УДК 517.977

Л.И.МИНЧЕНКО, А.Е.ЛЕЩЁВ

ОСЛАБЛЕННОЕ УСЛОВИЕ МАНГАСАРЯНА-ФРОМОВИЦА ПО НАПРАВЛЕНИЮ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

(Представлено членом-корреспондентом В.В. Гороховиком)

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

Поступило 24.04.2013

В данной заметке вводится ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица по направлению и показывается, что это условие достаточно для справедливости результатов о дифференцируемости по направлениям функции оптимального значения, полученных ранее при более жестких предположениях.

Пусть F многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in R^n$ множество

$$F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x,y) \le 0 \ \ i \in I, \ \ h_i(x,y) = 0 \ \ i \in I_0\},$$

где $x \in R^n$ – вектор параметров, $h_i(x,y)$ $(i = 1,\dots,p)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции из $R^n \times R^m$ в R; $I = \{1,\dots,s\}$, $I_0 = \{s+1,\dots,p\}$.

Рассмотрим задачу $P(x)$ минимизации дважды непрерывно дифференцируемой целевой функции $f(x,y)$ на множестве $F(x)$.

Введем функцию оптимального значения $\varphi(x) = \inf\{f(x,y) \mid y \in F(x)\}$ и множество оптимальных решений $\omega(x) = \{y \in F(x) \mid f(x,y) = \varphi(x)\}$. Будем считать фиксированными точку x^0 и вектор $\overline{x} \in R^n$ и предполагать, что множество $\omega(x^0 + t\overline{x})$ не пусто и равномерно ограниченно для всех достаточно малых $t \ge 0$.

Введем понятия и обозначения необходимые для вывода и формулирования результатов. Положим $z = (x, y)$. Введем функцию Лагранжа $L(z,\lambda) = f(z) + \langle \lambda, h(z)\rangle$, где $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_p)$, $h = (h_1,\dots,h_p)$, и обозначим через

$$\Lambda(z) = \{\lambda \in \mathrm{R}^p \mid \nabla_y L(z,\lambda) = 0, \ \ \lambda_i \ge 0 \ \text{ и } \ \lambda_i h_i(z) = 0 \ \ \textit{для} \ \ i \in I\}$$

множество множителей Лагранжа, через $I(z) = \{i \in I \mid h_i(z) = 0\}$ множество индексов активных ограничений в точке $z = (x, y) \in grF$.

Нам понадобится в дальнейшем также множество вырожденных множителей Лагранжа $z = (x, y) \in grF$:

$$\Lambda_0(z) = \{\lambda \in R^p \left| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla_y h_i(z) = 0, \ \ \lambda_i \ge 0 \ \ \textit{и} \ \ \lambda_i h_i(z) = 0 \ \ \textit{при} \ \ i \in I\}.\right.$$

Рассмотрим первую и вторую производные функции φ в точке x^0 по направлению $\overline{x}$

$$\varphi'(x^0;\overline{x}) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(\varphi(x^0 + t\overline{x}) - \varphi(x^0)),$$

$$\varphi''(x^0;\overline{x}) = \lim_{t \downarrow 0} 2t^{-2}(\varphi(x^0 + t\overline{x}) - \varphi(x^0) - t\varphi'(x^0;\overline{x})).$$

Поскольку производные функции оптимального значения играют важную роль в исследовании устойчивости задачи оптимизации и чувствительности оптимальных решений к возмущениям параметров, вопросам их существования и вычислению посвящены многочисленные работы, обзор которых можно найти в [1]. В [1], в частности, представлен ряд ключевых в данной области результатов. Анализ исследований дифференциальных свойств функции оптимального значения показывает, что эти свойства в очень существенной степени определяются условиями регулярности. В недавних работах [2,3] было предложено новое условие регулярности, являющееся более слабым как по отношению к классическому условию регулярности Мангасаряна-Фромовица [4], так и по отношению к условию регулярности постоянного ранга [5] и ряду других общих условий регулярности [6-10].

В настоящей статье в развитие результатов [2,3] предлагается ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица по направлению и показывается, что оно позволяет успешно заменить в исследовании дифференцируемости функции оптимального значения более жесткие условия регулярности и получить результаты аналогичные [1, 11, 12] при более слабых требованиях.

Ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица по направлению

Следуя [10], введем нижнюю и верхнюю производные Дини многозначного отображения F в точке $z^0=(x^0,y^0)$, где $y^0\in F(x^0)$, по направлению $\bar{x}$:

$$DF(z^0;\bar{x})=\{\bar{y}\in R^m \mid \exists t_0>0 \ \textit{и функция} \ o(t) \ \textit{такая, что} \ o(t)/t\to 0 \ \ \textit{для} \ \ t\downarrow 0$$
$$\textit{и} \ \ y^0+t\bar{y}+o(t)\in F(x^0+t\bar{x}) \ \forall t\in[0,t_0]\},$$

$$\widehat{D}F(z^0;\bar{x})=\{\bar{y}\in R^m \mid \exists t_k\downarrow 0 \ \textit{и} \ \exists \hat{y}^k\to\bar{y} \ \ \textit{такие, что} \ y_0+t\hat{y}^k\in F(x^0+t_k\bar{x}) \ k=1,2,...\},$$

а также множество

$$\Gamma(z^0;\bar{x})= \ \bar{y}\in R^m \mid \langle\nabla h_i(z^0),\bar{z}\rangle\le 0 \quad i\in I(z^0), \ \ \langle\nabla h_i(z^0),\bar{z}\rangle=0 \quad i\in I_0 \ \ , \quad \bar{z}=(\bar{x},\bar{y}).$$

Нетрудно убедиться, что всегда $DF(z^0;\bar{x})\subset\widehat{D}F(z^0;\bar{x})\subset\Gamma(z^0;\bar{x})$.

Положим $I(z^0)=I^0(z^0,\bar{x})\cup I^+(z^0,\bar{x})$, где

$$I^0(z^0,\bar{x})=\{i\in I(z^0) \mid \langle\nabla h_i(z^0),(\bar{x},\bar{y})\rangle=0 \quad \forall\bar{y}\in\Gamma(z^0;\bar{x})\},$$
$$I^+(z^0,\bar{x})==I(z^0)\setminus I^0(z^0,\bar{x}).$$

Ограничения с индексами $i\in I^0(z^0,\bar{x})$ будем называть существенно активными для множества $\Gamma(z^0;\bar{x})$.

Определение 1. Пусть $y^0\in F(x^0)$. Будем говорить, что в точке $z^0=(x^0,y^0)$ выполнено ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица по направлению $\bar{x}$ (коротко $RMF_{\bar{x}}$), если $\Gamma(z^0;\bar{x})\ne\varnothing$ и система векторов

$$\begin{pmatrix}\nabla_y h_i(z)\\ \langle\nabla_x h_i(z),\bar{x}\rangle\end{pmatrix} \quad i\in I_0\cup I^0(z^0,\bar{x}) \qquad (1)$$

имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки z^0.

Пусть

$$\Gamma^{\#}(z^0;\bar{x})=\{\bar{y}\in R^m \mid \langle\nabla h_i(z^0),(\bar{z})\rangle=0 \ \ i\in I_0\cup I^0(z^0,\bar{x}), \ \ \langle\nabla h_i(z^0),\bar{z}\rangle<0 \quad i\in I^+(z^0,\bar{x})\}.$$

Следующие леммы, позволяющие проверить выполнение условия $RMF_{\bar{x}}$ вытекают из свойств вырожденных линейных неравенств [13].

Лемма 1. Пусть $y^0 \in F(x^0)$. Справедливы следующие условия:

1) $\Gamma(z^0;\bar{x}) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i\in I_0 \cup I(z^0)} \lambda_i \langle \nabla_x h_i(z^0), \bar{x}\rangle \leq 0$ для всех $\lambda \in \Lambda_0(z^0)$;

2) $I^0(z^0,\bar{x}) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\Gamma^{\#}(z^0;\bar{x}) = \varnothing$;

3) если $I^0(z^0,\bar{x}) \neq \varnothing$, то $i \in I^0(z^0,\bar{x})$ тогда и только тогда, когда существует множитель $\lambda \in \Lambda_0(z^0)$ такой, что $\sum\limits_{i\in I_0 \cup I(z^0)} \lambda_i \langle \nabla_x h_i(z^0), \bar{x}\rangle = 0$ и $\lambda_i > 0$.

Лемма 2. Пусть в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, где $y^0 \in F(x^0)$, выполнено условие $RMF_{\bar{x}}$. Тогда $\Gamma^{\#}(z^0;\bar{x}) \neq \varnothing$.

Данные леммы также показывают связь условия $RMF_{\bar{x}}$ с известным условием Голлана [14], часто назваемым также уловием Мангасаряна-Фромовица по направлению [1,12], которое требует линейной независимости векторов $\nabla_y h_i(z^0)$ $i \in I_0$ и существования вектора $\bar{y}^0$ такого, что $\langle \nabla h_i(z^0),\ (\bar{x},\bar{y}^0)\rangle = 0$ $i \in I_0$, $\langle \nabla h_i(z^0),(\bar{x},\bar{y}^0)\rangle < 0$ для всех $i \in I(z^0)$. Отметим также, что равносильное определение условия Голлана сводится к выполнению неравенства $\sum\limits_{i\in I_0 \cup I(z^0)} \lambda_i \langle \nabla_x h_i(z^0), \bar{x}\rangle < 0$ для всех $\lambda \in \Lambda_0(z^0) \setminus \{0\}$. Легко видеть, что из выполнения условия Голлана всегда следует условие $RMF_{\bar{x}}$. Простейшие примеры показывают, что обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1. Пусть $F(x) = \{y \in R^2 \,|\, y_2 - x \leq 0,\quad -y_2 + x \leq 0\}$, $x \in R$, $x^0 = 0$, $y^0 = (0,0)$.

Здесь в точке $z^0 = (x^0, y^0)$ не выполняются ни классическое условие Мангасаряна-Фромовица, ни условие Голлана для какого-либо направления. В то же время, множество $\Gamma(z^0;\bar{x})$ имеет вид $\Gamma(z^0;\bar{x}) = \{\bar{y} \in R^2 \,|\, \bar{y}_2 = \bar{x}\}$ и оба ограничения $h_1(x,y) = y_2 - x$ и $h_2(x,y) = -y_2 + x$, существенно активны для этого множества, а ранг системы $\{\nabla_y h_1(x,y), \nabla_y h_2(x,y)\}$ не меняется в окрестности точки $z^0 = (x^0, y^0)$, то есть в данной точке выполняется условие $RMF_{\bar{x}}$ для любого направления $\bar{x}$.

Теорема 1. Если в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, где $y^0 \in F(x^0)$, выполнено ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица по направлению $\bar{x}$, то $DF(z^0;\bar{x}) = \Gamma(z^0;\bar{x}) \neq \varnothing$.

Доказательство теоремы основано на применении теоремы о ранге системы функций и теоремы о неявных функциях и в основных чертах повторяет схему доказательства, использованную в [2].

Пусть $y^0 \in F(x^0)$, $\bar{y} \in \Gamma(z^0;\bar{x})$, где $z^0 = (x^0, y^0)$. Следуя [10], введем вторые верхнюю и нижнюю производные многозначного отображения F в точке $z^0 = (x^0, y^0)$ вдоль вектора $\bar{y}$ по направлению $\bar{x}$:

$$\widehat{D}^2F(z^0,\bar{y};\bar{x}) = \{\bar{v}\in R^m \mid \exists t_k \downarrow 0 \ \text{ и функция } o(t) \ \text{ такие, что}$$
$$o(t_k)/t_k \to 0 \ \text{ при } k\to\infty \ \text{ и } \ y^0 + t_k\bar{y} + t_k^2\bar{v} + o(t_k^2) \in F(x^0 + t_k\bar{x}) \quad k = 1,2,\ldots\},$$

$$D^2F(z^0,\bar{y};\bar{x}) = \{\bar{v}\in R^m \mid \exists t_0 > 0 \ \text{ и функция } o(t) \ \text{ такие, что } o(t)/t \to 0 \ \text{ при } t\downarrow 0 \ \text{ и}$$
$$y^0 + t\bar{y} + t^2\bar{v} + o(t^2) \in F(x^0 + t\bar{x}) \quad \forall t\in[0,t_0]\}.$$

Положим также

$$\Gamma^2(z^0,\bar{y};\bar{x}) = \{\bar{v}\in R^m \mid \ 2\langle\nabla_y h_i(z^0),\bar{v}\rangle + \langle\bar{z},\nabla^2 h_i(z^0)\bar{z}\rangle \le 0 \quad i\in I^2(z^0,\bar{z}),$$
$$2\langle\nabla_y h_i(z^0),\bar{v}\rangle + \langle\bar{z},\nabla^2 h_i(z^0)\bar{z}\rangle = 0 \quad i\in I_0\},$$

где $I^2(z^0,\bar{z}) = \{i\in I(z^0) \mid \langle\nabla h_i(z^0),\bar{z}\rangle = 0\}$.

Нетрудно убедиться, что $D^2F(z^0,\bar{y};\bar{x}) \subset \widehat{D}^2F(z^0,\bar{y};\bar{x}) \subset \Gamma^2(z^0,\bar{y};\bar{x})$.

Пусть $z^0 = (x^0,y^0)$, где $y^0\in F(x^0)$. Введем множество

$$\Gamma(z^0;0) = \ \bar{y}\in R^m \mid \langle\nabla_y h_i(z^0),\bar{y}\rangle \le 0 \quad i\in I(z^0), \quad \langle\nabla_y h_i(z^0),\bar{y}\rangle = 0, \quad i\in I_0$$

и представим множество индексов $I(z^0)$ активных ограничений в точке $z^0 = (x^0,y^0)$ в виде $I(z^0) = I^0(z^0)\cup I^+(z^0)$, где

$$I^0(z^0) = \{i\in I(z^0) \mid \langle\nabla_y h_i(z^0),\bar{y}\rangle = 0 \quad \forall\bar{y}\in\Gamma(z^0,0)\}, \quad I^+(z^0) = I^+(z^0) = I(z^0)\setminus I^0(z^0).$$

Лемма 3. $I^0(z^0,\bar{x}) \subset I^0(z^0)$.

Определение 2. Пусть $z_0 = (x_0,y_0)$, где $y^0\in F(x^0)$. Будем говорить, что в точке z^0 выполнено равномерно ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица по направлению $\bar{x}$

($URMF_{\bar{x}}$), если $\Gamma(z^0;\bar{x}) \ne \varnothing$ и любая система векторов

$$\begin{pmatrix} \nabla_y h_i(z) \\ \langle\nabla_x h_i(z),\bar{x}\rangle \end{pmatrix} \quad i\in I_0\cup K \ ,$$

где $K\subset I^0(z^0)$, не меняет ранг при всех z из некоторой окрестности точки z^0.

Теорема 2. Пусть $z_0 = (x_0,y_0)$, где $y^0\in F(x^0)$, $\bar{y}\in\Gamma(z^0;\bar{x})$, $\bar{z} = (\bar{x},\bar{y})$. Если в точке z_0 выполнено условие $URMF_{\bar{x}}$, то $D^2F(z^0,\bar{y};\bar{x}) = \Gamma^2(z^0,\bar{y};\bar{x}) \ne \varnothing$.

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Производные функции оптимального значения

Пусть $y^0\in F(x^0)$. В точке $z_0 = (x_0,y_0)$ введем конус критических направлений $D(z^0) = \ \bar{y}\in\Gamma(z^0;0) \ \mid \ \langle\nabla_y f(z^0),\bar{y}\rangle \le 0$ и множество $\Lambda^2(z^0;\bar{x}) = \{\lambda\in\Lambda(z^0) \mid \langle\nabla_x L(z^0,\lambda),\bar{x}\rangle = \max\limits_{\lambda\in\Lambda(z^0)}\langle\nabla_x L(z^0,\lambda),\bar{x}\rangle\}$.

Следуя [11], будем говорить, что в точке $z^0=(x^0,y^0)$ выполнено сильное достаточное условие второго порядка по направлению $\bar{x}$ ($SSOSC_{\bar{x}}$), если $\Lambda(z^0)\neq\varnothing$ и

$$\sup_{\lambda\in\Lambda^2(z^0;\bar{x})}\langle\bar{y},\nabla^2_{yy}L(z^0,\lambda)\bar{y}\rangle>0 \text{ для всех ненулевых векторов } \bar{y}\in D(z^0).$$

Положим $\Gamma^*(z^0;\bar{x})=\{\bar{y}^*\in\Gamma(z^0;\bar{x})\,\big|\,\langle\nabla f(x^0,y^0),(\bar{x},\bar{y}^*)\rangle=\min\limits_{\bar{y}\in\Gamma(z^0;\bar{x})}\langle\nabla f(x^0,y^0),(\bar{x},\bar{y})\rangle\}$.

Из теоремы двойственности в линейном программировании [15] следует, что оба множества $\Gamma^*(z^0;\bar{x})$ и $\Lambda^2(z^0;\bar{x})$ не пусты, если $\Gamma(z^0;\bar{x})\neq\varnothing$ и $\Lambda(z^0)\neq\varnothing$.

Лемма 4. Пусть $y^0\in F(x^0)$ и в точке $z_0=(x_0,y_0)$ выполнено условие $RMF_{\bar{x}}$. Тогда $\Gamma^2(z^0,\bar{y};\bar{x})=\widehat{D}^2F(z^0,\bar{y};\bar{x})\neq\varnothing$ при любом $\bar{y}\in\Gamma(z^0;\bar{x})$. При этом для любого $\bar{v}\in\Gamma^2(z^0,\bar{y};\bar{x})$ найдутся m-векторная фукция $o_v(t^2)$ и скалярная функция $o(t^2)$ такие, что $o(t)/t\to 0$ и $o_v(t)/t\to 0$ при $t\downarrow 0$ и $y^0+t\bar{y}+t^2\bar{v}+o_v(t^2)\in F(x^0+(t+o(t^2))\bar{x})$

для всех достаточно малых положительных значений t.

Определим вторые нижнюю и верхнюю производные функции φ в точке x^0 по направлению $\bar{x}$:

$$D^2_+\varphi(x^0;\bar{x})=\liminf_{t\downarrow 0}\frac{2}{t^2}[\varphi(x^0+t\bar{x})-\varphi(x^0)-t\varphi'(x^0;\bar{x})],$$

$$D^{+2}\varphi(x^0;\bar{x})=\limsup_{t\downarrow 0}\frac{2}{t^2}[\varphi(x^0+t\bar{x})-\varphi(x^0)-t\varphi'(x^0;\bar{x})].$$

Лемма 5. Пусть в точке $z^0=(x^0,y^0)$, где $y^0\in\omega(x^0)$, выполнены условия $RMF_{\bar{x}}$ и $SSOSC_{\bar{x}}$. Если последовательность $t_k\downarrow 0$ такая, что $y^k\in\omega(x^0+t_k\bar{x})$ и $y^k\to y^0\in\omega(x^0)$ при $k=1,2,\ldots$ и на ней для некоторого $\bar{y}\in\Gamma^*(z^0;\bar{x})$ достигается нижний предел $\liminf\limits_{t\downarrow 0}t^{-2}(\varphi(x^0+t\bar{x})-\varphi(x^0)-t\langle\nabla f(z^0),\bar{z}\rangle)$, то

1) $\limsup\limits_{k\to\infty}t_k^{-1}\left|y^k-y^0\right|<\infty$;

2) на последовательности $t_k\downarrow 0$ достигается также предел $D_+\varphi(x^0;\bar{x})=\lim\limits_{k\to\infty}t_k^{-1}(\varphi(x^0+t_k\bar{x})-\varphi(x^0)=\langle\nabla f(z^0),\bar{z}\rangle)$.

Положим $\omega(x^0,\bar{x})=\{y^0\in\omega(x^0)\,\Big|\,\varphi'(x^0;\bar{x})=\min\limits_{y^0\in\omega(x^0)}\min\limits_{\bar{y}\in\Gamma(z^0;\bar{x})}\langle\nabla f(z^0),\bar{z}\rangle\}$, $\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})$.

Теорема 3. Пусть во всех точках $z^0=(x^0,y^0)$ таких, что $y^0\in\omega(x^0)$, выполнены условия $RMF_{\bar{x}}$ и $SSOSC_{\bar{x}}$. Тогда 1) функция φ дифференцируема в точке x^0 по направлению $\bar{x}$, причем

$$\varphi'(x^0;\bar{x})=\min_{y^0\in\omega(x^0)}\min_{\bar{y}\in\Gamma(z^0;\bar{x})}\langle\nabla f(z^0),\bar{z}\rangle=\min_{y^0\in\omega(x^0)}\max_{\lambda\in\Lambda(z^0)}\langle\nabla_x L(z^0,\lambda),\bar{x}\rangle; \tag{9}$$

2) справедлива формула

$$D_+^2\varphi(x^0;\bar{x}) = \inf_{y^0\in\omega(x^0,\bar{x})} \inf_{\bar{y}\in\Gamma^*(z^0;\bar{x})} \inf_{\bar{v}\in\Gamma^2(z^0,\bar{z};\bar{x})} 2\Phi(z^0,\bar{z},\bar{v}) =$$

$$= \inf_{y^0\in\omega(x^0,\bar{x})} \inf_{\bar{y}\in\Gamma^*(z^0;\bar{x})} \sup_{\lambda\in\Lambda^2(z^0,\bar{x})} \langle(\bar{x},\bar{y}^0),\nabla^2_{zz}L(z^0,\lambda)(\bar{x},\bar{y})\rangle.$$

Доказательство теоремы основано на применении теоремы 1, леммы 4 и леммы 5.

Теорема 4. Пусть во всех точках $z^0=(x^0,y^0)$ таких, что $y^0\in\omega(x^0)$, выполнены условия $URMF_{\bar{x}}$ и $SSOSC_{\bar{x}}$. Тогда функция φ в точке x^0 по направлению $\bar{x}$ имеет производную первого порядка $\varphi'(x^0;\bar{x})$, вычисляемую по формуле (9), и производную второго порядка $\varphi''(x^0;\bar{x})$, причем

$$\varphi''(x^0;\bar{x}) = \min_{y^0\in\omega(x^0,\bar{x})} \min_{\bar{y}\in\Gamma^*(z^0;\bar{x})} \min_{\bar{v}\in\Gamma^2(z^0,\bar{z};0)} 2\Phi(z^0,\bar{z},\bar{v}\rangle =$$

$$= \min_{y^0\in\omega(x^0,\bar{x})} \min_{\bar{y}\in\Gamma^*(z^0;\bar{x})} \max_{\lambda\in\Lambda^2(z^0,\bar{x})} \langle\bar{z},\nabla^2L(z^0,\lambda),\bar{z}\rangle.$$

Доказательство теоремы 4 получается применением леммы 5 и теоремы 2.

Отметим, что результаты, полученные в теоремах 3 и 4, обобщают соответствующие результаты [1,10, 11,12] на задачи с менее жесткими условиями регулярности.

L. I. MINCHENKO, A. E. LESCHOV

leonidm@relsoft.by, leschov@bsuir.by

RELAXED MANGASARIAN-FROMOVITZ REGULARITY CONDITION IN DIRECTION AND ITS APPLICATIONS

Summary

Relaxed Mangasarian-Fromovitz regularity condition in direction is introduced and the directional differentiability of value function is studied in parametric nonlinear programms under this regularity assumptions. The theorems are proved that generalize known earlier results.

РЕФЕРАТ

УДК 517.977

Л. И. Минченко, А. Е. Лещёв. **Ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица по направлению и его приложения.**

В работе вводится ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица по направлению и изучается дифференцируемость по направлениям функции оптимального значения в параметрических задачах нелинейного программирования при данном условии регулярности. Получены теоремы существования первых и вторых производных по направлениям, обобщающие ранее известные результаты.

Список литературы

1. Bonnans J.F., Shapiro A. Perturbations analysis of optimization problems. Springer-Verlag, New York, 2000.
2. Минченко Л.И., Стаховский С.М.//Доклады БГУИР, №8, 2010. С.104–109.
3. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L., Silva P.J.S. // SIAM J. Optimization, V.22, N3. 2012. P.1109-1125.
4. Mangasarian O.L., Fromovitz S. // J. Math. Analysis and Appl. 7, 1967. P. 37-47 .
5. Janin R. // Mathematical Programming Study. V. 21.1984. P. 110-126.
6. Qi L. and Wei Z. //SIAM J. Optimizanion, №10, 2000. P. 963-981.
7. Andreani R., Martinez J. M., Schverdt M. L. //J. Optimiz. Theory and Appl., 125,2005. P. 473-485.
8. Minchenko L., Stakhovski S. // SIAM Journal on Optimization. V.21, N1. 2011. P.314-332.
9. Minchenko L.I., Stakhovski S.M. // Optimization. V. 60, N4. 2011. P. 429-440.
10. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad Publ., Dordrecht , 2002.
11. Shapiro A. // SIAM J. Control and Optimization. V.26. 1988. P. 628-645.
12. Auslender A., Cominetti R. First // Optimization. V.21. 1990. P.351-363.
13. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. Минск, 2007.
14. Gollan B. //Mathematics of Operation Research. V. 9. 1984. P. 208-221.
15. Карманов В.Г. Математическое программирование. М., 1978.