различные задачи прогнозирования, классификации, кластеризации, распознавания образов и др. В нашей работе исследуется проблема предсказания на основе компьютерной игры. Для исследования проблемы нами написана игра «Ping-pong». В этой игре 1 игрок играет против компьютера. Задача состояла в том, чтобы научить компьютер на основе получаемого опыта предугадывать точку соударения шара с зоной его ворот. Таким образом, при решении данной задачи компьютер во время игры обучается у игрока и чем дольше он играет, тем лучше он начинает играть. Данную задачу мы решаем с использованием нейронных сетей, а именно многослойного персептрона. Многослойный персептрон представляют из себя сеть, состоящую из входного слоя, нескольких скрытых слоев и выходного слоя. Все нейроны связаны между собой синоптическими связями, каждая из которых имеет вес – силу связи. На рисунке 1 изображен многослойный персептрон с одним скрытым слоем и описаны те обозначения, которые мы используем для входных сигналов и весов.