УДК 517.977

А. Е. ЛЕЩЕВ, Л. И. МИНЧЕНКО

СЛАБО РЕГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 11.04.2014)

Условия регулярности играют важную роль в задачах математического программирования, поскольку гарантируют справедливость необходимых условий оптимальности Куна – Таккера. Среди условий регулярности наиболее известным и широко применяемым является условие Мангасаряна – Фромовица. В то же время, несмотря на сравнительную эффективность условия Мангасаряна – Фромовица, существуют достаточно широкие классы задач оптимизации, в которых это условие не выполняется, но можно указать другие более слабые условия регулярности, гарантирующие справедливость необходимых условий Куна – Таккера. Целью данной работы является исследование некоторых слабых условий регулярности и их взаимосвязи.

Введение. Пусть h_i, $i = 1,\ldots p$, – непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R. Рассмотрим непустое множество

$$C = \{y \in R^m \mid h_i(y) \le 0, \quad i \in I \;, \quad h_i(y) = 0, \quad i \in I_0\},$$

где $i = \{1, \ldots, s\}$, $I_0 = \{s + 1,\ldots, p\}$ или $I_0 = \varnothing$.

Такого рода множества используются для описания допустимых точек задачи нелинейного программирования. При этом большое значение играют условия регулярности (constraint qualifications), обеспечивающие качество ограничений $h_i(y) \le 0, \quad i \in I, \quad h_i(y) = 0, \quad i \in I_0$, в исследуемой точке и гарантирующие применимость традиционных необходимых условий оптимальности. Наиболее известным из условий регулярности является условие Мангасаряна – Фромовица (MFCQ) [1], выполнение которого в точке $y \in C$ требует, чтобы в этой точке система векторов $\nabla h_i(y), \;\; i \in I_0$, была линейно независимой и существовал вектор $\overline{y}^0$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y), \, \overline{y}^0 \rangle = 0, \;\; i \in I_0, \; \langle \nabla h_i(y), \;\; \overline{y}^0 \rangle < 0, \;\; i \in I(y),$$

где $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$.

В литературе известны также условия регулярности, имеющие отличный от MFCQ характер. К ним относятся в первую очередь достаточно известное условие постоянного ранга (CRCQ) [2] и обобщающее его ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ) [3, 4].

Говорят, что в точке $y^0 \in C$ выполняется ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ), если для любого множества индексов $K \subset I(y^0)$ система векторов $\{\nabla h_i(y), \quad i \in K \cup I_0\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y^0.

Известно [2, 3], что данные условия и условие MFCQ независимы друг от друга. Последнее обстоятельство позволяет поставить вопрос о существовании более слабых условий регулярности, обобщающих одновременно и MFCQ, и RCRCQ. На этом пути в работах [5, 6] получено обобщающее MFCQ и CRCQ (но не RCRCQ) условие положительно линейной зависимости (CPLD), а также ослабленное условие положительно линейной зависимости (RCPLD) [7]. Несколько ранее в работе [8] было предложено и обосновано ослабленное (обобщенное) условие регулярности Мангасаряна – Фромовица (RMFCQ), которое обобщает все упомянутые выше условия регулярности.

Позже условие регулярности, повторяющее RMFCQ, было независимо введено в работе [9] под названием CRSC (constant rank of the subspace component condition).

В точке $y \in C$ построим множество

$$\Gamma_C(y) = \{\overline{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle \le 0, \quad i \in I(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\},$$

которое будем называть линеаризованным касательным конусом к множеству C в данной точке. Следуя [8], представим множество индексов $I(y)$ в точке $y \in C$ в виде разбиения на два множества $I(y) = I^a(y) \cup I^+(y)$, где $I^a(y) \cap I^+(y) = \varnothing$ и множество $I^a(y)$ состоит из тех и только тех индексов $i \in I(y)$, для которых $\langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle = 0$ для всех $\overline{y} \in \Gamma_C(y)$, а $I^+(y) = I(y) \setminus I^a(y)$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено ослабленное условие RMFCQ, если система векторов $\{\nabla h_i(y), \ \ i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки.

Пусть $|y|$ – евклидова норма вектора y, $d_C(y) = \inf\limits_{v \in C} |v - y|$. При исследовании задач оптимизации важную роль играет также следующее условие, являющееся достаточно общим условием регулярности.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что множество C *R-регулярно* [3, 4] в точке $y^0 \in C$ (или в данной точке имеет место error bound property [10–12]), если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестность $V(y^0)$ точки y^0 такие, что для всех $y \in V(y^0)$ выполнено условие $d_C(y) \le \alpha \max\{0, \ h_i(y), \ i \in I, \ |h_i(y)|, \ i \in I_0\}$.

В работе [3] было доказано, что выполнение условий RCRCQ и CPLD влечет за собой *R*-регулярность множества допустимых точек в исследуемой точке. В статье [9] доказано аналогичное утверждение относительно RMFCQ и *R*-регулярности. При этом и в [3], и в [9] был использован один из результатов [3], доказательство которого основано на дополнительном требовании существования непрерывных вторых производных для функций, описывающих множество C. Целью данной работы является доказательство того, что справедливость условия *R*-регулярности следует из RMFCQ без каких-либо дополнительных предположений об ограничениях.

1. Вспомогательные утверждения. Определим касательный конус к множеству C в точке $y \in C$:

$$T_C(y) = \{\overline{y} \in R^m \mid \exists \text{ число } o(t) \text{ и функция } o(t) \text{ такие,}$$
$$\text{что } o(t)/t \to 0 \text{ при } t \to 0 \text{ и } y + t\overline{y} + o(t) \in C \quad \forall t \in [0, t_0]\}.$$

Отметим, что конусы $\Gamma_C(y)$ и $T_C(y)$ замкнуты и $T_C(y^0) \subset \Gamma_C(y^0)$.

Л е м м а 1. *Пусть $y^0 \in C$. Тогда существует вектор $\overline{y}^0$ такой, что $\langle \nabla h_i(y^0), \overline{y}^0 \rangle = 0$, $i \in I_0 \cup I^a(y^0)$, $\langle \nabla h_i(y^0), \overline{y}^0 \rangle < 0$, $i \in I^+(y^0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае, если $I^+(y) = \varnothing$, утверждение леммы будет выполнено тривиально. Пусть $I^+(y) \ne \varnothing$. Пусть $i \in I^+(y)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle \le 0$ для всех $\overline{y} \in \Gamma_C(y)$. С другой стороны, $i \notin I^a(y)$, следовательно, найдется вектор $\overline{y}^i \in \Gamma_C(y)$ такой, что $\langle \nabla h_i(y), \overline{y}^i \rangle < 0$. Построим вектор

$$\overline{y}^0 = \sum_{i \in I^+(y)} t_i \overline{y}^i,$$

где все $t_i > 0$. Тогда $\overline{y}^0 \in \Gamma_C(y)$, и для любого $k \in I^+(y)$ получим

$$\left\langle \nabla h_k(y), \overline{y}^0 \right\rangle = \sum_{i \in I^+(y)} t_i \left\langle \nabla h_k(y), \overline{y}^i \right\rangle = \sum_{i \in I^+(y) \setminus k} t_i \left\langle \nabla h_k(y), \overline{y}^i \right\rangle + t_k \left\langle \nabla h_k(y), \overline{y}^k \right\rangle < 0.$$

Докажем

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть $y^0 \in C$. Тогда аффиная оболочка и относительная внутренность множества $\Gamma_C(y^0)$ имеют вид

$$aff\, \Gamma_C(y^0) = \{\overline{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle = 0, \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\},$$
$$ri\, \Gamma_C(y^0) = \{\overline{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle = 0, \ i \in I_0 \cup I^a(y^0), \ \langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle < 0, \ i \in I^+(y^0)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения множества $I^a(y^0)$ и леммы 1 аффинная оболочка множества $\Gamma_C(y^0)$ задается условием $aff\,\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0,\ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$.

Рассмотрим выпуклую функцию

$$g(\bar{y}) = \begin{cases} \max\limits_{i \in I^+(y_0)} \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y} \rangle, & \bar{y} \in aff\,\Gamma_C(y_0) \\ +\infty, & \bar{y} \notin aff\,\Gamma_C(y_0). \end{cases}$$

Очевидно, $\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \mid g(\bar{y}) \le 0\}$. Поскольку в силу условия RMFCQ найдется точка $\bar{y}^0$ такая, что $g(\bar{y}^0) < 0$, то в силу следствия 7.6.1 [13] относительную внутренность множества $\Gamma_C(y^0)$ можно записать:

$$ri\ \Gamma_C(y^0) = \mathrm{ri}\{\bar{y} \mid g(\bar{y}) \le 0\} = \{\bar{y} \mid g(\bar{y}) < 0\} =$$
$$= \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0,\ i \in I_0 \cup I^a(y^0),\ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0,\ i \in I^+(y^0)\}.$$

Следуя [14], будем называть ограничения с индексами $i \in I^a(y)$ существенно активными для множества $\Gamma_C(y)$.

Пусть

$$\Lambda_0(y) = \{\lambda \in R^p \mid \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y) = 0,\ \lambda_i \ge 0,\ i \in I(y),\ \lambda_i = 0,\ i \in I \setminus I(y)\}.$$

Следующая лемма является незначительной модификацией теоремы 17.7 [14].

Л е м м а 2. *Пусть* $y \in C$. *Для того чтобы* $i \in I^a(y)$, *достаточно существования вектора* $\lambda \in \Lambda_0(y)$ *такого, что* $\lambda_i > 0$. *Если* $I^a(y) \ne \varnothing$, *то данное условие является и необходимым.*

Пусть $y^0 \in C$, $I^a(y^0) \subset I^\# \subset I(y^0)$. Введем множество

$$C_\# = \{y \in R^m \mid h_i(y) \le 0,\ i \in I^\#,\ h_i(y) = 0,\ i \in I_0\}$$

и обозначим через $I^{a\#}(y^0)$ множество индексов всех существенно активных ограничений для $\Gamma_{C\#}(y^0)$.

Л е м м а 3. *Пусть* $I^a(y^0) \subset I^\# \subset I(y^0)$. *Тогда* $I^a(y^0) = I^{a\#}(y^0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $I^a(y^0) \subset I^{a\#}(y^0)$. Действительно, если $I^a(y^0) = \varnothing$, то данное включение выполняется. Пусть $I^a(y^0) \ne \varnothing$ и $i \in I^a(y^0)$. Тогда по лемме 2 существует вектор $\lambda \in \Lambda_0(y^0)$ такой, что $\lambda_i > 0$, при этом $\lambda_j = 0$ как для всех $j \in I \setminus I(y^0)$, так и для $j \in I(y^0) \setminus I^a(y^0)$ (иначе в силу леммы 2 эти ограничения были бы тоже существенно активными для $\Gamma_C(y^0)$, что невозможно ввиду определения множества $I^a(y^0)$). Тогда существует вектор

$$\lambda \in \Lambda_0^\#(y^0) = \{\lambda \in \mathrm{R}^p \mid \sum_{j \in I_0 \cup I^\#} \lambda_j \nabla h_j(y) = 0,\ \lambda_j \ge 0, \quad j \in I^\#\}$$

такой, что $\lambda_\mathrm{i} > 0$. В таком случае по лемме 2 $i \in I^{a\#}(y^0)$. Таким образом, $I^a(y^0) \subset I^{a\#}(y^0)$. Обратно, поскольку $\Gamma_{C\#}(y^0) \supset \Gamma_C(y^0)$, то все существенно активные ограничения для $\Gamma_{C\#}(y^0)$ останутся существенно активными и для $\Gamma_C(y^0)$. Следовательно, $I^a(y^0) \supset I^{a\#}(y^0)$.

Л е м м а 4 [8, 9]. *Если в точке* $y^0 \in C$ *выполнено условие RMFCQ, то*

1) $T_C(y^0) = \Gamma_C(y^0)$;

2) *условие RMFCQ выполняется и в некоторой окрестности этой точки на C;*

3) *существует окрестность* $V(y^0)$ *точки* y^0 *такая, что* $h_i(y) = 0$ *при* $i \in I^a(y^0)$ *для всех точек* $y \in C \cap V(y^0)$.

Л е м м а 5. *Пусть условие RMFCQ выполнено в точке $y^0 \in C$. Тогда для всех $y \in C$ из некоторой окрестности y^0 справедливо включение $I^a(y^0) \subset I^a(y)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в точке $y^0 \in C$ выполнено условие RMFCQ. Тогда в силу леммы 4 оно выполнено и для любой точки $y \in C$ из достаточно малой окрестности точки y^0, причем $T_C(y) = \Gamma_C(y)$. Принимая во внимание определение касательного конуса $T_C(y)$, получим $y + t\overline{y} + o(t) \in C$ при достаточно малых $t > 0$ для любого $\overline{y} \in \Gamma_C(y)$. Отсюда по лемме 4 $h_i(y + t\overline{y} + o(t)) = 0$, $h_i(y) = 0$ и, следовательно, $\langle \nabla h_i(y), \overline{y} \rangle = 0$ при всех $i \in I^a(y^0)$. Последнее означает, что $I^a(y^0) \cap I(y) \subset I^a(y)$. Но поскольку $h_i(y) = 0$ для всех $i \in I^a(y^0)$, то $I^a(y^0) \subset I(y)$ и, следовательно, $I^a(y^0) \subset I^a(y)$.

Пусть $X \subset R^n$. Рассмотрим многозначное отображение $G : x \mapsto G(x)$, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ множество $G(x) \subset R^m$. Нижним топологическим пределом многозначного отображения G в точке $x^0 \in clX$ на множестве X называется множество

$$\liminf_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) = \{y \in R^m \mid \forall x^k \to x^0,\ x^k \in X, \text{ найдется}$$
$$\text{последовательность } y^k \in G(x^k)\ \ k = 1,2,\ldots \text{ такая, что } y^k \to y\}.$$

Верхним топологическим пределом многозначного отображения G в точке $x^0 \in clX$ на множестве X называется множество

$$\limsup_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) = \{y \in R^m \mid \text{существуют последовательность } x^k \to x^0,\ x^k \in X,$$
$$\text{и последовательность } y^k \in G(x^k),\ \ k = 1,2,\ldots, \text{ такая, что } y^k \to y\}.$$

Многозначное отображение G называется полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $x^0 \in clX$ на множестве X, если $\liminf_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) \supset G(x^0)$. Многозначное отображение G называется полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке $x^0 \in clX$ на множестве X, если $\limsup_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) \subset G(x^0)$.

Пусть $K \subset R^m$ – выпуклый конус. Обозначим $K^* = \{\widehat{y} \in R^m \mid \langle \widehat{y}, \overline{y} \rangle \le 0 \quad \forall \overline{y} \in K\}$ конус, двойственный к конусу K.

Рассмотрим многозначное отображение $K(\cdot)$, ставящее в соответствие каждой точке $y \in C$ конус $K(y) \subset R^m$, и многозначное отображение $K^*(\cdot)$, ставящее в соответствие каждой точке $y \in C$ конус $K^*(y)$.

Л е м м а 6. *Пусть многозначное отображение $K(\cdot)$ п.н.сн. на множестве $Y \subset C$* в *точке $y^0 \in clY \subset C$. Тогда отображение $K^*(\cdot)$ п.н.св. в данной точке на данном множестве.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widehat{y} \in \limsup_{y \xrightarrow{Y} y^0} K^*(y)$. Тогда найдутся последовательности $y^k \to y^0$ такая, что $y^k \in Y$ при всех $k = 1,2,\ldots$, и $\widehat{y}^k \to \widehat{y}$ такая, что $\widehat{y}^k \in K^*(y^k)$ $k = 1,2,\ldots$. С другой стороны, возьмем любой вектор $\overline{y} \in K(y^0)$. Из полунепрерывности снизу многозначного отображения $K(\cdot)$ в точке $y^0 \in cl\,Y$ на множестве Y следует, что для последовательности $y^k \to y^0$, $y^k \in Y$, существует последовательность $\overline{y}^k \in K(y^k)$, $k = 1,2,\ldots$, такая, что $\overline{y}^k \to \overline{y}$. В таком случае $\langle \widehat{y}^k, \overline{y}^k \rangle \le 0$ при всех $k = 1,2,\ldots$, откуда $\langle \widehat{y}, \overline{y} \rangle \le 0$ для любого $\overline{y} \in K(y^0)$. Следовательно, $\widehat{y} \in K^*(y^0)$ и $\limsup_{y \xrightarrow{Y} y^0} K^*(y) \subset K^*(y^0)$.

2. Основной результат. Пусть $v \in R^m$, $v \notin C$. Обозначим $\Pi_C(v)$ – множество точек из C, ближайших к точке v. Очевидно, эти точки являются решениями задачи нелинейного программирования

$$f_v(y) \to \min,\ y \in C, \tag{1}$$

где $f_v(y) = |y - v|$.

Т е о р е м а 1. *Пусть множество C удовлетворяет в точке $y^0 \in C$ условию RMFCQ. Тогда множество C R-регулярно в данной точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $y^0 \in \operatorname{int} C$, то доказываемое утверждение верно. Пусть $y^0 \in bdC$. 1) Будем рассуждать от противного и предположим, что множество C не является R-регулярным в точке $y^0 \in C$. Тогда существует последовательность $v^k \to y^0$, $v^k \notin C$, такая, что $d_C(v^k) > k \max\{0, h_i(v^k),\ i \in I,\ \left|h_i(v^k)\right|,\ i \in I_0\}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть

$$y^k = y(v^k) \in \Pi_C(v^k),\ \ \overline{v}^k = (v^k - y^k)\left|v^k - y^k\right|^{-1},\ k = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Очевидно, $y^k \to y^0, \left|\overline{v}^k\right| = 1.$

Ввиду конечности индексного множества I можно извлечь из последовательностей $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$ подпоследовательности, на которых множество индексов $I(y^k)$ постоянно. Поэтому, для простоты записи сохранив для этих подпоследовательностей те же обозначения $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$, можно положить

$$I(y^k) = I^{\#} \subset I(y^0),$$

где $I^{\#}$ не зависит от y^k.

Без потери общности рассуждений мы можем также предположить, что $\overline{v}^k \to \overline{v}$. Тогда

$$\left|v^k - y^k\right| > k \max\{0,\ \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k),\ v^k - y^k\rangle,\ \ i \in I^{\#},\ \left|\langle \nabla h_i(\tilde{v}^k),\ v^k - y^k\rangle\right|,\ \ i \in I_0\},$$

где $\tilde{v}^k = y^k + \tau_k(v^k - y^k)$, $0 \le \tau_k \le 1$. Из данного неравенства следует:

$$\frac{1}{k} > \max\{0,\ \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k),\ \overline{v}^k\rangle,\ \ i \in I^{\#},\ \left|\langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), \overline{v}^k\rangle\right|,\ \ i \in I_0\}$$

и, следовательно,

$$\max\{0,\ \langle \nabla h_i(y^0),\ \overline{v}\rangle\ i \in I^{\#},\ \left|\langle \nabla h_i(y^0),\ \overline{v}\rangle\right|\ i \in I_0\} \le 0.$$

Положив

$$C_{\#} = \{y \in R^m \mid\ h_i(y) \le 0, \quad i \in I^{\#}, \quad h_i(y) = 0, \quad i \in I_0\},$$

получаем из последнего неравенства

$$\overline{v} \in \Gamma_{C\#}(y^0),$$

где

$$\Gamma_{C\#}(y^0) = \{\overline{y} \in R^m \mid\ \langle \nabla h_i(y^0),\ \overline{y}\rangle \le 0, \quad i \in I^{\#}, \quad \langle \nabla h_i(y^0),\ \overline{y}\rangle = 0, \quad i \in I_0\}.$$

2) С другой стороны, поскольку условие RMFCQ в точке y^0 влечет в силу леммы 4 выполнение условия RMFCQ и в некоторой ее окрестности, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что RMFCQ выполняется и в точках y^k (2) и, следовательно, для задачи (1) при $v = v_k$ существуют множители Лагранжа $\lambda^k \in R^p$, для которых

$$\frac{v^k - y^k}{\left|v^k - y^k\right|} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k),\ \ \lambda_i^k \ge 0, \qquad i \in I,\ \text{и}\ \ \lambda_i^k = 0\ \ \text{для}\ \ i \in (I \setminus I^{\#}).$$

Последнее условие можно переписать в виде

$$\overline{v}^k = \sum_{i \in I_0 \cup I^{\#}} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k),\ \ \lambda_i^k \ge 0, \qquad i \in I^{\#},$$

откуда $\overline{v}^k \in [\Gamma_{C\#}(y^k)]^*$, где, согласно определению,

$$\Gamma_{C\#}(y^k) = \{\overline{y} \in R^m \mid\ \langle \nabla h_i(y^k),\ \overline{y}\rangle \le 0, \quad i \in I^{\#}, \quad \langle \nabla h_i(y^k),\ \overline{y}\rangle = 0, \quad i \in I_0\}.$$

В силу леммы 5, $I^a(y^0) \subset I^{\#}$. Тогда по лемме 3, условия которой выполнены для выбранного множества $I^{\#}$, имеем $I^a(y^0) = I^{a\#}(y^0)$ и, согласно утверждению 1, получаем

$$ri\,\Gamma_{C\#}(y^0) = \{\overline{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle < 0, \quad i \in I^{\#} \setminus I^a(y^0), \quad \langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}.$$

Возьмем произвольный вектор $\overline{y} \in ri\,\Gamma_{C\#}(y^0)$.

В силу условия RMFCQ для множества C в точке $y^0 \in C$ можно, не ограничивая общности, считать, что

$$\operatorname{rank}\{\nabla h_i(y^k), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = \operatorname{rank}\{\nabla h_i(y^0), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = l$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, существует максимальная линейно независимая подсистема $\{\nabla h_i(y^0), \quad i \in J \subset I_0 \cup I^a(y^0)\}$ системы $\{\nabla h_i(y^0), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$, которая остается максимальной линейно независимой подсистемой $\{\nabla h_i(y^k), \quad i \in J \subset I_0 \cup I^a(y^0)\}$ в системе векторов $\{\nabla h_i(y^k), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$. Для простоты будем считать, что $J = \{1, \ldots, l\}$.

Тогда система уравнений $\langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)$ равносильна системе

$$\langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle = 0, \quad i \in J. \tag{3}$$

Для определенности считаем, что базисный минор системы уравнений (3) расположен в верхнем левом углу соответствующей матрицы. Тогда систему (3) можно записать в виде

$$B_1(y^0)\overline{y}^1 + B_2(y^0)\overline{y}^2 = 0, \text{ где } \overline{y} = (\overline{y}^1, \overline{y}^2),\ \overline{y}^1 = (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_l),\ \ \overline{y}^2 = (\overline{y}_{l+1}, \ldots, \overline{y}_m),$$

$$B_1(y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1(y)}{\partial y_1} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_1(y)}{\partial y_l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial h_l(y)}{\partial y_1} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_l(y)}{\partial y_l} \end{bmatrix}, \quad B_2(y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1(y)}{\partial y_{l+1}} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_1(y)}{\partial y_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial h_l(y)}{\partial y_{l+1}} \ldots\ldots \dfrac{\partial h_l(y)}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Отсюда $\overline{y}^1 = -B_1^{-1}(y^0)B_2(y^0)\overline{y}^2$.

Построим вектор $\overline{y}^k = (\overline{y}^{1k}, \overline{y}^{2k})$ следующим образом:

$$\overline{y}^{1k} = -B_1^{-1}(y^k)B_2(y^k)\overline{y}^2, \quad \overline{y}^{2k} = \overline{y}^2.$$

Тогда

$$\langle \nabla h_i(y^k), \overline{y}^k \rangle = 0, \quad i \in J, \text{ и } \overline{y}^k \to \overline{y} \text{ при } k \to \infty.$$

Кроме того, при $i \in I^{\#} \setminus I^a(y^0)$ справедливо $\left| \langle \nabla h_i(y^k), \overline{y}^k \rangle - \langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle \right| \to 0$ и, следовательно, $| \langle \nabla h_i(y^k), \overline{y}^k \rangle - \langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle | \to 0$ при $k \to \infty$, $i \in I^{\#}$. Учитывая это и неравенства $\langle \nabla h_i(y^0), \overline{y} \rangle < 0, \quad i \in I^{\#} \setminus I^a(y^0)$, получаем, что $\langle \nabla h_i(y^k), \overline{y}^k \rangle < 0, \quad i \in I^{\#} \setminus I^a(y^0)$. Таким образом, для любого $\overline{y} \in ri\Gamma_{C\#}(y^0)$ существует последовательность $\overline{y}^k \in \Gamma_{C\#}(y^k)$ такая, что $\overline{y}^k \to \overline{y}$. Последнее означает, что $\liminf\limits_{y \xrightarrow{Y} y^0} \Gamma_{C\#}(y) \supset ri\Gamma_{C\#}(y^0)$ в точке y^0 на последовательности $y^k \to y^0$, $Y = \{y^k,\ k = 1, 2 \ldots\}$. Отсюда с учетом замкнутости множеств $\liminf\limits_{y \xrightarrow{Y} y^0} \Gamma_{C\#}(y)$ и $\Gamma_{C\#}(y^0)$ получаем $\liminf\limits_{y \xrightarrow{Y} y^0} \Gamma_{C\#}(y) \supset \Gamma_{C\#}(y^0)$. Следовательно, многозначное отображение $\Gamma_{C\#}(y)$ полунепрерывно снизу. В таком случае по лемме 6 конус $[\Gamma_{C\#}(y)]^*$, двойственный к $\Gamma_{C\#}(y)$, будет полунепрерывным сверху в точке y^0 на последовательности $y^k \to y^0$. С учетом этого и доказанного ранее включения $\overline{v}^k \in [\Gamma_{C\#}(y^k)]^*$ и того, что $\overline{v}^k \to \overline{v}$, следует $\overline{v} \in [\Gamma_{C\#}(y^0)]^*$. Но, с другой стороны, в первой части доказательства получено включение $\overline{v} \in \Gamma_{C\#}(y^0)$. Поскольку $|\overline{v}| \neq 0$, последнее невозможно. Полученное противоречие говорит о справедливости утверждения теоремы.

Доказанная теорема обобщает результат, полученный в работе [9] при дополнительных предположениях о существовании и непрерывности вторых производных функций, описывающих множество *C*.

П р и м е р. Пусть $C = \{y \in R^2 \mid h_i(y) \leq 0, \quad i = 1,2, \quad h_3(y) = 0\}$, где

$$h_1(y) = \begin{cases} y_2 - y_1^2, \text{ если } & y_1 \geq 0 \\ y_2 + y_1^3, \text{ если } & y_1 \leq 0 \end{cases},$$

$$h_2(y) = -y_2, \; h_3(y) = y_1.$$

Рассмотрим точку $y^0 = (0,0)$. Очевидно, что функция $h_1(y)$ непрерывно дифференцируема в точке y^0 и ее окрестности, но не является дважды непрерывно дифференцируемой в этой точке. Нетрудно видеть, что $\Gamma_C(y^0) = \{(0,0)\}, \; I^a(y^0) = \{1,2\}$. Далее,

$$\text{rank}\{\nabla h_i(y), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = \text{rank}\{\nabla h_i(y), \quad i = 1,2,3\} = 2,$$

т. е. условие RMFCQ выполнено. Условие *R*-регулярности также выполняется в силу теоремы 1.

Отметим, что выполнение условия *R*-регулярности в данном примере можно получить, не привлекая теорему 1. В частности, оно вытекает из условия RCRCQ, которое имеет место в точке y^0, и теоремы 4 [4].

Отметим, что, как это следует из теоремы ниже, условия регулярности *гарантируют качество ограничений*, дающих описание множества допустимых точек, а не свойства самого этого множества.

Т е о р е м а 2. *Пусть условие регулярности RMFCQ выполнено в* $y^0 \in C$. *Тогда существует окрестность* $V(y^0)$ *такая, что множество* $C \cap V(y^0)$ *может быть записано с помощью ограничений, для которых в точке* y^0 *выполняется условие Мангасаряна – Фромовица.*

Доказательство получается применением леммы 4 и теоремы о функциональной зависимости системы функций [15].

Литература

1. *Mangasarian O. L., Fromovitz S.* // J. Math. Analysisand Appl. 1967. Vol. 17. P. 37–47.
2. *Janin R.* // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21. P. 110–126.
3. *Minchenko L., Stakhovski S.* // Optimization. 2011. Vol. 60, N 4. P. 429–440.
4. *Minchenko L., Stakhovski S.* // SIAM J. Optimiz. 2011. Vol. 21, N 1. P. 314–332.
5. *Qi L., Wei Z.* // SIAM J. Optimiz. 2000. Vol. 10. P. 963–981.
6. *Andreani R., Martinez J. M., Schuverdt M. L.* // J. Optimiz. Theory and Appl. 2005. Vol. 125. P. 473–485.
7. *Andreani R., Haeser G., Schuverdt M. L., Silva P. J. S.* // Mathematical Programming. Ser. A. 2012. Vol. 135. P. 255–273.
8. *Минченко Л. И., Стаховский С. М.* // Докл. БГУИР. 2010. № 8. С. 104–109.
9. *Andreani R., Haeser G., Schuverdt M. L., Silva P. J. S.* // SIAM J. Optimiz. 2012. Vol. 22, N 3. P. 1109–1135.
10. *Minchenko L., Tarakanov A.* // J. Optimiz. Theory and Appl. 2011. Vol. 148. P. 571–579.
11. *Bosch P., Jourani A., Henrion R.* // Applied Mathematics and Appl. 2004. Vol. 50. P. 161–181.
12. *Henrion R., Jourani A., Outrata J.* // SIAM J. Optimiz. 2002. Vol. 13. P. 603–618.
13. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М., 1971.
14. *Гороховик В. В.* Конечномерные задачи оптимизации. Минск, 2007.
15. *Зорич В. А.* Математический анализ. М., 1981. Ч. 1.

A. E. LESCHOV, L. I. MINCHENKO

WEAKLY REGULAR MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

Summary

In this article nonlinear programming problemis considered under the relaxed Mangasarian-Fromovitzconstraint qualification. We prove that the relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification implies the local error bound property without additional assumptions for constraints.