Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра программного обеспечения информационных технологий

Н.И. Мельник

Моделирование

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольных работ для студентов специальности I-40 02 01
«Вычислительные машины, системы и сети» заочной формы обучения

Минск 2006

УДК 004.414.231(075.8)
ББК 32.816 я 73
М 48

Мельник Н.И.

М 48 Моделирование: Учебно-метод. пособие по выполнению контрольных работ для студ. спец. I-40 02 01 «Вычислительные машины, системы и сети» заоч. формы обуч. / Н.И. Мельник. – Мн.: БГУИР, 2006. – 27 с.: ил.

ISBN 985-444-901-7

Пособие содержит материал, касающийся вопросов построения аналитических моделей различного рода устройств, представляемых в виде систем массового обслуживания.

Используется студентами заочной формы обучения при выполнении контрольных заданий и подготовке к экзамену по курсу «Моделирование». Приведены примеры построения моделей, а также перечень вопросов для подготовки к экзамену и список рекомендуемой литературы.

УДК 004.414.231(075.8)
ББК 32.816 я 73

ISBN 985-444-901-7

Содержание

Аналитическое и имитационное моделирование

Цель работы: изучение методов построения и исследования аналитических и имитационных моделей различных систем.

1. Системы массового обслуживания. Потоки событий

При моделировании реальные системы могут быть представлены как системы массового обслуживания (СМО), если при их функционировании можно выделить два процесса – поступление заявок на обслуживание и обслуживание заявок. Таким образом могут быть представлены различные по своей физической природе процессы – экономические, технические, производственные и т.д.

Для описания работы СМО используется понятие *поток событий* – последовательность событий, происходящих одно за другим в некоторые моменты времени. В СМО будем выделять два потока:

- входной поток: множество моментов времени поступления в систему заявок;

- поток обслуживаний: множество моментов времени окончания обработки системой заявок в предположении, что обслуживание осуществляется непрерывно.

Элементарная СМО общего вида представлена на рис. 1.

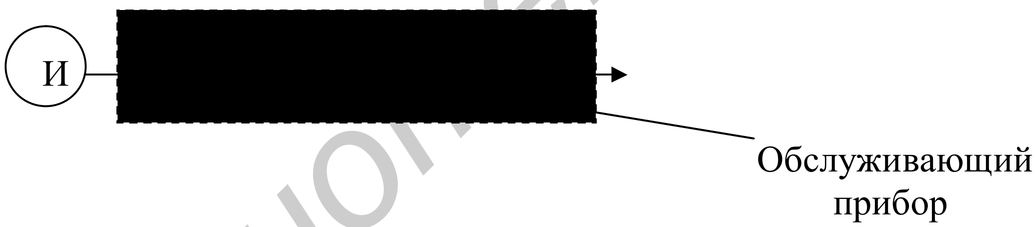


Рис. 1. СМО общего вида:
И – источник заявок;
Н – накопитель (очередь);
К – канал обслуживания

СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц, которые мы будем называть *каналами* обслуживания. В зависимости от количества каналов СМО могут быть одноканальными и многоканальными.

СМО бывают двух типов.

1.*СМО с отказами.* В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему не обслуженной.

2.*СМО с ожиданием.* Заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает освобождения одного из каналов. Порядок выборки заявок из очереди определяется *дисциплиной обслуживания.* Некоторые наиболее употребляемые дисциплины:

1) FIFO (first in – first out) – заявки обслуживаются в порядке поступления;

2) LIFO (last in – first out) – первой обслуживается заявка, поступившая последней;

3) SIRO (service in random order) – обслуживание в случайном порядке;

4) приоритетные системы.

Число мест в очереди m может быть как ограниченным, так и неограниченным. При $m = 0$ СМО с очередью превращается в СМО с отказами. Очередь может иметь ограничения не только по количеству стоящих в ней заявок (длине очереди), но и по времени ожидания (такие СМО называются «системами с нетерпеливыми клиентами»).

Для краткой характеристики СМО Д. Кендалл ввел символику (нотацию):

$$A/B/S/m\ ,$$

где S – число обслуживающих приборов;

m – количество мест ожидания (если не указано, то считается, что m=0, т.е. это система с отказами); при неограниченной очереди в качестве m ставят символ ∞.

A и B характеризуют соответственно поток требований и поток обслуживания, задавая функцию распределения интервалов между заявками во входном потоке и функцию распределения времен обслуживания.

A и B могут принимать следующие значения:

D – детерминированное распределение;

M – показательное;

E_r – распределение Эрланга порядка r;

H_r - гиперпоказательное;

G – распределение общего вида, т.е. любое другое, отличное от вышеперечисленных.

При этом подразумевается, что потоки являются рекуррентными, т.е. интервалы между событиями независимы и имеют одинаковое распределение.

Иногда в обозначение добавляют еще один символ /k – количество источников заявок.

Характеристики СМО существенно зависят от вида и параметров входного потока и потока обслуживаний.

Поток событий называется *однородным*, если он характеризуется только моментами наступления событий и задается последовательностью $\{t_n\}$, где $\{t_n\} = \{0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_n \le ...\}$ – моменты наступления событий.

Соответственно поток событий является *неоднородным*, если он задается последовательностью $\{t_n, f_n\}$, где t_n – моменты наступления событий, а f_n – набор признаков событий (приоритеты, принадлежность тому или иному источнику, тип канала для его обслуживания и т.д.).

Поток *регулярный*, если события поступают через равные промежутки времени. Соответственно поток *нерегулярный*, если интервалы между событиями представляют собой случайные величины.

Поток является *стационарным*, если вероятность наступления заданного числа событий в течение интервала времени фиксированной длины зависит только от продолжительности интервала и не зависит от его расположения на временной оси. Иначе говоря, вероятностные характеристики и интенсивность такого потока со временем не изменяются.

Поток является *ординарным*, если вероятность появления двух или более событий в течение элементарного интервала времени $\Delta t \to 0$ есть величина бесконечно малая по сравнению с вероятностью появления одного события на этом интервале. Другими словами, два и более событий в таком потоке произойти одновременно не могут.

Поток называется потоком *без последействия*, если для любых неперекрывающихся интервалов времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Иногда это свойство формулируют следующим образом: распределение времени до ближайшего события не зависит от времени наблюдения, т.е. от того, сколько времени прошло после последнего события. Отсутствие последействия в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга.

Если промежутки времени между последовательными событиями представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины, поток называется *рекуррентным* (поток Пальма, поток с ограниченным последействием).

Поток, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется *простейшим.* Название «простейший» связано с тем, что математическое описание событий, связанных с простейшими потоками, оказывается наиболее простым.

Простейший поток играет среди других потоков особую роль при построении и исследовании моделей систем, в которых события, приводящие к изменению состояний, могут произойти в любой произвольный момент времени (*непрерывно-стохастические модели*).

Для него число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, подчиняется закону Пуассона, поэтому его иначе называют стационарным пуассоновским.

Вероятность того, что за интервал времени τ в простейшем потоке произойдет ровно m событий, определяется следующим выражением:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} .$$

Здесь λ – интенсивность, т.е. среднее число событий в единицу времени.

Вероятность того, что в течение интервала времени τ не произойдет не одного события, составляет

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}.$$

Вероятность того, что за это время произойдет хотя бы одно событие

$$P_{\geq 1}(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}.$$

При построении и анализе непрерывно-стохастических моделей исследуются вероятности появления или не появления событий в течение элементарного интервала времени $\Delta t \to 0$. Произведя замену τ на Δt и разлагая $e^{-\lambda\Delta t}$ в степенной ряд, получим, пренебрегая величинами высшего порядка малости,

$$P_0(\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + \frac{1}{2!}(\lambda\Delta t)^2 - ... = 1 - \lambda\Delta t + 0\Delta t \cong 1 - \lambda\Delta t.$$

Вероятность появления хотя бы одной заявки

$$P_{\geq 1}(\Delta t) = 1 - P_0(\Delta t) = \lambda\Delta t.$$

Учитывая ординарность простейшего потока, можно утверждать, что последнее выражение представляет собой вероятность появления одного события.

Иногда удобней анализировать системы, рассматривая случайные интервалы T между событиями. Их величины имеют показательное распределение, для которого функция распределения вероятностей и функция плотности вероятностей имеют вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t};$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение для T:

$$m_T = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}.$$

Простейший поток обладает следующими особенностями:

1. Сумма M независимых, ординарных, стационарных потоков заявок с интенсивностями λ_i (i = 1, ..., M) сходится к простейшему потоку с интенсивностью, равной сумме интенсивностей исходных потоков при условии, что складываемые потоки оказывают приблизительно одинаково малое влияние на суммарный поток. Сходимость суммарного потока к простейшему осуществляется очень быстро. Практически можно считать, что сложение четырех-пяти стационарных, ординарных, независимых потоков, сравнимых по интенсивности, достаточно для того, чтобы суммарный поток был близок к простейшему.

Таким образом, для выяснения всех свойств суммарного потока достаточно знать лишь интенсивности суммируемых потоков и практически не требуется знать внутреннюю структуру этих потоков.

Простейший поток обладает устойчивостью, состоящей в том, что при суммировании независимых простейших потоков получается снова простейший поток, причем интенсивности складываемых потоков суммируются.

2. Поток заявок, полученный путем случайного разрежения исходного потока, когда каждая заявка с определенной вероятностью p исключается из пото-

ка независимо от того, исключены другие заявки или нет, образует простейший поток с интенсивностью

$$\lambda_p = p\,\lambda\,,$$

где λ – интенсивность исходного потока. В отношении исходного потока заявок делается предположение лишь об ординарности и стационарности.

3. Для простейшего потока характерно, что поступление заявок через короткие промежутки времени более вероятно, чем через длинные, – 63 % промежутков времени между заявками имеют длину, меньшую среднего значения $1/\lambda$. Следствием этого является то, что простейший поток по сравнению с другими видами потоков создает наиболее тяжелый режим работы системы. Поэтому предположение о том, что на вход системы поступает простейший поток заявок, приводит к определению предельных значений характеристик качества обслуживания. Если реальный поток отличен от простейшего, то система будет функционировать не хуже, чем это следует из полученных оценок.

4. Интервал времени между произвольным моментом времени и моментом поступления очередной заявки имеет такое же распределение с тем же средним $\mathrm{M}[\tau] = 1/\lambda$, что и интервал времени между двумя последовательными заявками. Эта особенность простейшего потока является следствием отсутствия последействия.

Важная роль простейшего потока при моделировании определяется тем, что простейшие или близкие к ним потоки часто встречаются на практике. Кроме того, при анализе СМО можно получить вполне удовлетворительные результаты, заменяя входной поток любой структуры простейшим с той же интенсивностью.

При моделировании систем, в которых случайные события, приводящие к изменению состояний, могут происходить только в моменты времени, отстоящие друг от друга на величину, кратную значению тактового интервала T (*дискретно-стохастические модели*), для описания интервалов времени между событиями используют регулярный просеянный поток. Его можно получить, удаляя в регулярном потоке события с вероятностью π и оставляя с вероятностью $1\text{-}\pi$. Просеянный поток иногда называют дискретным пуассоновским, так как его свойства аналогичны для моментов времени, кратных периоду T, свойствам простейшего потока. К просеянному регулярному потоку приводит, например, регулярный поток данных, передаваемый по каналам связи с контролем наличия сбоев в передаваемом коде и исправлением путем повторной передачи.

Вероятность того, что величина интервала между событиями в просеянном потоке окажется равным i тактам:

$$p_i = \pi^{i-1}(1-\pi)\,.$$

Это выражение соответствует геометрическому распределению.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение для интервала времени между событиями в таком потоке равны соответственно:

$$m = \frac{T}{1-\pi},$$

$$\sigma = m\sqrt{\pi} = \frac{T\sqrt{\pi}}{1-\pi}.$$

2. Марковский случайный процесс

Пусть имеется некоторая система, состояние которой может меняться с течением времени. Если состояние меняется случайным, непредсказуемым образом, будем говорить, что в системе протекает случайный процесс.

Случайный процесс называется процессом с дискретными состояниями, если возможные состояния системы

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

можно перечислить (пронумеровать) одно за другим, а сам процесс состоит в том, что время от времени система скачком (мгновенно) переходит из одного состояния в другое.

Случайный процесс называется процессом с дискретным временем, если переходы из состояния в состояние возможны только в строго определенные моменты времени. В промежутках между этими моментами система сохраняет свое состояние.

Случайный процесс называется процессом с непрерывным временем, если переход системы из состояния в состояние возможен в любой наперед неизвестный, случайный момент.

Случайный процесс, протекающий в системе, называется *марковским процессом* (цепь Маркова), или процессом без последействия, если для каждого момента времени t_i вероятность любого последующего состояния системы зависит только от текущего состояния и не зависит от того, когда и каким путем система пришла в это состояние (т.е. от того, как развивался процесс в прошлом).

Иными словами, воздействие всей предыстории процесса на его будущее полностью сосредоточено в текущем значении процесса. Отсюда следует, что цепь Маркова должна обладать свойством отсутствия последствия. Это означает, что вероятность перехода в следующее состояние не должна зависеть от того, сколько времени процесс пребывал в текущем состоянии.

Можно доказать, что, если число состояний системы конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в любое другое, то существуют предельные (финальные) вероятности состояний, которые не зависят от времени и начального состояния системы. Сумма предельных вероятностей всех состояний системы равна единице:

$$\sum_{i-1}^{n} P_i = 1.$$

Это так называемое нормировочное уравнение.

Таким образом, при $t \to \infty$ в системе устанавливается некоторый предельный *стационарный режим*, который состоит в том, что система случайным образом меняет свои состояния, но вероятность каждого из них уже не зависит от времени. Эта вероятность представляет собой не что иное, как относительное время пребывания системы в данном состоянии.

При моделировании систем процесс их функционирования удобно представлять в виде графа, вершинами которого являются состояния S_i, а направленные дуги описывают переходы между состояниями. Если процесс является марковским и известны вероятности переходов из состояния в состояние, то вероятности состояний P_i могут быть найдены исходя из того, что вероятность любого состояния S_i равна сумме произведений вероятностей состояний S_j, из которых есть переход в данное состояние на вероятности этих переходов p_{ji}, т.е

$$P_i = \sum_j P_J p_{ji} \quad .$$

Рассмотрим на примере эту процедуру (рис 2.)

Система может находиться в одном из трех состояний: S_1, S_2, или S_3.

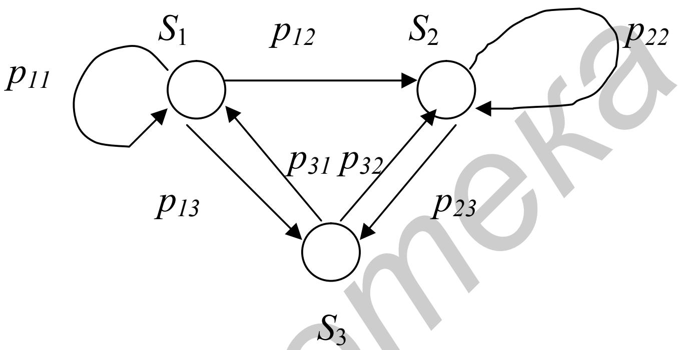


Рис. 2. Пример графа для случайного процесса

Запишем систему уравнений для определения вероятностей состояний:

$$P_1 = p_{11}P_1 + p_{31}P_3 ;$$
$$P_2 = p_{12}P_1 + p_{32}P_3 + p_{22}P_2 ;$$
$$P_3 = p_{13}P_1 + p_{23}P_2 .$$

Попытка непосредственно решить эту систему неизбежно приведет к тождеству. Но тем не менее решение существует и может быть получено, если воспользоваться нормировочным уравнением

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

Если подставить его вместо одной из строк системы, то можно будет получить значения вероятностей состояний.

Допустим, вероятности переходов из состояния в состояние имеют следующие значения:

$p_{11} = 0{,}25$, $p_{12} = 0{,}5$, $p_{13} = 0{,}25$, $p_{22} = 0{,}5$, $p_{23} = 0{,}5$, $p_{31} = 0{,}5$, $p_{32} = 0{,}5$.

Тогда решение системы уравнений дает следующие результаты:

$$P_1 = 0{,}2,\ P_2 = 0{,}5,\ P_3 = 0{,}3.$$

3. Дискретно-стохастические модели

Рассмотрим пример исследования вычислительного узла с использованием аппарата марковской дискретной цепи (рис. 3).

Из памяти макрокоманд (МК) по синхросигналу через каждые два такта в арифметико-логическое устройство (АЛУ) считываются макрокоманды. Если АЛУ готово принять макрокоманду, она обрабатывается, иначе макрокоманда загружается в регистровую память (РП) и ожидает освобождения АЛУ. При полном заполнении РП макрокоманда блокируется в памяти макрокоманд и процесс дальнейшей выборки приостанавливается. Интервалы времени обработки макрокоманд в АЛУ случайны и имеют геометрическое распределение с параметром π, т.е. с вероятностью $(1 - \pi)$ обработка макрокоманды в АЛУ по окончании очередного тактового интервала завершится, а с вероятностью π продлится еще на один интервал.

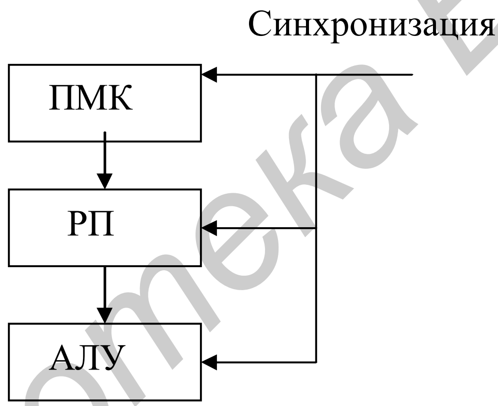


Рис. 3. Система АЛУ – память

При построении и исследовании модели будем пользоваться представлением данного устройства как СМО. Структура этой СМО изображена на рис. 4.

Построим математическую модель и исследуем ее. Так как поток обслуживаний представляет собой просеянный регулярный поток, то процесс будет марковским, и можно определить финальные вероятности состояний этой системы.

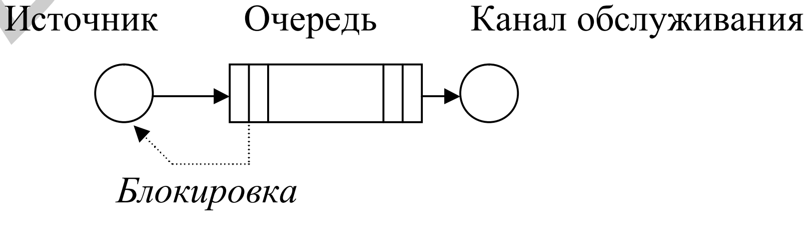


Рис. 4. Представление системы «АЛУ – память» как СМО

Будем определять состояние системы трехкомпонентным вектором: jt_1t_2. Комбинаторная составляющая этого вектора j – количество заявок, находящихся в накопителе (длина очереди), $j = 0,1,2,...,n$.

Временная составляющая t_1 – число тактов, оставшихся до появления заявки на выходе источника (t_1 = 0, 1, 2). Значение 0 означает, что источник заблокирован.

Составляющая t_2 определяет состояние канала обслуживания (АЛУ) и может принимать два значения:

$t_2 = 0$ – канал свободен;

$t_2 = 1$ – канал занят обслуживанием заявки.

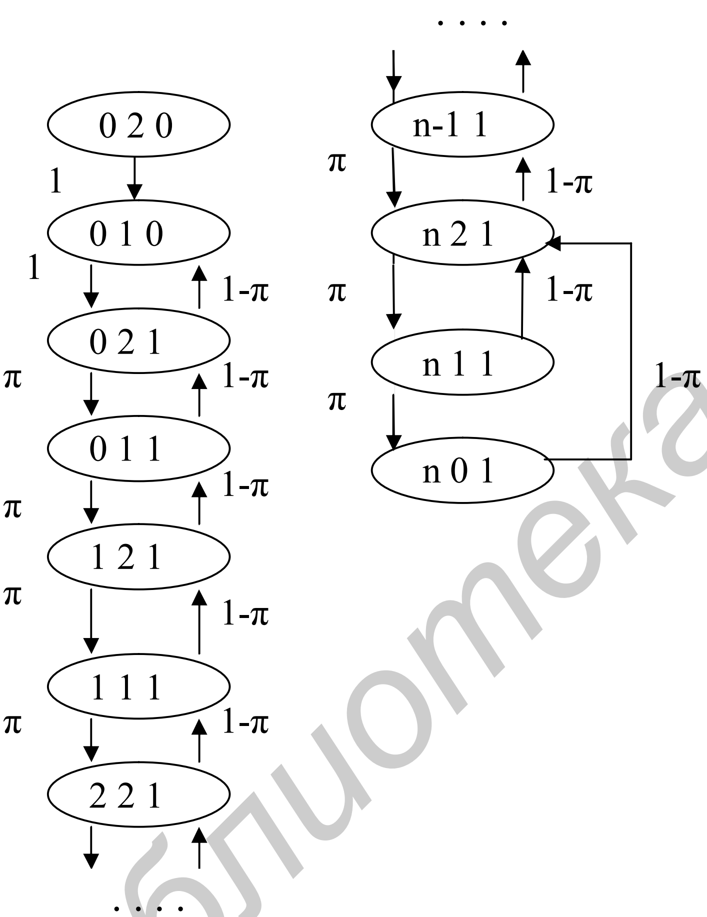


Рис. 5. Граф переходов для системы «АЛУ – память»

Построим граф (рис. 5.) и систему уравнений для стационарных (финальных) вероятностей состояний $P_{jt_1t_2}$.

Состояние 020 является «невозвратным», то есть, покинув это состояние, система больше в него не вернется, поэтому $P_{020} = 0$.

1. $P_{010} = (1-\pi)P_{021} + P_{020}$.
2. $P_{021} = (1-\pi)P_{011} + P_{010}$.
3. $P_{i21} = \pi P_{i-111} + (1-\pi)P_{i11}$, $(i = \overline{1, n-1})$.
4. $P_{i11} = (1-\pi)P_{i+121} + \pi P_{i21}$, $(i = \overline{0, n-1})$.
5. $P_{n21} = \pi P_{n-111} + (1-\pi)P_{n11} + (1-\pi)P_{n01}$.
6. $P_{n11} = \pi P_{n21}$.
7. $P_{n01} = \pi P_{n11} + \pi P_{n01}$.

Обозначим:

$$p = P_{010}, \qquad \omega = \frac{\pi}{1-\pi}.$$

Тогда из уравнений 1 и 2 получим

$$P_{021} = \frac{1}{1-\pi}p, \; P_{011} = \frac{\omega}{1-\pi}p.$$

Далее, проведя индукцию по i, будем иметь

$$P_{i21} = \frac{\omega^{2i}}{1-\pi}p, \quad (i = \overline{0, n});$$

$$P_{i11} = \frac{\omega^{2i+1}}{1-\pi}p, \quad (i = \overline{0, n-1}).$$

Из уравнений 6 и 7 системы определяем вероятности:

$$P_{n11} = \omega^{2n+1}p;$$

$$P_{n01} = \omega^{2n+2}p.$$

Уравнение 5 превращается в тождество. Используя уравнение нормировки

$$\sum P_{jt_1t_2} = 1 \quad ,$$

получим

$$p = \left[1 + \frac{1}{1-\pi}\sum_{i=0}^{2\omega}\omega^{i} + \omega^{2n+1} + \omega^{2n+2}\right]^{-1}.$$

Отсюда, учитывая, что сумма – это сумма геометрической прогрессии, получим

$$p = \frac{2(1-\pi)-1}{2(1-\pi)-\omega^{2n+2}}.$$

Используя полученное значение p (фактически это вероятность простоя АЛУ) и рассчитав вероятности всех остальных состояний, можно найти другие характеристики системы.

А. Среднее время обслуживания заявки системой в целом (время пребывания заявки в системе) S.

При прохождении заявки через систему, определенную долю времени она может пребывать заблокированной в источнике, часть времени находиться в очереди и, наконец, некоторое время обслуживаться каналом. Для достаточно большого интервала времени работы системы T_p среднее время, затраченное на пребывание заявок в фазе обслуживания $T^*=P_{обсл}\,T_p$, где $P_{обсл}$ представляет собой сумму вероятностей всех состояний, в которых происходит обслуживание заявки каналом.

Для одной заявки получаем: $SP_{обсл} = m$,

где
$$m = \frac{T}{1-\pi}$$
среднее значение интервала между событиями в просеянном регулярном потоке с вероятностью просеивания π и тактовым интервалом T. Заметим, что единственным состоянием данной системы с отличной от нуля вероятностью, в котором канал не обслуживает заявку, является состояние 010, вероятность которого обозначим как p. Следовательно, $P_{обсл} = 1 - p$. Отсюда
$$S = \frac{m}{P_{обсл}} = \frac{T}{1-\pi}\cdot\frac{1}{1-p}.$$

Б. Интенсивность потока обработанных заявок (абсолютная пропускная способность):
$$\lambda = (1-p)(1-\pi)\frac{1}{T},$$
где $(1-p)$ – вероятность того, что канал обрабатывал заявку, $(1-\pi)$ – вероятность того, что обработка закончилась.

В. Средняя длина очереди $L_{оч} = \sum_j jP_{jt1t2}$.

4. Непрерывно-стохастические модели

Задачи теории массового обслуживания – нахождение вероятностей различных состояний СМО, а также установление зависимости между заданными параметрами (числом каналов n, интенсивностью потока заявок λ, распределением времени обслуживания и т.д.) и *характеристиками эффективности* работы СМО. В качестве таких характеристик могут рассматриваться, например, следующие:

- среднее число заявок A, обслуживаемое СМО в единицу времени, или *абсолютная пропускная способность* СМО;

- вероятность обслуживания поступившей заявки Q, или *относительная пропускная способность* СМО; $Q = A/\lambda$;

- вероятность отказа $P_{отк}$, т.е вероятность того, что поступившая заявка не будет обслужена, получит отказ; $P_{отк} = 1 - Q$;

- среднее число заявок в СМО (обслуживаемых или ожидающих в очереди) L_c;

- среднее число заявок в очереди $L_{оч}$;

- среднее время пребывания заявки в СМО (в очереди или под обслуживанием) W_c;

- среднее время пребывания заявки в очереди $W_{оч}$;

- среднее число занятых каналов $\bar{k}$.

В общем случае все эти характеристики зависят от времени. Но многие СМО работают в неизменных условиях достаточно долгое время, и поэтому для них успевает установиться режим, близкий к стационарному. В дальнейшем, не оговаривая этого каждый раз специально, будем вычислять финальные вероятности состояний и финальные характеристики эффективности СМО, относящиеся к предельному, стационарному режиму ее работы.

Для анализа непрерывно-стохастических моделей будем использовать *диаграммы интенсивностей переходов* (ДИП), представляющие собой графы, описывающие процесс изменения состояний моделируемой системы. Вершины этого графа обозначают возможные состояния системы, а направленные дуги – переходы между ними. Дугам приписываются числа, соответствующие интенсивностям переходов (а не вероятностям). В такой диаграмме нет дуг из состояния в это же состояние (т.е. петель). Каждой дуге соответствует так называемый «*поток вероятности*». Под этим термином мы будем понимать произведение вероятности состояния, из которого исходит дуга, на интенсивность перехода.

Для определения вероятностей состояний будем исходить из закона сохранения потоков вероятностей: сумма входящих потоков вероятностей для любого состояния равна сумме исходящих потоков. Например, для состояния S_k на рис. 6 согласно этому закону можно записать

$$(\lambda_k + \mu_k)\, P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1}.$$

При построении ДИП, если не оговаривается иное, будем определять состояние системы количеством заявок, находящихся в ней в данный момент времени.

Когда переходы происходят только в соседние состояния (см. рис. 6), говорят о процессе «размножения и гибели» и соответственно об интенсивностях, с которыми может увеличиваться или уменьшаться количество заявок в системе. Для такого рода моделей можно при выписывании уравнений для вероятностей состояний пользоваться правилом равенства встречных потоков вероятностей через сечение диаграммы.

Например, для сечения, проведенного между состояниями S_0 и S_1, справедливо равенство

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 .$$

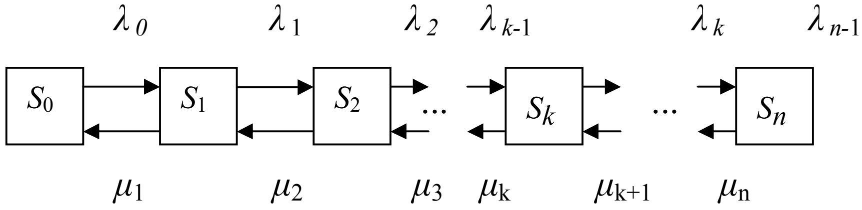


Рис. 6. Процесс «размножения и гибели»

В качестве примера построения и исследования модели рассмотрим **одноканальную СМО с фиксированным числом мест ожидания (с ограниченной очередью) – M/M/1/*m*.** Входной поток заявок простейший с интенсивностью λ, поток обслуживаний простейший с интенсивностью μ, количество мест ожидания m. Заявка, заставшая очередь полностью заполненной, теряется. Максимальное количество заявок, присутствующих в системе – m+1 (m заявок в очереди и одна заявка в канале).

ДИП для этой системы представлена на рис. 7.

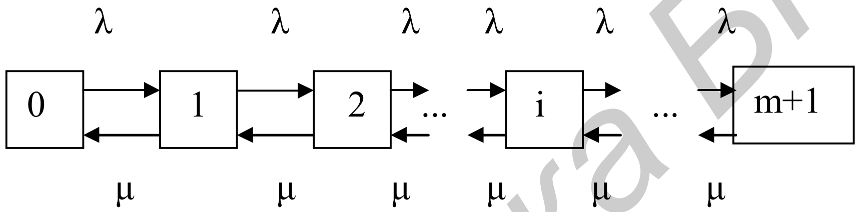


Рис. 7. ДИП для системы **M/M/1/*m***

Воспользовавшись правилом равенства встречных потоков вероятностей через сечение диаграммы и введя обозначения $P_0 = p$ и $\lambda/\mu = \omega$, получим:

$$\lambda P_0 = \mu P_1, \quad P_1 = (\lambda/\mu)P_0 = \omega p;$$
$$\lambda P_1 = \mu P_2, \quad P_2 = (\lambda/\mu)P_1 = \omega^2 p;$$
$$\lambda P_2 = \mu P_3, \quad P_3 = (\lambda/\mu)P_2 = \omega^3 p;$$
$$\ldots$$

По индукции получаем $P_i = \omega^i p$.

Для определения значения $P_0 = p$ воспользуемся нормировочным уравнением:

$$\sum_{i=0}^{n+1} P_i = 1, \text{ или } \sum_{i=0}^{n+1} \omega^i p = p \sum_{i=0}^{n+1} \omega^i = 1.$$

Учитывая, что полученная сумма представляет собой сумму геометрической прогрессии, в которой n + 2 слагаемых, получим

$$\frac{p(1-\omega^{n+2})}{1-\omega} = 1.$$

Окончательно:

$$p = \frac{1-\omega}{1-\omega^{n+2}} \ .$$

Характеристики эффективности:

$$A = \lambda(1-\omega_{m+1}); \quad Q = 1-\omega_{m+1}; \quad P_{отк} = P_{m+1}.$$

Среднее число занятых каналов (вероятность того, что канал занят):

$$\bar{k} = 1 - P_0 .$$

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \sum_{i=1}^{m} iP_{i+1} = \frac{\omega^2[1-\omega^m(m+1-m\omega)]}{(1-\omega^{m+2})(1-\omega)}.$$

Среднее число заявок в СМО: $L_c = L_{оч} + \bar{k}$.

По формуле Литтла можно получить средние значения времен пребывания заявки в системе и в очереди:

$$W_c = L_c / \lambda; \ W_{оч} = L_{оч} / \lambda.$$

Теперь, не рассматривая подробно процедуру получения аналогичных результатов, приведем эти результаты для ряда СМО различной конфигурации.

Многоканальная СМО с отказами M/M/n (задача Эрланга). На *n*-канальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ, время обслуживания – показательное с параметром $\mu = 1/\sqrt{t_{обсл}}$. Состояния СМО нумеруются по числу заявок, находящихся в СМО (в силу отсутствия очереди оно совпадает с числом занятых каналов, см. ДИП на рис.8):

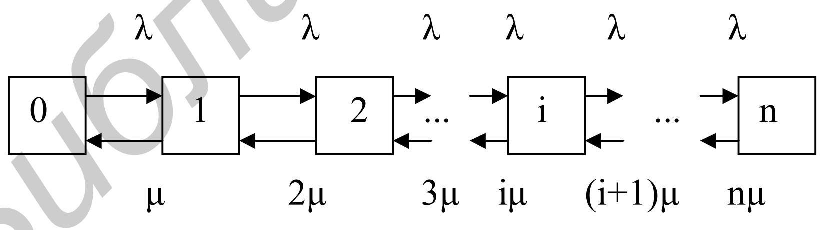


Рис. 8. ДИП для системы **M/M/n**

Финальные вероятности состояний выражаются формулами Эрланга:

$$P_o = \{1 + \frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^2}{2!} + \ldots + \frac{\omega^n}{n!}\}^{-1}; \quad P_k = \frac{\omega^k}{k!} P_0; \quad (k = 1,2\ldots n).$$

Характеристики эффективности:

$$A = \lambda(1-P_n);\ Q = 1-P_n;\ P_{отк} = P_n = \frac{\omega^n}{k!};\ \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \omega(1-P_n).$$

Простейшая одноканальная СМО с неограниченной очередью M/M/1/∞.

На одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ, время обслуживания — показательное с параметром $\mu = 1/\sqrt{t_{обсл}}$. Длина очереди не ограничена. Финальные вероятности существуют только при $\omega = \lambda/\mu < 1$ (при $\omega \geq 1$ очередь растёт неограниченно). Состояния СМО нумеруются по числу заявок, присутствующих в системе в данный момент времени (находящихся в очереди или обслуживающихся). ДИП для этой СМО отличается от ДИП для системы M/M/1/m только тем, что она не ограничена слева.

Финальные вероятности состояний выражаются формулами :

$$P_0 = 1-\omega;\quad P_k = \omega^k(1-\omega);\ (k = 1,2\ldots).$$

Характеристики эффективности:

$$A = \lambda;\ Q = 1-P_n;\ P_{отк} = 0;$$

$$L_c = \frac{\omega}{1-\omega};\ L_{оч} = \frac{\omega^2}{1-\omega};\ W_c = \frac{\omega}{\lambda(1-\omega)};\ W_{оч} = \frac{\omega^2}{\lambda(1-\omega)}.$$

Простейшая многоканальная СМО с неограниченной очередью M/M/n/∞. На n-канальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ, время обслуживания одной заявки – показательное с параметром $\mu = 1/\sqrt{t_{обсл}}$. Финальные вероятности существуют только при $\omega/n < 1$, где $\omega = \lambda/\mu$. Состояния СМО нумеруются по числу заявок в СМО.

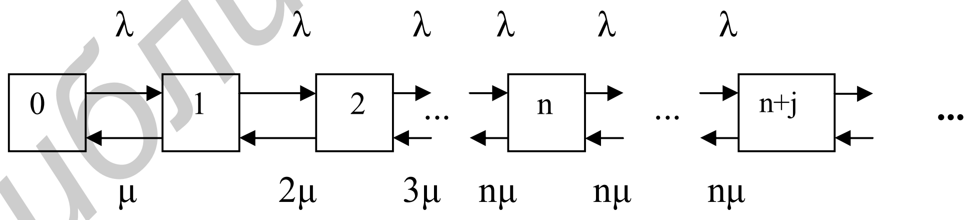


Рис. 9. ДИП для системы **M/M/n/∞**

Финальные вероятности состояний выражаются формулами:

$$P_0 = \{1 + \frac{\omega}{1!} + \ldots + \frac{\omega^n}{n!} + \frac{\omega^{n+1}}{n!(n-\omega)}\}^{-1};\quad P_k = \frac{\omega^k}{k!}P_0;\quad (1 \leq k \leq n);$$

$$P_{n+r} = \frac{\omega^{n+r}}{n^r n!}P_0,\quad (r \geq 1).$$

Характеристики эффективности СМО:

$$\bar{k} = \lambda / \mu = \omega ;$$

$$L_{оч} = \frac{\omega^{n+1} P_0}{n n!(1-\omega / n)^2} , \ L_c = L_{оч} + \bar{k} = L_{оч} + \omega \ .$$

По формулам Литтла:

$$W_c = L_c / \lambda; \ W_{оч} = L_{оч} / \lambda.$$

Простейшая многоканальная СМО с ограничением по длине очереди (M/M/n/m). Условия и нумерация состояний те же, что в предыдущем случае с той разницей, что число *m* мест в очереди ограничено. Финальные вероятности состояний существуют при любых λ и μ и выражаются формулами:

$$P_0 = \{1 + \frac{\omega}{1!} + ... + \frac{\omega^n}{n!} + \frac{\omega^{n+1}[1-(\omega / n)^m]}{n n!(1-\omega / n)}\}^{-1}; \quad P_k = \frac{\omega^k}{k!} P_0; \quad (1 \le k \le n);$$

$$P_{n+r} = \frac{\omega^{n+r}}{n^r n!} P_0 \quad (1 \le r \le m) .$$

Характеристики эффективности:

$$A = \lambda(1 - P_{m+n}); \ Q = 1 - P_{m+n}; \ P_{отк} = P_{m+n}; \ \bar{k} = \omega(1 - P_{n+m}) \ ;$$

$$L_{оч} = \frac{\omega^{n+1}[1-(m+1)(\omega / n)^m + m(\omega / n)^{m+1}]}{n n!(1-\omega / n)^2} P_0;$$

$$L_c = L_{оч} + \bar{k}; \ W_c = L_c / \lambda; \ W_{оч} = L_{оч} / \lambda \ .$$

Многоканальная СМО с отказами при простейшем потоке заявок и произвольном времени обслуживания M/G/1. Формулы Эрланга (см. систему M/M/1) остаются справедливыми и тогда, когда поток заявок – простейший, а время обслуживания $T_{обсл}$ имеет произвольное распределение с математическим ожиданием $t_{обсл} = 1/\mu$.

Одноканальная СМО с неограниченной очередью при простейшем потоке заявок и произвольном времени обслуживания (M/G/1/∞). Если на одноканальную СМО поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ, а время обслуживания $T_{обсл}$ распределяется по произвольному закону с математическим ожиданием 1/μ и коэффициентом вариации υ_μ (отношение среднего квадратического отклонения к математическому ожиданию), то среднее число заявок в очереди выражается *формулой Полячека–Хинчина*:

$$L_{оч} = \omega^2(1+ \upsilon_\mu^{\,2})/[2(1- \omega)],$$

где $\omega = \lambda / \mu$, а среднее число заявок в СМО $L_c = L_{оч} + \omega$. Отсюда по формуле Литтла можем получить

$$W_c = L_c / \lambda;\ W_{оч} = L_{оч} / \lambda.$$

Одноканальная СМО при произвольном (пальмовском) потоке заявок и произвольном времени обслуживания (G/G/1/∞). Точных формул для этого случая не существует, приближенная оценка длины очереди может быть произведена по формуле

$$L_{оч} \approx \omega^2(\upsilon_\lambda^{\,2}+ \upsilon_\mu^{\,2})/[2(1- \omega)],$$

где υ_λ – коэффициент вариации интервала между событиями во входном потоке; $\omega = \lambda / \mu$; λ – величина, обратная математическому ожиданию этого интервала; $\mu = 1 / t_{обсл}$ – величина, обратная среднему времени обслуживания; υ_μ – коэффициент вариации времени обслуживания. Среднее число заявок, связанных с СМО,

$$L_c \approx \omega^2(\upsilon_\lambda^{\,2}+ \upsilon_\mu^{\,2})/[2(1- \omega)] +\omega,$$

а средние времена пребывания заявки в очереди и в СМО могут быть получены по формуле Литтла.

Простейшая многофазовая СМО с очередью. Анализ многофазовых СМО в общем случае затруднен тем, что входящий поток каждой последующей фазы является выходным потоком предыдущей и в общем случае имеет последействие. Однако *если на вход СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок, а время обслуживания показательное, то выходной поток этой СМО – простейший,* с той же интенсивностью λ, что и входящий. Из этого следует, что многофазовую СМО с неограниченной очередью перед каждой фазой, простейшим входящим потоком заявок и показательным временем обслуживания на каждой фазе можно анализировать как простую последовательность простейших СМО.

Если очередь к фазе ограничена, то выходной поток этой фазы перестает быть простейшим и вышеуказанный прием может применяться только в качестве приближенного.

5. Задания для контрольной работы

Задание 1. **Аналитическое моделирование дискретно-стохастической СМО.**

Построить граф состояний СМО. Смысл кодировки состояний раскрыть (время до выдачи заявки, число заявок в накопителе и т.д.).

На схеме условно обозначены:

2 Источник с фиксированным временем ожидания выдачи заявки

ρ Источник с вероятностью просеивания (не выдачи заявки) ρ

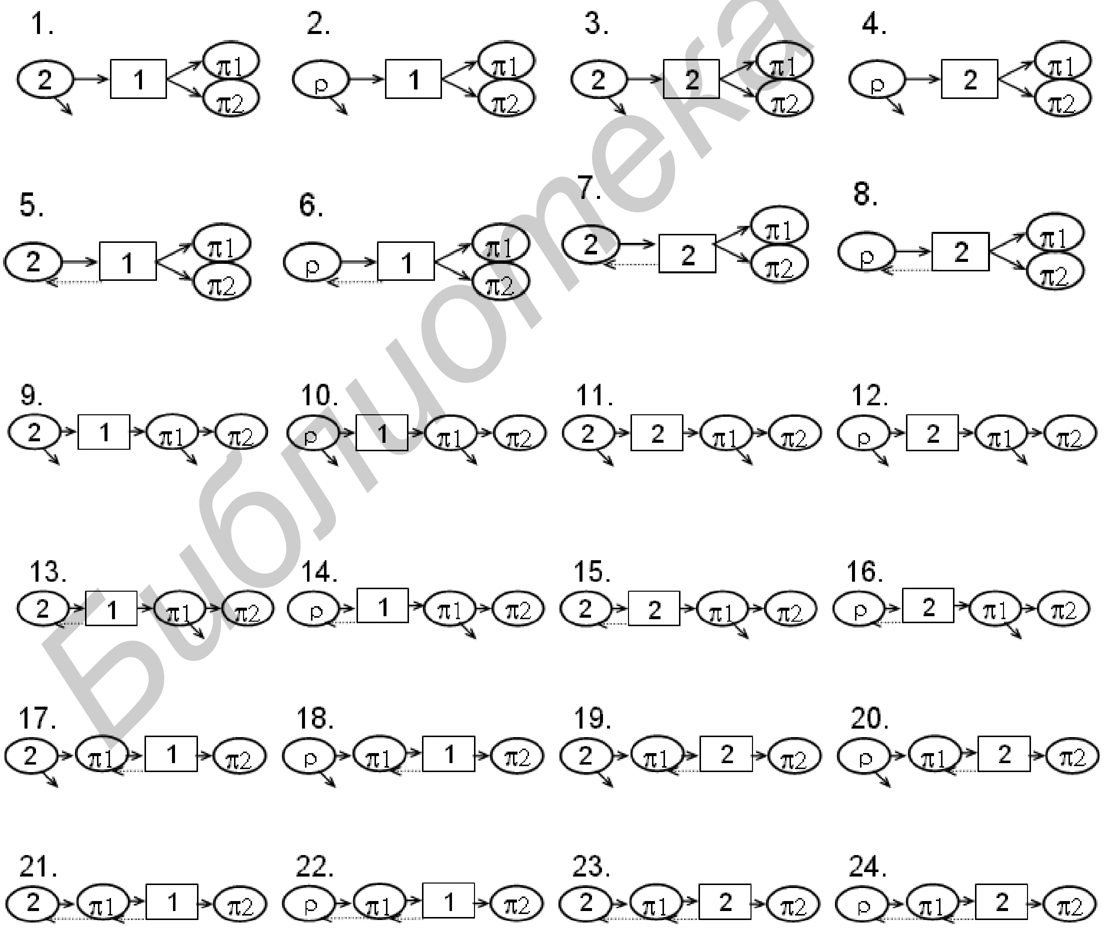
π Канал с вероятностью просеивания (не обслуживания заявки) π

Источник/канал с дисциплиной отбрасывания заявки

Источник/канал с дисциплиной блокировки

N Накопитель на N заявок

Варианты:



Задание 2. Для СМО из задания 1 построить имитационную модель и исследовать ее (разработать алгоритм и написать имитирующую программу, предусматривающую сбор и статистическую обработку данных для получения оценок заданных характеристик СМО). Распределение интервалов времени между заявками во входном потоке и интервалов времени обслуживания – геометрическое с соответствующим параметром (ρ, π1, π2). Если ρ не задано, то входной поток – регулярный (с указанным в обозначении источника числом тактов между заявками) .

$P_{отк}$ – вероятность отказа; $P_{бл}$ – вероятность блокировки;

$L_{оч}$ – средняя длина очереди; Q – относительная пропускная способность;

A – абсолютная пропускная способность.

№	ρ	π1	π2	Цель исследования
1	-	0,8	0,6	$P_{отк}$
2	0,5	0,6	0,8	$P_{отк}$
3	-	0,6	0,5	$L_{оч}$
4	0,5	0,5	0,6	$L_{оч}$
5	-	0,75	0,6	$P_{бл}$
6	0,75	0,85	0,9	$P_{бл}$
7	-	0,75	0,6	$L_{оч}$
8	0,75	0,8	0,5	$L_{оч}$
9	-	0,4	0,4	Q
10	0,5	0,45	0,35	Q
11	-	0,4	0,4	A
12	0,5	0,4	0,4	A
13	-	0,55	0,5	$P_{бл}$
14	0,7	0,65	0,5	$P_{бл}$
15	-	0,48	0,5	$L_{оч}$
16	0,5	0,48	0,5	$L_{оч}$
17	-	VAR	0,5	Зависимость $P_{отк}$ от π1, π1=0,2(0,2)0,8
18	0,5	VAR	0,4	Зависимость $P_{отк}$ от π1, π1=0,2(0,2)0,8
19	-	0,3	VAR	Зависимость $L_{оч}$ от π2, π2=0,2(0,2)0,8
20	0,5	0,35	VAR	Зависимость $L_{оч}$ от π2, π2=0,2(0,2)0,8
21	-	0,4	VAR	Зависимость $P_{бл}$ источника от π2, π2=0,2(0,2)0,8
22	0,75	0,7	VAR	Зависимость $P_{бл}$ источника от π2, π2=0,2(0,2)0,8
23	-	0,4	0,5	A
24	0,75	0,7	0,65	Q

Задание 3. Построить аналитическую модель для СМО заданной структуры и рассчитать показатели ее эффективности. Входной поток – простейший.

№	λ	Вид СМО	Распределние времени обслуживания
1	1,2	M/M/1	Показательное, μ =1,5
2	1,2	M/M/1/5	Показательное, μ =1,5
3	1,2	M/M/1/∞	Показательное, μ =1,5
4	1,2	M/G/1/∞	Равномерное от 0,5 до 0,9
5	4,2	M/M/3	Показательное, μ =1,5
6	4,2	M/M/3/5	Показательное, μ =1,5
7	4,2	M/M/3/∞	Показательное, μ =1,5
8	4,2	M/G/3	Равномерное от 0,5 до 0,8
9	3,0	M/M/1	Показательное, μ =3,5
10	3,0	M/M/1/5	Показательное, μ =3,5
11	3,0	M/M/1/∞	Показательное, μ =3,5
12	3,0	M/G/1/∞	Нормальное, m= 0,3, σ=1,0
13	5,2	M/M/4	Показательное, μ =1,5
14	5,2	M/M/4/5	Показательное, μ =1,5
15	5,2	M/M/4/∞	Показательное, μ =1,5
16	5,2	M/G/4	Равномерное от 0,4 до 0,5
17	0,5	M/M/1	Показательное, μ =0,55
18	0,5	M/M/1/5	Показательное, μ =0,55
19	0,5	M/M/1/∞	Показательное, μ =0,55
20	0,5	M/G/1/∞	Нормальное, m= 1,8, σ=0,9
21	0,8	M/M/4	Показательное, μ =0,25
22	0,8	M/M/4/5	Показательное, μ =0,25
23	0,8	M/M/4/∞	Показательное, μ =0,25
24	3,2	M/G/2	Равномерное от 0,4 до 0,7

6. Экзаменационные вопросы по курсу МОДЕЛИРОВАНИЕ

1. Моделирование. Основные понятия. Классификация методов моделирования. [1 с.4-27; 2 с. 18-25; 3 с. 42-53; 6 с. 5-12, 20-26].
2. Математические модели. Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы). [1 с. 39-42; 3 с. 57].
3. Математические модели. Дискретно-детерминированные модели (F-схемы). [1 с. 43-48; 3 с. 56].
4. Математические модели. Дискретно-стохастические модели (P-схемы). [1 с. 49-53].

5. Дискретная марковская цепь. Геометрическое распределение. [4 с. 43-61; 8 с. 56-59].

6. Модель «Память-АЛУ». Кодирование состояний. Построение графа состояний. [8 с. 59-61].

7. Модель «Память-АЛУ». Построение и решение системы уравнений. Анализ результатов. [8 с. 62-63].

8. Системы массового обслуживания (СМО). Марковский случайный процесс. Потоки заявок (событий). Нотация Кендала. [1 с. 53-59; 3 с. 152-156; 5 с. 57-58; 7 с. 112-124; 8 с. 43-48].

9. Простейший поток, его свойства и значение при исследовании СМО. [3 с. 156-157; 5 с. 58-60; 9 с. 78-85].

10. Непрерывно-стохастические модели (Q-схемы). Одноканальная СМО с блокировкой. Построение графа состояний. [4 с. 71-91; 8 с. 67-69].

11. Одноканальная СМО с блокировкой. Построение и решение системы уравнений. Анализ результатов. [8 с. 67-69].

12. Диаграммы интенсивностей переходов (ДИП). Закон сохранения потоков вероятностей. [4 с. 75-77, 133-136].

13. Исследование одноканальной СМО (M/M/1/n) с блокировкой с помощью ДИП. [4 с. 121-122].

14. Исследование одноканальной СМО (M/M/1/n) с отказами с помощью ДИП. [4 с. 121-122].

15. Исследование многоканальной СМО (M/M/n/0) с отказами с помощью ДИП. Формулы Эрланга. [4 с. 122-123; 7 с.142-146].

16. Формула Литтла. [7 с. 138-141].

17. Одноканальная СМО с неограниченной очередью (M/M/1/∞). [4 с. 146-151; 7 с. 112-116].

18. Многоканальная СМО с неограниченной очередью (M/M/n/∞). [4 с. 119-121; 7 с. 151-155].

19. Распределение Эрланга. Метод этапов. [4 с. 137-144].

20. Исследование СМО вида M/E_r/1 с помощью метода этапов. [4 с. 144-148].

21. Исследование СМО вида E_r/M/1 с помощью метода этапов. [4 с. 148-152].

22. Немарковские СМО. Система M/G/n/0 с отказами. Система M/G/1/∞. Формулы Полячека – Хинчина. [4 с. 201-211; 7 с. 157-158].

23. Немарковские СМО. Системы G/G/1/∞ и G/G/n. [4 с. 293-320; 7 с. 158-160].

24. Имитационное моделирование. Математические основы. Последовательность построения и исследования модели. [1 с. 68-84, 90-95; 3 с. 75-84; 5 с. 319-324; 6 с. 27-34].

25. Управление модельным временем. [1 с. 126-127; 3 с. 85-89; 6 с. 39-47].

26. Моделирование параллельных процессов. [6 с. 47-52].

27. Сетевые модели для описания параллельных процессов. Сети Петри и их разновидности (E-сети). [6 с. 52-60].

28. Способы моделирования случайных величин. Достоинства и недостатки. [1 с. 96-99; 2 с. 66-67].

29. Равномерно-распределенные случайные числа (РРСЧ). Методы моделирования РРСЧ. [1 с. 99-104; 2 с. 116-124; 3 с. 120-126, 6 с. 35; 9 с. 121-125].

30. Оценка равномерности РРСЧ. Оценка и способы увеличения длины периода и длины участка апериодичности последовательности РРСЧ. [1 с. 104-105, 107-109; 2 с. 82-83, 90-92, 124-127; 6 с. 36].

31. Оценка стохастичности и независимости последовательности РРСЧ. [1 с. 105-107; 2 с. 96-101, 6 с. 36-37].

32. Метод обратной функции для моделирования последовательности чисел с заданной функцией распределения. [1 с. 116; 2 с. 133-136, 142-144; 3 с. 133-137; 9 с. 125-127].

33. Универсальный метод моделирования последовательности чисел с заданной функцией распределения. [1 с. 117-118; 3 с. 137-141].

34. Моделирование последовательности чисел с заданной функцией распределения по гистограмме. [9 с. 127-129].

35. Формирование случайных чисел с использованием предельных теорем. Нормальное распределение. [1 с. 118-119; 2 с. 161; 3 с. 143-145].

36. Формирование случайных чисел с использованием теоремы Пуассона. Метод Кана. [1 с. 119; 3 с. 145-146].

37. Метод исключения (режекции) для моделирования последовательности чисел с заданной функцией распределения. [2 с. 144-151; 3 с. 142-143].

38. Моделирование дискретных случайных величин. [1 с. 114-115; 2 с. 133-141].

39. Моделирование случайных векторов. [1 с. 119-121]; [3 с. 146-149].

40. Моделирование случайных событий. [1 с. 110-114; 2 с. 129-133; 3 с. 126-133; 6 с. 37].

41. Планирование машинных экспериментов. [1 с. 158-187; 6 с.61-70].

42. Обработка экспериментальных данных. Оценки для математического ожидания, дисперсии и вероятности. [1 с. 188-191; 3 с. 90-93].

43. Обработка экспериментальных данных. Доверительный интервал и доверительная вероятность. Определения числа испытаний. [3 с. 110-113].

44. Оценка качества имитационных моделей. [6 с. 71-76].

ЛИТЕРАТУРА

1. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов по спец. АСУ. – М.: Высш. шк., 1999.

2. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на ЭВМ. – М.: Сов. радио, 1971.

3. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978.

4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979.

5.Основы теории вычислительных систем/ Под ред. С.А. Майорова. – М.: Высш. шк., 1978.

6. Гультяев А.К. Имитационное моделирование в среде Windows. MATLAB 5.2. – СПб.: КОРОНАпринт, 1999.

7. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1978.

8. Артамонов Г.Т., Брехов О.М. Аналитические вероятностные модели функционирования ЭВМ. – М.: Энергия, 1978.

9. Раскин Л.Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. − М.: Сов. радио, 1976.

10.Харин Ю.С. и др. Основы имитационного и статистического моделирования: Учебное пособие. – Мн.: Дизайн ПРО, 1997.

11. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. – М.: Мир, 1978.

12. Альянах И.Н. Моделирование вычислительных систем. – Л.: Машиностроение, 1988.

13. Максимей И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988.

14. Вентцель Е.С. , Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983.

Св. план 2005, поз. 49

Учебное издание

Мельник Николай Иосифович

МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольных работ
для студентов специальности I-40 02 01
«Вычислительные машины, системы и сети»
заочной формы обучения

Редактор Н.В. Гриневич
Корректор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать 7.02.2006.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л. 1,74.
Уч.-изд. л. 1,5.	Тираж 60 экз.	Заказ 396.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0131518 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6