УДК 517.977

Л.И.МИНЧЕНКО, А.Е.ЛЕЩЕВ

УСЛОВИЕ КРИТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(представлено членом-корреспондентом В.В.Гороховиком)

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Поступило 25.11.2013

Необходимые условия оптимальности Куна-Таккера играют ключевую роль в проверке на оптимальность решений задачи нелинейного программирования. Наряду с условиями Куна-Таккера для дополнительной проверки предполагаемых решений задачи математического программирования на оптимальность используются необходимые условия оптимальности второго порядка, которые в литературе иногда делят на классические условия, применимые для широкого круга задач с традиционными условиями регулярности Мангасаряна-Фромовица [1], и необходимые условия второго порядка в усиленной форме [2-4]. Справедливость необходимых условий второго порядка в усиленной форме тесно связана с выполнением более жестких условий регулярности второго порядка (в противоположность условиям регулярности первого порядка, гарантирующим справедливость условий Куна-Таккера в оптимальной точке). Недавно показано [3,4], что условиями регулярности второго порядка являются условия регулярности постоянного ранга [5] и ослабленное условие регулярности постоянного ранга [6].

Целью данной статьи является вывод необходимых условий второго порядка в усиленной форме при более общих условиях по сравнению с условиями, использованными в [3,4].

1. Введение. Пусть $f(y)$ и $h_i(y)$ $i=1,\dots,p$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R. Введем непустое множество допустимых точек

$$C = \{ y \in R^m \mid h_i(y) \le 0 \quad i \in I \ , \quad h_i(y) = 0 \quad i \in I_0 \} ,$$

где $y \in R^m$, $I=\{1,\dots,s\}$, $I_0=\{s+1,\dots,p\}$ или $I_0=\varnothing$,

и рассмотрим задачу (P) математического программирования

$$f(y) \to \min, \quad y \in C .$$

Для задачи (P) введем функцию Лагранжа

$$L(y,\lambda) = f(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle \ , \text{ где } \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_p)\,,\ h = (h_1,\dots,h_p)$$

и множество множителей Лагранжа в точке y

$$\Lambda(y) = \{ \lambda \in \mathrm{R}^p \mid \nabla_y L(y,\lambda) = 0,\ \lambda_i \ge 0 \text{ и } \lambda_i h_i(y) = 0, \quad i \in I \} .$$

Обозначим через $I(y) = \{ i \in I \mid h_i(y) = 0 \}$ множество индексов активных в точке $y \in C$ ограничений типа неравенства.

Необходимые условия оптимальности в задачах математического программирования делятся на условия оптимальности первого порядка, гарантирующие выполнение в исследуемой точке условий Куна-Таккера, то есть существования множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda(y)$, и условия оптимальности второго порядка, которые дополнительно к существованию множителей Лагранжа требуют неотрицательности квадратичной формы построенной по матрице вторых производных функции Лагранжа на направлениях из подходящим образом определенного конуса критических направлений.

В данной статье рассматриваются необходимые условия оптимальности второго порядка в усиленной форме SSONC (Strong Second Order Necessary Conditions) [2-4]. Говорят, что точка $y^0 \in C$ удовлетворяет условию SSONC, если при любом векторе $\lambda \in \Lambda(y^0)$ выполняется неравенство

$$\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0, \lambda)\bar{y} \rangle \;\geq\; 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{y} \in K^{\lambda}_{C}(y^0),$$

где $K^{\lambda}_{C}(y^0)$ - конус критических направлений множества C в точке y^0, связанный с множителем Лагранжа $\lambda \in \Lambda(y^0)$ и определяемый условием

$$K^{\lambda}_{C}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in I_0,$$

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \;\; i \in I^{\oplus}_{\lambda}(y^0), \;\; \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \leq 0 \quad i \in I^{\square}_{\lambda}(y^0)\},$$

где

$$I^{\oplus}_{\lambda}(y^0) = \{i \in I(y^0) \mid \lambda_i > 0\}, \quad I^{\square}_{\lambda}(y^0) = \{i \in I(y^0) \mid \lambda_i = 0\}.$$

Отметим, что конус критических направлений $K^{\lambda}_{C}(y^0)$ зависит от множителя Лагранжа λ и, следовательно, и от целевой функции f.

Введем линеаризованный касательный конус

$$\Gamma_C(y^0) = \;\; \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \leq 0 \quad i \in I(y^0), \;\; \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0$$

и множество $D_C(y^0) = \{\bar{y} \in \Gamma_C(y^0) \mid \langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0\}$.

Нетрудно показать, что, если $\Lambda(y^0) \neq \varnothing$, то $K^{\lambda}_{C}(y^0) = D_C(y^0)$ при всех $\lambda \in \Lambda(y^0)$.

Таким образом, точка $y^0 \in C$ удовлетворяет условию SSONC, если $\Lambda(y^0) \neq \varnothing$ и при любом векторе $\lambda \in \Lambda(y^0)$ выполняется неравенство

$$\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0, \lambda)\bar{y} \rangle \;\geq\; 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{y} \in D_C(y^0).$$

Необходимые условия оптимальности второго порядка в усиленной форме имеют определенные преимущества по сравнению с классическими необходимыми условиями оптимальности второго порядка (SONC) (см., например, [7,8]), которые требуют чтобы для любого вектора $\bar{y} \in D_C(y^0)$ существовал хотя бы один множитель $\lambda \in \Lambda(y^0)$ такой, что

$$\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \ \geq \ 0 .$$

Вообще говоря, условие Куна-Таккера является необходимым условием для точки локального минимума задачи (P) только при выполнении некоторых дополнительных условий регулярности в этой точке. Одним из наиболее известных условий регулярности является условие линейной независимости градиентов $\nabla h_i(y^0) \quad i \in I(y^0) \cup I_0$, где $y^0 \in C$. Более общий характер носит широко применяемое условие регулярности Мангасаряна-Фромовица, требующее чтобы в точке $y^0 \in C$ система векторов $\nabla h_i(y^0) \quad i \in I_0$ была линейно независимой и существовал вектор $\bar{y}^0$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y^0), \ \bar{y}^0 \rangle = 0, \ i \in I_0, \quad \langle \nabla h_i(y^0), \ \bar{y}^0 \rangle < 0, \ i \in I(y^0).$$

В [9,10] предложена ослабленная версия условия Мангасаряна-Фромовица, названная в [9] ослабленным (обобщенным) условием Мангасаряна-Фромовица (RMFCQ), а в [10] названная CRSC.

Представим множество индексов $I(y^0)$ активных ограничений в точке $y^0 \in C$ в виде $I(y^0) = I^0_C(y^0) \cup I^+_C(y^0)$, где

$$I^0_C(y^0) = \{ i \in I(y^0) \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad \forall \bar{y} \in \Gamma_C(y^0) \}, \quad I^+_C(y^0) = I(y^0) \setminus I^0_C(y^0).$$

Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица ($RMFCQ$), если в некоторой окрестности точки y^0 система векторов $\{ \nabla h_i(y) \ \ i \in I_0 \cup I^0_C(y^0) \}$ имеет постоянный ранг. Как показано в [10,11], ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица имеет достаточно общий характер и выполняется, если имеет место условие регулярности Мангасаряна-Фромовица или какое-либо из условий регулярности, предложенных в работах [4-7].

Известно [3,4], что необходимое условие SSONC выполняется в точке локального минимума задачи (P), если в этой точке выполнено условие постоянного ранга [5] или ослабленное условие постоянного ранга RCRCQ [6]. Следующий пример показывает, что при наличии в оптимальной точке условия регулярности Мангасаряна-Фромовица условие SSONC, вообще говоря, не выполняется, иными словами, условие регулярности Мангасаряна-Фромовица не гарантирует выполнение необходимых условий оптимальности второго порядка в усиленной форме.

Пример 1. Пусть $C = \ y \in R^2 \mid \ h_1(y) = y_1^2 + y_2 \leq 0, \quad h_2(y) = -y_1^2 + y_2 \leq 0 \ , \ f(y) = -y_2$.

Легко видеть, что $y^0 = (0,0)$ - оптимальная точка. Далее,

$$L(y,\lambda) = -y_2 + \lambda_1(y_2 + y_1^2) + \lambda_2(y_2 - y_1^2),$$

$$\nabla_y L(y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2y_1\lambda_1 - 2y_1\lambda_2 \\ -1+\lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\Lambda(y^0) = \{\lambda \in \mathrm{R}^2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_i \geq 0 \ \ i = 1,2\}.$$

Нетрудно убедиться, что $\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^2 \mid \ \bar{y}_2 \leq 0\}$ и условие Мангасаряна-Фромовица выполнено. С другой стороны,

$$D_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^2 \mid \ \bar{y}_2 = 0\},$$

$$\nabla^2_{yy} L(y^0,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(\lambda_1 - \lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и условие SSONC принимает вид: $2(1-2\lambda_2)\bar{y}_1^2 \geq 0$ для всех λ_2 таких, что $0 \leq \lambda_2 \leq 1$, что очевидно не выполняется, например при $\lambda_2 = 1$. В то же время необходимое условие второго порядка SONC выполнено.

Целью данной статьи является получение более общих по сравнению с [3,4] условий, которые позволяют обеспечить справедливость необходимых условий оптимальности второго порядка в усиленной форме.

2. Условие критической регулярности. Положим

$$I_D(y^0) = \{i \in I(y^0) \mid \langle \nabla h_i(y_0), \bar{y}\rangle = 0 \ \ \forall \bar{y} \in D_C(y^0)\},\ I_\#(y^0) = I(y^0) \setminus I_D(y^0).$$

Определение 1. Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено условие критической регулярности, если $rank\ \nabla h_i(y)\ \ i \in I_0 \cup I_D(y^0)\ = const$ для всех y из некоторой окрестности точки y^0.

Отметим, что введенное условие критической регулярности всегда выполняется, если выполнено условие постоянного ранга [5] или ослабленное условие постоянного ранга [6]. Также можно видеть структурную схожесть условия критической регулярности с ослабленным условием Мангасаряна-Фромовица (RMFCQ). Однако данное условие критической регулярности является значительно более жестким по сравнению с RMFCQ.

Лемма 1. Пусть $y^0 \in C$. Существует вектор $\bar{y}^0 \in D_C(y^0)$ такой, что $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0\rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I_D(y^0), \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0\rangle < 0 \quad i \in I_\#(y^0).$

Доказательство. Если множество $I_\#(y^0)$ пусто, то утверждение леммы тривиально. Пусть $I_\#(y^0)$ не пусто. Тогда для любого $i \in I_\#(y^0)$ найдется вектор $\bar{y}^i \in D_C(y^0)$ такой, что $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^i \rangle < 0$. Пусть $\alpha_i \quad i \in I_\#(y^0)$ - положительные числа такие, что их сумма равна 1. Положим

$$\bar{y}^0 = \sum_{i \in I_\#(y^0)} \alpha_i \, \bar{y}^i .$$

Тогда для любого $j \in I_\#(y^0)$ получим

$$\langle \nabla h_j(y^0), \bar{y}^0 \rangle = \sum_{i \in I_\#(y^0)} \alpha_i \, \langle \nabla h_j(y^0), \bar{y}^i \rangle = \sum_{i \in I_\#(y^0) \setminus j} \alpha_i \, \langle \nabla h_j(y^0), \bar{y}^i \rangle + \alpha_j \langle \nabla h_j(y^0), \bar{y}^j \rangle < 0. \quad \square$$

Лемма 2. Пусть $\Lambda(y^0) \neq \varnothing$ в точке $y^0 \in C$. Тогда $\lambda_i = 0$ при всех $i \in I_\#(y^0)$ для любого $\lambda \in \Lambda(y^0)$.

Доказательство. Если $I_\#(y^0) = \varnothing$, то утверждение леммы тривиально. Пусть $I_\#(y^0) \neq \varnothing$. Возьмем любой вектор $\lambda \in \Lambda(y^0)$. В силу леммы 1 существует вектор $\bar{y} \in D_C(y^0)$ такой, что

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I_D(y^0), \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0 \quad i \in I_\#(y^0),$$

и, поскольку $\lambda \in \Lambda(y^0)$, то справедливо равенство

$$\langle \nabla f(y^0) + \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} \lambda_i \, \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0,$$

откуда

$$\sum_{i \in I_\#(y^0)} \lambda_i \, \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0,$$

и, следовательно, $\lambda_i = 0$ для всех $i \in I_\#(y^0)$. $\square$

Следствие 1. При выполнении условий леммы 2 $I_\lambda^{\oplus}(y^0) \subset I_D(y^0)$, $I_\#(y^0) \subset I_\lambda^{\square}(y^0)$.

Справедливость следствия непосредственно вытекает из леммы 2 и определения конуса $K_C^\lambda(y^0)$.

Следует отметить, что, вообще говоря, $I_\lambda^{\oplus}(y^0) \neq I_D(y^0)$ и $I_\#(y^0) \neq I_\lambda^{\square}(y^0)$. Так в Примере 1 для принадлежащего множеству $\Lambda(y^0)$ множителя $\lambda = (1,0)$ имеем $I_\lambda^{\oplus}(y^0) = \{1\}$, в то время как $I_D(y^0) = \{1,2\}$. С другой стороны, $I_\lambda^{\oplus}(y^0) = I_D(y^0)$ для множителя $\lambda = (2^{-1}, 2^{-1})$.

Рассмотрим касательный конус (нижний касательный конус) к множеству C в точке $y^0 \in C$:

$$T_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \exists \text{ функция } o(t) \text{ и число } t_0 > 0 \text{ такие, что } o(t)/t \to 0 \text{ при } t \downarrow 0 \text{ и } y^0 + t\bar{y} + o(t) \in C \quad \forall t \in [0, t_0]\}.$$

Положим

$W_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ i \in I_0 \cup I_D(y^0), \ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \le 0 \ i \in I_\#(y^0)\}$.

Тогда из леммы 1 следует, что

$affW_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ i \in I_0 \cup I_D(y^0)\}$,

$riW_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ i \in I_0 \cup I_D(y^0), \ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0 \ i \in I_\#(y^0)\}$.

Лемма 3. Справедливы следующие равенства

(a) $D_C(y^0) = W_C(y^0) \cap \{\bar{y} \mid \langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0\}$;

(b) $riD_C(y^0) = riW_C(y^0) \cap \{\bar{y} \mid \langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0\}$;

(c) если $\Lambda(y^0) \ne \varnothing$, то $W_C(y^0) = D_C(y^0)$.

Доказательство. a) Действительно, если $\bar{y} \in D_C(y^0)$, то

$\langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0$, $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \le 0 \quad i \in I(y^0), \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0$. Отсюда

$\langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0$, $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ i \in I_0 \cup I_D(y^0), \ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \le 0 \ i \in I_\#(y^0)$,

следовательно, $\bar{y} \in W_C(y^0) \cap \{\bar{y} \mid \langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0\}$. Обратно, если $\bar{y} \in W_C(y^0) \cap \{\bar{y} \mid \langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0\}$, то $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ i \in I_0 \cup I_D(y^0), \ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \le 0 \ i \in I_\#(y^0)$ и, следовательно, вектор $\bar{y}$ удовлетворяет условиям

$\langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0$, $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \le 0 \quad i \in I(y^0), \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0$. Последнее означает, что $\bar{y} \in D_C(y^0)$.

b) В силу леммы 1 существует вектор $\bar{y}^0 \in D_C(y^0)$ такой, что $\langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0$, $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0 \rangle = 0 \ i \in I_0 \cup I_D(y^0), \ \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0 \rangle < 0 \ i \in I_\#(y^0)$ и, следовательно, $\bar{y}^0 \in riW_C(y^0) \cap \{\bar{y} \mid \langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0\}$. Таким образом, $riW_C(y^0) \cap \{\bar{y} \mid \langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0\} \ne \varnothing$. Тогда в силу теоремы 6.5 [12] $riD_C(y^0) = riW_C(y^0) \cap \{\bar{y} \mid \langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0\}$.

c) Пусть $\lambda \in \Lambda(y^0)$. Тогда для любого $\bar{y} \in W_C(y^0)$ справедливо

$$\langle \nabla f(y^0) + \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0,$$

откуда, поскольку в силу леммы 2 $\lambda_i = 0$ для всех $i \in I_{\#}(y^0)$, следует

$$\langle \nabla f(y^0) + \sum_{i \in I_0 \cup I_D(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0.$$

Тогда с учетом определения вектора $\bar{y}$ получаем $\langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0$. Таким образом, $\bar{y} \in W_C(y^0) \cap \{\bar{y} \mid \langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0\}$, что означает $\bar{y} \in D_C(y^0)$ и $W_C(y^0) \subset D_C(y^0)$. Обратное включение следует из (а). □

Лемма 4. Пусть в точке $y^0 \in C$ выполнено условие критической регулярности. Тогда $W_C(y^0) \subset T_C(y^0)$ и для любого $\bar{y} \in riW_C(y^0)$ найдутся дважды непрерывно дифференцируемая функция $r(t)$ и число $t_0 > 0$ такие, что $r(t)/t \to 0$ при $t \to 0$ и $y(t) = y^0 + t\bar{y} + r(t) \in C$ при $t \in [0, t_0]$, $h_i(y(t)) = 0$ $i \in J = I_0 \cup I_D(y^0)$ при $t \in (-t_0, t_0)$.

Доказательство. Пусть $\bar{y} \in riW_C(y_0)$ и пусть $J = I^2(y_0, \bar{y}) \cup I_0$, где $I^2(y^0, \bar{y}) = \{i \in I(y^0) \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0\}$. Тогда для любой *m*-векторной функции *r(t)* такой, что $r(t)/t \to 0$ при $t \downarrow 0$, найдется число $t_0 > 0$ такое, что $h_i(y_0 + t\bar{y} + r(t)) < 0$ для всех $i \in I \setminus I^2(y_0, \bar{y})$ и всех $t \in (0, t_0)$.

Отметим прежде всего, что в силу определения вектора $\bar{y}$ ранг матрицы Якоби системы функций $h_i(y_0 + t\bar{y} + r)$ $i \in J$ относительно переменных (t, r) совпадает совпадает с рангом матрицы Якоби этой системы относительно r. Пусть ранг системы $h_i(y_0 + t\bar{y} + r)$ $i \in J$ относительно r в точке *(t,r)*=(0,0) равен l. Поскольку в случае $\bar{y} \in riW_C(y_0)$ множество $I_D(y^0)$ совпадает с $I^2(y^0, \bar{y})$, то в силу условия критической регулярности ранг l сохранится и в некоторой окрестности точки (0,0). Тогда (см. [11], с.504) l функций системы (для определенности перенумеруем их так чтобы это были $h_1, ..., h_l$) независимы, а остальные (если они есть) от них зависят, т.е. $h_{l+1} = \phi_1(h_1, ... h_l), ..., h_{l+q} = \phi_q(h_1, ... h_l)$, где $\phi_1, ..., \phi_q$ - гладкие функции, причем $\phi_i(0, ..., 0) = \phi_i(h_1(y^0), ..., h_l(y^0)) = 0$ при $i = 1, ..., q$.

Тогда система уравнений

$$h_1(y_0 + t\bar{y} + r) = 0, \ldots, \; h_{l+q}(y_0 + t\bar{y} + r) = 0 \qquad (1)$$

в окрестности точки (0,0) равносильна системе

$$h_1(y_0 + t\bar{y} + r) = 0, \; \ldots, \; h_l(y_0 + t\bar{y} + r) = 0. \qquad (2)$$

Если $l=m$, то по теореме о неявной функции (см. [11], стр.488) данная система определяет в окрестности (0,0) неявную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $r=r(t)$ такую, что $r(0)=0$. Дифференцируя тождества

$h_i(y_0+t\bar{y}+r(t))=0 \quad i=1,...,l$,

получаем

$\langle \nabla h_i(y^0+t\bar{y}+r(t)), \bar{y}+r'(t)\rangle = 0$,

Отсюда при $t=0$ следует

$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}+r'(0)\rangle = 0 \quad i=1,...,l,$

и с учетом того, что $i\in J$ получаем из данной системы равенств

$\langle \nabla h_i(y^0), r'(0)\rangle = 0 \quad i=1,...,l,$

откуда следует, что функция $r(t)$ удовлетворяет условию $r'(0)=\lim\limits_{t\to 0} t^{-1}r(t)=0$.

В случае $l< m$, можно закончить доказательство, используя схему, применявшуюся в доказательстве теоремы 1 [6], и получить, что для любого $\bar{y}\in riW_C(y_0)$ существуют число $t_0>0$ и дважды непрерывно дифференцируемая функция $r(t)$ такие, что $r(t)/t\to 0$ при $t\to 0$ и $y(t)=y^0+t\bar{y}+r(t)\in C$ при $t\in[0,t_0]$, $h_i(y(t))=0$ $i\in J=I_0\cup I_D(y^0)$ при $t\in(-t_0,t_0)$. Последнее означает также, что $riW_C(y^0)\subset T_C(y^0)$ и, следовательно, с учетом замкнутости касательного конуса и $W_C(y^0)\subset T_C(y^0)$.

□

3. Теорема о необходимых условиях оптимальности второго порядка. Следующая теорема обобщает аналогичные результаты [3,4]. Ее доказательство в следует схеме, предложенной в [4] с учетом специфики условия критической регулярности.

Теорема 1. Пусть в точке $y^0\in C$, являющейся решением задачи (*P*), выполнено условие критической регулярности и $\Lambda(y^0)\neq\varnothing$. Тогда в данной точке выполняется условие SSONC.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Возьмем вектор $\lambda\in\Lambda(y^0)$ и в конусе критических направлений выберем любой вектор $\bar{y}\in riD_C(y^0)$. В силу леммы 3 $riD_C(y^0)=riW_C(y^0)$ и по лемме 4 существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $r(t)$ такая, что $r(t)/t\to 0$ при $t\to 0$ и $y(t)=y^0+t\bar{y}+r(t)\in C$ при $t\in[0,t_0]$, $h_i(y(t))=0$ $i\in J=I_0\cup I_D(y^0)$ при $t\in(-t_0,t_0)$, где t_0 - достаточно малое положительное число. Поскольку $y(t) \in C$ при $t \in [0, t_0]$, а точка $y^0 \in C$ является точкой минимума функции f на множестве C, то

$$f(y(t)) - f(y(0)) = t\langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle + t^2\{\frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y^0)\bar{y} \rangle + \langle \nabla f(y^0), r''(0) \rangle\} + o(t^2) =$$

$$= t^2\{\frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y^0)\bar{y} \rangle + \langle \nabla f(y^0), r''(0) \rangle\} + o(t^2) \geq 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2}\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y^0)\bar{y} \rangle + \langle \nabla f(y^0), r''(0) \rangle \geq 0. \qquad (3)$$

С другой стороны, поскольку в силу следствия 1 $I_\lambda^\oplus(y^0) \subset I_D(y^0)$, то при $t \in (-t_0, t_0)$ справедливо тождество

$$\sum_{i \in I_0 \cup I_D(y^0)} \lambda_i h_i(y(t)) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(y(t)) = 0,$$

и, следовательно,

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(y(t)) = \sum_{i=1}^{p} \{\lambda_i h_i(y^0) + t\langle \lambda_i \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} t^2 [\langle \bar{y}, \lambda_i \nabla^2 h_i(y^0)\bar{y} \rangle + \langle \lambda_i \nabla h_i(y^0), r''(0) \rangle]\} + o(t^2),$$

откуда

$$\frac{1}{2}\langle \bar{y}, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla^2 h_i(y^0)\bar{y} \rangle + \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y^0), r''(0) \rangle = 0. \qquad (4)$$

Складывая (3) и (4), получим

$$\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y^0)\bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla^2 h_i(y^0)\bar{y} \rangle \geq 0,$$

откуда

$$\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0, \lambda)\bar{y} \rangle \geq 0$$

для любого вектора $\bar{y} \in riD_C(y^0)$ и, следовательно, для любого $\bar{y} \in D_C(y^0)$.

С учетом равенства $K_C^\lambda(y^0) = D_C(y^0)$ получаем утверждение теоремы. □

Следствие 2. Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи (P), выполнено условие критической регулярности $\Lambda(y^0) \neq \varnothing$. Тогда в данной точке

$$\sup_{\lambda \in \Lambda(y^0)} \langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0, \lambda)\bar{y} \rangle = \inf_{\lambda \in \Lambda(y^0)} \langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0, \lambda)\bar{y} \rangle$$

для всех $\bar{y} \in D_C(y^0)$.

Доказательство. Из условия (4) следует

$$\langle \bar{y}, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla^2 h_i(y^0)\bar{y} \rangle = -2\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(y^0), r''(0) \rangle = 2\langle \nabla f(y^0), r''(0) \rangle ,$$

откуда

$$\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0, \lambda)\bar{y} \rangle = 2\langle \nabla f(y^0), r''(0) \rangle + \langle \bar{y}, \nabla^2 f(y^0)\bar{y} \rangle .$$

Нетрудно видеть, что правая часть последнего равенства не зависит от λ. Следовательно, $\langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(y^0, \lambda)\bar{y} \rangle = const$ для каждого $\bar{y} \in riD_C(y^0)$, а значит и для любого $\bar{y} \in D_C(y^0)$. □

Заключение

В статье получены условия регулярности, обеспечивающие справедливость необходимых условий оптимальности второго порядка в усиленной форме для задачи математического программирования. Результаты обобщают необходимые условия оптимальности, полученные другими авторами при условиях регулярности постоянного ранга и ослабленных условиях постоянного ранга.

Литература

1. Mangasarian, O.L., Fromovitz, S. The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints// J. Mathematical Analysis and Appl.. 17, 1967. P. 37-47.
2.Baccari A., Trad A. On the classical necessary second-order optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints// SIAM J. Optimization. 15, 2004. P.394-408.
3. Andreani R., Eshague C.E., Schverdt M.L. Constant rank condition and second-order constraint qualification// J. Optimization Theory and Appl., 146, 2010. P. 255-266.
4.Minchenko L., Stakhovski S. Parametric nonlinear programming problems under relaxed constant rank regularity condition// SIAM Journal on Optimization. V.21, N1. 2011. P.314-332.
5. Janin R., Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming// Mathematical Programming Study 21 (1984), pp. 110-126.
6.Minchenko L.I., Stakhovski S.M. On relaxed constant rank regularity condition in mathematical programming // Optimization. V. 60, N4. 2011. P. 429-440.
7. Andreani R., Martinez J.M., Schuverdt M.L. On second-order optimality conditions for nonlinear programming// Optimization, 56, 2007. P. 529-542.
8. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
9.Минченко Л.И., Стаховский С.М. К обобщению условия регулярности Мангасаряна-Фромовица// Доклады БГУИР, №8, 2010. С.104-109.
10. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L., Silva P.J.S. Two new weak constraint qualifications and applications// SIAM Journal on Optimization. V.22, N3. 2012. P.1109-1125.
11. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. М., Наука, 1981.
12. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М., 1973.
13. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. Минск, Изд. БГУ, 2007.

РЕФЕРАТ

УДК 517.977

Л. И. Минченко, А. Е. Лещёв. **Условие критической регулярности и необходимые условия оптимальности второго порядка.**

В работе выводятся новые условия регулярности, обеспечивающие справедливость необходимых условий оптимальности второго порядка в усиленной форме для задачи математического программирования. Результаты обобщают необходимые условия оптимальности, полученные другими авторами при условиях регулярности постоянного ранга и ослабленных условиях постоянного ранга.

CRITICAL REGULARITY CONDITION AND SECOND ORDER NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS

A.E. LESGHOV , L.I.MINCHENKO

Abstract

A new second order regularity condition is introdused and strong second order necessary optimality conditions are proved for nonlinear programms. The main result generalizes the second order necessary optimality conditions which were proved earlier under constant rank and relaxed constant ranks constraint qualifications.