

А.Е. ЛЕЩЁВ

К СЛАБЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники**220013, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Петруся Бровки, 6**Тел.: +375 17 293-22-85, +375 29 310-56-27*

Данная статья ставит своей целью вывод слабых необходимых условий оптимальности второго порядка при менее жестких требованиях по сравнению с известными ранее в литературе. Для доказательства необходимых условий оптимальности применяется метод штрафных функций.

Ключевые слова: нелинейное программирование, условия оптимальности второго порядка, условия регулярности.

Введение

Пусть f и h_i , $i=1,2,\dots,p$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R . Введем непустое множество допустимых точек

$$C = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0 \quad i \in I, \quad h_i(y) = 0 \quad i \in I_0\}, \text{ где } y \in R^m, I = \{1, \dots, s\}, I_0 = \{s+1, \dots, p\},$$

и рассмотрим задачу (NLP) нелинейного программирования $f(y) \rightarrow \min, y \in C$. Для задачи (NLP) введем функцию Лагранжа

$$L(y, \lambda) = f(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle, \text{ где } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p), h = (h_1, \dots, h_p)$$

и множество множителей Лагранжа в точке y

$$\Lambda(y) = \{ \lambda \in R^p \mid \nabla_y L(y, \lambda) = 0, \lambda_i \geq 0 \text{ и } \lambda_i h_i(y) = 0, \quad i \in I \}.$$

Обозначим через $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$ множество индексов активных в точке $y \in C$ ограничений типа неравенства.

Необходимые условия оптимальности играют ключевую роль в задачах математического программирования [1-7]. Они делятся на условия оптимальности первого порядка и условия оптимальности высших порядков, из которых на практике обычно применяются условия оптимальности второго порядка, использующие производные второго порядка для функций f и h_i , $i=1,2,\dots,p$. В качестве необходимых условий оптимальности первого порядка в математическом программировании широко используются классические необходимые условия Куна-Таккера, требующие существования множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda(y)$ в оптимальной точке $y \in C$ (при этом допустимые точки y , в которых выполняются условия Куна-Таккера, называются стационарными). Большинство используемых в математическом программировании численных алгоритмов сводится к нахождению стационарных точек. В связи с тем, что

многие задачи, особенно задачи высокой размерности, имеют достаточно большое число стационарных точек, возникает проблема привлечения необходимых условий второго порядка для удаления неоптимальных стационарных точек.

Наряду с необходимыми условиями оптимальности важную роль в теории оптимизации играют условия регулярности, гарантирующие справедливость необходимых условий оптимальности в исследуемой точке $y \in C$.

Одним из наиболее известных условий регулярности является условие Мангасаряна-Фромова, требующее, чтобы в точке $y \in C$ система векторов $\nabla h_i(y)$, $i \in I_0$ была линейно независимой и существовал вектор \bar{y}^0 такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle = 0$, $i \in I_0$, $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle < 0$, $i \in I(y)$.

Данное условие равносильно требованию

$$\Lambda_0(y) = \{ \lambda \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \lambda_i \geq 0, i \in I(y), \lambda_i = 0, i \in I \setminus I(y) \} = \{0\}.$$

Введем конусы критических направлений

$$D_C(y) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^m \mid \langle \nabla f(y), \bar{y} \rangle \leq 0, \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \leq 0, i \in I(y), \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \},$$

$$S_C(y) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup I(y) \}$$

в точке $y \in C$.

Для задачи (NLP) принято выделять три основных типа необходимых условий оптимальности второго порядка.

Определение 1 ([8]). Пусть $y^0 \in C$ и $\Lambda(y^0) \neq \emptyset$.

1) Будем говорить, что в точке y^0 выполняется классическое необходимое условие оптимальности второго порядка (refined second-order necessary optimality condition) RSONC, если для любого вектора $\bar{y} \in D_C(y^0)$ найдется вектор $\lambda \in \Lambda(y^0)$ такой, что $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$.

2) Будем говорить, что в точке y^0 выполняется слабое необходимое условие оптимальности второго порядка (weak second-order necessary optimality condition) WSONC, если существует множитель $\lambda \in \Lambda(y^0)$, при котором неравенство $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$ выполняется для всех $\bar{y} \in S_C(y^0)$.

3) Будем говорить, что в точке y^0 выполняется сильное необходимое условие оптимальности второго порядка (strong second-order necessary optimality condition) SSONC, если при любом векторе $\lambda \in \Lambda(y^0)$ неравенство $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$ выполняется для всех $\bar{y} \in D_C(y^0)$.

Условия RSONC изучались в [1-5] и многих других работах. Определения сильных необходимых условий восходят к работам [6,7,9-11]. В дальнейшем данные необходимые

условия изучались в [12,13]. Слабые необходимые условия второго порядка изучались с теоретической и практической точек зрения в работах [8,11, 14-16].

Известно, что хотя необходимые условия RSONC и SSONC более эффективны для проверки стационарных точек на оптимальность, большинство практических алгоритмов, использующих необходимые условия оптимальности второго порядка, имеют дело со слабыми условиями оптимальности WSONC [16-18]. В частности, это относится к методам штрафных функций и методам с использованием расширенных функций Лагранжа [17-18]. Таким образом, слабые необходимые условия оптимальности второго порядка обладают значительной ценностью.

В то же время известно [16], что справедливость слабых необходимых условий оптимальности второго порядка не гарантируется традиционными условиями регулярности Мангасаряна-Фромова без дополнительных предположений. В работе [16] предложено дополнительное условие, наличие которого вместе с условием регулярности Мангасаряна-Фромова обеспечивает справедливость слабых необходимых условий оптимальности второго порядка в стационарных точках.

Следуя [16], будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполняется слабое условие постоянного ранга (WCR), если $rank\{\nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I(y^0)\} = const$ в некоторой окрестности точки y^0 .

Целью данной статьи является получение слабых необходимых условий оптимальности второго порядка, имеющих более широкое применение по сравнению с условиями [8,16].

Слабые условия оптимальности второго порядка

Следующая теорема дает слабые необходимые условия оптимальности второго порядка в задаче (NLP).

Теорема 1. Пусть точка $y^0 \in C$ является локальным решением задачи (NLP). Тогда существуют числа $\lambda_i, i = 0, 1, \dots, p$, такие, что выполнено условие

$$\lambda_0 \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \quad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_p^2 = 1,$$

где $\lambda_0 \geq 0, \lambda_i \geq 0, i \in I(y^0), \lambda_i = 0, i \in I \setminus I(y^0)$.

Если дополнительно в точке $y^0 \in C$ выполняется условие WCR, то

$$\langle \bar{y}, [\lambda_0 \nabla^2 f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla^2 h_i(y^0)] \bar{y} \rangle \geq 0 \text{ для всех } \bar{y} \in S_C(y^0).$$

Доказательство. Обозначим $h_i^+(y) = \max\{0, h_i(y)\}$ и для каждого целого положительного k введем вспомогательную задачу минимизации функции

$$G_k(y) = f(y) + \frac{k}{3} \sum_{i \in I(y^0)} (h_i^+(y))^3 + \frac{k}{2} \sum_{i \in I_0} (h_i^-(y))^2 + \frac{1}{4} |y - y^0|^4$$

на множестве $S = \{y \mid |y - y^0| \leq \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ такое, что $f(y^0) \leq f(y)$ и $h_i(y) < 0, i \in I \setminus I(y^0)$ для всех точек $y \in S \cap C$.

Пусть y^k – решение данной вспомогательной задачи. Очевидно, $G_k(y^k) \leq G_k(y^0)$ для любого k , то есть

$$f(y^k) + \frac{k}{3} \sum_{i \in I(y^0)} (h_i^+(y^k))^3 + \frac{k}{2} \sum_{i \in I_0} (h_i(y^k))^2 + \frac{1}{4} |y^k - y^0|^4 \leq f(y^0).$$

Поскольку последовательность $\{y^k\}$ ограничена и принадлежит замкнутому множеству S , то, не убавив общности, можно считать, что $y^k \rightarrow y^* \in S$. Поскольку $f(y^k)$ ограничена на S , то $h_i^+(y^k) \rightarrow 0$ при $i \in I(y^0)$ и $h_i(y^k) \rightarrow 0$ при $i \in I_0$. Следовательно, $y^* \in C$, и тогда $f(y^0) \leq f(y^*)$.

$$\text{С другой стороны, } f(y^k) + \frac{1}{4} |y^k - y^0|^4 \leq f(y^0) \text{ и, значит, } f(y^*) + \frac{1}{4} |y^* - y^0|^4 \leq f(y^0).$$

Отсюда следует $y^* = y^0$. Таким образом, $y^k \rightarrow y^0$, оставаясь при достаточно больших k внутренней точкой множества S . Тогда для больших k можно записать необходимые условия оптимальности для функции $G_k(y)$ в точке y^k :

$$\nabla G_k(y^k) = 0 \text{ и } \langle \bar{y}, \nabla^2 G_k(y^k) \bar{y} \rangle \geq 0 \text{ для всех } \bar{y} \in R^m.$$

Данные условия можно переписать в развернутом виде:

$$\nabla f(y^k) + \sum_{i \in I(y^0)} \xi_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{i \in I_0} \xi_i^k \nabla h_i(y^k) + |y^k - y^0|^2 (y^k - y^0) = 0, \quad (1)$$

где $\xi_i^k = k(h_i^+(y^k))^2$, $i \in I(y^0)$, $\xi_i^k = k(h_i(y^k))$, $i \in I_0$, и

$$\begin{aligned} & \langle \bar{y}, \nabla^2 f(y^k) \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} \xi_i^k \nabla^2 h_i(y^k) \bar{y} \rangle + \\ & + k \langle \bar{y}, \sum_{i \in I(y^0)} 2h_i^+(y^k) \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} + \sum_{i \in I_0} \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} \rangle + \\ & + 3|y^k - y^0|^2 \langle \bar{y}, E \bar{y} \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Положим

$$\delta_k = (1 + \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} (\xi_i^k)^2)^{1/2}, \quad \lambda_0^k = 1/\delta_k, \quad \lambda_i^k = \xi_i^k / \delta_k, \quad i \in I_0 \cup I(y^0), \quad \lambda_i^k = 0, \quad i \in I \setminus I(y^0).$$

Разделив (1) на δ_k , получим

$$\lambda_0^k \nabla f(y^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) + \frac{1}{\delta_k} |y^k - y^0|^2 (y^k - y^0) = 0, \quad (3)$$

откуда, поскольку $(\lambda_0^k)^2 + \sum_{i=1}^p (\lambda_i^k)^2 = 1$ и, следовательно, последовательность $\{\lambda_0^k, \lambda_1^k, \dots, \lambda_p^k\}$ ограничена, можно, не ограничив общности, считать ее сходящейся: $\lambda_0^k \rightarrow \lambda_0, \lambda_i^k \rightarrow \lambda_i$. Тогда из (3) следует

$$\lambda_0 \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \quad (\lambda_0)^2 + \sum_{i=1}^p (\lambda_i)^2 = 1, \quad (4)$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i \in I(y^0), \quad \lambda_i = 0, \quad i \in I \setminus I(y^0).$$

Разделив (2) на δ_k , получим

$$\begin{aligned}
& \langle \bar{y}, [\lambda_0^k \nabla^2 f(y^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla^2 h_i(y^k)] \bar{y} \rangle + \\
& + \frac{k}{\delta_k} \langle \bar{y}, \sum_{i \in I(y^0)} 2h_i^+(y^k) \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} + \sum_{i \in I_0} \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} \rangle + \\
& + \frac{3}{\delta_k} |y^k - y^0|^2 \langle \bar{y}, E \bar{y} \rangle \geq 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

для всех $\bar{y} \in R^m$.

Оценим третье слагаемое в (5):

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{k}{\delta_k} \langle \bar{y}, \sum_{i \in I(y^0)} 2h_i^+(y^k) \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} + \sum_{i \in I_0} \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} \rangle \right| \leq \\
& \leq \frac{k}{\delta_k} \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} M(y^k) |\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y} \rangle|,
\end{aligned}$$

где $M(y^k)$ - ограниченная величина.

Для любого $\bar{y} \in S_C(y^k)$ из (5) следует

$$\langle \bar{y}, [\lambda_0^k \nabla^2 f(y^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla^2 h_i(y^k)] \bar{y} \rangle + \frac{3}{\delta_k} |y^k - y^0|^2 \langle \bar{y}, E \bar{y} \rangle \geq 0. \tag{6}$$

В силу условия WCR в точке y^0 справедливо равенство

$$\text{rank}\{\nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I(y^0)\} = \text{rank}\{\nabla h_i(y^0), i \in I_0 \cup I(y^0)\} = l$$

для всех y достаточно близких к точке y^0 .

Не ограничивая общности, будем считать, что в системе

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I(y^0) \tag{7}$$

ранг достигается для первых l уравнений и первых l переменных $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l$. Тогда система (7) равносильна системе

$$B(y^0) \bar{y}^1 + D(y^0) \bar{y}^2 = 0 \quad \text{или} \quad \bar{y}^1 = -B^{-1}(y^0) D(y^0) \bar{y}^2,$$

где $\bar{y}^1 = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l)^T$, $\bar{y}^2 = (\bar{y}_{l+1}, \dots, \bar{y}_m)^T$,

$$B(y) = \left[\frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} \quad i, j = 1, \dots, l \right], \quad D(y) = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} \quad i = 1, \dots, l \\ j = l+1, \dots, m \end{array} \right].$$

Тогда для любого вектора $\bar{y} = (\bar{y}^1, \bar{y}^2)^T \in S_C(y^0)$ можно построить вектор $\bar{y}^k = (\bar{y}^{1k}, \bar{y}^{2k})^T \in S_C(y^k)$, такой, что $\bar{y}^{1k} = -B^{-1}(y^k) D(y^k) \bar{y}^2$, $\bar{y}^{2k} = \bar{y}^2$.

Тогда $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$ и, следовательно, подставив в (6) $\bar{y} = \bar{y}^k$ и переходя к пределу, получим

$$\langle \bar{y}, [\lambda_0 \nabla^2 f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla^2 h_i(y^0)] \bar{y} \rangle \geq 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{y} \in S_C(y^0).$$

Следствие 1. Если точка $y^0 \in C$ является локальным решением задачи (NLP) и в ней выполнены условие регулярности Мангасаряна-Фромовица и условие WCR , то в этой точке необходимо выполняется условие $WSONC$.

В работе [19] при выполнении условия критической регулярности получены доказаны сильные необходимые условия оптимальности второго порядка SSONC.

Положим $I_D(y^0) = \{i \in I(y^0) \mid \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle = 0 \quad \forall \bar{y} \in D_C(y^0)\}$.

Определение 2. Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено условие критической регулярности (коротко CRC), если $\text{rank} \{\nabla h_i(y) \mid i \in I_0 \cup I_D(y^0)\} = \text{const}$ для всех y из некоторой окрестности точки y^0 .

Теорема 2 ([19]). Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи (NLP), выполнено условие критической регулярности и $\Lambda(y^0) \neq \emptyset$. Тогда в данной точке выполняется условие SSONC.

Используем данную теорему для вывода слабых необходимых условий WSONC.

Теорема 3. Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи NLP, множество множителей Лагранжа $\Lambda(y^0) \neq \emptyset$ и выполнено условие WCR. Тогда для любого вектора $\lambda \in \Lambda(y^0)$ справедливо условие WSONC.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы и множество множителей Лагранжа не пусто в точке $y^0 \in C$. Возьмем любой вектор $\lambda \in \Lambda(y^0)$. Рассмотрим множество $E = \{y \in R^m \mid h_i(y) = 0 \quad i \in I(y^0) \cup I_0, \quad h_i(y) \leq 0 \quad i \in I \setminus I(y^0)\}$.

Очевидно, $E \subset C$ и $y^0 \in E$. Следовательно, в точке y^0 достигается минимум целевой функции задачи NLP на множестве E . Кроме того, в задаче NLP(E) минимизации целевой функции $f(y)$ на множестве E множество множителей Лагранжа в точке y^0

$$\Lambda_E(y^0) = \{\lambda \in R^p \mid \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \quad \lambda_i = 0 \quad i \in I \setminus I(y^0)\}$$

непусто, поскольку $\Lambda(y^0) \subset \Lambda_E(y^0)$. При этом активные ограничения в точке y^0 для множества E исчерпываются ограничениями-равенствами $h_i(y) = 0 \quad i \in I(y^0) \cup I_0$ и, следовательно, из условия WCR для множества C в точке y^0 следует условие CRC для задачи NLP(E) в данной точке.

Таким образом, в силу теоремы 2 для задачи NLP(E) в точке y^0 выполняется условие SSONC. То есть, для любого $\lambda \in \Lambda_E(y^0)$ выполняется неравенство

$\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$ для всех векторов $\bar{y} \in D_E(y^0)$, где

$$D_E(y^0) = \widehat{D}_E(y^0) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^m \mid \langle \nabla f(y), \bar{y} \rangle = 0, \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0 \ i \in I_0 \cup I(y) \}.$$

Но для любого вектора

$$\bar{y} \in S_C(y) = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0 \ i \in I_0 \cup I(y) \}$$

с учетом условия

$$\nabla f(y^0) + \sum_{i \in I_0 \cup I(y)} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0$$

справедливо равенство $\langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0$. Следовательно, $S_C(y) \subset D_E(y^0)$. Таким образом, получаем, что для любого $\lambda \in \Lambda(y^0) \subset \Lambda_E(y^0)$ выполнено неравенство $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$ для всех $\bar{y} \in S_C(y)$.

Доказанная теорема обобщает необходимые условия WSONC [8,16]. Поскольку в отличие от [16] не требует выполнения условия регулярности Мангасаряна-Фромовица и в отличие от [8] дает необходимое условие, выполняющееся при любом $\lambda \in \Lambda(y^0)$.

Теорема 4. Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи (NLP), множество множителей Лагранжа $\Lambda(y^0)$ не пусто и выполнено условие критической регулярности CRC. Тогда для любого вектора $\lambda \in \Lambda(y^0)$ справедливо условие WSONC.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда в силу теоремы 2 в точке y^0 для задачи (NLP) выполняется условие SSONC. Покажем, что $S_C(y^0) \subset D_C(y^0)$.

Пусть $\bar{y} \in S_C(y^0)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0$ для всех $i \in I_0 \cup I(y^0)$. Возьмем любой вектор $\lambda \in \Lambda(y^0)$. В силу определения множителей Лагранжа

$$\langle \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = \langle \nabla f(y^0) + \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0,$$

откуда $\langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0$. Таким образом, $\bar{y} \in D_C(y^0)$ и, следовательно,

$$S_C(y^0) \subset D_C(y^0).$$

Таким образом, в точке y^0 действительно выполнено условие WSONC, причем для любого вектора $\lambda \in \Lambda(y^0)$.

Следующие примеры показывают эффективность необходимых условий теоремы 4 по сравнению с известными результатами.

Пример 1. Пусть $C = \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid -y_1^2 - y_2 \leq 0, -y_2 \leq 0, y_1 - y_3 \leq 0 \}$,

$f(y) = -y_1 + y_3 - y_3^2$. Рассмотрим точку $y^0 = (0, 0, 0)$.

Положим $h_1(y) = -y_1^2 - y_2$, $h_2(y) = -y_2$, $h_3(y) = y_1 - y_3$.

Очевидно $I_D(y^0) = \{3\}$ и $rank\{\nabla h_i(y) \mid i \in I_0 \cup I_D(y^0)\} = rank\{\nabla h_3(y)\} = const$,

то есть условие CRC выполнено. Далее, $S_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^3 \mid \bar{y}_1 = \bar{y}_3, \bar{y}_2 = 0\}$.

Найдем множество множителей Лагранжа:

$$L(y, \lambda) = f(y) + \lambda_1 h_1(y) + \lambda_2 h_2(y) + \lambda_3 h_3(y) =$$

$$= (-y_1 + y_3 - y_3^2) + \lambda_1(-y_1^2 - y_2 - \lambda_2 y_2 + \lambda_3(y_1 - y_3)),$$

$$\nabla_y L(y, \lambda) = \begin{pmatrix} -1 + \lambda_3 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 \\ 1 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0,$$

откуда $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Далее, в силу необходимых условий теоремы 4 должно выполняться неравенство

$$\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda_0, \lambda) \bar{y} \rangle = -2\bar{y}_3^2 \geq 0$$

для всех $\bar{y}_3 \in R$, что очевидно не выполнимо. Следовательно, исследуемая точка не является оптимальной. Отметим, что для точки y^0 в данном примере условие Мангасаряна-Фромова выполняется, однако не выполнено условие WCR. Таким образом, в данном примере не применимы необходимые условия [8,16].

Следует также отметить, что отличные от WCR условия, обеспечивающие совместно с MFCQ справедливость условия WSONC, были предложены в работе Вассари и Трад [11]. Условие Вассари и Трад имеет место в точке y^0 , если в этой точке выполнено условие MFCQ и число линейно независимых векторов градиентов активных ограничений в этой точке не менее $|I_0| + |I(y^0)| - 1$, где $|I|$ - число элементов конечного множества I . В [15] показано, что данное условие независимо от WCR. То есть выполнение условия Вассари и Трад не гарантирует справедливость WCR и обратно MFCQ и WCR не обеспечивают выполнение условия Вассари и Трад.

Пример 2. Пусть

$$C = \{y \in R^4 \mid -y_1^2 - y_3 \leq 0, -y_1 + y_2 \leq 0, y_3 - y_4 \leq 0, y_1^2 + y_2^2 - y_3 - y_4 \leq 0, -y_4 \leq 0\},$$

$f(y) = y_3$. Рассмотрим точку $y^0 = (0, 0, 0, 0)$.

Положим

$$h_1(y) = -y_1^2 - y_3, h_2(y) = -y_1 + y_2, h_3(y) = y_3 - y_4, h_4(y) = y_1^2 + y_2^2 - y_3 - y_4, h_5(y) = -y_4.$$

Поскольку

$$\Lambda_0(y^0) = \{\lambda \in R^4 \mid -\lambda_2 = 0, -\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, -\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 = 0, \lambda_i \geq 0 \ i = 1, 2, 3, 4, 5\} = \{0\},$$

условие MFCQ в точке y^0 выполнено. Найдем множество множителей Лагранжа:

$$\Lambda(y^0) = \{\lambda \in R^5 \mid \lambda_2 = 0, -\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 + 1 = 0, -\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 = 0, \lambda_i \geq 0 \ i = 1, 2, 3, 4, 5\} = \\ = \{\lambda \in R^5 \mid \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0\},$$

откуда $I_D(y^0) = \{1\}$ и, следовательно,

$$\text{rank}\{\nabla h_i(y) \ i \in I_0 \cup I_D(y)\} = \text{rank}\{\nabla h_1(y)\} = \text{const}$$

в окрестности y^0 , то есть, условие CCR выполнено. Далее,

$$S_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^4 \mid \bar{y}_1 = \bar{y}_2, \bar{y}_3 = \bar{y}_4 = 0\}$$

и в силу слабых необходимых условий теоремы 4 должно выполняться неравенство

$$\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle = -2\bar{y}_1^2 \geq 0$$

для всех $\bar{y}_1 \in R$, что очевидно не имеет места. Следовательно, исследуемая точка не является оптимальной. Отметим, что для точки y^0 в данном примере условие WCR не выполнено. Более того, не выполняются и условия Вассари и Trad [11]. Таким образом, в данном примере не применимы необходимые условия [8,16,11].

Выводы

В статье получены слабые необходимые условия оптимальности второго порядка, обобщающие результаты [8,16].

Список литературы

1. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск. 1981.
2. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. Минск. 2007.
3. Ioffe A.D., Necessary and sufficient conditions for a local minimum III: second order conditions and augmented duality, SIAM J. Control Optimiz. 17 (1979), pp. 266–288.
4. Bonnans J.F., Shapiro A. Perturbation Analysis of Optimization Problems, Springer, New York, 2000.
5. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. 2002
6. Fiacco A. V. and McCormick G.P., Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques, John Wiley & Sons, New York, 1968.
7. Bertsekas D.P. Nonlinear Programming, 2nd edition. Athena Scientific. Massachusetts. 1999.
8. Guo L., Lin G.H. and Ye J.J., Second order optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints. J. Optimiz. Theory. Appl., 158 (2013). 33-64.
9. Fletcher R., Practical Methods of Optimization, Academic Press, London, 1987.

10. Nocedal J. and Wright S.J., Numerical Optimization, Springer, New York, 1999
11. Baccari A., A. Trad A., On the classical necessary second-order optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints, SIAM J. Optimization 15 (2004), pp. 394-408.
12. Andreani R., Echagüe C.E., Schuverdt M.L., Constant-rank condition and second-order constraint Qualification, J. Optim. Theory Appl. 146 (2010), pp. 255–266.
13. Minchenko L., Stakhovski S., Parametric nonlinear programming problems under relaxed constant rank regularity condition, SIAM J. Optimiz. 21 (2011), pp.314-332.
14. McCormick G.P., Second order conditions for constrained minima, SIAM J. Appl.Math. 15 (1967), pp. 641–652.
15. Gould N.I.M., Toint P.L., A note on the convergence of barrier algorithms for second-order necessary Points, Math. Program. 85 (1999), pp. 433–438.
16. Andreani R., Martinez J.M., Schuverdt M.L. On second-order optimality conditions for nonlinear programming. Optimization. 2007, V. 56. P. 529-542.
17. Hu X.M., Ralph D. Convergence of a penalty method for mathematical programming with equilibrium constraints. J. Optim. Theory and Appl. 2004, V. 123. P. 365-390.
18. Izmailov A.F., Solodov M.V. An active-set Newton method for mathematical programs with complementarity constraints. SIAM J. Optim. 2008, V. 19. P. 1003-1027.
19. Минченко Л.И., Лещев А.Е. Условие критической регулярности и необходимые условия оптимальности второго порядка, Доклады НАН Беларуси, т.57, №6, 2013. С.28-34.

A.E. LESCHOV

ON WEAK SECOND ORDER OPTIMALITY CONDITIONS

Belarussian State University of Informatics and Radioelectronics

The aim of the given paper is to derive so-called weak second order necessary optimality conditions for nonlinear programming problems. Weak second order necessary conditions are proved under some additional requirements to the constraints.

Keywords: nonlinear programming, second order optimality conditions, constraint qualifications.