4Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра высшей математики

КОМПЛЕКС ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ В 2-Х ЧАСТЯХ

Часть 1

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве пособия для
специальностей I ступени, закрепленных за УМО*

Минск БГУИР 2015

УДК 517(076)
ББК 22.1я73
К63

А в т о р ы:
Ж. А. Черняк, Н. В. Князюк, Л. А. Фомичева,
Т. С. Мардвилко, Т. С. Автушко

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра теории функции Белорусского государственного университета
(протокол №11 от 06.05.2015 г.);

доцент кафедры математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка», кандидат физико-математических наук, доцент
С. А. Богданович

К63 **Комплекс** заданий по математике для студентов заочной формы обучения в 2-х частях : пособие. Ч. 1 / Ж. А. Черняк [и др.]. – Минск : БГУИР, 2015. – 150 с.
ISBN 978-985-543-177-1 (ч. 1).

Приводятся тщательно сбалансированные наборы заданий для аудиторных занятий, для самостоятельной подготовки к экзаменам, задачи с подробными решениями по следующим разделам математики: линейная алгебра, аналитическая геометрия и векторная алгебра, введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Пособие включает в себя приложения с формулами, графиками и иллюстрациями, а также варианты тестовых контрольных работ.

УДК 517(076)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-543-177-1(ч. 1)
ISBN 978-985-543-176-4

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Пособие состоит из четырех разделов: линейная алгебра, аналитическая геометрия и векторная алгебра, введение в анализ, дифференциальное исчисление и интегральное исчисление функции одной переменной, что соответствует учебной программе по математике для первого курса Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники (факультет заочного обучения). В начале каждого раздела приводится список умений, необходимых для сдачи экзамена в рамках этой темы. Далее представлены тщательно отобранные наборы заданий с ответами для аудиторных занятий (в установочную и экзаменационную сессии). Для самостоятельной подготовки к экзаменам в период между сессиями предлагается большое количество задач с ответами. Для помощи в решении этих задач предназначается обширный круг заданий с решениями, сопровождающимися подробными комментариями.

Пособие содержит также приложения, включающие формулы, правила, формулировки теорем, графики и иллюстрации. В конце каждого раздела приводятся варианты тестовых контрольных работ, подводящие итог изученному в этом разделе материалу.

Представленное пособие может послужить эффективным помощником студенту заочной формы обучения благодаря доступности и подробности изложения, большому количеству технически нетрудоемких заданий и наличию наглядного справочного материала.

Тщательно продуманные, хорошо сбалансированные наборы задач для аудиторной работы и тестовых контрольных заданий помогут преподавателю качественно провести занятия и контроль знаний студентов в период экзаменационной сессии.

Пособие рекомендуется для студентов инженерно-технических специальностей вузов заочной формы обучения и преподавателей высшей математики.

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В результате изучения данной темы студент должен научиться:

– вычислять определители (по правилу Саррюса; разлагая определитель по элементам какой-либо строки (столбца));

– выполнять операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение на число, транспонирование, произведение матриц);

– находить матрицу, обратную данной;

– решать матричные уравнения;

– находить ранг матрицы;

– проверять совместность систем линейных алгебраических уравнений;

– решать системы линейных уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера;

– находить собственные значения и собственные векторы матрицы;

– приводить квадратичную форму к каноническому виду.

1.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите: 1) $A+B$; 2) $2B-5A$; 3) $3A^T+2B^T$.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите: 1) $|A|, |B|$; 2) $A^{-1}+AB^T$.

3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найдите те из произведений AB, BA, AC, CA, BC, CB, которые имеют смысл.

4. Решите матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если:

1) $f(x)=x^2+2x-1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

2) $f(x)=3x^2-5x+2,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Найдите ранг матрицы A методом элементарных преобразований, если:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 3 & 5 & 6 & -4\\ 3 & 8 & 2 & -19\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

7. Исследуйте системы уравнений на совместность и, в случае совместности, решите их: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса.

1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=3,\\ 3x_1+x_2+2x_3=7,\\ 2x_1+3x_2+x_3=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1+4x_2-3x_3=2,\\ x_1+5x_2-x_3=3,\\ 3x_1-x_2-3x_3=-7;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}4x_1-3x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2-x_3=4,\\ 3x_1-4x_2+2x_3=2.\end{cases}$

8. Решите системы уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\ 2x_1+2x_2+2x_3=6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1+5x_2-8x_3=8,\\ 4x_1+3x_2-9x_3=9,\\ 2x_1+3x_2-5x_3=7,\\ x_1+8x_2-7x_3=12.\end{cases}$

9. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0,\\ 3x_1+2x_2-3x_3=0,\\ 5x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$$

10. Найдите собственные значения и собственные векторы матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

11. Запишите матрицы квадратичных форм:

1) $Q(x_1,x_2)=2x_1^2+3x_2^2-5x_1x_2$;

2) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+12x_2x_3+7x_3^2$.

12. Приведите данные квадратичные формы к каноническому виду с помощью метода Лагранжа (выделение полных квадратов):

1) $Q(x_1,x_2)=4x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$;

2) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$.

Ответы

1. 1) $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 \\ -21 & 14 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & -48 \\ 16 & 32 \\ 32 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 1) $|A| = -10,\ |B| = 38$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -0{,}2 & 19{,}4 \\ 24{,}5 & 1{,}9 & 64{,}2 \\ 1 & -3{,}6 & 7{,}2 \end{pmatrix}$.

3. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

4. 1) $X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. 1) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}$.

6. 1) $\operatorname{rang} A = 2$; 2) $\operatorname{rang} A = 3$; 3) $\operatorname{rang} A = 3$.

7. 1) $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$; 2) $x_1 = -4,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2$; 3) система несовместна.

8. 1) $(3 - c_1 - c_2; c_1; c_2)$, где c_1, c_2 – произвольные действительные числа; 2) $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

9. Общее решение: $x_1 = -c,\ x_2 = 12c,\ \ x_3 = 7c$, где c – произвольное действительное число, ФСР: $(-1; 12; 7)^{\mathrm{T}}$.

10. 1) СЗ: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 9$, СВ: $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

2) СЗ: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$, СВ: $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$.

11. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -2{,}5 \\ -2{,}5 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

12. 1) $Q(y_1, y_2) = 4y_1^2 + 4y_2^2$, где $y_1 = x_1 + \frac{1}{2}x_2,\ y_2 = x_2$;

2) $Q(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - \frac{3}{4}y_2^2 - \frac{2}{3}y_3^2$, где $y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2,\ y_2 = x_2 - \frac{2}{3}x_3,\ y_3 = x_3$.

1.2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите:

1) $3A-2B$; 2) $A^{\mathrm{T}}+B^2+2E$; 3) $AB+BA$; 4) $|A|$; 5) A^{-1}.

Решение:

1) найдем матрицы $3A$ и $2B$, умножая каждый элемент матрицы A на 3 и каждый элемент матрицы B на 2:

$$3A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix},\ 2B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 14 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим разность $3A-2B$, вычитая из каждого элемента матрицы $3A$ соответствующий элемент матрицы $2B$:

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 9-0 & 3-(-2) & 6-4 \\ -3-4 & 0-2 & 6-2 \\ 3-6 & 6-14 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ -7 & -2 & 4 \\ -3 & -8 & 1 \end{pmatrix};$$

2) найдем транспонированную матрицу A^{T}, которая получается из матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}=C_{3\times 3}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$,

где

$c_{11}=0\cdot 0+(-1)\cdot 2+2\cdot 3=4,\quad c_{21}=2\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot 3=5,\quad c_{31}=3\cdot 0+7\cdot 2+1\cdot 3=17,$

$c_{12}=0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot 7=13,\quad c_{22}=2\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 7=6,\quad c_{32}=3\cdot(-1)+7\cdot 1+1\cdot 7=11,$

$c_{13}=0\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 1=1,\quad c_{23}=2\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 1=6,\quad c_{33}=3\cdot 2+7\cdot 1+1\cdot 1=14.$

Получаем $B^2=\begin{pmatrix} 4 & 13 & 1 \\ 5 & 6 & 6 \\ 17 & 11 & 14 \end{pmatrix}$.

Находим

$$A^{\mathrm{T}}+B^2-2E=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 13 & 1\\ 5 & 6 & 6\\ 17 & 11 & 14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3+4-2 & -1+13-0 & 1+1-0\\ 1+5-0 & 0+6-2 & 2+6-0\\ 2+17-0 & 2+11-0 & 1+14-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 12 & 2\\ 6 & 4 & 8\\ 19 & 13 & 13\end{pmatrix};$$

3) вычислим

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 0+1\cdot 2+2\cdot 3 & 3\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 7 & 3\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1\\ -1\cdot 0+0\cdot 2+2\cdot 3 & -1\cdot(-1)+0\cdot(-1)+2\cdot 7 & -1\cdot 2+0\cdot 1+2\cdot 1\\ 1\cdot 0+2\cdot 2+1\cdot 3 & 1\cdot(-1)+2\cdot 1+1\cdot 7 & 1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 12 & 9\\ 6 & 15 & 0\\ 7 & 8 & 5\end{pmatrix}.$$

Найдем $BA=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 1 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 0+2\cdot 2 & 0\cdot 2+(-1)\cdot 2+2\cdot 1\\ 2\cdot 3+1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 1\\ 3\cdot 3+7\cdot(-1)+1\cdot 1 & 3\cdot 1+7\cdot 0+1\cdot 2 & 3\cdot 2+7\cdot 2+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 6 & 4 & 7\\ 3 & 5 & 21\end{pmatrix}.$$

Тогда $AB+BA=\begin{pmatrix}8 & 12 & 9\\ 6 & 15 & 0\\ 7 & 8 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 6 & 4 & 7\\ 3 & 5 & 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 16 & 9\\ 12 & 19 & 7\\ 10 & 13 & 26\end{pmatrix};$

4) вычислим определитель матрицы A, разлагая его по элементам второй строки: $|A|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$,

где a_{2j} – элемент второй строки матрицы A, $j=1, 2, 3$; A_{2j} – алгебраическое дополнение элемента a_{2j}, $j=1, 2, 3$.

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(1-4)=3, \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3-2=1,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(6-1)=-5.$$

Получим $|A|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1)\cdot 3+0\cdot 1+2\cdot(-5)=-13;$

5) обратная матрица существует только для квадратной невырожденной матрицы (т. е. определитель которой отличен от нуля). Так как $|A| = -13 \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Найдем ее по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения A_{1j} и A_{3j}, $j = 1, 2, 3$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, $A^{-1} = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -8 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{8}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}.$

2. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

По определению $f(A) = 2A^2 - 3A + E$. Найдем

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(A) = 2\cdot A^2 - 3\cdot A + 1\cdot E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$

3. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

Решение

Обозначим I_1, I_2, I_3 строки матрицы A. Приведем матрицу A к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк, не изменяющих ранга матрицы A: $I_2+(-2)\cdot I_1$, I_3-I_1.

В результате получим

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -2I_1\\ -I_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -1 & -4\\ 0 & -6 & -2 & -8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -2I_2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -3 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отметим, что связанные значком $\sim$ матрицы имеют одинаковые ранги.

Очевидно, все миноры третьего порядка полученной матрицы равны нулю, но существуют миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}$. Следовательно, ранг матрицы, полученной в результате элементарных преобразований из матрицы A, равен 2. Значит, $\operatorname{rang} A=2$.

4. Исследуйте системы линейных уравнений на совместность и, в случае совместности, решите их: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса.

$$1)\ \begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-4,\\ 2x_1-x_2+2x_3=3,\\ 4x_1+x_2+4x_3=-3;\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=2,\\ 3x_1+x_2-3x_3=1,\\ 5x_1-2x_2-2x_3=4.\end{cases}$$

Решение:

1) совместность системы проверим по теореме Кронекера – Капелли. Определитель основной матрицы системы

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(-4-2)-(8-8)+2\cdot(2+4)=6\neq 0,$$

значит, строки матрицы A линейно независимы и, следовательно, ранг матрицы A равен 3.

Так как ранг матрицы $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 4 & -3\end{array}\right)$ меньше либо равен 3 (она имеет три строки) и, как мы показали, ее минор 3-го порядка $|A|\neq 0$, то

$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 3$. Значит по теореме Кронекера – Капели исходная система совместна;

а) решим систему по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель основной матрицы системы; Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой в нем i-го столбца столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $i = 1,\ 2,\ 3$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -18, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{6}{6} = 1;\ x_2 = \frac{-18}{6} = -3;\ x_3 = \frac{-6}{6} = -1;$$

б) решим ту же систему уравнений методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками матрицы, что равносильно исключению неизвестной x_1 из второго и третьего уравнений и неизвестной x_2 из третьего уравнения. Для этого из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из третьей строки вычтем первую, умноженную на 4. Затем из третьей строки вычтем вторую:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2I_1 \\ -4I_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -3 & -4 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -I_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Полученной матрице соответствует система $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ -2x_3 = 2, \end{cases}$ из которой последовательно находим $x_3 = -1,\ x_2 = -3,\ x_1 = 1;$

2) проверим совместность системы с помощью теоремы Кронекера – Капелли. В расширенной матрице $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right)$ осуществим следующие преобразования: из третьей строки вычтем сумму первых двух, из первой вычтем вторую, ко второй строке прибавим первую, умноженную на 3:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&2\\3&1&-3&1\\5&-2&-2&4\end{array}\right)-(I_1+I_2)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&2\\3&1&-3&1\\0&0&0&1\end{array}\right)-I_2\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-4&4&1\\3&1&-3&1\\0&0&0&1\end{array}\right)+3I_1\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-4&4&1\\0&-11&9&4\\0&0&0&1\end{array}\right).$$

Очевидно, что ранг основной матрицы равен 2, а расширенной – 3. Из того, что ранги основной и расширенной матриц не равны, заключаем по теореме Кронекера – Капелли, что система не имеет решений, т. е. несовместна.

5. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0,\\2x_1-4x_2+x_3=0,\\3x_1-2x_2-4x_3=0.\end{cases}$$

Решение

Находим ранг основной матрицы системы с помощью элементарных преобразований строк.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&0\\2&-4&1&0\\3&-2&-4&0\end{array}\right)-3I_1\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&5&0\\2&-4&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)-2I_1\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&0\\0&-8&11&0\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Ранг r матрицы A равен 2, так как существует минор 2-го порядка, отличный от нуля (например $\begin{vmatrix}1&2\\0&-8\end{vmatrix}$). Поскольку ранг матрицы $(r=2)$ меньше числа неизвестных $(n=3)$, то система имеет бесконечно много решений. Найдем их, решая систему, соответствующую преобразованной матрице:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0,\\-8x_2+11x_3=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2 через x_3, а из первого – x_1 через x_3, с учетом найденного x_2 (в этом случае x_3 является свободной переменной, которая принимает любые действительные значения). Получим

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{11}{8} x_3, \\ x_1 = \dfrac{9}{4} x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из $n - r = 3 - 2 = 1$ решения. Положив, например, $x_3 = 1$, находим $x_2 = \dfrac{11}{8}$, $x_1 = \dfrac{9}{4}$. Тогда фундаментальная система решений примет вид $\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{11}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$. Общее решение системы имеет вид $\overline{x} = c\overline{x}_1$, или $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{9}{4} \\ \dfrac{11}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$, где c – произвольное действительное число.

6. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

Собственные значения матрицы A найдем, решив характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, которое в нашем случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(-(1-\lambda)(1+\lambda)-3) + 2(-1-\lambda-1) + 3(3-1+\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 4) - 2(2+\lambda) + 3(2+\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2+\lambda)((2-\lambda)(\lambda-2)+1) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+2)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3.$$

Для каждого из трех собственных значений составим и решим однородную систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

решениями которой являются собственные векторы матрицы A.

Для $\lambda_1 = 1$ указанная система имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -I_1 \\ -I_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{5}{2} I_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда $x_2 = x_3, x_1 = 2x_2 - 3x_3 = -x_3$. Полагая $x_3 = c_1 \neq 0$, получим собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 1$:

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1,$$

где c_1 – произвольное число, отличное от нуля.

Для $\lambda_2 = -2$ имеем следующую систему:

$$\begin{pmatrix} 2-(-2) & -2 & 3 \\ 1 & 1-(-2) & 1 \\ 1 & 3 & -1-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда $x_3 = -14x_2, x_1 = 11x_2$. Полагая $x_2 = c_2 \neq 0$, получим собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = -2$:

$$\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 11c_2 \\ c_2 \\ -14c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} c_2,$$

где c_2 – произвольное число, отличное от нуля.

Аналогично для $\lambda_3 = 3$ имеем

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -2 & 3 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 3 & -1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда $x_2 = x_3,\ x_1 = 3x_3 - 2x_2 = x_3$. Полагая $x_3 = c_3 \neq 0$, получим собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = 3$:

$$\overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_3,$$

где c_3 – произвольное число, отличное от нуля.

Таким образом, матрица A имеет три собственных значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$. Соответствующие им собственные векторы имеют вид

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1,\ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} c_2,\ \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_3,$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. Приведите к каноническому виду уравнение линии второго порядка $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16$, используя теорию квадратичных форм.

Решение

Левая часть уравнения $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16$ представляет собой квадратичную форму с матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ для матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2.$$

Находим собственные векторы из системы уравнений

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0, \end{cases}$$

полагая $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2$.

При $\lambda_1 = 8$ имеем

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0, \\ \ \ 5x_1 - 5x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = c \neq 0.$$

Полагая $c = 1$, получим собственный вектор $\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 8$.

При $\lambda_2 = -2$ имеем

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

Полагая $c = -1$, получим собственный вектор $\overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормируем собственные векторы $\overrightarrow{x_1}$ и $\overrightarrow{x_2}$ $\left(\overline{e_\iota} = \dfrac{\overrightarrow{x_i}}{\left|\overrightarrow{x_i}\right|} \right)$: $\left|\overrightarrow{x_1}\right| = \left|\overrightarrow{x_2}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \overline{e_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \overline{e_2} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу перехода от старого базиса к новому

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются координаты нормированных собственных векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$.

Выполним в уравнении $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16$ переход от координат x, y к новым координатам x', y' по формулам

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$

В результате получаем из исходного уравнения кривой ее каноническое уравнение:

$$\frac{3}{2}(x'-y')^2+5\left(x'^2-y'^2\right)+\frac{3}{2}\left(x'^2+y'^2\right)=16 \Leftrightarrow\ 8x_1'^2-2y_1'^2=16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_1'^2}{2}-\frac{y_1'^2}{8}=1.$$

Последнее уравнение есть каноническое уравнение гиперболы.

1.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Найдите $5A-3B+2C$, если $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ -3 & 2 & 7\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-5 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 5\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Найдите AB и BA.

3. Найдите AA^T и A^TA, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

4. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.
Найдите AB, BC, B^TBC, AD, A^TAD.

5. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
Найдите те из произведений AB, BA, AC, CA, BC, CB, которые имеют смысл.

6. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если:

1) $f(x)=x^2-3x+2$, $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}$;

2) $f(x)=2x^3-x^2+3$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

7. Вычислите определитель одним из следующих методов: а) по правилу треугольников; б) разложением по первой строке; в) приведением к треугольному виду:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}$.

8. Дана матрица *A*. Убедитесь, что она невырожденная, найдите обратную ей матрицу A^{-1} и проверьте равенства $AA^{-1} = A^{-1}A = E$:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Решите матричные уравнения:

1) $X \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Найдите ранг матрицы *A* методом элементарных преобразований:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

11. Исследуйте системы линейных уравнений на совместность и, в случае совместности, решите их: а) по формулам Крамера; б) методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

12. Решите системы линейных уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

13. Найдите общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

14. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

15. Приведите к каноническому виду уравнения кривых второго порядка и постройте их графики в исходной системе координат.

1) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;

2) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;

3) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

Ответы

1. $\begin{pmatrix} -20 & -7 & 8 \\ 28 & 19 & -6 \\ -5 & 18 & 27 \end{pmatrix}$.

2. $AB = BA = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 14 & 12 \\ 4 & 12 & 16 \end{pmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \\ 7 & -3 & 26 \end{pmatrix}$.

4. $AB = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B^T BC = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $AD = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$A^T AD = \begin{pmatrix} -7 \\ -17 \end{pmatrix}$.

5. $BA=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $AC=\begin{pmatrix}4 & 5 & 5 & 0\\ 2 & 6 & 6 & 0\end{pmatrix}$.

6. 1) $\begin{pmatrix}0 & 0 & -3\\ 3 & -3 & 1\\ 0 & -12 & -3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}18 & -20\\ 30 & -2\end{pmatrix}$.

7. 1) 87; 2) 0; 3) 8.

8. 1) $\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

9. 1) $X=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}$; 2) $X=\begin{pmatrix}\frac{15}{7}\\ -\frac{16}{7}\\ -\frac{11}{7}\end{pmatrix}$; 3) $X=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -4 & 5\end{pmatrix}$.

10. 1) 2; 2) 2; 3) 3.

11. 1) $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-1$; 2) $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=1$;
3) $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=-5$.

12. 1) система несовместна; 2) $x_1=\frac{8}{3}-\frac{5}{3}c_1-c_2$, $x_2=-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}c_1+c_2$, $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$; 3) $x_1=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}c_1-\frac{3}{4}c_2-c_3$, $x_2=-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}c_1+\frac{7}{4}c_2$, $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, $x_5=c_3$, $c_1, c_2, c_3\in\mathbb{R}$.

13. 1) ФСР: $\overline{x_1}=\begin{pmatrix}8\\ -6\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\overline{x_2}=\begin{pmatrix}-7\\ 5\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, общее решение: $\bar{x}=c_1\overline{x_1}+c_2\overline{x_2}$, где c_1, c_2 – произвольные действительные числа;

2) ФСР: $\overline{x_1}=\begin{pmatrix}-1{,}5\\ -0{,}5\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\overline{x_2}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, общее решение: $\bar{x}=c_1\overline{x_1}+c_2\overline{x_2}$, где $c_1, c_2\in\mathbb{R}$.

14. 1) СЗ: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=-1,$ СВ: $\overrightarrow{x_1}=a\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_2}=b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$ $\overrightarrow{x_3}=c\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix},$ $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 2) СЗ: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=8,\ \lambda_3=-2$, СВ: $\overrightarrow{x_1}=a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$ $\overrightarrow{x_2}=b\begin{pmatrix}125\\49\\21\end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_3}=c\begin{pmatrix}-5\\-1\\1\end{pmatrix},\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

15. 1) эллипс $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$; 2) гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$; 3) парабола $y'^2=4\sqrt{2}x'.$

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

В результате изучения данной темы студент должен научиться:

– изображать линейные комбинации заданных плоских векторов;

– находить координаты линейной комбинации векторов, длину вектора;

– вычислять скалярное, векторное, смешанное произведения векторов и с их помощью находить угол между векторами, площади треугольника, параллелограмма, объемы параллелепипеда, пирамиды;

– проверять коллинеарность, ортогональность и компланарность векторов;

– составлять уравнения прямой на плоскости и в пространстве;

– определять взаимное расположение прямых;

– составлять уравнения плоскостей;

– определять взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости;

– приводить уравнения кривых и поверхностей 2-го порядка к каноническому виду и определять типы кривых и поверхностей по полученным уравнениям.

2.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Изобразите на плоскости два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы:

1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $-2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

2. Среди изображенных на рис. 1 векторов укажите:
1) коллинеарные; 2) ортогональные;
3) противоположно направленные;
4) сонаправленные; 5) равные.

3. Найдите координаты, длину вектора $\overrightarrow{AB}$ и середину отрезка AB, если: 1) $A(1;-1)$, $B(-1;\,2)$; 2) $A(3;-4;\,1)$, $B(4;\,6;-3)$.

4. Найдите координаты и длины векторов $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{d}=3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, если $\vec{a}=(3;-1;\,2)$, $\vec{b}=(-2;\,0;\,2)$.

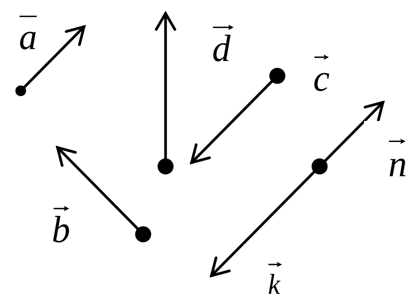


Рис. 1

5. Докажите, что векторы $\vec{a}=(3;-2;\,1)$, $\vec{b}=(-1;\,1;-2)$ и $\vec{c}=(2;\,1;-3)$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{d}=(11;-6;\,5)$ по этому базису.

6. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. Выполните следующие задания:

1) вычислите скалярное произведение векторов $2\vec{b}$ и $-\vec{c}$;

2) найдите модуль векторного произведения векторов $\vec{a}+\vec{c}$ и $\vec{b}$;

3) вычислите смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $-\vec{b}$ и $2\vec{c}$;

4) проверьте, будут ли векторы $\overrightarrow{3b}$ и $\vec{c}$ коллинеарными, ортогональными;

5) проверьте, будут ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{c}$ компланарными.

7. Прямая ℓ задана общим уравнением $5x+3y+15=0$. Запишите следующие уравнения данной кривой: 1) с угловым коэффициентом; 2) «в отрезках»; 3) каноническое; 4) параметрические. Постройте прямую ℓ.

8. Запишите уравнения прямых, которые проходят через точку $A(3;-1)$ и параллельны: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) биссектрисе первого координатного угла; 4) прямой $y=3x+9$.

9. Даны вершины треугольника *ABC*: $A(2;2)$, $B(-2;-8)$, $C(-6;-2)$. Найдите: 1) уравнение стороны *AB*; 2) уравнение высоты *CH*; 3) уравнение медианы *AM*; 4) расстояние от точки *C* до прямой *AB*; 5) уравнение прямой ℓ, проходящей через вершину *C* параллельно прямой *AB*; 6) косинус внутреннего угла при вершине *A*; 7) точку *N* пересечения высоты *CH* и медианы *AM*.

10. Запишите уравнение плоскости: 1) параллельной плоскости Oxz и проходящей через точку $M_0(7;-3;5)$; 2) проходящей через ось Oz и точку $A(-3;1;-2)$; 3) параллельной оси Ox и проходящей через две точки $M_1(4;0;-2)$ и $M_2(5;1;7)$; 4) проходящей через точку $B(2;1;-1)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(1;-2;3)$; 5) проходящей через точку $C(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}=(3;1;-1)$ и $\vec{b}=(1;-2;1)$.

11. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;-2;3)$ перпендикулярно плоскости $x-3y+5z-7=0$.

12. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(1;0;3)$, $B(-1;1;1)$, $C(1;2;1)$ и $D(0;3;2)$. Найдите: 1) уравнение прямой *AB*; 2) длину ребра *AB*; 3) угол φ между ребрами *AB* и *AC*; 4) уравнение плоскости *ABC*; 5) площадь $\triangle ABC$; 6) синус угла между ребром *AD* и гранью *ABC*; 7) объем пирамиды *ABCD*; 8) уравнения и длину высоты *DH*, опущенной из точки *D* на плоскость *ABC*; 9) уравнение плоскости, проходящей через точку *D*, параллельно плоскости *ABC*; 10) точку пересечения высоты *DH* и грани *ABC*.

Ответы

2. 1) $\vec{a}, \vec{c}, \vec{k}, \vec{n}$; 2) $\vec{a}\perp\vec{b}, \vec{c}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{k}, \vec{b}\perp\vec{n}$; 3) $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{c}$, $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{k}$, $\vec{n}\downarrow\uparrow\vec{c}$, $\vec{n}\downarrow\uparrow\vec{k}$; 4) $\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{k}$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{n}$; 5) $\vec{a}=\vec{n}$.

3. 1) $\overrightarrow{AB}=(-2;3)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}$, $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$; 2) $\overrightarrow{AB}=(1;10;-4)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{117}$, $M\left(\frac{7}{2};1;-1\right)$.

4. $\vec{c}=(12;-2;-2)$, $|\vec{c}|=2\sqrt{38}$, $\vec{d}=(8;-3;\ 7)$, $|\vec{d}|=\sqrt{122}$.

5. $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

6. 1) -6; 2) $\sqrt{146}$; 3) -34; 4) не коллинеарны, не ортогональны; 5) не компланарны.

7. 1) $y=-\dfrac{5}{3}x-5$; 2) $\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-5}=1$; 3) $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+5}{5}$; 4) $\begin{cases} x=-3t, \\ y=-5+5t, \end{cases} t\in\mathbb{R}$.

8. 1) $y=-1$; 2) $x=3$; 3) $y=x-4$; 4) $y=3x-10$.

9. 1) $-5x+2y+6=0$; 2) $2x+5y+22=0$; 3) $7x-6y-2=0$; 4) $\dfrac{32}{\sqrt{29}}$; 5) $-5x+2y-26=0$; 6) $\dfrac{9}{\sqrt{145}}$; 7) $N\left(-\dfrac{122}{47};-\dfrac{158}{47}\right)$.

10. 1) $y+3=0$; 2) $x+3y=0$; 3) $9y-z-2=0$; 4) $x-2y+3z+3=0$; 5) $x+4y+7z+16=0$.

11. Канонические уравнения: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-3}{5}$, параметрические уравнения: $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-3t-2, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=5t+3, \end{cases}$

12. 1) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$; 2) $AB=3$; 3) $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$; 4) $x-2y-2z+5=0$; 5) $S_{ABC}=3$; 6) $\sin\Theta=\dfrac{5}{3\sqrt{11}}$; 7) $V_{ABCD}=\dfrac{5}{3}$; 8) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{-2}$, $DH=\dfrac{5}{3}$; 9) $x-2y-2z+10=0$; 10) $\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{17}{9};\dfrac{8}{9}\right)$.

2.2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Даны векторы $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{d} = 5\vec{i} - 20\vec{j} + 15\vec{k}$. Требуется:

1) вычислить скалярное произведение векторов $\vec{b}$ и $2\vec{a} - \vec{c}$;

2) вычислить векторное произведение векторов $\vec{c}$ и $\vec{a} - 3\vec{b}$;

3) выяснить, являются ли векторы $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$ коллинеарными, ортогональными;

4) показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение:

1) найдем координаты вектора

$2\vec{a} - \vec{c} = 2\left(6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) - \left(\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}\right) = 11\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Так как скалярное произведение векторов $\vec{m} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{n} = (x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле $\vec{m} \cdot \vec{n} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$, то

$\vec{b} \cdot \left(2\vec{a} - \vec{c}\right) = 2 \cdot 11 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 19$;

2) найдем координаты вектора

$\vec{a} - 3\vec{b} = \left(6\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) - 3\left(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) = -5\vec{j} + 5\vec{k}$.

Так как векторное произведение векторов $\vec{m} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{n} = (x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле

$$\vec{m} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \text{ то}$$

$$\vec{c} \times \left(\vec{a} - 3\vec{b}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \vec{k} = -5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k};$$

3) условием коллинеарности векторов $\vec{m} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{n} = (x_2; y_2; z_2)$ является пропорциональность их координат:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Найдем координаты векторов $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$:

$2\vec{a} = 12\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$; $-3\vec{b} = -6\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$.

Поскольку $\dfrac{12}{-6} \neq \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$, то векторы $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$ не коллинеарны.

Условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Так как $2\vec{a}\cdot\left(-3\vec{b}\right)=12\cdot(-6)+(-4)\cdot(-3)+4\cdot 3=-48\neq 0$, то векторы $2\vec{a}$ и $-3\vec{b}$ не ортогональны;

4) векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$, если они не компланарны, т. е. их смешанное произведение не равно нулю.

Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}6 & -2 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}10 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=10(2-3)=-10\neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не компланарны и образуют базис в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Представим вектор $\vec{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, т. е. $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, где $(\alpha;\beta;\gamma)$ – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Запишем последнее равенство в координатной форме:

$$\alpha\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -20\\ 15\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}6\alpha+2\beta+\gamma=5,\\ -2\alpha+\beta-3\gamma=-20,\\ 2\alpha-\beta+2\gamma=15.\end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}6 & 2 & 1 & 5\\ -2 & 1 & -3 & -20\\ 2 & -1 & 2 & 15\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ +I_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}6 & 2 & 1 & 5\\ -2 & 1 & -3 & -20\\ 0 & 0 & -1 & -5\end{array}\right)\begin{array}{l}+3I_2\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 5 & -8 & 55\\ -2 & 1 & -3 & -20\\ 0 & 0 & -1 & -5\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 1 & -3 & -20\\ 0 & 5 & -8 & -55\\ 0 & 0 & -1 & -5\end{array}\right).$$

Преобразованной расширенной матрице системы соответствует следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases}-2\alpha+\beta-3\gamma=-20,\\ 5\beta-8\gamma=-55,\\ -\gamma=-5,\end{cases}$$

из которой находим $\gamma=5,\beta=-3,\alpha=1$.

Значит, $\vec{d}=\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$.

2. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;-3)$, $B(0;7)$, $C(-2;4)$. Найдите:

1) уравнение стороны AB;

2) уравнение высоты CH;

3) уравнение медианы AM;

4) точку N пересечения медианы AM и высоты CH;

5) уравнение прямой, проходящей через вершину C, параллельно стороне AB;

6) расстояние от точки C до прямой AB.

Решение:

1) уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставляя в последнее равенство координаты точек A и B, получим

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-(-3)}{7-(-3)}\Leftrightarrow\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{10}\Leftrightarrow 10(x-1)=-(y+3)\Leftrightarrow 10x+y-7=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y=-10x+7$ – уравнение прямой AB с угловым коэффициентом;

2) из перпендикулярности прямых AB и CH следует, что их угловые коэффициенты связаны равенством $k_{AB}\cdot k_{CH}=-1$.

Угловой коэффициент прямой AB равен –10. Тогда угловой коэффициент прямой CH: $k_{CH}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-10}=\frac{1}{10}$.

Используем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ с известным угловым коэффициентом k: $y-y_0=k(x-x_0)$.

Подставляя в последнюю формулу координаты точки C и найденный коэффициент k_{CH}, получим

$y-4=\frac{1}{10}(x-(-2))\Leftrightarrow x-10y+42=0$ – общее уравнение высоты CH;

3) найдем координаты точки M – середины стороны AB по формулам:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2},$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-3+7}{2}=2.$$

Тогда по двум известным точкам $A(1;-3)$ и $M\left(\frac{1}{2};2\right)$ составляем уравнение медианы AM:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{y-(-3)}{2-(-3)} \Leftrightarrow -2(x-1)=\frac{1}{5}(y+3) \Leftrightarrow 10x+y-7=0;$$

4) для нахождения координаты точки *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH* составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} x-10y+42=0, \\ 10x+y-7=0. \end{cases}$$

Решая ее, находим точку $N\left(\frac{28}{101};\frac{427}{101}\right)$;

5) так как прямая, проходящая через вершину *C*, параллельна стороне *AB*, то угловой коэффициент искомой прямой равен $k_{AB}=-10$. По заданной точке $C(-2;4)$ и угловому коэффициенту $k_{AB}=-10$ составляем уравнение искомой прямой:

$$y-4=-10(x-(-2)) \Leftrightarrow 10x+y+16=0;$$

6) расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Подставляя в последнее равенство координаты точки $C(-2;4)$ и коэффициенты прямой *AB*: $10x+y-7=0$ $(a=10, b=1, c=-7)$, получим

$$d=\frac{|10\cdot(-2)+1\cdot 4-7|}{\sqrt{10^2+1^2}}=\frac{23}{\sqrt{101}}.$$

3. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A_1(2;1;7)$, $A_2(3;3;6)$, $A_3(2;-3;9)$, $A_4(1;2;5)$. Найдите:

1) уравнение прямой A_1A_2;

2) длину ребра A_1A_2;

3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

4) уравнения и длину высоты A_4H, опущенной из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$;

5) площадь треугольника $A_1A_2A_3$;

6) угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

7) синус угла Θ между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Решение:

1) уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ и $A_2(x_2;y_2;z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставляя в последнее равенство координаты точек A_1 и A_2, получаем $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-7}{6-7} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-7}{-1}$ – канонические уравнения прямой A_1A_2;

2) длина ребра A_1A_2 равна длине вектора $\overrightarrow{A_1A_2}=(3-2;3-1;6-7)=(1;2;-1)$, $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$;

3) уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$ и $A_3(x_3;y_3;z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Подставляя в левую часть последнего равенства координаты точек A_1, A_2, A_3, получаем

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-7 \\ 3-2 & 3-1 & 6-7 \\ 2-2 & -3-1 & 9-7 \end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+(z-7)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=$$

$=(x-2)\cdot 0-(y-1)\cdot 2+(z-7)\cdot(-4)=-2y-4z+30$, откуда

$$-2(y+2z-15)=0 \Leftrightarrow y+2z-15=0.$$

Таким образом, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид $y+2z-15=0$;

4) чтобы составить уравнение прямой A_4H, воспользуемся каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $(x_0;y_0;z_0)$ – координаты произвольной точки прямой; $(m;n;p)$ – координаты направляющего вектора прямой.

Так как прямая A_4H перпендикулярна плоскости $A_1A_2A_3$, то в качестве направляющего вектора этой прямой можно взять вектор нормали $\vec{n}=(0;1;2)$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда канонические уравнения прямой A_4H имеют вид:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{2}.$$

Длина высоты A_4H равна расстоянию от точки $A_4(1;2;5)$ до плоскости $A_1A_2A_3$: $y+2z-15=0$. Вычислим A_4H, используя формулу расстояния от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Таким образом, $A_4H=\dfrac{|0\cdot1+1\cdot2+2\cdot5-15|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}}=\dfrac{3}{\sqrt5}$;

5) площадь треугольника $A_1A_2A_3$ найдем, используя геометрический смысл векторного произведения:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|.$$

Найдем координаты векторного произведения

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 2\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -4\end{vmatrix}=0\cdot\vec i-2\cdot\vec j-4\vec k.$$

Тогда $S_{\Delta A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\sqrt{0^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt5$;

6) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 найдем по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|},$$

где $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}$ – скалярное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Известны координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}=(1;2;-1)$ и его длина $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt6$. Найдем координаты и длину вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_4}=(1-2;\,2-1;\,5-7)=(-1;1;-2),\ \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt6.$$

Тогда $\cos\varphi=\dfrac{1\cdot(-1)+2\cdot1+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt6\cdot\sqrt6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$, т. е. $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$;

7) синус угла между прямой с направляющим вектором $\vec a=(m;n;p)$ и плоскостью, имеющей вектор нормали $\vec n=(A;B;C)$, вычисляется по формуле

$$\sin\Theta=\frac{|\vec a\cdot\vec n|}{|\vec a|\cdot|\vec n|}=\frac{|m\cdot A+q\cdot B+p\cdot C|}{\sqrt{m^2+q^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Направляющим для прямой $\overrightarrow{A_1A_4}$ является вектор $\overrightarrow{A_1A_4}=(-1;1;-2)$. Вектор нормали $\vec n$ к плоскости $A_1A_2A_3$ имеет координаты $(0;1;2)$.

Таким образом, $\sin\Theta=\dfrac{|-1\cdot0+1\cdot1+(-2)\cdot2|}{\sqrt6\cdot\sqrt5}=\dfrac{3}{\sqrt{30}}$.

4. Составьте уравнение линии, каждая точка которой находится в два раза ближе к точке $A(1;0)$, чем к точке $B(-2;0)$. Приведите полученное уравнение к каноническому виду и укажите тип линии, описываемой этим уравнением.

Решение

Обозначим произвольную точку искомой линии $M(x;y)$. Тогда по условию $2|MA|=|MB|$, где $|MA|$ и $|MB|$ – расстояния от точки M до точек A и B соответственно. Так как расстояние d между точками $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ вычисляется по формуле

$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, то

$|MA|=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$, $|MB|=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}$ и, следовательно,

$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Leftrightarrow 4\left((x-1)^2+y^2\right)=(x+2)^2+y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2=0.$

Выделим полный квадрат по переменной x в последнем равенстве:

$x^2-4x+4+y^2=4$ или $(x-2)^2+y^2=4$.

Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке (2; 0) и радиусом 2.

2.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Даны три точки $A(1;0;-2), B(2;-1;0), C(0;1;2)$. Найдите координаты и длину вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+2\overline{BC}$.

2. Найдите координаты и длину вектора $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=(0;-2;-3)$, $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

3. Выясните, являются ли векторы $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$ ортогональными, коллинеарными.

4. При каких значениях α и β векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\alpha\vec{k}$ и $\vec{b}=\beta\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ коллинеарны?

5. Докажите, что векторы $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}$ и $\vec{c}=4\vec{i}-2\vec{j}$ линейно зависимы.

6. Докажите, что векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ образуют базис. Найдите координаты вектора $\vec{d}=-13\vec{i}+2\vec{j}+18\vec{k}$ в этом базисе.

7. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=(2;1;2)$. Найдите:

1) скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

2) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$;

4) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$;

5) длину вектора $\vec{b}$.

8. Найдите координаты вектора $\vec{a}\times\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$, если $\vec{a}=(3;-1;-2)$, $\vec{b}=(1;2;-1)$.

9. Даны вершины треугольника $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$ и $C(1;0;2)$. Найдите: 1) внутренний угол при вершине C; 2) $\text{пр}_{\overline{CA}}\overline{CB}$; 3) площадь треугольника ABC.

10. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(8;4;1)$ и $\vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ как на сторонах.

11. Даны вершины пирамиды $A(2;0;4)$, $B(0;3;7)$, $C(0;0;6)$, $S(4;3;5)$. Вычислите ее объем V и длину высоты H, опущенной на грань ACS.

12. Лежат ли точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;1)$ и $D(6;1;3)$ в одной плоскости?

13. Компланарны ли следующие векторы:

1) $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(1;-1;3)$, $\vec{c}=(-1;9;-11)$;

2) $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(2;1;2)$, $\vec{c}=(3;-1;-2)$?

14. Выясните, правой или левой будет тройка векторов $\vec{a}=(3;4;0)$, $\vec{b}=(0;-4;1)$, $\vec{c}=(0;2;5)$.

15. По данным уравнениям постройте прямые, найдите их угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые ими на осях координат. Запишите канонические и параметрические уравнения этих прямых.

1) $2x-y+3=0$;

2) $5x+2y-8=0$;

3) $3x+8y+16=0$.

16. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(0;2)$ и $B(-3;7)$.

17. Точка $A(-2;3)$ лежит на прямой, перпендикулярной прямой $2x-3y+8=0$. Напишите уравнение этой прямой.

18. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-3)$ параллельно прямой, соединяющей точки $M_1(-4;0)$ и $M_2(2;2)$.

19. Исследуйте взаимное расположение следующих пар прямых:

1) $3x+5y-9=0$ и $10x-6y+4=0$;

2) $2x+5y-2=0$ и $x+y+4=0$;

3) $x+8=0$ и $2x-3=0$;

4) $2y=x-1$ и $4y-2x+2=0$.

В случае пересечения найдите координаты точки пересечения.

20. При каких значениях α следующие пары прямых: а) параллельны; б) перпендикулярны

1) $\alpha x-3y-3=0$ и $3x-6y+7=0$; 2) $2x-5y+9=0$ и $\alpha x+15y-1=0$?

21. Найдите координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-3;4)$ относительно прямой $4x - y - 1 = 0$.

22. Найдите расстояние между параллельными прямыми $2x - 3y + 8 = 0$ и $4x - 6y + 10 = 0$.

23. Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 5y + 10 = 0$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник, площадь которого равна 5.

24. Найдите угол между прямыми $x + 2y - 5 = 0$ и $4x + 2y - 1 = 0$.

25. Найдите координаты центра O и радиус r окружности

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

26. Приведите к каноническому виду уравнения кривых второго порядка. Определите тип этих кривых и постройте их.

1) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$; 2) $x^2 - 9y^2 + 2x - 36y - 44 = 0$;

3) $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

27. Определите, какая линия определяется уравнением

$$x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}\ .$$

28. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A(1;2;0)$, $B(2;1;1)$, $C(3;0;1)$.

29. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;1;-1)$, параллельно векторам $\vec{a} = (3;-1;0)$ и $b = (2;0;-1)$.

30. Составьте уравнение плоскости, проходящей:

1) через точку $M(4;-1;2)$ и ось Ox;

2) через точку $M(1;0;3)$ и ось Oy.

31. Найдите длину h высоты пирамиды $DABC$, опущенной из точки D на грань ABC, если $D(2;2;-\sqrt{3})$, $A(0;0;0)$, $B(0;1;1)$, $C(1;1;0)$.

32. Даны две плоскости $P_1: -x + 2y - z + 1 = 0$ и $P_2: y + 3z - 1 = 0$. Найдите косинус острого угла между ними.

33. Определите, при каких значениях λ и μ плоскости $P_1: 2x + ly + 3z - 5 = 0$ и $P_2: mx - 6y - 6z + 2 = 0$ параллельны.

34. Определите, при каком значении λ плоскости $P_1: 3x - 5y + lz - 3 = 0$ и $P_2: x + 3y + 2z + 5 = 0$ перпендикулярны.

35. Вычислите объем пирамиды, ограниченной плоскостью $P: 2x + 3y - 5z - 30 = 0$ и координатными плоскостями.

36. Составьте уравнения плоскостей, параллельных плоскости $P: x + 2y - 2z - 3 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d = 5$.

37. Напишите канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(2;4;7)$.

38. Установите взаимное расположение прямой и плоскости (в случае их пересечения, найдите координаты точки пересечения):

1) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$ и $3x-3y+2z-5=0$;

2) $\frac{x-13}{8}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{3}$ и $x+2y-4z+1=0$;

3) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ и $3x-y+2z-5=0$.

39. Даны точка $A(3;-1;1)$ и плоскость $x+2y+2z+6=0$. Найдите координаты точки A^*, симметричной точке A относительно этой плоскости.

40. Найдите угол между прямыми $l_1:\begin{cases} x=3t-2, \\ y=0, \\ z=-t+3 \end{cases}$ и $l_2:\begin{cases} x=2t-1, \\ y=0, \\ z=t-3. \end{cases}$

41. Найдите координаты точки A^*, симметричной точке $A(2;3;-1)$ относительно прямой $l:\begin{cases} x=t+1, \\ y=-t-2, \\ z=2t+1, \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

42. Найдите угол между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x-2y-2z-3=0$.

43. Докажите, что прямые $l_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$ и $l_2:\frac{x+4}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{4}$ скрещиваются.

44. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(6;6;2)$, $A_2(5;4;7)$, $A_3(2;4;7)$, $A_4(7;3;0)$. Найдите: 1) длину ребра A_1A_2; 2) уравнение прямой A_1A_2; 3) угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 4) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 5) угол θ между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 6) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 7) площадь грани $A_1A_2A_3$; 8) объем пирамиды.

45. Приведите к каноническому виду уравнения поверхностей второго порядка, определите их тип:

1) $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$;

2) $x^2-y^2-4x+8y-2z=0$;

3) $4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0$.

Ответы

1. $\vec{a} = (-2; 2; 2)$, $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.

2. $\vec{c} = (6; -2; -3)$, $|\vec{c}| = 7$.

3. Не коллинеарны, не ортогональны.

4. $\alpha = -1, \beta = 4$.

6. $\vec{d} = 2\vec{a} + 5\vec{b}; \vec{c} = (2; 5; 0)$.

7. 1) 3; 2) $\frac{1}{\sqrt{21}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{21}}$; 4) 1; 5) 3.

8. (5; 1; 7).

9. 1) $\arccos\frac{18}{\sqrt{494}}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{19}}$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{170}$.

10. $18\sqrt{2}$.

11. $V = 2$, $H = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

12. Да.

13. 1) да; 2) нет.

14. Левая тройка.

16. $5x + 3y - 6 = 0$.

17. $3x + 2y = 0$.

18. $x - 3y - 11 = 0$.

19. 1) перпендикулярны; 2) пересекаются в точке $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{10}{3}\right)$; 3) параллельны; 4) совпадают.

20. 1) а) $\frac{3}{2}$; б) 1; 2) а) – 6; б) $\frac{75}{2}$.

21. $M_2(5; 2)$.

22. $\sqrt{13}$.

23. $2x + 5y - 10 = 0$.

24. $\arccos\frac{4}{5}$.

25. $O\left(2; -\frac{5}{4}\right)$; $r = \frac{11}{4}$.

26. 1) эллипс $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$, где $x' = x - 1, y' = y - 2$; 2) гипербола $\frac{x'^2}{9} - y'^2 = 1$, где $x' = x + 1, y' = y - 2$;

3) парабола $x'^2 = -y'$, где $x' = x - 1, y' = y - \frac{5}{2}$.

27. Правая половина эллипса с центром $M(-5;1)$ и полуосями $a = 2$, $b = 3$.

28. $x + y - 3 = 0$.

29. $x + 3y - 2z - 7 = 0$.

30. 1) $2y + z = 0$; 2) $-3x + z = 0$.

31. $h = 1$.

32. $\frac{1}{2\sqrt{15}}$.

33. $l = 3, m = -4$.

34. $l = 6$.

35. 150.

36. $x + 2y - 2z - 18 = 0$, $x + 2y - 2z + 12 = 0$.

37. Канонические уравнения: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$; параметрические уравнения: $\begin{cases} x = \ \ t + 1, \\ y = 2t + 2, \ \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 4t + 3, \end{cases}$

38. 1) параллельны; 2) прямая принадлежит плоскости; 3) пересекаются в точке $(2;3;1)$.

39. $A^*(1;-5;-3)$.

40. 45°.

41. $A^*\left(-\frac{8}{3};-\frac{13}{3};-\frac{7}{3}\right)$.

42. $\frac{\pi}{6}$.

44. 1) $\sqrt{30}$; 2) $\frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{5}$; 3) $\varphi = \pi - \arccos\frac{\sqrt{105}}{42}$; 4) $5y + 2z - 34 = 0$; 5) $\theta = \arcsin\frac{19}{\sqrt{406}}$; 6) $\frac{x-7}{0} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{29}}{2}$; 8) $\frac{19}{2}$.

45. 1) эллипсоид $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} + z'^2 = 1$, где $x' = x - 1, \ y' = y - 1, \ z' = z - 1$; 2) гиперболический параболоид $x'^2 - y'^2 = 2z'$, где $x' = x - 2, y' = y - 4$, $z' = z - 6$; 3) конус $x'^2 - \frac{y'^2}{4} + z'^2 = 0$, где $x' = x - 1, y' = y - 2, z' = z + 1$.

2.4. ТЕСТОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме
«Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

I вариант

1. Для данного определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ найдите минор M_{12} и алгебраическое дополнение A_{12} элемента a_{12}. Вычислите определитель, разложив его по элементам первой строки.

1) $M_{12} = -8, A_{12} = 8, \Delta = 10$;	2) $M_{12} = 24, A_{12} = -24, \Delta = 10$;
3) $M_{12} = -24, A_{12} = 24, \Delta = 10$;	4) $M_{12} = 24, A_{12} = -24, \Delta = -86$.

2. Проверьте совместность СЛАУ $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$ и, в случае совместности, решите ее.

1) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$;	2) $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1$;
3) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -2$;	4) несовместна.

3. Даны точки $A(0;1;2), B(2;1;5), C(1;3;-1), D(2;1;0)$. Найдите координаты векторов $\vec{a} = 2\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = 3\overrightarrow{AB}$, длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1) $\vec{a} = (0;-4;-5), \vec{b} = (6;0;9), |\vec{a}| = \sqrt{41}; |\vec{b}| = \sqrt{117}$, $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = -\dfrac{45}{\sqrt{4797}}$;

2) $\vec{a} = (0;4;1), \vec{b} = (-6;0;-9), |\vec{a}| = \sqrt{17}; |\vec{b}| = \sqrt{117}$, $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = -\dfrac{9}{\sqrt{1989}}$;

3) $\vec{a} = (0;-4;-1), \vec{b} = (6;0;9), |\vec{a}| = \sqrt{17}; |\vec{b}| = \sqrt{117}$, $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = -\dfrac{9}{\sqrt{1989}}$;

4) $\vec{a} = (0;-4;-1), \vec{b} = (6;0;9), |\vec{a}| = \sqrt{17}; |\vec{b}| = \sqrt{117}$, $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \dfrac{10}{\sqrt{1989}}$.

4. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$. Найдите площадь параллелограмма, сторонами которого являются эти векторы.

1) $S = \sqrt{326}$;	2) $S = \frac{1}{2}\sqrt{326}$;	3) $S = 14$;	4) $S = \sqrt{278}$.

5. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;-3)$ и середину отрезка AB, если $A(0;3)$ и $B(2;7)$.

1) $5x-2y-1=0$;	2) $4x-y+1=0$;	3) $4x-y-1=0$;	4) $2x-y+3=0$.

6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-1;4)$ параллельно плоскости $x-2y+5z-6=0$.

1) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-4}{5}$;	2) $3x-y+4z-25=0$;
3) $x-2y+5z-25=0$;	4) $x-2y+5z+25=0$.

II вариант

1. Для данного определителя $\Delta=\begin{vmatrix}4 & 3 & -5\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}$ найдите минор M_{21} и алгебраическое дополнение A_{21} элемента a_{21}. Вычислите определитель, разложив его по элементам второй строки.

1) $M_{21}=4, A_{21}=-4, \Delta=12$;	2) $M_{21}=-14, A_{21}=14, \Delta=22$;
3) $M_{21}=-14, A_{21}=14, \Delta=6$;	4) $M_{21}=-4, A_{21}=4, \Delta=12$.

2. Проверьте совместность СЛАУ $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=11,\\ 2x_1-x_2+3x_3=-4,\\ x_1-2x_2+2x_3=-7.\end{cases}$ В случае совместности решите ее.

1) несовместна;	2) $x_1=2, x_2=2, x_3=-3$;
3) $x_1=3, x_2=3, x_3=1$;	4) $x_1=1, x_2=3, x_3=-1$.

3. Даны точки $A(5;1;2), B(7;1;3), C(1;0;3), D(3;1;4)$. Найдите координаты векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ и $\vec{b}=-2\overrightarrow{AB}$ и площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a},\ \vec{b}$ как на сторонах.

1) $\vec{a}=(4;1;2), \vec{b}=(-4;0;-2), S=\sqrt{5}$;	2) $\vec{a}=(-4;-1;-2), \vec{b}=(4;0;2), S=\sqrt{5}$;
3) $\vec{a}=(4;1;2), \vec{b}=(-4;0;-2), S=\sqrt{69}$;	4) $\vec{a}=(-4;-1;-2), \vec{b}=(4;0;2), S=\sqrt{69}$.

4. Найдите объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2;-3;5)$, $B(0;2;1)$, $C(-2;-2;3)$, $D(3;2;4)$.

1) $V=36$;	2) $V=6$;	3) $V=18$;	4) $V=12$.

5. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;4)$ перпендикулярно прямой $x+2y-3=0$.

1) $2x-y-2=0$;	2) $2x-y+2=0$;	3) $x+2y-11=0$;	4) $y=3x+4$.

6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $B(2;3;4)$.

1) $2x - z = 0$; 2) $y - 3 = 0$; 3) $x - 2z = 0$; 4) $4y - 3z = 0$.

III вариант

1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Найдите обратную матрицу.

1) $\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \\ -0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}7 & -0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}7 & -0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 100 & -200 & 700 \\ 0 & 100 & -200 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$.

2. Проверьте совместность СЛАУ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ В случае совместности решите ее.

1) $(5; 5; -5)$; 2) $(2; 2; -2)$; 3) несовместна; 4) $(1; 1; -1)$.

3. Найдите площадь треугольника с вершинами $A(-1; 1; 5)$, $B(3; -4; 5)$, $C(-1; 5; 2)$ и длину высоты, проведенной из вершины B к стороне AC.

1) $S_\Delta = \frac{25}{2}, h = 5$; 2) $S_\Delta = 25, h = 10$; 3) $S_\Delta = 25, h = 5$; 4) $S_\Delta = \frac{25}{2}, h = 10$.

4. Даны точки $A(0; 1; 0)$, $B(2; 1; 1)$, $C(4; 2; 1)$, $D(0; 2; 1)$. Найдите координаты векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ и $\vec{b} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, определите ортогональны ли они.

1) $\vec{a} = (2; -1; 0), \vec{b} = (6; 3; 2)$ – не ортогональны;

2) $\vec{a} = (-2; 1; 0), \vec{b} = (-2; -3; -2)$ – не ортогональны;

3) $\vec{a} = (2; -1; 0), \vec{b} = (6; 3; 2)$ – ортогональны;

4) $\vec{a} = (-2; 1; 0), \vec{b} = (-2; -3; -2)$ – ортогональны.

5. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2; 2)$, $B(-2; -8)$ и $C(-6; -2)$. Составьте уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины A.

1) $6x + 7y - 26 = 0$; 2) $2x - 3y + 1 = 0$; 3) $3x + 2y - 10 = 0$; 4) $7x - 6y - 2 = 0$.

6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(4; -1; 2)$.

1) $-x + 4y = 0$; 2) $2y + z = 0$; 3) $y + 2z = 0$; 4) $2x + y = 0$.

IV вариант

1. Вычислите определитель матрицы $B = A^2 - 3A + 5E$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) 45;	2) 41;	3) –40;	4) 36.

2. Проверьте совместность СЛАУ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1. \end{cases}$ В случае совместности решите ее.

1) несовместна;	2) $(3; 3; 0)$;	3) $(-2; 1; 9)$;	4) $(3; 5; 4)$.

3. Даны векторы $\vec{a}(2;-1;1)$, $\vec{b}(1;0;1)$ и $\vec{c}(1;0;0)$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{b} \cdot \vec{x} = 2, \vec{c} \cdot \vec{x} = 1, \vec{a} \cdot \vec{x} \cdot \vec{c} = 0$.

1) $(1;-1;1)$;	2) $(3;1;-1)$;	3) $(1;0;-1)$;	4) $(1;0;0)$;

4. Даны точки $A(1;2;3)$, $B(0;1;1)$, $C(2;1;0)$. Найдите площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\vec{a} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}$.

1) 270;	2) $\frac{\sqrt{270}}{2}$;	3) $\sqrt{270}$;	4) $2\sqrt{270}$.

5. Даны вершины треугольника $A(0;1)$, $B(6;5)$ и $C(12;-1)$. Составьте уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины *C*.

1) $2x - 3y - 34 = 0$;	2) $3x + 2y - 34 = 0$;
3) $6x + 4y - 34 = 0$;	4) $2x - 3y - 17 = 0$.

6. Составьте уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях OX, OY, OZ отрезки $a = 1, b = -1, c = -1$ соответственно.

1) $x - y - z + 1 = 0$;	2) $x - y - z = 0$;
3) $x - y - z + 3 = 0$;	4) $x - y - z - 1 = 0$.

V вариант

1. Найдите неизвестную матрицу *X* из уравнения $AX + 2E = C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 10 & -38 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$;	2) $\begin{pmatrix} 10 & -42 \\ 4 & -17 \end{pmatrix}$;	3) $\begin{pmatrix} 14 & -32 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$;	4) $X = \begin{pmatrix} 6 & -28 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Проверьте совместность СЛАУ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$ В случае совместности решите ее.

1) $(-1; 0; 8)$; 2) несовместна; 3) $(3; 4; 5)$; 4) $(-19; 9; 8)$.

3. Даны точки $A(1; 0; 0)$, $B(2; 1; 3)$, $C(4; 1; 1)$, $D(0; 1; 2)$. Найдите координаты векторов $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{BC}$ и синус угла между ними.

1) $\vec{a} = (-5; -3; -7), \vec{b} = (8; 0; -5), \sin\varphi = \sqrt{\frac{7362}{7387}}$;
2) $\vec{a} = (-1; 0; 2), \vec{b} = (0; 0; -1), \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$;
3) $\vec{a} = (-1; 1; 5), \vec{b} = (0; 0; 4), \sin\varphi = \sqrt{\frac{2}{27}}$;
4) $\vec{a} = (-1; 1; 5), \vec{b} = (0; 0; 4), \sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{27}}$.

4. Лежат ли точки $A(-1; 2; 1)$, $B(-3; 1; 2)$, $C(3; -2; 2)$, $D(3; -4; 3)$: а) в одной плоскости; б) на одной прямой?

1) а) да; б) да; 2) а) нет; б) нет; 3) а) нет; б) да; 4) а) да; б) нет.

5. Дано общее уравнение прямой $3x - 5y - 15 = 0$. Напишите уравнения этой же прямой: а) с угловым коэффициентом; б) в отрезках; в) нормальное. Найдите площадь треугольника, образованного данной прямой и осями координат.

1) а) $y = \frac{3}{5}x - 3$; б) $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$; в) $\frac{3}{\sqrt{34}}x - \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{15}{\sqrt{34}} = 0$; $S_\Delta = \frac{15}{2}$;
2) а) $y = \frac{3}{5}x - 3$; б) $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$; в) $3x - 5y - 15 = 0$; $S_\Delta = \frac{15}{2}$;
3) а) $y = \frac{3}{5}x - 3$; б) $\frac{x}{5} - \frac{y}{3} = 1$; в) $\frac{3}{\sqrt{34}}x - \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{15}{\sqrt{34}} = 0$; $S_\Delta = \frac{9}{5}$;
4) а) $y = \frac{3}{5}x - 3$; б) $\frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} = 1$; в) $\frac{3}{\sqrt{34}}x - \frac{5}{\sqrt{34}}y - \frac{15}{\sqrt{34}} = 0$; $S_\Delta = \frac{225}{2}$.

6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 3; 5)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (4; 3; 2)$.

1) $4x + 3y + 2z = 0$;	2) $4x + 3y + 2z - 27 = 0$;
3) $2x + 3y + 4z - 33 = 0$;	4) $4x + 3y + 2z + 1 = 0$.

VI вариант

1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите обратную матрицу.

1) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Проверьте совместность СЛАУ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=3, \\ 3x_1+5x_2+6x_3=7. \end{cases}$ В случае совместности решите ее.

1) $(2;-1;-1)$;	2) несовместна;	3) $\left(2;-1;\frac{2}{5}\right)$;	4) $(0;0;-1)$.

3. Даны точки $A(2;0;1)$, $B(1;3;1)$, $C(2;1;1)$. Найдите координаты векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{AC}$, определите компланарны ли они.

1) $\vec{a}=(-1;2;0), \vec{b}=(2;-1;0), \vec{c}=(-1;2;0)$ – компланарны;
2) $\vec{a}=(-1;2;0), \vec{b}=(2;-1;0), \vec{c}=(-1;2;0)$ – не компланарны;
3) $\vec{a}=(-1;5;0), \vec{b}=(2;-3;0), \vec{c}=(-1;4;0)$ – не компланарны;
4) $\vec{a}=(-1;5;0), \vec{b}=(2;-3;0), \vec{c}=(-1;4;0)$ – компланарны.

4. Найдите площадь треугольника с вершинами $A(1;1;3)$, $B(3;-1;6)$, $C(5;1;-3)$.

1) 14;	2) 28;	3) 1;	4) 7.

5. Даны стороны треугольника $AB: x+2y+5=0$, $BC: 3x+y+1=0$, $AC: x+y+7=0$. Составьте уравнение высоты треугольника ABC, опущенной на сторону BC.

1) $-x+y+5=0$;	2) $x-3y+15=0$;
3) $x-3y-15=0$;	4) $x-3y+7=0$;

6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;0;1)$ и параллельной векторам $\vec{a}=(1;1;1)$, $\vec{b}=(-1;-1;1)$.

1) $x+y-2=0$;	2) $x-y-4=0$;
3) $x-y-z+1=0$;	4) $x-y-2=0$.

VII вариант

1. Найдите матрицу $C = A^T B + 2B^{-1} - 3E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$;	2) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$;	3) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$;	4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Проверьте совместность СЛАУ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$ В случае совместности решите ее.

1) $(4; 0; -1)$;	2) несовместна;	3) $(0; -1; 1)$;	4) $(1; 0; 2)$.

3. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$ будут: а) ортогональными; б) коллинеарными?

1) а) $m = -1$; б) $m = 10$;	2) а) $m = 10$; б) $m = 1$;
3) а) $m = 10$; б) $m = -1$;	4) а) $m = 3$; б) $m = -1$.

4. Даны точки $A(0; 0; 1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(3; 1; 1)$. Найдите длины векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ и синус угла между ними.

1) $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{69}, \lvert\vec{b}\rvert = 3, \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{69}}$;	2) $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{69}, \lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{29}, \sin\varphi = \sqrt{\dfrac{65}{69 \cdot 29}}$;
3) $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{69}, \lvert\vec{b}\rvert = 3, \sin\varphi = \sqrt{\dfrac{65}{69}}$;	4) $\lvert\vec{a}\rvert = 69, \lvert\vec{b}\rvert = 9, \sin\varphi = \dfrac{65}{69 \cdot 9}$.

5. Даны вершины треугольника $A(0; 0)$, $B(-1; -3)$ и $C(-5; -1)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через вершину *B* параллельно стороне *BC*.

1) $x - 5y + 14 = 0$;	2) $x - 5y - 14 = 0$;
3) $5x + y + 8 = 0$;	4) $5x + y - 8 = 0$.

6. Среди уравнений 1) $y + 2z = 0$, 2) $2x + 5 = 0$, 3) $x - 3z + 5 = 0$, 4) $5z - 63 = 0$, 5) $7x - 3y + 1 = 0$, 6) $9y + 8 = 0$ плоскостей выберите уравнение плоскости:

а) параллельной плоскости XOY;
б) параллельной плоскости YOZ;
в) параллельной плоскости XOZ;
г) параллельной оси OY;
д) параллельной оси OZ;
е) проходящей через ось OX.

1) а) 2,	б) 3,	в) 4,	г) 5,	д) 6,	е) 1;
2) а) 1,	б) 5,	в) 3,	г) 4,	д) 6,	е) 2;
3) а) 2,	б) 4,	в) 6,	г) 3,	д) 5,	е) 1;
4) а) 4,	б) 2,	в) 6,	г) 3,	д) 5,	е) 1.

3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

В результате изучения данной темы студент должен научиться:
– вычислять пределы функций;
– исследовать, является ли функция непрерывной;
– находить точки разрыва функции и определять их характер.

3.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. На рис. 2 задан график функции $f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{при } -\pi\le x\le 0,\\ 2, & \text{при } 0<x\le 1,\\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{при } x>1.\end{cases}$$

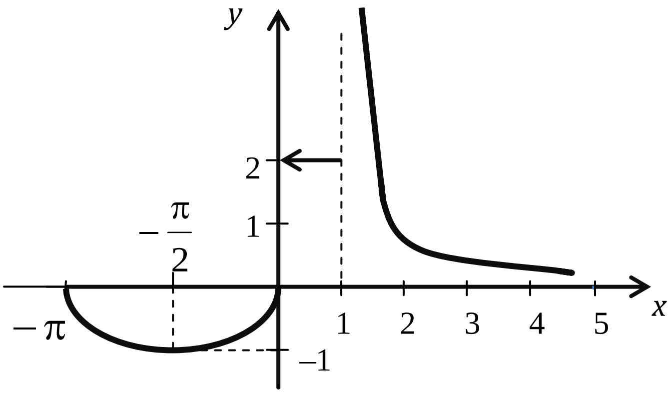


Рис. 2

Определите следующее:

1) область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$;

2) $f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(11)$;

3) $\lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

4) существуют ли $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to1} f(x)$? Верно ли, что функция f имеет разрыв в точках $x=0$ и $x=1$?

5) верно ли, что во всех остальных точках из области определения $D(f)$ функция является непрерывной?

6) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

2. Найдите пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+1}{x^3-4x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+2}{x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^2-4x+3}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sin\frac{x}{4}\right)^2}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin5x}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin3x}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{x\sin3x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{x}\right)^x$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x+2}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+3)-\ln x)$.

3. Исследуйте непрерывность функции $f(x)$ в указанных точках x_1 и x_2. Постройте график функции $f(x)$.

1) $f(x)=\dfrac{2x+4}{3x+9}$, $x_1=-1$, $x_2=-3$; 2) $f(x)=4^{\frac{2}{3-x}}$, $x_1=3$, $x_2=5$.

4. Дана функция $f(x)$. Найдите точки разрыва функции, если они существуют. Сделайте чертеж.

1) $f(x)=\begin{cases} 2, \text{ если } x<-2, \\ \sqrt{4-\text{x}^2}, \text{ если } -2\le x<2, \\ x-2, \text{ если } x>2; \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ если } x<0, \\ x+1, \text{ если } 0\le x<2, \\ x^2-1, \text{ если } x\ge 2. \end{cases}$

Ответы

2. 1) 9; 2) ∞; 3) 2; 4) 0,05; 5) $\dfrac{2}{3}$; 6) ∞; 7) $\dfrac{1}{16}$; 8) $\dfrac{2}{5}$; 9) $\dfrac{2}{3}$; 10) 6; 11) e^6; 12) e^5; 13) e^5; 14) e^2; 15) e^3.

3. 1) в точке x_1 функция непрерывна; точка x_2 – точка разрыва 2-го рода; 2) x_1 – точка разрыва 2-го рода; в точке x_2 функция непрерывна.

4. 1) $x=-2$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен –2; $x=2$ – точка устранимого разрыва; 2) $x=0$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 2, в точке $x=2$ функция непрерывна.

3.2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+3}{x^2-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x+1}$.

Решение:

1) подставляя вместо x его предельное значение, равное 2, получим $\dfrac{2^3-3\cdot 2^2+3}{2^2-3}=-1$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+3}{x^2-3}=-1$;

2) при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби являются бесконечно большими функциями, что приводит к неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Раскроем эту неопределенность, разделив числитель и знаменатель на старшую степень аргумента, т. е. на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+10x+20}{x^3-10x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}+\frac{20}{x^3}}{1-\frac{10}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{0+0+0}{1-0-0}=0,$$

так как при $x\to\infty$ функции $\dfrac{7}{x}$, $\dfrac{10}{x^2}$, $\dfrac{20}{x^3}$, $\dfrac{10}{x}$ и $\dfrac{1}{x^3}$ являются бесконечно малыми;

3) пределы числителя и знаменателя при $x\to 2$ равны нулю, что приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Так как $x=2$ является корнем многочленов в числителе и знаменателе, то разложив на множители числитель и знаменатель, сократим дробь на $x-2$. Получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{2+2}{2-3}=-4;$$

4) при подстановке предельного значения аргумента $x=1$ получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенности умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{6};$$

5) непосредственная подстановка аргумента $x=0$ приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Раскроем неопределенность, воспользовавшись эквивалентными бесконечно малыми функциями. Так как $\sin 3x \sim 3x$ при $x\to 0$, то $\sin^2 3x=\sin 3x\cdot\sin 3x \sim (3x)^2=9x^2$ при $x\to 0$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x}=\lim_{x\to}\frac{9x^2}{x}=\lim_{x\to 0}9x=0;$$

6) так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}}=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}(4x+1)=\infty$, то мы имеем неопределенность вида 1^∞. Раскроем ее с помощью второго замечательного предела $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e$. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{2x-3}{2x-1}-1\right)\right)^{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x-1}\right)^{4x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-2}\cdot\frac{-2(4x+1)}{2x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{-2}}\right]^{\frac{-2(4x+1)}{2x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-8x-2}{2x-1}}=e^{-4}.$$

2. Исследуйте непрерывность функции $f(x)=\frac{x}{x-4}$ в точках $x_1=1$ и $x_2=4$. Постройте график $f(x)$.

Решение

Поскольку f является элементарной функцией, то она непрерывна всюду в области определения: $D(f)=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$ ($x=4$ не принадлежит $D(f)$, поскольку является нулем знаменателя). Так как $x_1=1\in D(f)$, то в этой точке f непрерывна. В точке $x_2=4$ функция f не определена, следовательно, эта точка является точкой разрыва. Вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 4-0}\frac{x}{x-4}=\frac{4-0}{4-0-4}=\frac{4}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 4+0}\frac{x}{x-4}=\frac{4+0}{4+0-4}=\frac{4}{+0}=+\infty.$$

Так как пределы слева и справа бесконечны, то $x_2=4$ является точкой разрыва второго рода.

Для построения графика $f(x)$ найдем $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x-4}=1$. Найдем также точку пересечения графика с осями координат: при $x=0$, $f(0)=0$, т. е. график проходит через начало координат. Изобразим график $f(x)$ (рис. 3).

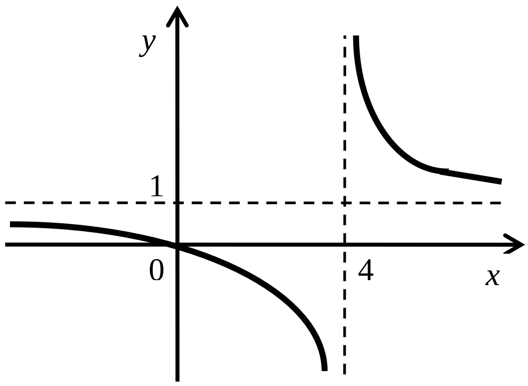


Рис. 3

3. Дана функция $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\le -1,\\ x^2+1, \text{ если } -1<x<1,\\ -x+3, \text{ если } x>1.\end{cases}$ Найдите точки разрыва этой функции, если они существуют. Определите их тип и сделайте чертеж.

Решение

Функция f определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;-1)$, $(-1;\,1)$ и $(1;\,\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1=-1$ и $x_2=1$. Для точки $x_1=-1$ имеем:

$$f(-1)=1,\ \lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0} 1=1,\ \lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\left(x^2+1\right)=2.$$

Односторонние пределы конечны и различны, значит, функция f в точке $x_1=-1$ имеет разрыв первого рода. Скачок функции f в точке $x_1=-1$ находим как разность правого и левого пределов:

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)-\lim_{x\to -1-0} f(x)=2-1=1.$$

В точке $x_2=1$ функция f не определена. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right)=2,\ \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(-x+3)=2.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2\neq f(1)$, то точка $x_2=1$ является точкой устранимого разрыва.

График функции f изображен на рис. 4.

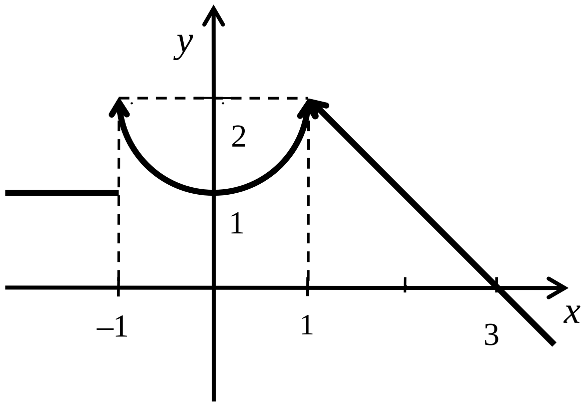


Рис. 4

3.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Постройте графики элементарных функций:

1) $y=4x-2$; 2) $y=(x-2)^2$; 3) $y=\dfrac{1}{4-x}$; 4) $y=2\sin x$;

5) $y=e^x-3$; 6) $y=2\ln x$; 7) $y=\cos 2x$; 8) $y=1-x^3$;

9) $y=1+\operatorname{arctg} x$; 10) $y=\arcsin x$.

2. Найдите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-3x^2+x}{2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4-3x-4}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-7x-1}{3x^2+x+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-8x}{\sqrt{x+1}-3}$;

10) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{9-x}-2}{3-\sqrt{x+4}}$; 11) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2\operatorname{arctg}^2 x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{4x+3}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$; 18) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$; 21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$;

22) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2))$.

3. Исследуйте непрерывность функции f в указанных точках x_1 и x_2. Постройте график функции f.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x_1=1$, $x_2=4$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$, $x_1=3$, $x_2=0$;

3) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$, $x_1=-1$, $x_2=0$.

4. Дана функция f. Найдите точки разрыва функции, если они существуют. Сделайте чертеж.

1) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } \; x\le -\pi, \\ \sin x, \text{ если } -\pi<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \text{ если } \; x>\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+2}, \text{ если } \; x<-2, \\ 2, \text{ если } -2\le x\le 2, \\ \dfrac{1}{2x}, \text{ если } \; x>2. \end{cases}$

Ответы

2. 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) –3; 4) 0; 5) ∞; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{1}{2}$; 8) $\frac{1}{4}$; 9) 48; 10) $\frac{3}{2}$; 11) 7; 12) $-\frac{5}{3}$; 13) $\frac{9}{4}$; 14) $\frac{1}{2}$; 15) ∞; 16) $e^{\frac{4}{3}}$; 17) e^{-6}; 18) e^2; 19) e^{12}; 20) $-\frac{1}{2}$; 21) $\frac{9}{4}$; 22) 2.

3. 1) x_1 – точка устранимого разрыва, x_2 – точка непрерывности; 2) x_1 – точка непрерывности, x_2 – точка разрыва 1-го рода; 3) x_1 – точка непрерывности, x_2 – точка разрыва 2-го рода.

4. 1) $x=-\pi$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен π, $x=\dfrac{\pi}{2}$ – точка устранимого разрыва; 2) $x=-2$ – точка разрыва 2-го рода; $x=2$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен $-\dfrac{7}{4}$.

3.4. ТЕСТОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме
«Введение в анализ»

I вариант

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4-x}{x^2-5x+4}$, где $x_0=-1; 1; 4; \infty$:

а) $-0{,}5; \infty; \frac{1}{3}; -1$; б) $0{,}5; \infty; -\frac{1}{3}; 0$; в) $0{,}5; \infty; -\frac{1}{3}; \infty$; г) $-0{,}5; 3; \frac{1}{3}; 0$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$:

а) e;	б) e^{-1};	в) 1;	г) $\frac{1}{3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$:

а) $\frac{7}{3}$;	б) $7\sqrt{2}$;	в) 7;	г) $\frac{7\sqrt{2}}{3}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2x-1}\right)^{3x}$:

а) ∞;	б) 0,5;	в) 0;	г) e.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x\cdot\sin 3x}$:

а) $\frac{32}{3}$;	б) 0;	в) $\frac{8}{3}$;	г) $\frac{16}{3}$.

6) $\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{5}{1-x}}$:

а) 32;	б) $+\infty$;	в) $-\infty$;	г) 0.

7) $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{5}{1+x}}$:

а) 32;	б) $+\infty$;	в) $-\infty$;	г) 0.

2. Исследуйте функцию $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\le -4,\\ 2, & -4<x\le -2,\\ \dfrac{1}{x+2}, & x>-2\end{cases}$ на непрерывность и постройте ее график.

1) непрерывна для $\forall x\in\mathbb{R}$; 2) $x=-4$ – точка разрыва 1-го рода, $x=-2$ – точка разрыва 2-го рода; 3) $x=-2$ – точка разрыва 2-го рода; 4) $x=-4$ и $x=-2$ – точки разрыва 1-го рода.

II вариант

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2-2x}{2-x-x^2}$, где $x_0=-2;-1;1;\infty$:

а) $0;\ 2;\ \dfrac{2}{3};\ \infty$;	б) $-1;\ 2;\ 1;\ 0$;	в) $\infty;\ 2;\ \dfrac{2}{3};\ 2$;	г) $\infty;\ 2;\ \dfrac{2}{3};\ 0$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{x}\right)^{3-2x}$:

а) e^{-4};	б) e^{4};	в) 1;	г) ∞.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$:

а) $-\infty$;	б) $+\infty$;	в) 5;	г) –4.

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$:

а) $\sqrt{2}$;	б) $2\sqrt{2}$;	в) ∞;	г) $3\sqrt{2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$:

а) 0;	б) 5;	в) –5;	г) $\dfrac{1}{5}$.

6) $\lim\limits_{x\to 4-0}5^{\frac{3x}{x-4}}$:

а) $+\infty$;	б) $-\infty$;	в) 5;	г) 0.

7) $\lim\limits_{x\to 4+0}5^{\frac{3x}{x-4}}$:

а) $+\infty$;	б) $-\infty$;	в) 5;	г) 0.

2. Исследуйте непрерывность функции $f(x)=\begin{cases}1, & x\le -1,\\ x^2-1, & -1<x<2,\\ x+1, & x>2\end{cases}$ и постройте ее график.

1) непрерывна для $\forall x\in\mathbb{R}$; 2) $x_1=-1$ и $x_2=2$ – точки разрыва 1-го рода; 3) $x_1=-1$ – точка разрыва 1-го рода, $x=2$ – точка устранимого разрыва; 4) $x=-1$ – точка разрыва 2-го рода, $x=2$ – точка разрыва 1-го рода.

III вариант

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x+1}{x^2-3x-4}$, где $x_0=-1;4;1;\infty$:

а) $-\dfrac{1}{4};0;2;\infty$;	б) $0;5;-\dfrac{1}{3};0$;	в) $-\dfrac{1}{5};\infty;-\dfrac{1}{3};0$;	г) $\infty;\infty;0;-\dfrac{1}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$:

а) e^{-1};	б) e;	в) 1;	г) ∞.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{4x+5}\right)^x$:

а) 0;	б) ∞;	в) e^2;	г) e^5.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$:

а) 0;	б) 1;	в) 2;	г) ∞.

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{27-x^3}$:

а) $-\dfrac{1}{27}$;	б) 0;	в) ∞;	г) $\dfrac{1}{21}$.

6) $\lim\limits_{x\to -2-0}8^{\frac{1}{x+2}}$:

а) 8;	б) $-\infty$;	в) $\dfrac{1}{8}$;	г) 0.

7) $\lim\limits_{x\to -2+0}8^{\frac{1}{x+2}}$:

а) 0;	б) 8;	в) $+\infty$;	г) $\frac{1}{8}$.

2. Исследуйте непрерывность функции $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1, \\ 2x, & 1<x\le 3, \\ 2, & x>3 \end{cases}$ и постройте ее график.

1) $x=1$ – точка устранимого разрыва, $x=3$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 3;
2) $x=1$ – точки разрыва нет, $x=3$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 3;
3) $x=1$ – точки разрыва нет, $x=3$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 4;
4) $x=1$ – точка устранимого разрыва, $x=3$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 4.

IV вариант

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x-6}{x^2-3x+2}$, где $x_0=2;1;0;\infty$:

а) $3;\infty;-3;0$;	б) $0;3;3;3$;	в) $1;1;1;\infty$;	г) $3;\infty;-3;\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$:

а) e^6;	б) e;	в) ∞;	г) 1.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{2x-1}\right)^{x}$:

а) 1;	б) ∞;	в) e;	г) 0.

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$:

а) 1;	б) 0;	в) 4;	г) –12.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$:

а) $\frac{1}{4}$;	б) $\frac{1}{2}$;	в) 1;	г) 0.

6) $\lim\limits_{x\to -2-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2+x}$:

а) $-\infty$;	б) $\frac{\pi}{2}$;	в) $-\frac{\pi}{2}$;	г) 0.

7) $\lim\limits_{x\to -2+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2+x}$:

а) $-\dfrac{\pi}{2}$;	б) $\dfrac{\pi}{2}$;	в) $+\infty$;	г) 1.

2. Исследуйте непрерывность функции $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 2x, & x\ge\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ и постройте ее график.

1) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $x=\dfrac{\pi}{2}$ – разрыва нет;

2) $x=0$ – разрыва нет, $x=\dfrac{\pi}{2}$ – разрыва нет;

3) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $x=\dfrac{\pi}{2}$ – точка разрыва 2-го рода;

4) $x=0$ – разрыва нет, $x=\dfrac{\pi}{2}$ – точка разрыва 2-го рода.

V вариант

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$, где $x_0=3;-1;1;\infty$:

а) $0;0;\dfrac{1}{2};\infty$;	б) $0;0;\dfrac{1}{2};0$;	в) $0;\infty;\dfrac{1}{2};0$;	г) $\dfrac{1}{4};\infty;\dfrac{1}{2};0$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+5}\right)^{x-6}$:

а) 1;	б) e^{-2};	в) ∞;	г) e^{-8}.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{x}$:

а) $\dfrac{1}{2}$;	б) ∞;	в) e^2;	г) 0.

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$:

а) 1;	б) $-\dfrac{9}{5}$;	в) $-\dfrac{3}{10}$;	г) 0.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{-\operatorname{tg}2x}$:

а) –2;	б) 1;	в) –1;	г) ∞.

6) $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$:

а) 0;	б) $\dfrac{1}{3}$;	в) $\dfrac{2}{3}$;	г) 1.

7) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$:

а) 0;	б) 1;	в) $\dfrac{1}{3}$;	г) ∞.

2. Исследуйте непрерывность функции $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x<0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ x+2, & x>1\end{cases}$ и постройте ее график.

1) $x=0$ – точки разрыва нет, $x=1$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 2;
2) $x=0$ – разрыва нет, $x=1$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 3;
3) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $x=1$ – точка разрыва 2-го рода;
4) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $x=1$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 2.

VI вариант

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$, где $x_0=2;1;-1;\infty$:

а) $0;0;-\dfrac{1}{2};0$;	б) $1;0;-\dfrac{1}{2};\infty$;	в) $0;\infty;-\dfrac{1}{2};0$;	г) $1;\infty;-\dfrac{1}{2};0$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{x+5}$:

а) 1;	б) e^6;	в) ∞;	г) e^{30}.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$:

а) 0;	б) 2;	в) e^{-2};	г) ∞.

4) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$:

а) $\dfrac{1}{6}$;	б) 0;	в) 1;	г) ∞.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg}(7x)}$:

а) $-\dfrac{\ln 5}{7}$;	б) $-\dfrac{1}{7}$;	в) 1;	г) $-\dfrac{1}{7\ln 5}$.

6) $\lim\limits_{x\to 2-0} 16^{\frac{1}{x-2}}$:

а) 0;	б) $+\infty$;	в) $\dfrac{1}{16}$;	г) –16.

7) $\lim\limits_{x\to 2+0} 16^{\frac{1}{x-2}}$:

а) 0;	б) 16;	в) $+\infty$;	г) 256.

2. Исследуйте непрерывность функции $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ x^2-1, & 0<x<2, \\ 3x, & x\ge 2 \end{cases}$ и постройте ее график.

1) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $x=2$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 2;
2) $x=0$ – разрыва нет, $x=2$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 3;
3) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $x=2$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 3;
4) $x=0$ – разрыва нет, $x=2$ – точка разрыва 2-го рода.

VII вариант

1. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-5}{x^2-4x-5}$, где $x_0=5;-1;1;\infty$:

а) $0;\infty;\dfrac{1}{2};0$;	б) $1;\infty;\dfrac{1}{2};0$;	в) $0;0;\dfrac{1}{2};\infty$;	г) $\dfrac{1}{6};\infty;\dfrac{1}{2};0$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+8}{3x+2}\right)^x$:

а) 1;	б) ∞;	в) $e^{\frac{1}{3}}$;	г) e^2.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{x+1}\right)^{x}$:

а) ∞;	б) 4;	в) 0;	г) e^3.

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$:

а) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$;	б) 1;	в) $\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$;	г) 0.

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{3x^3}-1}{\arcsin x^3}$:

а) 1;	б) $3\ln 2$;	в) $\dfrac{3}{\ln 2}$;	г) 3.

6) $\lim\limits_{x\to5-0}\left(-2^{\frac{3}{5-x}}\right)$:

а) $-\infty$;	б) $+\infty$;	в) 0;	г) –8.

7) $\lim\limits_{x\to5+0}\left(-2^{\frac{3}{5-x}}\right)$:

а) $-\infty$;	б) $+\infty$;	в) 0;	г) $-\dfrac{1}{8}$.

2. Исследуйте непрерывность функции $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 3x^2, & 0\le x\le1,\\ -2x+1, & x>1\end{cases}$ и постройте ее график.

1) $x=0$ – точка разрыва 2-го рода, $x=1$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 4;
2) $x=0$ – точка разрыва 2-го рода, $x=1$ – точки разрыва нет;
3) $x=0$ – точка устранимого разрыва, $x=1$ – точка разрыва 1-го рода, скачок равен 4;
4) $x=0$ – точка разрыва 2-го рода, $x=1$ – точка разрыва 1-го рода скачок равен 2.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В результате изучения данной темы студент должен:

– уметь применять таблицу производных и правила дифференцирования для вычисления производных элементарных функций;

– находить производные функций, заданных неявно и параметрически;

– находить дифференциалы сложных функций и применять их к приближенным вычислениям;

– находить производные и дифференциалы высших порядков;

– решать задачи с использованием физического и геометрического смысла производной;

– использовать правило Лопиталя при вычислении пределов;

– выполнять разложение функции по формуле Тейлора;

– определять интервалы возрастания (убывания) функции, точки локального экстремума;

– находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке;

– находить интервалы выпуклости вверх (вниз) графика функции и точки перегиба;

– находить асимптоты графика функции;

– строить графики функций;

– находить область определения функции многих переменных;

– вычислять частные производные первого и высших порядков функции многих переменных;

– находить полные дифференциалы первого и второго порядков функции двух переменных;

– использовать дифференциалы для приближенных вычислений;

– составлять уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности;

– исследовать на экстремум функции двух переменных.

4.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Дифференцирование функции одной и многих переменных

1. Используя таблицу производных и правила дифференцирования, найдите производные данных функций:

1) $y = 6x^3 + 2x^2 + 3$; 2) $y = 2\sqrt[3]{x^2} + \operatorname{tg} x$; 3) $y = \dfrac{x^3}{\sin x}$.

2. Найдите:

1) производные функций а) – г);

2) дифференциалы функций а), в):

а) $y = \cos(2x+2)$; б) $y = \lg^3 x$; в) $y = (x^4 - 3x + 2)^5$; г) $y = e^{\cos 3x}$.

3. Найдите производные функций, заданных неявно и параметрически:

1) $xy^2 + x^2y = 2$;   2) $\begin{cases} x = t^2 + 3t, \\ y = t^3 + 2t + 4. \end{cases}$

4. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные указанных функций:

1) $y = (5x)^{\sin x}$;   2) $y = (x-1)^2(x+2)^2$.

5. Выполните следующее:
1) найдите производные второго порядка от указанных функций;
2) для функции а) запишите дифференциал второго порядка:

а) $y = 3x^4 - 3x^2 + 2x - 3$;   б) $y = \ln(x^2)$.

6. Выполните следующее:
1) найдите частные производные первого порядка функций а) – г);
2) для функции б) запишите полный дифференциал;
3) для функции а) запишите дифференциал второго порядка;
4) для функции в) найдите частные производные третьего порядка:

а) $z = x^3 + xy - xy^3$;   б) $z = \sin^y x$;

в) $u = e^{2x - y + 3z}$;   г) $u = yx + x^2z^2 - 3xy^2 + xyz$.

7. Вычислите пределы функций, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{6x^3 - x^2 + 1}$;   2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^2}$;   3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3)e^{8x}$.

8. Напишите формулу Тейлора для функции $y = x^4 + 3x^3 - 2x + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

9. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

10. Какие углы образует кривая $y = x^2 - x$ с осью Ox в точках их пересечения?

11. Вычислите приближенно с помощью дифференциала:

1) $\sqrt[3]{(1{,}03)^2}$;   2) $\sqrt[3]{(4{,}01)^2 + 10{,}98}$.

Применение дифференциального исчисления для исследования функций

1. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости функции $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$.

2. Найдите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2}{3(x-1)^2}$.

3. Найдите интервалы монотонности функции $y = 2 - 3x + x^3$.

4. Найдите экстремумы функций:

1) $y = 4x - x^4$;   2) $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$.

5. Найдите экстремумы функций двух переменных:

1) $z = 3x^2 - x^3 + y^2 + 4y$; 2) $z = 3x + y - xy$.

6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 4x - x^4$ на отрезке $[-2;3]$.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + y - xy$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y = x$, $x = 0$, $y = 4$.

8. Найдите экстремум функции $z = x^3 - y^3$ при условии, что x и y связаны уравнением $x - y - 2 = 0$.

9. Проведите полное исследование и постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{1 - x}$.

Ответы

Дифференцирование функции одной и многих переменных

1. 1) $y' = 18x^2 + 4x$; 2) $y' = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 3) $y' = \dfrac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}$.

2. 1) а) $y' = -2\sin(2x+2)$; б) $y' = \dfrac{3\lg^2 x}{x \ln 10}$;

в) $y' = 5(x^4 - 3x + 2)^4 (4x^3 - 3)$; г) $y' = 3e^{\cos 3x}(-\sin 3x)$;

2) а) $dy = -2\sin(2x+2)dx$; в) $dy = 5(x^4 - 3x + 2)^4 (4x^3 - 3)dx$.

3. 1) $y' = -\dfrac{y(y+2x)}{x(2y+x)}$; 2) $y' = \dfrac{3t^2 + 2}{2t + 3}$.

4. 1) $y' = (5x)^{\sin x} \cos x \ln 5x + 5^{\sin x} x^{\sin x - 1} \sin x$; 2) $y' = 2(x-1)(x+2)(2x+1)$.

5. 1) а) $y'' = 36x^2 - 6$; б) $y'' = -2x^{-2}$; 2) $dy^2 = 6(6x^2 - 1)dx^2$.

6. 1) а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y - y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - 3xy^2$;

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y \sin^{y-1} x \cdot \cos x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin^y x \cdot \ln \sin x$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial z} = e^{x+y+z}$;

г) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y + 2xz^2 - 3y^2 + yz$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - 6xy + xz$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2x^2 z + xy$;

2) $dz = (y \cos x \sin^{y-1} x)dx + (\sin^y x \cdot \ln \sin x)dy$;

3) $d^2 z = 6xdx^2 + 2(1 - 3y^2)dxdy - 6xydy^2$;

4) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 8u$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = -u$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 27u$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 2u$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -4u$,

$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = 18u$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = 12u$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} = -9u$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} = 3u$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = -6u$.

7. 1) $\dfrac{1}{6}$; 2) ∞; 3) 0.

8. $y = 6 + 11(x-1) + 15(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + (x-1)^4$.

9. Касательная $6x - y = 0$, нормаль $x + 6y - 37 = 0$.

10. $135°$; $45°$.

11. 1) $1{,}02$; 2) $3{,}00$.

Применение дифференциального исчисления для исследования функций

1. $(2;1)$ – точка перегиба, $(-\infty;2)$ – промежуток выпуклости вверх, $(2;+\infty)$ – промежуток выпуклости вниз.

2. Горизонтальная $y = \dfrac{1}{3}$, вертикальная $x = 1$.

3. Возрастает на $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$; убывает на $(-1;1)$.

4. 1) $y_{\max} = y(1) = 3$; 15. 2) экстремумов нет.

5. 1) Минимум $z(0;-2) = -4$; 2) экстремумов нет.

6. $y_{\text{наим}} = y(3) = -69$; $y_{\text{наиб}} = y(1) = 3$.

7. $z_{\text{наим}} = z(0{,}0) = z(4{,}4) = 0$, $z_{\text{наиб}} = z(2{,}2) = z(0{,}4) = 4$.

8. $z_{\text{наим}} = z(1,-1) = 2$.

9. График функции изображен на рис. 5.

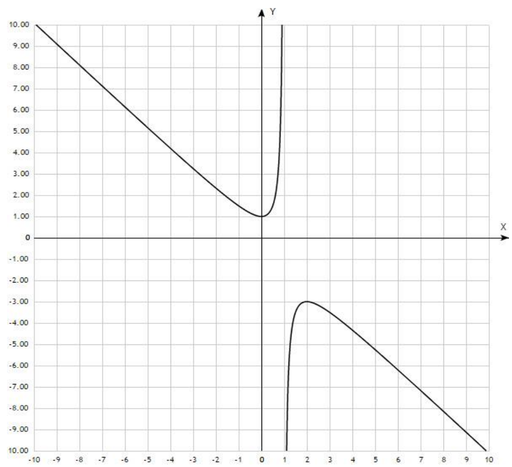


Рис. 5

4.2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Правила дифференцирования:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности $(c \cdot u)' = c \cdot u'$.
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$, если $v \neq 0$.

Производные основных элементарных функций представлены в табл. 1

Таблица 1

№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$	№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$
1	c	0	10	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
2	x	1	11	$\sin x$	$\cos x$
3	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$	12	$\cos x$	$-\sin x$
4	x^2	$2x$	13	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
5	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$	14	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
6	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	15	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert < 1$
7	a^x	$a^x \ln a$	16	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert < 1$
8	e^x	e^x	17	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
9	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	18	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ вычисляется по формуле $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Если функция задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $x'_t \neq 0$.

Для вычисления производной неявно заданной функции $F(x;y)=0$ дифференцируют равенство $F(x;y)=0$ по x, учитывая, что y является функцией от x.

Простейшие правила дифференцирования

1. Найдите производную функции $y = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x$.

Решение

$$y' = \left(x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x\right)' = \left(x^4\right)' + \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - (x)' = 4x^{4-1} + \frac{1}{3}\cdot 3x^{3-1} - x^{1-1} =$$
$$= 4x^3 + x^2 - 1.$$

2. Найдите производную функции $y = 4\sqrt{x} + 5\sqrt[5]{x^3}$.

Решение

$$y' = \left(4x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{3}{5}}\right)' = \left(4x^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(5x^{\frac{3}{5}}\right)' = 4\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 5\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = 2x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{2}{5}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}.$$

3. Найдите производную функции $y = \operatorname{tg} x + \cos x$.

Решение

$$y' = (\operatorname{tg} x + \cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x.$$

4. Найдите производную функции $y = x^2 \sin x$.

Решение

$$y' = (x^2)'\sin x + x^2(\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x.$$

5. Дана функция $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{x}$. Вычислите значения производной при $x = 1;\ -1;\ 2$.

Решение

Находим производную: $y' = x^2 - \frac{1}{x^2}$.

Определяем значения производной в заданных точках:

$$y'(1) = 1^2 - \frac{1}{1^2} = 0; \quad y'(-1) = (-1)^2 - \frac{1}{(-1)^2} = 0; \quad y'(2) = 2^2 - \frac{1}{2^2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

6. Найдите производную функции $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$.

Решение

Здесь функция обозначена буквой ρ, аргумент – буквой φ, $a = \text{const}$.

Дифференцируем функцию: $\rho' = 2a(1 - \cos\varphi)' = 2a(1' - \cos'\varphi) = 2a\sin\varphi$.

7. Найдите производную функции $y = \frac{x+5}{\sin x}$.

Решение

$$y' = \left(\frac{x+5}{\sin x}\right)' = \frac{(x+5)'\sin x - (x+5)\sin' x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - (x+5)\cos x}{\sin^2 x}.$$

Производная сложной функции

1. Найдите производную функции $y = \cos(2x+1)$.

Решение

Это сложная тригонометрическая функция, которую можно записать следующим образом: $u = 2x+1$, $y = \cos u$.

Тогда $y' = (\cos u)'_u \cdot u'_x = -\sin u \cdot (2x+1)'_x = -\sin(2x+1)\cdot 2 = -2\sin(2x+1)$.

Можно записать проще:

$y' = -\sin(2x+1)\cdot(2x+1)'_x = -2\sin(2x+1)$.

2. Найдите производную функции $y = (\operatorname{tg} x)^2$.

Решение

$u = \operatorname{tg} x$; $y = u^2$.

$y'_u = 2u$; $\quad u'_x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$y' = 2\operatorname{tg} x \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

3. Найдите производную функции $y = \sin(x^2 + 4x + 5)$.

Решение

$u = x^2 + 4x + 5$; $y = \sin u$.

$y'_u = \cos u$; $u'_x = 2x + 4$.

$y' = (2x+4)\cos(x^2 + 4x + 5)$.

4. Найдите производную функции $y = (5x^3 + 2x)^5$.

Решение

$u = 5x^3 + 2x$; $y = u^5$.

$y'_u = 5u^4$; $u'_x = 15x^2 + 2$.

$y' = 5(15x^2 + 2)(5x^3 + 2x)^4$.

5. Найдите производную функции $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1}$.

Решение

$u = x^2 + 2x + 1$; $y = u^{\frac{1}{3}}$.

$y'_u = \dfrac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \dfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}$; $u'_x = 2x + 2$.

$$y' = \frac{2x+2}{3(x^2+2x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+2x+1)^2}}.$$

6. Найдите производную функции $y = \dfrac{(3x+4)^3}{\sin x}$.

Решение

$$y' = \frac{\left((3x+4)^3\right)' \sin x - (3x+4)^3 (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3(3x+4)^2 \sin x - (3x+4)^3 \cos x}{\sin^2 x}.$$

Производная показательной и логарифмической функций

1. Найдите производную функции $y = 2^x$.

Решение

$y' = 2^x \ln 2$.

2. Найдите производную функции $y = e^{(x^2+3x)^2}$.

Решение

$$y' = e^{(x^2+3x)^2}((x^2+3x)^2)' = e^{(x^2+3x)^2} 2(x^2+3x)(x^2+3x)' =$$
$$= 2(2x+3)(x^2+3x)e^{(x^2+3x)^2}.$$

3. Найдите производную функции $y = \ln(2+\sin x)$.

Решение

$$y' = \frac{1}{2+\sin x}(2+\sin x)' = \frac{\cos x}{2+\sin x}.$$

4. Найдите производную функции $y = e^{\sin^2 x} \log_3(x^2+1)$.

Решение

$$y' = \left(e^{\sin^2 x}\right)' \log_3(x^2+1) + e^{\sin^2 x} \cdot \left(\log_3(x^2+1)\right)' =$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin^2 x} \cdot \log_3(x^2+1) + e^{\sin^2 x} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3} =$$
$$= \left(\sin 2x \cdot \log_3(x^2+1) + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3}\right) e^{\sin^2 x}.$$

Производные обратных тригонометрических функций

1. Найдите производную функции $y = \arcsin(x^3 - 3)$.

Решение

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3-3)^2}}(x^3-3)' = \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3-3)^2}}.$$

2. Найдите производную функции $y = \arcsin(2x)\cdot \operatorname{arctg}(3x)$.

Решение

$$y' = \left(\arcsin(2x)\right)' \cdot \operatorname{arctg}(3x) + \arcsin(2x)\cdot\left(\operatorname{arctg}(3x)\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}(2x)'\cdot \operatorname{arctg}(3x) + \arcsin(2x)\cdot \frac{1}{1+(3x)^2}(3x)' =$$

$$= \frac{2\cdot \operatorname{arctg}(3x)}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{3\arcsin(2x)}{1+9x^2}.$$

Производная функции, заданной неявно

1. Найдите производную неявной функции $x^4 + xy^2 + xy = 0$.

Решение

Считая y функцией от x, продифференцируем левую часть равенства:

$$\left(x^4 + xy^2 + xy\right)' = 0;\ 4x^3 + x'y^2 + x\left(y^2\right)' + x'y + xy' = 0.$$

Поскольку $y = y(x)$, то $(y^2)' = 2yy'$, значит $4x^3 + y^2 + x2yy' + y + xy' = 0$.

Отсюда получаем $4x^3 + y^2 + y + (2xy + x)y' = 0$.

Из последнего равенства находим $y' = -\dfrac{4x^3 + y^2 + y}{2xy + x}$.

2. Найдите производную неявной функции $xy + \sin\, y = 0$.

Решение

$$\left(xy + \sin\, y\right)' = 0;\quad x'y + xy' + (\cos y)y' = 0;$$

$$y' = -\frac{y}{x + \cos y}.$$

3. Найдите y' в точке $M(2;1)$, если $\dfrac{y}{x} + xy = 2$.

Решение

$$\left(\frac{y}{x} + xy - 2\right)' = 0; \qquad \frac{y'x - yx'}{x^2} + x'y + xy' - (2)' = 0;$$

$$\frac{y'x-y}{x^2}+y+xy'=0; \qquad y'x-y+x^2y+x^3y'=0;$$

$$y'(x+x^3)=y-x^2y; \qquad y'=\frac{y-x^2y}{x+x^3}=\frac{y(1-x^2)}{x(1+x^2)};$$

$$y'\big|_M=\frac{1(1-2^2)}{2(1+2^2)}=-\frac{3}{10}=-0{,}3.$$

Логарифмическое дифференцирование

1. Найдите производную функции $y=(x^3+1)^{x-1}$.

Решение

Воспользуемся формулой $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$.

Прологарифмируем данную функцию:

$\ln y=\ln((x^3+1)^{x-1})=(x-1)\ln(x^3+1)$.

Вычислим производные от обеих частей равенства:

$$(\ln y)'=(x-1)'\ln(x^3+1)+(x-1)\left(\ln(x^3+1)\right)'.$$

$$\frac{1}{y}y'=\ln(x^3+1)+(x-1)\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}; \qquad \frac{1}{y}y'=\ln(x^3+1)+(x-1)\frac{3x^2}{x^3+1}.$$

Выразим y':

$$y'=y\left(\ln(x^3+1)+(x-1)\frac{3x^2}{x^3+1}\right)=(x^3+1)^{x-1}\left(\ln(x^3+1)+(x-1)\frac{3x^2}{x^3+1}\right).$$

2. Найдите производную функции $y=(x+2)(x+4)^2(x+6)^3$.

Решение

Прологарифмируем функцию:

$\ln y=\ln\left((x+2)(x+4)^2(x+6)^3\right)$;

$\ln y=\ln(x+2)+\ln(x+4)^2+\ln(x+6)^3$;

$\ln y=\ln(x+2)+2\ln(x+4)+3\ln(x+6)$.

Вычислим производную:

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x+2}+2\frac{1}{x+4}+3\frac{1}{x+6}.$$

Выразим $y'=y\left(\dfrac{1}{x+2}+2\dfrac{1}{x+4}+3\dfrac{1}{x+6}\right)$.

Окончательно $y'=(x+2)(x+4)^2(x+6)^3\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+4}+\dfrac{3}{x+6}\right)$.

Производная функции, заданной параметрически

1. Найдите производную y'_x функции $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

Решение

Воспользуемся формулой $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Вычислим производные по t: $x'_t = 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)$; $y'_t = 3\sin^2 t \cdot (\cos t)$.

Тогда $y'_x = \dfrac{3\sin^2 t \cdot (\cos t)}{3\cos^2 t \cdot (-\sin t)} = -\dfrac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t$.

Производные высших порядков

Производной второго порядка или второй производной функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной: $y'' = (y')'$.

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего, четвертого и других порядков: $y''' = (y'')'$, $y^{IV} = (y''')'$ и т. д.

1. Найдите производную второго порядка функции $y = \sin(2x)$.

Решение

$y' = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos 2x$.

$y'' = (y')' = (2\cos 2x)' = 2 \cdot 2 \cdot (-\sin 2x) = -4\sin 2x$.

2. Найдите производную пятого порядка функции $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

Решение

$y' = 4x^3 + 4x$;

$y'' = 12x^2 + 4$;

$y''' = 24x$;

$y^{IV} = 24$;

$y^{V} = 0$.

Дифференциал

Дифференциал функции $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$dy = f'(x)dx$.

Если x – независимая переменная, то дифференциал второго порядка d^2y вычисляется по формуле

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Обозначим Δy – приращение функции f в точке x, вызванное приращением аргумента Δx: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то $\Delta y \approx dy$ и $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

1. Вычислите дифференциал функции $y = (\sin^2 x)\sqrt{1+x}$.

Решение

$$dy = y'dx;\; y' = 2\sin x\cos x\sqrt{1+x} + \sin^2 x\frac{1}{2\sqrt{1+x}};$$

$$dy = \left((\sin 2x)\sqrt{1+x} + \frac{\sin^2 x}{2\sqrt{1+x}}\right)dx.$$

2. Вычислите дифференциал функции $y = \dfrac{e^{2x}}{x^2+2}$.

Решение

$$y' = \frac{(e^{2x})'(x^2+2) - e^{2x}(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2+2) - e^{2x}2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2-x+2)}{(x^2+2)^2}.$$

$$dy = \frac{2e^{2x}(x^2-x+2)}{(x^2+2)^2}dx.$$

3. Вычислите дифференциал функции $y = 2^{\sin(x^2+1)}$.

Решение

$$dy = y'dx.$$

$$y' = 2^{\sin(x^2+1)}\ln 2\left(\sin(x^2+1)\right)' = 2^{\sin(x^2+1)}\ln 2\cos(x^2+1)(x^2+1)' =$$

$$= 2^{1+\sin(x^2+1)}x\cos(x^2+1)\ln 2.$$

$$dy = (2^{1+\sin(x^2+1)}x\cos(x^2+1)\ln 2)dx.$$

4. Вычислите дифференциал второго порядка функции $y = \sin^2 x$.

Решение

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

Вычислим производные первого и второго порядка:

$$y' = 2\sin x\cos x = \sin(2x);\quad y'' = \left(\sin(2x)\right)' = \cos(2x)(2x)' = 2\cos(2x).$$

Тогда $d^2y = 2\cos(2x)dx^2$.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно найдите $\operatorname{arctg}(1{,}05)$.

Решение

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

$f(x+\Delta x)=f(1{,}05)=\mathrm{arctg}(1+0{,}05)$, откуда $x=1$, $\Delta x=0{,}05$.

$f(x)=\mathrm{arctg}(x)$.

$$f'(x)=\left(\mathrm{arctg}(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Тогда $\mathrm{arctg}(1{,}05)\approx \mathrm{arctg}1+\dfrac{1}{1+1^2}0{,}05=\dfrac{\pi}{4}+0{,}025\approx 0{,}81$.

6. С помощью дифференциала приближенно вычислите $\sqrt[3]{26}$.

Решение

$f(x+\Delta x)=f(27)=\sqrt[3]{27-1}$, откуда $x=27$, $\Delta x=-1$.

$f(x)=\sqrt[3]{x}$.

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Тогда $\sqrt[3]{26}\approx\sqrt[3]{27}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}\cdot(-1)=3-\dfrac{1}{27}=\dfrac{27\cdot 3-1}{27}=\dfrac{80}{27}\approx 2{,}96$.

Приложения производной.
Применение производной в геометрии и физике

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Тангенс угла наклона касательной к оси Ox (угловой коэффициент касательной к кривой):

$$\mathrm{tg}\,\alpha=k=f'(x_0).$$

Тангенс острого угла между двумя кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0;y_0)$ (угол между касательными к этим кривым в точке M_0):

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\left|\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)f_2'(x_0)}\right|=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Если задан закон движения материальной точки $S=S(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени $v=S'(t_0)$, а ускорение – производная скорости по времени или производная второго порядка пути по времени: $a=v'(t_0)=S''(t_0)$.

1. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Найдите угол наклона этой касательной к оси Ox.

Решение

Находим значение функции в точке $x_0 = 1$: $y_0 = 1^3 + 3 = 4$.

Определяем производную функции и ее значение при $x_0 = 1$:

$f'(x) = 3x^2$, $\quad f'(x_0) = 3 \cdot 1^2 = 3.$

Уравнение касательной:

$y - 4 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x + 1.$

Уравнение нормали:

$$y - 4 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Тангенс угла наклона касательной к оси Ox:

$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = 3$.

Угол наклона: $\operatorname{arctg} 3 \approx 72^o$.

2. Найдите угол между параболами $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = -x^2 + 2$ в точках их пересечения.

Решение

Решая систему уравнений $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -x^2 + 2, \end{cases}$ находим абсциссы точек пересечения парабол: $x_{1,2} = \pm 1$.

Значения функций в этих точках: $f_1(\pm 1) = f_2(\pm 1) = 1$.

Таким образом, имеем две точки пересечения: $A_1(1;1)$ и $A_2(-1;1)$.

Находим производные функций $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = -x^2 + 2$:

$f_1'(x) = 2x$ и $f_2'(x) = -2x$.

Вычислим острый угол между параболами в точке $A_1(1;1)$:

$f_1'(1) = 2 = k_1$; $f_2'(1) = -2 = k_2$;

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \left|\frac{-2-2}{1+2(-2)}\right| = \left|\frac{-4}{-3}\right| = \frac{4}{3}, \text{ т. е. } \varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53^{\circ} \text{ в точке } A_1.$$

Аналогично вычисляем острый угол в точке $A_2(-1;1)$:

$f_1'(-1) = -2 = k_1$; $f_2'(-1) = 2 = k_2$;

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \left|\frac{2+2}{1+(-2)2}\right| = \left|\frac{4}{-3}\right| = \frac{4}{3}, \ \varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53^{\circ} \text{ в точке } A_2.$$

3. Зависимость пути от времени материальной точки задана уравнением $S = t^2 \sin t$. Найдите скорость и ускорение материальной точки через π секунд от начала движения.

Решение

Ищем первую производную пути по времени:

$v = S'(t) = 2t \sin t + t^2 \cos t$.

Находим ее значение в момент времени π:

$v(\pi) = S'(\pi) = 2\pi \sin \pi + \pi^2 \cos \pi = -\pi^2$.

Знак минус указывает на то, что тело изменило направление движения.

Ищем первую производную скорости по времени:

$a(t) = v'(t) = S''(t) = 2 \sin t + 2t \cos t + 2t \cos t - t^2 \sin t = (2 - t^2) \sin t + 4t \cos t$.

Находим ее значение в момент времени π:

$a(t) = (2 - \pi^2) \sin \pi + 4\pi \cos \pi = -4\pi$.

Знак минус указывает на то, что в данный момент тело замедляется.

Правило Лопиталя для вычисления пределов

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

В этом случае предел отношения функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если этот предел (конечный или бесконечный) существует:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования. Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = \left(f(x)\right)^{g(x)}$ при $x \to a$, при условии, что $f(x) > 0$ вблизи точки *a*. Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел $A = \lim_{x \to a} \ln y = \lim_{x \to a} \left[g(x) \ln f(x)\right]$, тогда $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^A$.

Если после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя можно применить повторно.

1. Используя правило Лопиталя, найдите предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 3x - 2x}{4x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}3x-2x}{4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{arctg}3x-2x)'}{(4x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+(3x)^2}-2}{4}=\lim_{x\to 0}\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}.$$

2. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \operatorname{tg}\frac{3}{x}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{tg}\frac{3}{x} = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{3}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{3}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\frac{-3}{x^2}}{\cos^2\left(\frac{3}{x}\right)}\right)}{\left(-2\frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2\cos^2\left(\frac{3}{x}\right)} = \frac{3}{2}\lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

3. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Решение

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \left(1^\infty\right).$$

Запишем функцию $x^{\frac{1}{1-x}}$ в следующем виде: $x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{\frac{1}{1-x}\ln x}$.
Тогда

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \left(1^\infty\right) = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^A.$$

Вычислим $A = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1.$

Окончательно имеем $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^A = e^{-1}$.

4. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{3x}}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{3x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Обозначим $f(x) = x^3$ и $g(x) = e^{3x}$. Применяем правило Лопиталя:

$f'(x) = 3x^2$; $\quad g'(x) = 3e^{3x}$; $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{3e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty}$.

Так как неопределенность сохранилась, применим правило Лопиталя еще раз:

$$f''(x) = 6x; \qquad g'(x) = 9e^{3x}; \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{9e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Снова получили неопределенность. Применяем правило Лопиталя третий раз:

$$f''(x) = 6; \qquad g'(x) = 27e^{3x}; \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{6}{27e^{3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = 0.$$

Формула Тейлора

Функция $f(x)$, дифференцируемая $n+1$ раз в некотором интервале, содержащем точку x_0, может быть представлена в этом интервале в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена R_n:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, откуда c – некоторая точка из данного интервала, n – порядок формулы Тейлора.

При $x_0 = 0$ из формулы Тейлора получается формула Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

1. Напишите формулу Тейлора 2-го порядка в точке $x_0 = -2$ для функции $f(x) = (2 - 3x)^2$.

Решение

Вычислим значения функции и ее первых двух производных в точке $x_0 = -2$:

$f(-2) = (2 - 3(-2))^2 = 64$;

$f'(x) = 2(2 - 3x)(-3) = -12 + 18x$; $\quad f'(-2) = -12 + 18(-2) = -48$;

$f''(x) = 18$, $f'(-2) = 18$.

Формула Тейлора 2-го порядка для заданной функции имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2(x) =$$

$$= 64 + \frac{-48}{1!}(x+2) + \frac{18}{2!}(x+2)^2 + R_2(x) = 64 - 48(x+2) + 9(x+2)^2 + R_2(x).$$

Так как $f'''(x) = 0$ для всех $x \in (-\infty; \infty)$, то $R_2(x) = \dfrac{f'''(c)}{3!}(x+2)^3 = 0$.

Исследование поведения функций и их графиков

Построение графика функции целесообразно проводить в следующем порядке:

1. Найти область определения функции, область непрерывности и точки разрыва.

2. Проверить выполнение некоторых дополнительных условий, помогающих построению (периодичность, четность, нечетность).

3. Найти асимптоты графика функции.

4. Вычислить первую производную. Найти точки, в которых первая производная либо не существует, либо равна нулю. Составить таблицу изменения знака первой производной. Определить промежутки возрастания, убывания функции. Найти точки экстремума.

5. Вычислить вторую производную. Найти точки, в которых вторая производная либо не существует, либо равна нулю. Составить таблицу изменения знака второй производной. Определить промежутки выпуклости (вверх или вниз) графика функции, найти точки перегиба.

6. Найти точки пересечения с осями координат. Для более точного построения графика можно вычислить значения функции в дополнительных точках.

7. Вычертить график, используя все полученные результаты.

1. Найдите экстремумы и интервалы монотонности функции $y=\sqrt{2x^2+5}$.

Решение

Область определения данной функции $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

Находим производную:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{2x^2+5}}(2x^2+5)'=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}.$$

Область определения производной функции $D(y')=(-\infty;+\infty)$.

Приравниваем производную нулю:

$$y'=0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Точка $x=0$ – критическая точка.

На интервале $(-\infty;0)$ производная принимает отрицательные значения, а на интервале $(0;+\infty)$ – положительные.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	убывает	$\sqrt{5}$	возрастает

Следовательно, $y(0)=\sqrt{5}$ – минимум функции. Функция убывает на интервале $(-\infty;0)$ и возрастает на интервале $(0;+\infty)$.

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x-\sqrt{x}$ на отрезке $[0;4]$.

Решение

Функция $y=2x-\sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0;4]$.

Найдем производную:

$$y'=2-\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

В точке $x=0$ производная не существует.

Найдем нули производной:

$$2-\frac{1}{2\sqrt{x}}=0; \qquad \sqrt{x}=\frac{1}{4}; \qquad x=\frac{1}{16}.$$

Вычислим значения функции в точках с абсциссами $x=0$, $x=\frac{1}{16}$ и на концах отрезка $[0;4]$: $y(0)=0$; $y\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{2}{16}-\frac{1}{\sqrt{16}}=-\frac{1}{8}$; $y(4)=6$.

Таким образом, наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x-\sqrt{x}$ на отрезке $[0;4]$: $y_{\min}=y\left(\frac{1}{16}\right)=-\frac{1}{8}$ и $y_{\max}=y(4)=6$.

3. Найдите точки перегиба, промежутки выпуклости функции $y=\ln(x^2-4x+5)$.

Решение

Область определения данной функции:

$x^2-4x+5>0 \Leftrightarrow x\in R$, т. е. $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

Находим первую и вторую производную заданной функции:

$$y'=\left(\ln(x^2-4x+5)\right)'=\frac{2x-4}{x^2-4x+5}.$$

$$y''=\left(\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\right)'=\frac{(2x-4)'\left(x^2-4x+5\right)-(2x-4)\left(x^2-4x+5\right)'}{\left(x^2-4x+5\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(x^2-4x+5\right)-(2x-4)(2x-4)}{\left(x^2-4x+5\right)^2}=2\frac{-x^2+4x-3}{\left(x^2-4x+5\right)^2}=-2\frac{x^2-4x+3}{\left(x^2-4x+5\right)^2}.$$

Область определения второй производной $D(y'')=(-\infty;+\infty)$.

Найдем нули второй производной:

$$y'' = -2\frac{x^2-4x+3}{\left(x^2-4x+5\right)^2} \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \; x_1=1 \text{ и } x_2=3 \text{ – точки}$$

возможного перегиба.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 3)$	3	$(3;+\infty)$
y''	–	0	+	0	–
y	выпукла вверх	ln2	выпукла вниз	ln2	выпукла вверх

Значит, $(1; \ln 2)$ и $(3; \ln 2)$ – точки перегиба.

Функция выпукла вверх при $x \in (-\infty; 1) \cup (2;+\infty)$.

Функция выпукла вниз при $x \in (1;3)$.

4. Найдите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2-2x+5}{x+3}$.

Решение

$D(y) = (-\infty;-3) \cup (-3;+\infty) \Rightarrow \; x=-3$ есть точка разрыва функции.

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x^2-2x+5}{x+3} = -\infty; \quad \lim_{x\to -3+0}\frac{x^2-2x+5}{x+3} = +\infty.$$

Таким образом, прямая $x=-3$ является вертикальной асимптотой.

Проверим наличие наклонных (или горизонтальных) асимптот вида $y = kx+b$.

Параметры k и b вычислим по формулам:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+5}{x(x+3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+5}{x^2+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{3}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+5}{x+3} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+5-x^2-3x}{x+3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-5x+5}{x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{5}{x}}{1+\frac{3}{x}} = -5.$$

Таким образом, прямая $y = x-5$ является наклонной асимптотой.

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k=0$.

5. Исследуйте функцию $y=2x^3+3x^2-1$ и постройте ее график.

Решение:

1) область определения функции $D(y)=(-\infty;+\infty)$, $y(x)$ непрерывна в D как элементарная функция;

2) функция свойствами четности или нечетности не обладает;

3) найдем асимптоты.

Поскольку точек разрыва нет, вертикальных асимптот не будет.

Ищем наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+3x^2-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(2x^2+3x-\frac{1}{x}\right)=\infty,$$

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2x^2+3x-\frac{1}{x}\right)=\infty,$$ т. е. наклонных асимптот нет;

4) исследование на экстремум.

Ищем первую производную:

$y'=\left(2x^3+3x^2-1\right)'=6x^2+6x$.

Производная существует при любом значении x.

$y'=0\Leftrightarrow 6x^2+6x=0\Rightarrow x=0$ и $x=-1$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	возрастает	max	убывает	min	возрастает

$y_{min}(0)=-1$ – минимум функции.

$y_{max}(-1)=(-1)^3+2(-1)^2+1=0$ – максимум функции;

5) исследование выпуклости, нахождение точек перегиба.

Найдем производную второго порядка:

$y''=\left(6x^2+6x\right)'=12x+6$; $y''=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Составим таблицу:

x	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$
y''	–	0	+
y	выпукла вверх	$-\frac{1}{2}$	выпукла вниз

$\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ – точка перегиба;

6) точки пересечения с осями координат:

$y=0 \Leftrightarrow \quad 2x^3+3x^2-1=0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ (уравнение $2x^2+x-1=0$ не имеет корней).

Таким образом, $A(-1;0)$ – точка пересечения с осью Ox.

При $x=0$ $y=-1 \Rightarrow B(0;-1)$ – точка пересечения с осью Oy;

7) по данным исследования строим график функции (рис. 6).

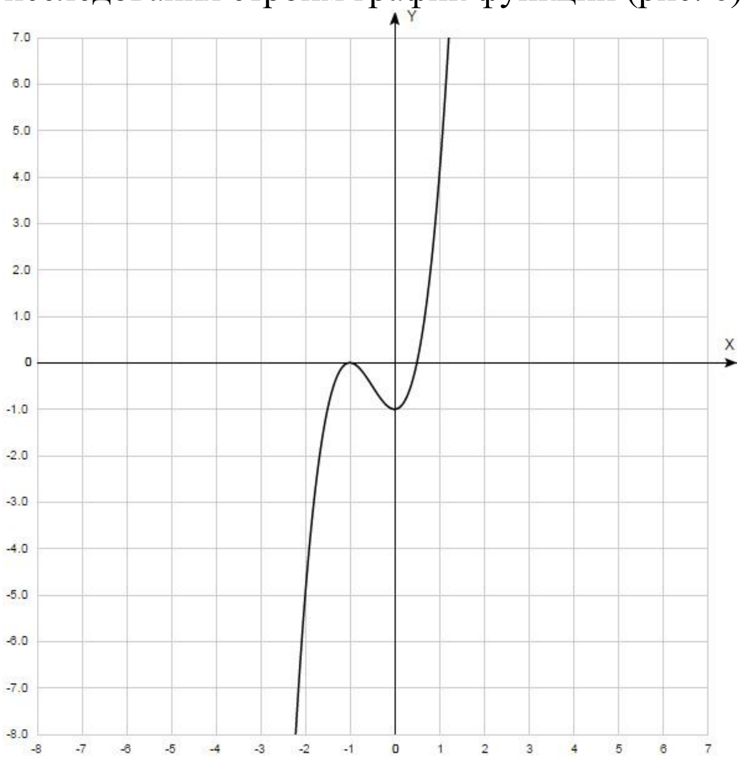


Рис. 6

6. Исследуйте функцию $y=\dfrac{e^{x+1}}{x+1}$ и постройте ее график.

Решение:

1) область определения функции $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$, $y(x)$ непрерывна всюду за исключением точки $x=-1$;

2) функция свойствами четности или нечетности не обладает;

3) найдем асимптоты.

Так как $x=-1$ – точка разрыва функции, то $x=-1$ – вертикальная асимптота:

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{e^{x+1}}{x+1}=-\infty; \quad \lim_{x\to-1+0}\frac{e^{x+1}}{x+1}=+\infty.$$

Проверим существование наклонных асимптот:

$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}}{(x+1)x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^{x+1}\right)'}{(x^2+x)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^{x+1}\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}}{2}=0;$$

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{x+1}}{x+1}-0\right)=0.$$

Таким образом, прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x\to-\infty$.

Проверим, существует ли асимптота при $x\to+\infty$:

$k_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}}{(x+1)x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}}{2}=\infty$, значит, при $x\to+\infty$ наклонной асимптоты не будет;

4) исследование на экстремум:

$$y'=\left(\frac{e^{x+1}}{x+1}\right)'=\frac{e^{x+1}(x+1)-e^{x+1}}{(x+1)^2}=\frac{e^{x+1}x}{(x+1)^2};$$

$y'=0$ при $x=0$. Производная не существует при $x=-1$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	–	не существ.	–	0	+
y	убывает	не существ.	убывает	min	возрастает

$y_{\min}(0)=e$ – минимум функции;

5) исследование выпуклости и точек перегиба:

$$y''=\left(\frac{e^{x+1}x}{(x+1)^2}\right)'=\frac{(e^{x+1}x+e^{x+1})(x+1)^2-xe^{x+1}2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{e^{x+1}\left(x^2+1\right)}{(x+1)^3}.$$

Вторая производная y'' не существует при $x=-1$ и нигде не обращается в нуль.

Составим таблицу:

x		$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
y''		–	не существ.	+
y		выпукла вверх	не существ.	выпукла вниз

Точек перегиба нет;

6) найдем точки пересечения с осями координат.

Уравнение $\frac{e^{x+1}}{x+1}=0$ не имеет корней, следовательно, график не пересекается с осью Ox. При $x=0$ значение функции $y=e$, т. е. $(0;e)$ – точка пересечения графика функции с осью Oy;

7) по данным исследования строим график функции (рис. 7).

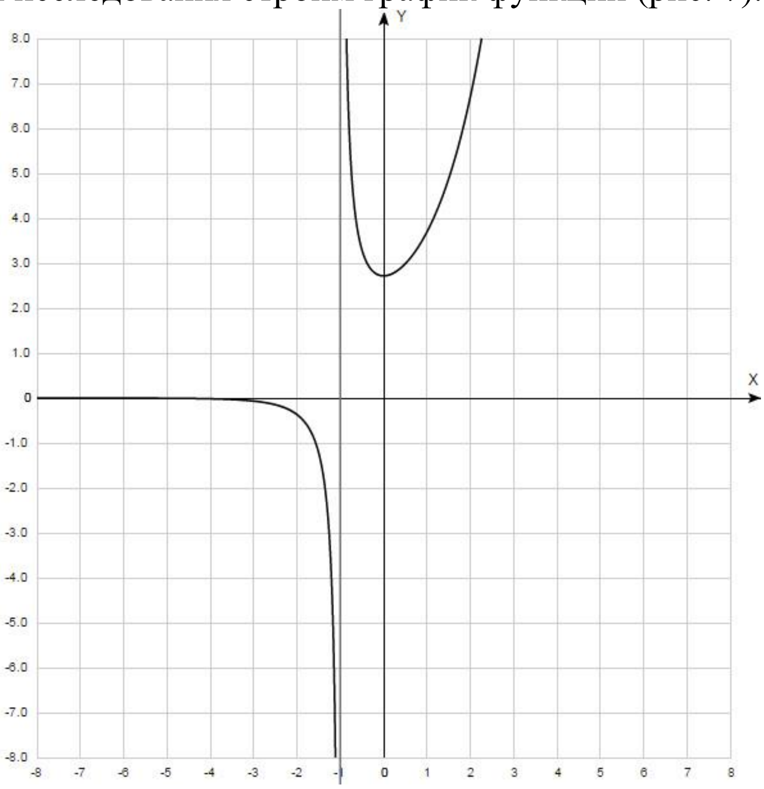


Рис. 7

Дифференциальное исчисление функции многих переменных

При исследовании функций нескольких переменных достаточно ограничиться изучением функций двух переменных $z=f(x;y)$, так как все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Область определения функции многих переменных

Областью определения функции $z=f(x;y)$ называется совокупность пар $(x;y)$, где $x,y\in R$, при которых функция $z=f(x;y)$ имеет смысл.

1. Найдите область определения функции $z=\frac{y}{y+x-1}$.

Решение

Так как знаменатель дроби не должен обращаться в нуль, то $y+x-1\neq 0 \Leftrightarrow y\neq -x+1$. Значит, областью определения функции z являются все точки плоскости xOy, кроме точек, лежащих на прямой $y=-x+1$.

2. Найдите область существования функции $z = \ln(y + x)$.

Решение

Из свойств логарифма имеем $y + x > 0 \Leftrightarrow y > -x$, следовательно, область определения функции z – все точки плоскости, лежащие выше прямой $y = -x$ (рис. 8).

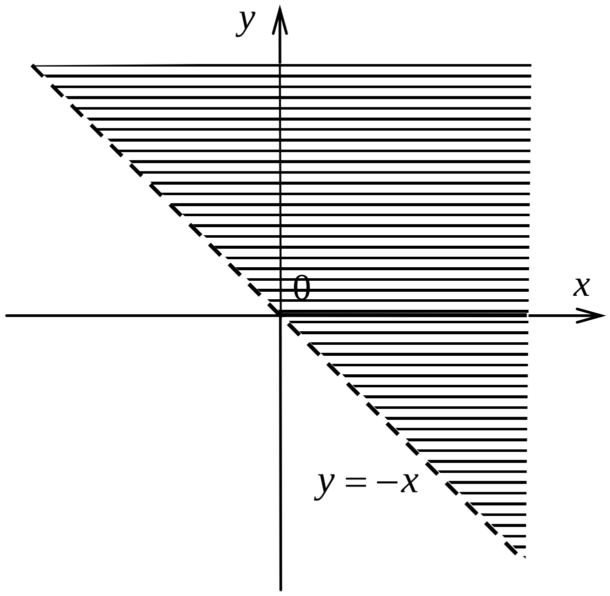


Рис. 8

Частные производные первого и высших порядков функции многих переменных

При вычислении частной производной функции по какой-либо из ее переменных пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, полагая в этом процессе все остальные аргументы неизменными (постоянными).

Частные производные функции $z = f(x; y)$ по переменной x обозначаются: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial x}$, $f'_x(x; y)$.

Аналогично, по переменной y: $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, z'_y, $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial y}$, $f'_y(x; y)$.

Частными производными второго порядка функции многих переменных называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(f'_x(x; y)\right)'_x = f''_{xx}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(f'_y(x; y)\right)'_y = f''_{yy}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(f'_x(x;y)\right)'_y=f''_{xy}(x;y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(f'_y(x;y)\right)'_x=f''_{yx}(x;y).$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, можно получить частные производные более высоких порядков.

Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial x\partial y}$, и т. д., которые различаются только порядком дифференцирования, называются смешанными производными. Непрерывные частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

1. Найдите частные производные функции $z=x^5+x^4y^3+xy^2+2y$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4+4x^3y^3+y^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3x^4y^2+2xy+2.$$

2. Найдите частные производные функции $z=\cos^2(x^2y+y^2)$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\cos^2(x^2y+y^2)\right)'_x=2\cos(x^2y+y^2)\cdot(-\sin(x^2y+y^2))\cdot\left(x^2y+y^2\right)'_x=$$

$$=-2xy\cdot\sin\left(2(x^2y+y^2)\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\cos^2(x^2y+y^2)\right)'_y=2\cos(x^2y+y^2)\cdot(-\sin(x^2y+y^2))\cdot\left(x^2y+y^2\right)'_y=$$

$$=-(x^2+2y)\cdot\sin\left(2(x^2y+y^2)\right).$$

3. Найдите частные производные функции $z=(\sin x)^{\cos y}$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos y\cdot(\sin x)^{\cos y-1}\cos x=\cos x\cos y\cdot(\sin x)^{\cos y-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(\sin x)^{\cos y}\cdot\ln(\sin x)\cdot(-\sin y).$$

4. Найдите частные производные функции $u=\ln(x^2+y-2xyz)$.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2+y-2xyz}(2x-2yz);\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y-2xyz}(1-2xz);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x^2+y-2xyz}(-2xy).$$

5. Найдите все частные производные пятого порядка функции $z = x^2y^2 + 3xy + x^2 + y^2$.

Решение

Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 3y + 2x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y + 3x + 2y.$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2 + 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2 + 2.$$

Смешанные частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(2x^2y + 3x + 2y\right)_x' = \left(2xy^2 + 3y + 2x\right)_y' = 4xy + 3.$$

Частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \left(2y^2 + 2\right)_x' = 0; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \left(2x^2 + 2\right)_y' = 0.$$

Смешанные частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \left(2y^2 + 2\right)_y' = 4y, \text{ или } \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \left(4xy + 3\right)_x' = 4y;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \left(2x^2 + 2\right)_x' = 4x, \text{ или } \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \left(4xy + 3\right)_y' = 4x.$$

Частные производные четвертого порядка:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0; \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = 0; \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial y^3 \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right) = (4y)_y' = 4, \text{ или } \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right) = (4x)_x' = 4.$$

Очевидно, что все производные пятого и более высокого порядка равны нулю.

Дифференциал функции многих переменных

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = f_x'(x, y)dx + f_y'(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Полный дифференциал функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\,.$$

Дифференциал второго порядка функции z двух независимых переменных x и y вычисляется по формуле

$$d^2z=f''_{xx}(x,y)(dx)^2+2f''_{xy}(x,y)dxdy+f''_{yy}(x,y)(dy)^2\,.$$

С помощью полного дифференциала функции выполняют приближенные вычисления, заменяя полное приращение функции $z=f(x,y)$ ее дифференциалом

$$\Delta z\approx dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\,,$$

откуда получается приближенная формула

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y\,.$$

1. Найдите полный дифференциал функции $u=y^{xz^3}$.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^{xz^3}(\ln y)z^3;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xz^3(y^{xz^3-1});\quad \frac{\partial u}{\partial z}=y^{xz^3}(\ln y)3xz^2;$$

$$du=z^3y^{xz^3}(\ln y)dx+xz^3(y^{xz^3-1})dy+3xz^2y^{xz^3}(\ln y)dz\,.$$

2. Найдите дифференциал второго порядка функции $z=x^2y^2+3xy+x^2+y^2$, если x и y – независимые переменные.

Решение

В примере 5 предыдущего пункта были найдены все частные производные второго порядка для данной функции

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y^2+2;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^2+2;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=4xy+3\,.$$

Дифференциал второго порядка данной функции имеет вид:

$$d^2z=(2y^2+2)(dx)^2+2(4xy+3)dxdy+(2x^2+2)(dy)^2\,.$$

3. С помощью дифференциала приближенно вычислите $1{,}01^{2{,}02}$.

Решение

Рассмотрим функцию $z=x^y$. Искомое число является значением этой функции в точке $z=(1{,}01;\,2{,}02)=(x_0+\Delta x;\,y_0+\Delta y)$, где $z_0=(1;2)$, $\Delta x=1{,}01-1=0{,}01$ и $\Delta y=2{,}02-2=0{,}02$.

Найдем частные производные функции z и их значения в точке $z_0=(1;2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(z_0)=yx^{y-1}\Big|_{z_0}=2\,;\quad \frac{\partial z}{\partial y}(z_0)=x^y\ln x\Big|_{z_0}=0\,.$$

Значение функции в точке $z_0 = (1;2)$ равно

$$z = f(x_0; y_0) = x^y\Big|_{z_0} = 1^2 = 1.$$

Подставляя найденные значения функции и частных производных в приближенную формулу, получим

$$1{,}01^{2,02} \approx 1 + 2 \cdot 0{,}01 + 0 \cdot 0{,}02 = 1{,}02.$$

4. Вычислите приближенно $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}01}{0{,}97}$.

Решение

Данное число является значением функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ в точке $z_0 = (1;1)$ при $\Delta x = 1{,}01 - 1 = 0{,}01$ и $\Delta y = 0{,}97 - 1 = -0{,}03$.

Найдем частные производные функции z и их значения в точке $z_0 = (1;1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(z_0) = \frac{y}{x^2 + y^2}\bigg|_{z_0} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(z_0) = -\frac{x}{x^2 + y^2}\bigg|_{z_0} = -\frac{1}{2}.$$

Значение функции в точке $z_0 = (1;1)$ равно

$$z = f(x_0, y_0) = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Подставляя найденные значения функции и частных производных в приближенную формулу, получим

$$\operatorname{arctg}\frac{1{,}01}{0{,}97} \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(0{,}01) + \left(-\frac{1}{2}\right)(-0{,}03) = \frac{\pi}{4} + 0{,}005 + 0{,}015 \approx 0{,}81.$$

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

Если поверхность задана уравнением $z = f(x;y)$, то касательная плоскость в точке $N_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет уравнение

$$z - z_0 = f'_x(x_0;y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y - y_0).$$

Уравнения нормали к поверхности в этой точке имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0;y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0;y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

1. Найдите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z = 2x^2 + xy + 3y^2 - x + y$ в точке $M(1;0;1)$.

Решение

Найдем частные производные и их значения в точке $M(1;0;1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 6y + 1;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 3; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2.$$

Уравнение касательной плоскости:

$z - 1 = 3(x-1) + 2(y-0) \Leftrightarrow 3x + 2y - z - 2 = 0$.

Уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Экстремум функции двух переменных

Если для функции $z = f(x;y)$, определенной в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ выполняется неравенство $f(x_0;y_0) > f(x;y)$ (или $f(x_0;y_0) < f(x;y)$), то точка M_0 называется точкой максимума (или точкой минимума).

Необходимые условия экстремума

Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0;y_0)$ и имеет экстремум в этой точке, то ее дифференциал в этой точке равен нулю:

$$df(x_0;y_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(x_0;y_0) = 0, \\ f'_y(x_0;y_0) = 0. \end{cases}$$

Точка $(x_0;y_0)$ называется стационарной точкой функции $z = f(x;y)$.

Достаточные условия экстремума

Введем обозначения:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0;y_0), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0;y_0) \text{ и } \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0;y_0).$$

Тогда если

1) $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, то $M_0(x_0;y_0)$ – точка максимума;

2) $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то $M_0(x_0;y_0)$ – точка минимума;

3) $AC - B^2 < 0$, то $M_0(x_0;y_0)$ не является точкой экстремума;

4) $AC - B^2 = 0$, то точка $M_0(x_0;y_0)$ может как быть, так и не быть точкой экстремума, необходимы дополнительные исследования.

Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда она достигает в области D своего наибольшего и наименьшего значений (так называемые глобальные экстремумы). Эти значения достигаются либо в стационарных точках, расположенных внутри области D, либо в точках, лежащих на границе области.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области D функции $z = f(x,y)$ состоит в следующем:

1) найти все критические точки функции, принадлежащие D, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на границах области;

3) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Условный экстремум

Если требуется найти экстремум функции двух переменных, которые связаны между собой уравнением $\varphi(x, y) = 0$, то говорят об условном экстремуме. Уравнение $\varphi(x, y) = 0$ называют уравнением связи.

Если из уравнения связи можно выразить одну переменную через другую, то задача определения условного экстремума сводится к задаче на обычный экстремум функции одной переменной.

Если уравнение связи трудно разрешимо относительно его переменных, то для нахождения условного экстремума используют метод множителей Лагранжа. Метод множителей Лагранжа состоит в том, что для отыскания условного экстремума составляют функцию Лагранжа: $L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$ (параметр λ называют множителем Лагранжа). Необходимые условия условного экстремума задаются системой уравнений, из которой определяются стационарные точки функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0. \end{cases}$$

Однако эти условия не являются достаточными. Поэтому после нахождения стационарных точек требуется исследовать их с помощью достаточных условий.

1. Найдите экстремум функции $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

Решение

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 5.$$

Найдем стационарные точки, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Получена одна стационарная точка $M_1(1;2)$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=1.$$

Вычислим их значение в точке $M_1(1;2)$:

$$A=\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{M_1}=2; \quad B=\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right|_{M_1}=1; \quad C=\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{M_1}=1.$$

Так как $AC-B^2=1>0$ и $A>0$, то точка $M_1(1;2)$ является точкой минимума, при этом $z_{\min}=z(1;2)=-7$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-y^2-2xy$ в области D, ограниченной прямыми $x=0$, $x=2$, $y=-1$, $y=2$.

Решение

Изобразим область D на плоскости XOY (рис. 9).

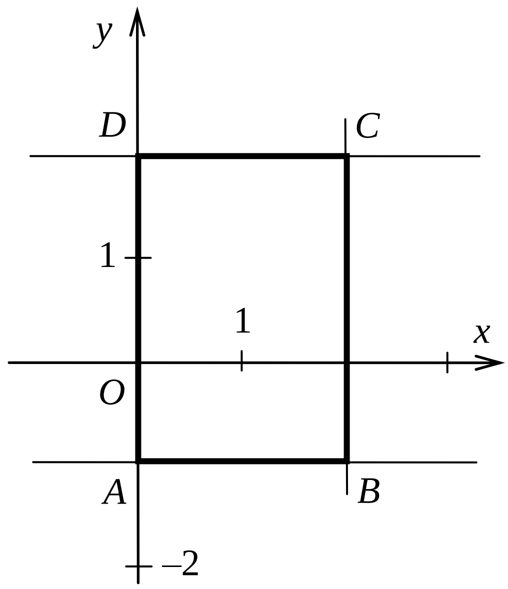


Рис. 9

Определим стационарные точки функции, для этого вычислим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y-2x.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-2y=0, \\ -2y-2x=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем одну стационарную точку $M_1(0;0)$, которая принадлежат рассматриваемой области D.

Исследуем функцию на границе области.

Сторона AB: $y=-1$, $x\in[0;2]$.

Подставим $y=-1$ в функцию z. Функция z становится функцией одной переменной: $z_1=x^2-1+2x$.

Ищем стационарные точки функции $z_1(x)$:

$z_1'=2x+2$, $2x+2=0$.

Решением уравнения является $x=-1$. Так как $x=-1\notin[0;2]$, то данная точка не принадлежит рассматриваемой области.

Сторона BC: $x=2$, $y\in[-1;2]$.

После подстановки $x=2$ в функцию z она становится функцией одной переменной: $z_2=4-y^2-4y$.

Ищем стационарные точки функции $z_2(x)$:

$z_2' = -2y - 4,\ -2y - 4 = 0$.

Решением уравнения является $y = -2$. Так как $y = -2 \notin [-1;2]$, то эта точка не принадлежит рассматриваемой области.

Сторона DC: $y = 2$, $x \in [0;2]$

После подстановки $y = 2$ в функцию z она становится функцией одной переменной: $z_3 = x^2 - 4 - 4x$.

Ищем стационарные точки функции $z_3(x)$:

$z_3' = 2x - 4,\ 2x - 4 = 0$.

Решением уравнения является $x = 2$. Точка $M_2(2;2)$ принадлежит рассматриваемой области.

Сторона AD: $x = 0$, $y \in [-1;2]$.

После подстановки $x = 0$ в функцию z она становится функцией одной переменной: $z_4 = -y^2$.

Ищем стационарные точки функции $z_4(x)$:

$z_4' = -2y,\ -2y = 0$.

Решением уравнения является $y = 0$. Точка $M_1(0;0)$ является стационарной точкой функции z и была найдена выше.

Находим значения функции z в точках $M_1(0;0)$ и $M_2(2;2) = C$, а также в угловых точках $A(0;-1)$, $B(2;-1)$, $D(0;2)$:

$z(M_1) = 0$; $z(M_2) = -8$; $z(A) = -1$; $z(B) = 7$; $z(D) = -4$.

Следовательно, $z_{\text{наим}} = z(2;2) = -8$, $z_{\text{наиб}} = z(2;-1) = 7$.

3. Найдите экстремум функции $z = x^2 - 2xy - y^2 + 3x + 3y + 2$ при условии, что x и y связаны уравнением: $x + y = 0$.

Решение

Из уравнения связи $x + y = 0$ получим $y = -x$. Подставив $y = -x$ в функцию $z = x^2 - 2xy - y^2 + 3x + 3y + 2$, имеем:

$$z = x^2 - 2x(-x) - (-x)^2 + 3x + 3(-x) + 2 = x^2 + 2x^2 - x^2 + 3x - 3x + 2 =$$

$$= 2x^2 + 2.$$

Таким образом, задача о нахождении условного экстремума функции двух переменных сведена к задаче определения экстремума функции одной переменной $z = z(x)$. Дальнейшее исследование известно из курса дифференциального исчисления функций одной переменой.

Найдем производную:

$z' = 4x$.

Область определения производной $D(z') = (-\infty;+\infty)$

Приравняем производную нулю:

$z' = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -x = 0 \Rightarrow z = 2$.

Точка $(0;0;2)$ – критическая точка. Составим таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;+\infty)$
z'	$-$	0	$+$
z	убывает	2	возрастает

Таким образом, $z_{\min} = z(0;0) = 2$.

4.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Простейшие правила дифференцирования

Найдите производные функций:

1) $y = 7x^3$;
2) $y = 3\sqrt[5]{x^2} - 4\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$;
3) $y = x^2 + \mathrm{ctg}x$;
4) $y = 2(x^2 + 3x + 1) + x\sin x$;
5) $y = \dfrac{\mathrm{tg}x}{x^2}$;
6) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$;
7) $y = \dfrac{3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$;
8) $y = \dfrac{\sin x + x^2}{x + 1}$.

Производная сложной функции

Найдите производные функций:

1) $y = \sin 2x$;
2) $y = \cos\dfrac{x}{3}$;
3) $y = \sin^3 x + \cos^2 x$;
4) $y = (2x^3 + 2x - 1)^3$;
5) $y = \sqrt[5]{(2x + 3)^3}$;
6) $y = \sqrt{\sin 3x + 2x}$;
7) $y = \cos(x^2 + 3x + 1)$;
8) $y = \mathrm{tg}\, x + \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x$.

Производная показательной и логарифмической функций

Найдите производные функций:

1) $y = \log_5(3x)$;
2) $y = \lg^2 x$;
3) $y = \ln\sqrt{x^2 + 4}$;
4) $y = \ln\ln x$;
5) $y = e^{-x^4}$;
6) $y = \ln\dfrac{1 + x^2}{1 + 3x}$;
7) $y = e^{\mathrm{tg}2x}$;
8) $y = 2^{x^2} + 2x^2$;
9) $y = 2x7^{\frac{x}{2}}$;
10) $y = \dfrac{1 + \ln x^2}{1 + e^{x^2}}$.

Производные обратных тригонометрических функций

Найдите производные функций:

1) $y = \arcsin\dfrac{x}{5}$;
2) $y = \arccos 2x$;

3) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{x^2}$; 4) $y = \operatorname{arcctg}(x^3)$;

5) $y = \arcsin(\ln x)$; 6) $y = \arccos\sqrt{x-2}$;

7) $y = (x^3 + 2x + 1)\operatorname{arctg} x$; 8) $y = \dfrac{\arcsin\sqrt{3}x}{\sqrt{x}}$.

Производная функции, заданной неявно

Найдите производные функций:

1) $x^3 + y^2 + 2xy = 0$; 2) $e^{2y} + \dfrac{1}{2}x^2 = y$; 3) $\sin y + \sin x + xy = 0$.

Логарифмическое дифференцирование

Найдите производные функций:

1) $y = (\cos x)^x$; 2) $y = x^{3^x}$;

3) $y = (x^2 + 2x)^{x+1}$; 4) $y = x^{\sin x}$;

5) $y = (x+1)(x+3)^3(x+4)^4$; 6) $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$.

Производная функции, заданной параметрически

Найдите производные функций:

1) $\begin{cases} x = 5t + 3, \\ y = 2t^2 + t - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

Производные высших порядков

1. Найдите производные второго порядка заданных функций:

1) $y = 2x^3 + 2x + 1$; 2) $y = 2^x$;

3) $y = \operatorname{tg} x$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

2. Найдите производные третьего порядка заданных функций:

1) $y = \dfrac{1}{12}x^4 + x + 5$; 2) $y = \cos 3x$; 3) $y = x \ln x$.

Дифференциал

1. Найдите дифференциалы функций:

1) $y = x^2 + 2x - 4$; 2) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$;

3) $y = \cos^3 2x$; 4) $y = \ln(x^4 + 1)$;

5) $y = e^{\operatorname{ctg} x}$; 6) $r = \operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{cosec}\varphi$.

2. Найдите дифференциалы второго порядка функций:

1) $y = \sin(x+1)$; 2) $y = \operatorname{tg} 2x$; 3) $y = \ln\cos x$.

3. Вычислите приближенно с помощью дифференциала:

1) $\arcsin 0{,}51$; 2) $\sqrt[4]{15{,}8}$; 3) $\operatorname{tg} 44^{\circ}$.

Приложения производной
Применение производной в геометрии и физике

1. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Найдите угол наклона касательной к оси Ox:

1) $y = e^x$, $x_0 = 0$; 2) $y = x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 1$; 3) $y = \sqrt{x+3}$, $x_0 = 2$.

2. Найдите угол между кривыми в точке их пересечения:

1) $y = x - x^3$ и $y = 5x$; 2) $y = 1 + \sin x$ и $y = 1$.

3. Для материальной точки зависимость пути от времени задана уравнением $S = t^2 + 2t + 3$ (м). Найдите скорость и ускорение материальной точки через 4 с от начала движения.

Правило Лопиталя для вычисления пределов

Вычислите пределы функций, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$.

Формула Тейлора

Для функций $y = f(x)$ в точке x_0 запишите n первых ненулевых членов формулы Тейлора:

1) $y = x^5 - 3x^3 + x$, $x_0 = 1$, $n = 6$; 2) $y = \dfrac{1}{2-x}$, $x_0 = -3$, $n = 4$;

3) $y = e^{2-x}$, $x_0 = -1$, $n = 5$; 4) $y = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $x_0 = 0$, $n = 3$.

Исследование функций

1. Найдите экстремумы и интервалы монотонности функций:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 5$; 2) $y = \sqrt{3x-7}$;

3) $y = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$; 4) $y = x\ln x$.

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций на указанном отрезке:

1) $y = x^2 - 4x + 1$ на $[-3;3]$; 2) $y = x + 3\sqrt[3]{x}$ на $[-1;1]$.

3. Найдите точки перегиба, промежутки выпуклости функций:

1) $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 3$; 2) $y = x\ln(2x)$; 3) $y = xe^{-4x}$.

4. Найдите асимптоты графиков функций:

1) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; 2) $y = \ln(x-1)$; 3) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

5. Проведите полное исследование и постройте графики функций:

1) $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$; 2) $y = x^2\ln^2 x$; 3) $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$.

Дифференциальное исчисление функции многих переменных
Область определения функции многих переменных

Найдите область определения функций:

1) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; 2) $z = y + \sqrt{x}$; 3) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.

Частные производные первого и высших порядков функции многих переменных

1. Найдите частные производные заданных функций:

1) $z = 3x^4 + 2x^2y^3 - y^3$; 2) $z = \dfrac{y^2 + 2x}{x + y}$;

3) $z = \sin\sqrt{x + 2y}$; 4) $z = e^{x^2 + y}$;

5) $u = 3yxz + 2x^2yz^2 + 2xy + 2xz + 2yz$; 6) $u = (x+z)(x+y)(y+z)$.

2. Найдите частные производные второго порядка заданных функций:

1) $z = 3x^4 + 2x^2y^3 - y^3$; 2) $z = \dfrac{y^2 + 2x}{x + y}$.

Дифференциал функции многих переменных

1. Найдите полный дифференциал заданных функций:

1) $z = xy^2 + xy + x + y$; 2) $z = \sin x + \cos^2 y$;

3) $z = (3x^2 y - x^3 + 8)^4$; 4) $z = \dfrac{y + x}{x^2 + y^2}$.

2. Найдите дифференциал второго порядка заданных функций:

1) $z = x^2 y^2 + 2xy + x^3 + y^3$; 2) $z = e^{2x+3y}$.

3. Вычислите приближенно с помощью дифференциала:

1) $1{,}05^{2{,}98}$; 2) $\sqrt{(4{,}02)^2 + (3{,}05)^2}$; 3) $\sin 46^{\circ} \cos 59^{\circ}$.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

1. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке $M(1;1;3)$.

2. Дана поверхность $z = \ln(x^2 + y^2)$. Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M(1;0;0)$.

Экстремум функции двух переменных

1. Найдите экстремумы функций:

1) $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6$; 2) $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций $z = f(x, y)$ в области D:

1) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, D – треугольник, ограниченный прямыми $x - y + 1 = 0$, $x = 3$, $y = 0$;

2) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, D – прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

3. Найдите экстремумы функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

4. Найдите условные экстремумы функции $z = x^2 - 4x + y^2 + 4$, если $y = x + 2$.

Ответы

Дифференциальное исчисление функции одной переменной
Простейшие правила дифференцирования

1) $y'=21x^2$; 2) $y'=\frac{6}{5\sqrt[5]{x^3}}-\frac{8}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $y'=2x-\frac{1}{\sin^2 x}$;

4) $y'=4x+6+\sin x+x\cos x$; 5) $y'=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-2\mathrm{tg}x}{x^3}$; 6) $y'=\frac{-6x^2}{x^6-2x^3+1}$;

7) $y'=-\frac{3x+1}{(\mathrm{x}+1)^3}$; 8) $y'=\frac{(\mathrm{x}+1)\cos x+x^2+2x-\sin x}{(\mathrm{x}+1)^2}$.

Производная сложной функции

1) $y'=2\cos 2x$; 2) $y'=-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$; 3) $y'=3\sin^2 x\cdot\cos x-2\cos x\cdot\sin x$;

4) $y'=3(2x^3+2x-1)^2(6x^2+2)$; 5) $y'=\frac{6}{5\sqrt[5]{(2\mathrm{x}+3)^2}}$; 6) $y'=\frac{3\cos 3x+2}{2\sqrt{\sin 3x+2x}}$;

7) $y'=-(2x+3)\sin(x^2+3x+1)$; 8) $y'=\frac{1+\cos x\cdot\sin x}{\cos^4 x}$.

Производная показательной и логарифмической функций

1) $y'=\frac{1}{x\ln 5}$; 2) $y'=\frac{2\lg x}{x\ln 10}$; 3) $y'=\frac{x}{x^2+4}$; 4) $y'=\frac{1}{x\ln x}$; 5) $y'=-4x^3e^{-x^4}$;

6) $y'=\frac{3x^2+2x-3}{(1+x^2)(1+3x)}$; 7) $y'=\frac{2e^{\mathrm{tg}2x}}{\cos^2 2x}$; 8) $y'=2x(2^{x^2}\ln 2+2)$;

9) $y'=7^{\frac{x}{2}}(2+x\ln 7)$; 10) $y'=\frac{2(1+e^{x^2})\frac{1}{x}-2xe^{x^2}(1+\ln x^2)}{(1+e^{x^2})^2}$.

Производные обратных тригонометрических функций

1) $y'=\frac{1}{\sqrt{25-\mathrm{x}^2}}$; 2) $y'=\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$; 3) $y'=\frac{-6x}{x^4+9}$; 4) $y'=\frac{-3\mathrm{x}^2}{1+x^6}$;

5) $y'=\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; 6) $y'=\frac{-1}{2\sqrt{(x-2)(3-x)}}$; 7) $y'=(3\mathrm{x}^2+2)\mathrm{arctg}\,x+\frac{x^3+2x+1}{1+x^2}$;

8) $y' = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\sqrt{1-3x^2}} - \dfrac{\arcsin(\sqrt{3}x)}{2x^{\frac{3}{2}}}$.

Производная функции, заданной неявно

1) $y' = -\dfrac{3x^2+2y}{2x+2y}$; 2) $y' = \dfrac{-x}{2e^{2y}-1}$; 3) $y' = -\dfrac{\cos x + y}{\cos y + x}$.

Логарифмическое дифференцирование

1) $y' = (\ln(\cos x) - x\,\mathrm{tg}\,x)(\cos x)^x$; 2) $y' = 3^x\left(\ln 3 \ln x + \dfrac{1}{x}\right)x^{3^x}$;

3) $y' = \left(\ln\left(x^2+2x\right) + \dfrac{2(x+1)^2}{x^2+2x}\right)(x^2+2x)^{x+1}$; 4) $y' = \left(\dfrac{\sin x}{x} + \ln x \cos x\right)x^{\sin x}$;

5) $y' = \left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{4}{x+4}\right)(x+1)(x+3)^3(x+4)^4$; 6) $y' = \dfrac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$.

Производная функции, заданной параметрически

1) $y' = \dfrac{4t+1}{5}$; 2) $y' = -\mathrm{ctg}\,t$; 3) $y' = \dfrac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$.

Производные высших порядков

1. 1) $y'' = 12x$; 2) $y'' = 2^x \ln^2 2$; 3) $y'' = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 4) $y'' = -\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{3/2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. 1) $y''' = 2x$; 2) $y''' = 27\sin 3x$; 3) $y''' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Дифференциал

1. 1) $dy = (2x+2)dx$; 2) $dy = \dfrac{2}{(1-x)^2}dx$; 3) $dy = -6\cos^2(2x)\sin(2x)dx$;

4) $dy = \dfrac{4x^3}{x^4+1}dx$; 5) $dy = \dfrac{-e^{\mathrm{ctg}\,x}}{\sin^2 x}dx$; 6) $dr = -\dfrac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi$.

2. 1) $d^2y = (-\sin(x+1))dx^2$; 2) $d^2y = \dfrac{8\sin(2x)}{\cos^3(2x)}dx^2$; 3) $d^2y = -\dfrac{1}{\cos^2 x}dx^2$.

3. 1) $\approx 0{,}535$рад, $\approx 30{,}7^{\circ}$; 2) $\approx 1{,}994$; 3) $\approx 0{,}966$.

Приложения производной
Применение производной в геометрии и физике

1. 1) уравнение касательной: $y = x + 1$, уравнение нормали: $y = -x + 1$, угол наклона: $\alpha = 45°$; 2) уравнение касательной: $y = 0$, уравнение нормали: $x = 1$, угол наклона: $\alpha = 0°$; 3) уравнение касательной: $y = \frac{1}{2\sqrt{5}}x + \frac{4}{\sqrt{5}}$, уравнение нормали: $y = -2\sqrt{5}x + 5\sqrt{5}$, угол наклона $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 12{,}6°$.

2. 1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{3}$, $\varphi \approx 33{,}7°$; 2) $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$.

3. $V = 10\frac{м}{с}$, $a = 2\frac{м}{с^2}$.

Правило Лопиталя для вычисления пределов

1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{7}{2}$; 3) 2; 4) e^2; 5) $\frac{1}{2}$; 6) ∞.

Формула Тейлора

1) $f(x) = -1 - 3(x-1) + (x-1)^2 + 7(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + (x-1)^5$;

2) $f(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{25}(x+3) + \frac{1}{125}(x+3)^2 + \frac{1}{625}(x+3)^3$;

3) $f(x) = e^3\left(1 - \frac{(x+1)}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} - \frac{(x+1)^3}{3!} + \frac{(x+1)^4}{4!}\right)$;

4) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{384}$.

Исследование функций

1. 1) $y_{\min} = y(1) = y(-1) = 4$, $y_{\max} = y(0) = 5$, функция убывает на интервале $(-\infty;-1) \cup (0;1)$ и возрастает на интервале $(-1;0) \cup (1;+\infty)$;
2) Экстремумов нет, возрастает на интервале $\left[7/3;+\infty\right)$;
3) Экстремумов нет, убывает на $(-\infty;-2) \cup \left(-2;8\right) \cup (8;+\infty)$;
4) $y_{\min} = y(e^{-1}) = -e^{-1})$, функция убывает на интервале $(0;e^{-1})$ и возрастает на интервале $(e^{-1};+\infty)$.

2. 1) $y_{\min} = y(2) = -3$, $y_{\max} = y(-3) = 22$; 2) $y_{\min} = y(-1) = -4$, $y_{\max} = y(1) = 4$.

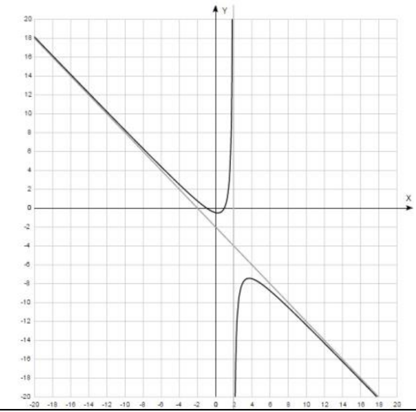
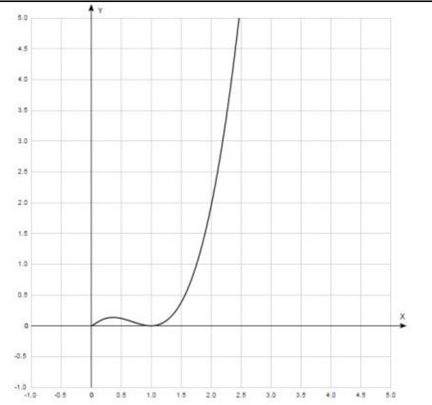
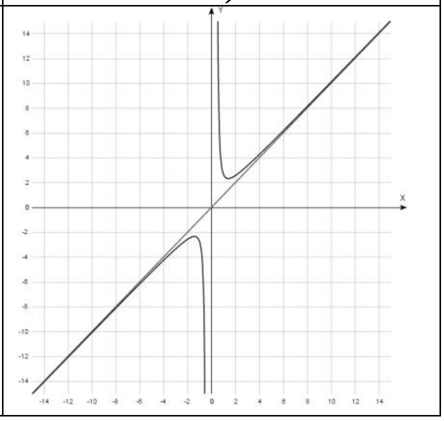
3. 1) выпукла вниз при $x \in (-\infty;-3) \cup (-1;+\infty)$, выпукла вверх при $x \in (-3;-1)$, точки перегиба: $(-3;\,24)$ и $(-1;\,8)$;

2) выпукла вниз при $x \in (0;+\infty)$, точек перегиба нет;

3) выпукла вверх при $x \in \left(-\infty;0{,}5\right)$, выпукла вниз при $x \in \left(0{,}5;+\infty\right)$, точка перегиба $\left(0{,}5;\ 0{,}5e^{-2}\right)$.

4. 1) вертикальная асимптота: $x=-1$, наклонная асимптота: $y=\dfrac{1}{2}x-1$;
2) вертикальная асимптота: $x=1$. 3) вертикальные асимптоты: $x=-1$ и $x=1$, Наклонная асимптота: $y=x$.

5.

1)	2)	3)
		

Дифференциальное исчисление функции многих переменных
Область определения функции многих переменных

1) замкнутый круг с центром в начале координат, радиус которого равен 2;
2) $x \ge 0$, правая относительно оси Oy полуплоскость;

3) внешняя часть круга с центром в начале координат, радиус равен 3, не включая границу круга.

Частные производные первого и высших порядков функции многих переменных

1. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x(3x^2+y^3)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2(2x^2-1)$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2y-y^2}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y^2-2x+2xy}{(x+y)^2}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\cos\sqrt{x+2y}}{2\sqrt{x+2y}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\cos\sqrt{x+2y}}{\sqrt{x+2y}}$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2+y}$;

5) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3yz+4xyz^2+2y+2z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3xz+2x^2z^2+2x+2z$,

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=3yx+4x^2yz+2x+2y$;

6) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(2x+y+z\right)\left(y+z\right)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=(x+2y+z)(x+z)$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=(x+y+2z)(x+y)$.

2. 1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 36x^2 + 4y^3$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^2 y - 6y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12xy^2$;

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{2y(y-2)}{(x+y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2x(x+2)}{(x+y)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{2(x-y-xy)}{(x+y)^3}$.

Дифференциал функции многих переменных

1. 1) $dz = (y^2 + y + 1)dx + (2xy + x + 1)dy$; 2) $dz = \cos x dx - 2\sin y \cos y dy$;

3) $dz = 4(3x^2 y - x^3 + 8)^3 (6xy - 3x^2)dx + 12x^2 (3x^2 y - x^3 + 8)^3 dy$;

4) $dz = \dfrac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx + \dfrac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy$.

2. 1) $d^2 z = (2y^2 + 6x)dx^2 + (4xy + 2)dxdy + (2x^2 + 6y)dy^2$;

2) $d^2 z = 4e^{2x+3y} dx^2 + 12e^{2x+3y} dxdy + 9e^{2x+3y} dy^2$.

3. 1) $\approx 1{,}15$; 2) $\approx 5{,}046$; 3) $\approx 0{,}37$.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

1. $2x + 2y - z = 1$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

2. $z - 2x + 2 = 0$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{-1}$.

Экстремум функции двух переменных

1. 1) $z_{\min} = z(-1,-2) = -11$; 2) $z_{\max} = z(-1,1) = 1$.

2. 1) $z_{\text{наим}} = z(2;0) = -4$, $z_{\text{наиб}} = z(3;3) = 6$;

2) $z_{\text{наим}} = z(1;0) = -3$, $z_{\text{наиб}} = z(1;2) = 17$.

3. $z_{\max} = z\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{25}{24}$.

4. $z_{\min} = z(0,2) = 8$.

4.4. ТЕСТОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме
«Дифференциальное исчисление»

I вариант

1. Найдите производную функции $y=\ln(3+2x)$.

1) $y'=-\dfrac{2}{3+2x}$;	2) $y'=3+2x$;	3) $y'=\dfrac{3+2x}{2}$;	4) $y'=\dfrac{2}{3+2x}$.

2. Найдите производную функции $y=(x^2+1)\mathrm{tg}x$.

1) $y'=\dfrac{(x^2+1)}{\cos^2 x}$;	2) $y'=2x\,\mathrm{tg}\,x+\dfrac{(x^2+1)}{\cos^2 x}$;	3) $y'=2x\,\mathrm{tg}\,x$;	4) $y'=\dfrac{2x}{\cos^2 x}$.

3. Найдите производную функции $\begin{cases} x=e^t, \\ y=t+\sin t. \end{cases}$

1) $y'_x=\dfrac{1+\cos t}{e^t}$;	2) $y'_x=1+\cos t$;	3) $y'_x=(1+\cos t)e^t$;	4) $y'_x=\dfrac{e^t}{1+\cos t}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\ln(3+2x)$ в точке с абсциссой $x=-1$.

1) $y=\ln 2$;	2) $y=2x+2$;	3) $y=-2x+2$;	4) $y=\dfrac{1}{2x+2}$.

5. Найдите дифференциал функции $y=(x^2+1)\mathrm{tg}x$.

1) $dy=\dfrac{2xdx}{\cos^2 x}$;	2) $dy=\dfrac{(x^2+1)dx}{\cos^2 x}$;	3) $dy=\left(2x\,\mathrm{tg}\,x+\dfrac{(x^2+1)}{\cos^2 x}\right)dx$;	4) $dy=\dfrac{2x}{\mathrm{tg}\,x}dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\cos(0{,}5\pi x)}{x-1}$, используя правило Лопиталя.

1) π;	2) -2π;	3) -1;	4) $-\pi$.

7. Найдите экстремумы и интервалы монотонности функции $f(x)=(x+1)^3$.

1) $(-\infty;-1)$ убывает, $(-1;+\infty)$ возрастает, $y_{\min}=y(-1)=0$;
2) $(-\infty;-1)$ возрастает, экстремума нет;
3) $(-\infty;-1)$ возрастает, $(-1;+\infty)$ возрастает, экстремума нет;
4) $(-\infty;-1)$ возрастает, $(-1;+\infty)$ убывает, $y_{\max}=y(-1)=0$.

8. Найдите экстремум функции $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

1) $z_{\max}=z(-4;1)=-1$;	2) $z_{\min}=z(-1;2)=2$;
3) $z_{\min}=z(-4;1)=-1$;	4) $z_{\min}=z(0;1)=2$.

II вариант

1. Найдите производную функции $y=\sin(3x+1)$.

1) $y'=\cos(3x+1)$; 2) $y'=3\cos(3x+1)$; 3) $y'=-3\cos(3x+1)$; 4) $y'=\sin 3x$.

2. Найдите производную функции $y=2^x(x^3+3)$.

1) $y'=-2^x(x^3+3)\ln 2+2^x x^2$;	2) $y'=2^x\ln 2+3\cdot 2^x x^2$;
3) $y'=2^x(x^3+3)\ln 2+3\cdot 2^x x^2$;	4) $y'=2^x(x^3+3)+x^2$.

3. Найдите производную функции $\sin y+x^2y+x=0$.

1) $y'=\dfrac{2xy+1}{\cos y+x^2}$; 2) $y'=\dfrac{\cos y+x^2}{2xy+1}$; 3) $y'=\dfrac{2x+1}{\cos y}$; 4) $y'=\dfrac{-2xy-1}{\cos y+x^2}$.

4. Напишите уравнение нормали к графику функции $y=\sin(3x+1)$ в точке с абсциссой $x=-\dfrac{1}{3}$.

1) $y=-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}x$; 2) $y=3-2x$; 3) $y=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}x$; 4) $y=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}x$.

5. Найдите дифференциал функции $y=2^x(x^3+3)$.

1) $dy=\left(2^x(x^3+3)+x^2\right)dx$;	2) $dy=\left(2^x(x^3+3)\ln 2+3\cdot 2^x x^2\right)dx$;
3) $dy=\left(2^x\ln 2+3\cdot 2^x x^2\right)dx$;	4) $dy=\left(-2^x(x^3+3)\ln 2+2^x x^2\right)dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x^2}$, используя правило Лопиталя.

1) 5; 2) 1; 3) ∞; 4) 0.

7. Найдите точки перегиба, промежутки выпуклости функции $f(x)=x^5+5x-6$.

1) $(-\infty;0)$ выпукла вверх, $(0;+\infty)$ выпукла вниз, $(0;-6)$ – точка перегиба;
2) $(-\infty;1)$ выпукла вверх, $(1;+\infty)$ выпукла вниз, $(1;0)$ – точка перегиба;
3) $(-\infty;1)$ выпукла вниз, $(1;+\infty)$ выпукла вверх, $(1;0)$ – точка перегиба;
4) $(-\infty;0)$ выпукла вниз, $(0;+\infty)$ выпукла вверх, $(0;-6)$ – точка перегиба.

8. Найдите экстремум функции $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$.

1) $z_{\min}=z(0;-3)=-9$;	2) $z_{\max}=z(3;0)=9$;
3) $z_{\max}=z(0;3)=9$;	4) $z_{\min}=z(0;3)=9$.

III вариант

1. Найдите производную функции $y = \mathrm{tg}(4+2x)$.

1) $y' = \cos^2(4+2x)$;	2) $y' = \dfrac{2}{\cos^2(4+2x)}$;
3) $y' = \dfrac{-2}{\cos(4+2x)}$;	4) $y' = \sin(4+2x)$.

2. Найдите производную функции $y = e^{2x}\sin x$.

1) $y' = e^{2x}\cos x$;	2) $y' = 2e^{2x}\sin x$;
3) $y' = e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x$;	4) $y' = e^{2x}(\cos x + \sin x)$.

3. Найдите производную функции $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$

1) $y'_x = -t^2$;	2) $y'_x = 1$;	3) $y'_x = -t$;	4) $y'_x = -1$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \mathrm{tg}(4+2x)$ в точке с абсциссой $x = -2$.

1) $y = 2x+4$;	2) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$;	3) $y = -2x+4$;	4) $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$.

5. Найдите дифференциал функции $y = e^{2x}\sin x$.

1) $dy = e^{2x}(\cos x + 2\sin x)dx$;	2) $dy = 2e^{2x}\sin x dx$;
3) $dy = e^{2x}\cos x dx$;	4) $dy = e^{2x}(\cos x + \sin x)dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\mathrm{tg}x}$, используя правило Лопиталя.

1) 1;	2) $\ln 3$;	3) -1;	4) 3.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке [–3; 1].

1). $f_{\max} = f(0) = 0$, $f_{\min} = f(3) = -18$;	2) $f_{\max} = f(-1) = -2$, $f_{\min} = f(3) = -18$;
3) $f_{\min} = f(1) = 2$, $f_{\max} = f(-3) = 18$;	4) $f_{\min} = f(-1) = -2$, $f_{\max} = f(-3) = 18$.

8. Найдите экстремум функции $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y - 6$.

1) $z_{\min} = z(-1;-2) = -11$;	2) $z_{\max} = z(-1;-2) = -11$;
3) $z_{\min} = z(-2;-1) = 11$;	4) $z_{\max} = z(-2;-1) = 11$.

IV вариант

1. Найдите производную функции $y=e^{3x-6}$.

1) $y'=3e^{3x-6}\ln 3$; 2) $y'=(3x-6)e^{3x-6}$; 3) $y'=3e^{3x-6}$; 4) $y'=-6e^{3x-6}$.

2. Найдите производную функции $y=x^2\mathrm{ctg}x$.

1) $y'=2x\,\mathrm{ctg}\,x-\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$;	2) $y'=-\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$;
3) $y'=2x\,\mathrm{ctg}\,x+\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$;	4) $y'=2x\,\mathrm{ctg}\,x+\dfrac{x^2}{\cos^2 x}$.

3. Найдите производную функции $y=1+xe^y$.

1) $y'=\dfrac{e^y}{1+xe^y}$;	2) $y'=e^y(1-xe^y)$;	3) $y'=\dfrac{e^y}{1-xe^y}$;	4) $y'=\dfrac{1+xe^y}{e^y}$.

4. Напишите уравнение нормали к кривой $y=e^{3x-6}$ в точке с абсциссой $x=2$.

1) $y=5-3x$;	2) $y=\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{3}x$;	3) $y=-\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{3}x$;	4) $y=-\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{3}x$.

5. Найдите дифференциал функции $y=x^2\mathrm{ctg}x$.

1) $dy=\left(2x\,\mathrm{ctg}\,x+\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\right)dx$;	2) $dy=-\dfrac{x^2}{\sin^2 x}dx$;
3) $dy=\left(2x\,\mathrm{ctg}\,x-\dfrac{x^2}{\cos^2 x}\right)dx$;	4) $dy=\left(2x\,\mathrm{ctg}\,x-\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\right)dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x}$, используя правило Лопиталя.

1) 0;	2) 7;	3) -7;	4) 1.

7. Найдите асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$.

1) $y=x+1$ – наклонная асимптота, $x=1$ – вертикальная асимптота;
2) $y=x-1$ – наклонная асимптота, $x=1$ – вертикальная асимптота;
3) $y=x+1$ – наклонная асимптота, вертикальных асимптот нет;
4) $x=1$ – вертикальная асимптота, наклонных асимптот нет.

8. Найдите экстремум функции $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$.

1) $z_{\min}=z(1;4)=-21$;	2) $z_{\max}=z(1;4)=-21$;
3) $z_{\min}=z(4;1)=-21$;	4) $z_{\max}=z(1;1)=-2$.

V вариант

1. Найдите производную функции $y = \ln(3x+4)$.

1) $y' = \dfrac{3x+4}{3}$;	2) $y' = \dfrac{3}{3x+4}$;	3) $y' = \dfrac{\ln 3}{3x+4}$;	4) $y' = -\dfrac{3}{3x+4}$.

2. Найдите производную функции $y = (x+1)\operatorname{tg} x$.

1) $y' = \operatorname{tg} x - \dfrac{x+1}{\sin^2 x}$;	2) $y' = \dfrac{x+1}{\cos^2 x}$;	3) $y' = \operatorname{tg} x + 1$;	4) $y' = \operatorname{tg} x + \dfrac{x+1}{\cos^2 x}$.

3. Найдите производную функции $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 1 - \sin^2 t. \end{cases}$

1) $y'_x = 2\sin 2t$;	2) $y'_x = 2$;	3) $y'_x = \dfrac{1}{2}$;	4) $y'_x = -\sin 2t$.

4. Напишите уравнение нормали к графику функции $y = \ln(3x+4)$ в точке с абсциссой $x = -1$.

1) $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$;	2) $y = 3x + 3$;	3) $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$;	4) $y = -3x - 3$.

5. Найдите дифференциал функции $y = (x+1)\operatorname{tg} x$.

1) $dy = \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{x+1}{\sin^2 x}\right)dx$;	2) $dy = \dfrac{x+1}{\cos^2 x}dx$;
3) $dy = \left(\operatorname{tg} x + \dfrac{x+1}{\cos^2 x}\right)dx$;	4) $dy = (\operatorname{tg} x + 1)dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3e^{x-2} - 3}{x-2}$, используя правило Лопиталя.

1) $\dfrac{3}{2}$;	2) 3;	3) -3;	4) -2.

7. Найдите экстремумы и интервалы монотонности функции $f(x) = (x+2)^4$.

1) $(-\infty;-2)$ возрастает, $(-2;+\infty)$ убывает, $y(-2) = 0$ – максимум;
2) $(-\infty;-2)$ убывает, $(-2;+\infty)$ возрастает, $y(-2) = 0$ – минимум;
3) $(-\infty;2)$ убывает, $(2;+\infty)$ возрастает, $y(2) = 4$ – минимум;
4) $(-\infty;2)$ возрастает, $(2;+\infty)$ убывает, $y(2) = 4$ – минимум.

8. Найдите экстремум функции $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$.

1) $z_{\min} = z(-2;-1) = -2$;	2) $z_{\max} = z(-2;-1) = -2$;
3) $z_{\min} = z(-1;-2) = 3$;	4) $z_{\max} = z(-1;-2) = 3$.

VI вариант

1. Найдите производную функции $y = \cos(2x+3)$.

1) $y' = 2\sin(2x+3)$;	2) $y' = (2x+3)\sin(2x+3)$;
3) $y' = -\sin(2x+3)$;	4) $y' = -2\sin(2x+3)$.

2. Найдите производную функции $y = e^x(x^2+2x+1)$.

1) $y' == e^x(x^2+4x+3)$;	2) $y' == e^x(2x+2)$;
3) $y' == e^x + (2x+2)$;	4) $y' == \dfrac{e^x - 2x - 2}{(x^2+2x+1)^2}$.

3. Найдите производную функции $\sin y + x^2 y + x = 0$.

1) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - \cos y}$;	2) $y' = \dfrac{-2xy-1}{x^2+\sin y}$;	3) $y' = \dfrac{-2xy}{x^2+\cos y}$;	4) $y' = -\dfrac{x^2+\sin y}{2xy}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \cos(2x+3)$ в точке с абсциссой $x = -\dfrac{3}{2}$.

1) $y = 2x+1$;	2) $y = -3x+1$;	3) $x = 5$;	4) $y = 1$.

5. Найдите дифференциал функции $y = e^x(x^2+2x+1)$.

1) $dy = (e^x + 2x + 2)dx$;	2) $dy = e^x(2x+2)dx$;
3) $dy = \dfrac{e^x - 2x - 2}{(x^2+4x+3)^2}dx$;	4) $dy = e^x(x^2+4x+3)dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1-\cos(x+3)}{x+3}$, используя правило Лопиталя.

1) 1;	2) $\sqrt{2}$;	3) 0;	4) -1.

7. Найдите точки перегиба, промежутки выпуклости функции $f(x) = -2x^3 + 6x + 7$.

1) $(-\infty;0)$ выпукла вверх, $(0;+\infty)$ выпукла вниз, $(0;7)$ – точка перегиба;
2) $(-\infty;1)$ выпукла вниз, $(1;+\infty)$ выпукла вверх, $(1;11)$ – точка перегиба;
3) $(-\infty;1)$ выпукла вверх, $(1;+\infty)$ выпукла вниз, $(1;11)$ – точка перегиба;
4) $(-\infty;0)$ выпукла вниз, $(0;+\infty)$ выпукла вверх, $(0;7)$ – точка перегиба.

8. Найдите экстремум функции двух переменных $z = 4x + 2y - x^2 - y^2$.

1) $z_{\min} = z(2;1) = 5$;	2) $z_{\max} = z(2;1) = 5$;
3) $z_{\max} = z(1;0) = 3$;	4) $z_{\min} = z(-1;1) = -4$.

VII вариант

1. Найдите производную функции $y = \arcsin(2x-3)$.

1) $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$;	2) $y' = \dfrac{2}{\sqrt{1+(2x-3)^2}}$;
3) $y' = \arccos(2x-3)$;	4) $y' = -2\arccos(2x-3)$.

2. Найдите производную функции $y = x^2 e^{-2x}$.

1) $y' = 2x - 2e^{-2x}$;	2) $y' = -4xe^{-2x}$;	3) $y' = 2xe^{-2x}(1-x)$;	4) $y' = 2xe^{-2x}$.

3. Найдите производную функции $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

1) $y'_x = \dfrac{2t}{1+t^2}$;	2) $y'_x = 1+t^2$;	3) $y'_x = 2t$;	4) $y'_x = \dfrac{1+t^2}{2t}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \arcsin(2x-3)$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{3}{2}$.

1) $y = -2x+3$;	2) $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$;	3) $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}$;	4) $y = 2x-3$.

5. Найдите дифференциал функции $y = x^2 e^{-2x}$.

1) $dy = (2x - 2e^{-2x})dx$;	2) $dy = 2xe^{-2x}(1-x)dx$;
3) $dy = -4e^{-2x}dx$;	4) $dy = 2xe^{-2x}dx$.

6. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}6x}{3x}$, используя правило Лопиталя.

1) 0;	2) 2;	3) 6;	4) -3.

7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^5 - 5x^2 + 2$ на отрезке [–1; 2].

1) $f_{\max} = f(0) = 2$, $f_{\min} = f(-1) = -5$;	2) $f_{\min} = f(1) = -1$, $f_{\max} = f(0) = 2$;
3) $f_{\min} = f(-1) = -5$, $f_{\max} = f(2) = 46$;	4) $f_{\min} = f(-1) = -5$, $f_{\max} = f(1) = -1$.

8. Найдите экстремум функции двух переменных $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

1) $z_{\max} = z(0;3) = -9$;	2) $z_{\min} = z(0;3) = -6$;
3) $z_{\max} = z(0;3) = -6$;	4) $z_{\min} = z(0;3) = -9$.

5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В результате изучения данной темы студент должен научиться:

– вычислять простейшие неопределенные интегралы: табличные и сводящиеся к табличным, используя таблицу основных интегралов и свойства неопределенного интеграла;

– вычислять неопределенные интегралы, используя основные приемы интегрирования: замену переменной, поднесение под знак дифференциала, интегрирование по частям;

– интегрировать основные классы функций:

1) рациональные функции (путем их разложения на простейшие дроби и вычисления интегралов от простейших дробей);

2) линейные и дробно-линейные иррациональности;

3) тригонометрические функции (путем поднесения под знак дифференциала; с использованием формул понижения степени и синуса двойного аргумента);

– вычислять определенные интегралы: применять формулу Ньютона–Лейбница, осуществлять замену переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле;

– использовать геометрические приложения определенного интеграла для вычисления площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых и объемов тел.

5.1. ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

В заданиях 1 – 6 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. 1) $\int\left(4-\dfrac{6}{\sqrt[5]{x^3}}+5\sin x+e^x-\dfrac{3}{1+x^2}\right)dx$;

2) $\int\left(\dfrac{2}{x}-7\sqrt[6]{x}+\dfrac{2}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{4\sqrt{1-x^2}}+2^x\right)dx$;

3) $\int\left(\dfrac{x^4-5\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{x}}+\dfrac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$.

2. 1) $\int\cos(4x+5)dx$; 2) $\int\limits_2^e\dfrac{dx}{x\ln^3 x}$; 3) $\int\limits_0^1\dfrac{xdx}{x^2+5}$.

3. 1) $\int(x-1)e^x dx$; 2) $\int\limits_0^{1/4}\operatorname{arctg}4x dx$; 3) $\int\limits_1^e\left(\ln x+\dfrac{\ln^5 x}{x}\right)dx$.

4. 1) $\int \sin^3 2x dx$; 2) $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$; 3) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x dx$.

5. 1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; 2) $\int \frac{x^2-3}{x^2+1} dx$; 3) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

6. 1) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[4]{x}}$; 2) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$; 3) $\int_2^{15} \sqrt[3]{2x-3} dx$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=2x-x^2+3, y=3-x$; 2) $y=x^3, x=2, y=0$.

8. Найдите объемы тел, полученных вращением вокруг оси Ox фигур из задания 7.

9. Вычислите длину дуги кривой $y^2=x^3$, $x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$.

Ответы

1. 1) $15\sqrt[5]{x^2}+4x+e^x-5\cos x-3\operatorname{ctg} x+C$;

2) $-6x^{7/6}+2\ln x+\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{4\sin x}+2\operatorname{tg} x+C$;

3) $\frac{2}{27}\sqrt{x^9}-2\sqrt[6]{x^5}+x+2\operatorname{ctg} x+\ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)+C$.

2. 1) $\frac{1}{4}\sin(4x+5)+C$; 2) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln^2 2}-1\right)$; 3) $\ln\frac{1}{2}$.

3. 1) $e^x(x-2)+C$; 2) $\frac{1}{16}(\pi-\ln 4)$; 3) $\frac{7}{6}$.

4. 1) $\frac{1}{6}\cos^3 2x-\cos 2x+C$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $\frac{\pi}{16}$.

5. 1) $\frac{1}{12}\left(\ln|x-1|-4\ln|x+2|+3\ln|x+3|\right)+C$; 2) $x-4\operatorname{arctg} x+C$;

3) $\frac{\pi}{8}$.

6. 1) $\frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5}+\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3}-x-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+C$; 2) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$;

3) 30.

7. 1) $4\frac{1}{2}$; 2) 4.

8. 1) $21\frac{1}{5}\pi$; 2) $18\frac{2}{7}\pi$.

9. $\frac{56}{27}$.

5.2. ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Вычисление интегралов методом табличного интегрирования:

1) $\int\left(x^3+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}+\frac{4}{x^2-4}+2^x\right)dx$.

Решение

Преобразуем подынтегральную функцию и представим исходный интеграл в виде суммы интегралов, воспользовавшись свойством линейности интеграла:

$$J=\int\left(x^3+\frac{8}{x^5}+11\sqrt[9]{x^2}+\frac{4}{x^2-1}+2^x\right)dx=$$

$$=\int x^3dx+8\int x^{-5}dx+11\int x^{\frac{2}{9}}dx+4\int\frac{dx}{x^2-4}+\int 2^x dx.$$

Все интегралы, стоящие в правой части последнего равенства, являются табличными. Итак, вычислив каждый из этих интегралов, получим

$$J=\frac{x^4}{4}+8\frac{x^{-4}}{-4}+11\frac{x^{\frac{2}{9}+1}}{\frac{11}{9}}+4\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{2^x}{\ln 2}+C=$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{2}{x^4}+9\sqrt[9]{x^{11}}+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{2^x}{\ln 2}+C;$$

2) $\int\frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}dx$.

Решение

Преобразуем подынтегральную функцию, разделив почленно каждое слагаемое числителя дроби на знаменатель, а затем воспользуемся линейностью интеграла:

$$\int\frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}dx=\int\left(e^x+\sin x\right)dx=\int e^xdx+\int\sin xdx=e^x-\cos x+C;$$

3) $\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{2x^2+3}{x^2+1}dx$.

Решение

Выделим в подынтегральной функции, являющейся неправильной рациональной дробью, целую часть, а затем используем свойство линейности и формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^2+3}{x^2+1}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^2+2+1}{x^2+1}dx = \int_1^{\sqrt{3}} 2 + \frac{dx}{1+x^2} = 2x\Big|_1^{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\sqrt{3} - 2 + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg}1 = 2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{3} - 2 + \frac{\pi}{12};$$

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \sin x\right)dx$.

Решение

Для вычисления этого интеграла используем свойство линейности и формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \sin x\right)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\cos^2 x}dx + \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = 2\operatorname{tg} x\Bigg|_0^{\pi/3} - \cos x\Bigg|_0^{\pi/3} =$$

$$= 2\left(\sqrt{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 2\sqrt{3} + \frac{1}{2};$$

5) $\int\limits_1^2 \left(\frac{5}{x} + 2^x\right)dx$.

Решение

Воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница.

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{5}{x} + 2^x\right)dx = \left(5\ln|x| + \frac{2^x}{\ln 2}\right)\Bigg|_1^2 = 5(\ln 2 - \ln 1) + \frac{1}{\ln 2}\left(2^2 - 2\right) = 5\ln 2 + \frac{2}{\ln 2};$$

6) $\int\limits_{-2}^2 |x|dx$.

Решение

Заметим, что:

1) отрезок [–2; 2] симметричен относительно точки $x = 0$;

2) подынтегральная функция $|x|$ является четной на [–2; 2], так как $|-x| = |x|$.

По свойству интеграла от четной функции по симметричному отрезку данный интеграл можно вычислить по отрезку [0; 2], а результат удвоить. Получим

$$\int\limits_{-2}^2 |x|dx = 2\int\limits_0^2 |x|dx = 2\int\limits_0^2 xdx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = 4;$$

7) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^8+16} dx$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^8+16}$ является нечетной на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)^8+16}=\frac{-\sin x}{x^8+16}=-f(x).$$

По соответствующему свойству интеграл от нечетной функции по симметричному отрезку всегда равен 0. Следовательно,

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^8+16} dx=0.$$

2. Вычисление интегралов методом поднесения под знак дифференциала или методом замены переменной:

1) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

Решение

Так как $\dfrac{1}{x}=(\ln x)'$, то $\dfrac{1}{x}dx=(\ln x)' dx=d(\ln x)$, откуда

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx=\int \ln^2 x (\ln x)' dx=\int \ln^2 x d(\ln x)=\frac{\ln^3 x}{3}+C;$$

2) $\int \sin(3x+5) dx$.

Решение

Поднесем $3x+5$ под знак дифференциала. Так как $(3x+5)'=3,$ то $d(3x+5)=3dx$, поэтому $dx=\dfrac{1}{3}d(3x+5)$:

$$\int \sin(3x+5) dx=\frac{1}{3}\int \sin(3x+5) d(3x+5)=-\frac{1}{3}\cos(3x+5)+C;$$

3) $\int\limits_0^1 \sqrt{2x+1} dx$.

Решение

Для вычисления данного определенного интеграла поднесем подкоренное выражение под знак дифференциала. Так как

$$d(2x+1)=(2x+1)'dx=2dx,$$

то вместо dx запишем: $\frac{1}{2}\cdot 2dx=\frac{1}{2}d\left(2x+1\right)$:

$$\int\limits_0^1\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{2x+1}d(2x+1)=\frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\left(3^{3/2}-1^{3/2}\right)=\sqrt{3}-\frac{1}{3};$$

4) $\int\frac{\left(\arccos 3x\right)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

Решение

Вычислим интеграл методом замены переменной в неопределенном интеграле:

$$\int\frac{\left(\arccos 3x\right)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx=\left|\begin{array}{c} t=\arccos 3x\Rightarrow \\ dt=d\left(\arccos 3x\right)=\left(\arccos 3x\right)'dx=-\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}dx\Rightarrow \\ \Rightarrow\dfrac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=-\dfrac{dt}{3}\end{array}\right|=$$

$$=-\int t^2\frac{dt}{3}=-\frac{t^3}{9}+C=-\left(\arccos 3x\right)^3+C;$$

5) $\int\limits_0^1\frac{e^x}{e^x+5}dx$.

Решение

Данный интеграл вычислим методом замены переменной в определенном интеграле. Отметим, что пределы интегрирования при этом изменяются вместе с переменной интегрирования:

$$\int\limits_0^1\frac{e^x}{e^x+5}dx=\left|\begin{array}{c} e^x+5=t \\ e^x dx=dt \\ x=0\Rightarrow t=6 \\ x=1\Rightarrow t=e+5\end{array}\right|=\int\limits_6^{e+5}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_6^{e+5}=\ln\left(e+5\right)-\ln 6=\ln\frac{e+5}{6}.$$

3. Вычисление интегралов методом интегрирования по частям:

1) $\int\ln xdx$.

Решение

Применим формулу интегрирования по частям. Положим

$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$,

$dv=dx \Rightarrow v=\int dx = x$.

Тогда

$\int \ln x dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$;

2) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Решение

Положим $u=x \Rightarrow du=dx,\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow v=\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{ctg} x - \int (-\operatorname{ctg} x) dx = -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

$$= -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C;$$

3) $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

Решение

Для вычисления данного определенного интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = \left| \begin{matrix} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=e^x dx \Rightarrow v=e^x \end{matrix} \right| = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1;$$

4) $\int\limits_0^{\pi} (2x-1)\sin x dx$.

Решение

Для вычисления данного определенного интеграла применим формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^{\pi} (2x-1)\sin x dx = \left| \begin{matrix} u=2x-1 \Rightarrow du=2dx \\ dv=\sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v=\int \sin x dx = -\cos x \end{matrix} \right| = -(2x-1)\cos x\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} (-\cos x) 2dx =$$

$$= -(2\pi-1)\cos\pi + (-1)\cos 0 + 2\sin x\Big|_0^{\pi} = 2\pi - 1 - 1 + 2(\sin\pi - \sin 0) = 2\pi - 2;$$

5) $\int\limits_1^e x\ln^2 x dx$.

Решение

Воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$J=\int_1^e x\ln^2 x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x\Rightarrow du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\int_1^e x\ln x dx=\frac{e^2}{2}-J_1.$$

Для вычисления интеграла J_1 еще раз проинтегрируем по частям:

$$J_1=\int_1^e x\ln x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right).$$

Окончательно получаем

$$J=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{1}{4}\left(e^2-1\right).$$

4. Вычисление интегралов от рациональных функций:

1) $\int\frac{dx}{x(x-1)(x+1)}$.

Решение

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, знаменатель которой имеет три простых корня. Следовательно, разложение на простейшие дроби будет иметь вид

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}.$$

Приведем дроби справа к общему знаменателю $x(x-1)(x+1)$:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}.$$

Отсюда

$$1=A\left(x^2-1\right)+B\left(x^2+x\right)+C\left(x^2-x\right).$$

Подставляя в полученное равенство поочередно $x=0, x=1$ и $x=-1$, найдем

$$A=-1,\ B=1/2,\ C=1/2.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \ln\left(\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{|x|}\right) + C;$$

2) $\displaystyle\int \frac{(1-x)dx}{(x+2)(x+3)^2}$.

Решение

Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Знаменатель имеет два корня: $x=-2$ – простой корень, $x=-3$ – корень кратности 2. Следовательно, разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{1-x}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}.$$

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю и приравнивая числители, получаем

$$1-x = A(x+3)^2 + B(x+2)(x+3) + C(x+2).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для нахождения A, B и C:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} A+B=0, \\ 6A+5B+C=-1, \\ 9A+6B+2C=1. \end{cases}$$

Результатом решения системы является набор чисел:

$A=3,\ B=-3,\ C=-4$.

Таким образом,

$$\int \frac{(1-x)dx}{(x+2)(x+3)^2} = 3\int \frac{dx}{x+2} - 3\int \frac{dx}{x+3} - 4\int \frac{dx}{(x+3)^2} =$$

$$= 3\ln|x+2| - 3\ln|x+3| - 4\frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C = 3\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + \frac{4}{x+3} + C;$$

3) $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{x^2-x+1}$.

Решение

Разобьем данный интеграл на два интеграла следующим образом:

$$J = \int \frac{(x+1)dx}{x^2-x+1} = \int \frac{x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx = \int \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= J_1 + \frac{3}{2}J_2.$$

Вычислим каждый из полученных интегралов. В первом интеграле J_1 поднесем выражение $2\left(x-\frac{1}{2}\right)=2x-1$ под знак дифференциала:

$$J_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-x+1\right)}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+C_1 .$$

Для вычисления J_2 выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции:

$$J_2=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C_2=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C_2.$$

Итак, мы получили

$$J=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

4) $\displaystyle\int\frac{x^5+x^2+x}{x^3+1}dx$.

Решение

Поскольку подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью (так как степень многочлена в числителе выше степени многочлена в знаменателе), то процесс ее интегрирования состоит из нескольких шагов. На первом шаге выделим целую и правильную части дроби:

$$\frac{x^5+x^2+x}{x^3+1}=\frac{x^2\left(x^3+1\right)+x}{x^3+1}=x^2+\frac{x}{x^3+1}.$$

Таким образом,

$$J=\int\frac{x^5+x^2+x}{x^3+1}dx=\int x^2dx+\int\frac{x}{x^3+1}dx=\frac{x^3}{3}+\int\frac{x}{x^3+1}dx .$$

На втором шаге разложим знаменатель правильной дроби на множители

$$x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right),$$

где множитель x^2-x+1 не имеет действительных корней.

На третьем шаге разложим правильную дробь $\frac{x}{x^3+1}$ на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

На четвертом шаге найдем коэффициенты A, B, C, приводя дроби из правой части равенства к общему знаменателю и приравнивая их числители

$$x=A\left(x^2-x+1\right)+(Bx+C)(x+1).$$

Поскольку равные многочлены имеют одинаковые коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получаем систему линейных уравнений относительно искомых чисел *A*, *B*, *C*:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=1, \\ A+C=0. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$A=-\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{3},\ C=\frac{1}{3}.$$

Итак,

$$\int\frac{x}{x^3+1}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=\ -\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx.$$

Последний интеграл вычислен нами в примере 3 данного пункта. Воспользовавшись полученным там ответом, окончательно получаем

$$J=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

5. Вычисление интегралов от иррациональных выражений:

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{5-6x-9x^2}}$.

Решение

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении и воспользуемся формулой замены переменной:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{5-6x-9x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{6-(3x+1)^2}}=\left|\begin{array}{c} 3x+1=t \\ 3dx=dt\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{3} \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{6-t^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем:

$$J=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{\sqrt{6}}+C;$$

2) $\displaystyle\int_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение

Применим метод замены переменной в определенном интеграле. Положим $t=\sqrt{1+3x}$, тогда $x=\frac{1}{3}\left(t^2-1\right)\Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$. При этом соответствующим образом изменяются и пределы интегрирования. А именно, подставляя в выражение $t=\sqrt{1+3x}$ поочередно $x=0$ и $x=5$, получим

$$x=0 \Rightarrow t=1,$$
$$x=5 \Rightarrow t=4.$$

Итак, в результате замены переменной мы преобразовали интеграл от иррационального выражения в интеграл от рациональной функции переменной t:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}=\int_1^4 \frac{\frac{1}{3}\left(t^2-1\right)}{t}\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{9}\int_1^4\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^4=\frac{2}{9}\left(\frac{64}{3}-4-\frac{1}{3}+1\right)=4;$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

Решение

Так как подынтегральное выражение содержит два радикала $\sqrt{x}$ и $\sqrt[4]{x}$, то для рационализации этого выражения сделаем подстановку

$$x=t^4 \Rightarrow dx=4t^3dt,$$

тогда $\sqrt{x}=t^2$, $\sqrt[4]{x}=t$.

В итоге получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{4t^3dt}{t^2+t}=\int\frac{4t^2dt}{t+1}=4\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=$$
$$=4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=4\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C.$$

Возвращаясь к переменной $t=\sqrt[4]{x}$, окончательно получаем

$$J=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+C;$$

4) $\displaystyle\int\frac{4xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$.

Решение

Подынтегральное выражение содержит линейную иррациональность $\sqrt[3]{x+1}$. Для ее рационализации воспользуемся подстановкой

$$\sqrt[3]{x+1}=t \Rightarrow x+1=t^3 \Rightarrow dx=3t^2dt,\ x=t^3-1.$$

Итак, получаем

$$\int\frac{4xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}=\int\frac{4\left(t^3-1\right)\cdot 3t^2}{t^2+t+1}dt=12\int\frac{(t-1)\left(t^2+t+1\right)\cdot t^2}{t^2+t+1}dt=$$
$$=12\int(t-1)\cdot t^2dt=12\int t^3dt-12\int t^2dt=12\frac{t^4}{4}-12\frac{t^3}{3}+C=3t^4-4t^3+C.$$

Остается подставить $t=\sqrt[3]{x+1}$ в полученное выражение, в результате чего окончательно получаем

$$J=3\sqrt[3]{(x+1)^4}-4(x+1)+C;$$

5) $\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение

Данный интеграл можно упростить подходящей тригонометрической подстановкой, а именно

$$J=\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}=\left|\begin{array}{l} x=2\sin t\Rightarrow \\ dx=2\cos tdt \\ x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\sqrt{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right|=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(2\sin t)^2}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos tdt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\sin^2 t\cdot 2\cos t}{|2\cos t|}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\sin^2 t}{2\cos t}\cdot 2\cos tdt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 tdt.$$

Нахождение неопределенного интеграла $\int\sin^2 xdx$ подробно рассмотрено в следующем примере. Воспользуемся полученным там результатом и, применяя формулу Ньютона – Лейбница, закончим вычисления

$$J=4\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=(2x-\sin 2x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\cdot\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{2}-2\cdot 0+\sin 0=\frac{\pi}{2}-1.$$

6. Вычисление интегралов от тригонометрических функций:

1) $\int\sin^2 xdx$.

Решение

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой понижения степени, а именно:

$$\int\sin^2 xdx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\int\cos 2x\,d(2x)=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C;$$

2) $\int\sin 2x\cos 2xdx$.

Решение

Для нахождения данного интеграла воспользуемся формулой синуса двойного угла. Итак,

$$\int \sin 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 4x dx = \frac{1}{2\cdot 4}\int \sin 4x d(4x) = \frac{-\cos 4x}{8} + C;$$

3) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

Решение

Заметим, что поскольку подынтегральное выражение содержит нечетную степень косинуса, то данный интеграл упростится с помощью подстановки

$\sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt$.

Итак,

$$J = \int \sin^2 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \underbrace{\cos x dx}_{dt} =$$

$$= \int t^2 \left(1 - t^2\right)^2 dt = \int \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7 + C.$$

Остается подставить $t = \sin x$. Окончательно получаем

$$J = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

7. Вычисление несобственных интегралов:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$.

Решение

Подынтегральная функция $y = \frac{1}{x^3}$ непрерывна на промежутке [1;+∞). Так как верхний предел равен +∞, то данный интеграл является несобственным интегралом первого рода. По определению

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x^3} = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2} - 1\right)\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

Несобственный интеграл сходится;

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Решение

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ интегрируема по любому отрезку [ε, 1], $0 < \varepsilon < 1$, так как является на нем непрерывной. В точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, поскольку

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{1}{x\sqrt{x}} = +\infty.$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл является несобственным интегралом второго рода. По определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\bigg|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2+\frac{2}{\varepsilon}\right) = +\infty .$$

Несобственный интеграл расходится.

8. Вычисление площадей фигур, ограниченных заданными кривыми:

1) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+4x,\ y=0$.

Решение

$y=0$ – уравнение оси Ox, а уравнение $y=-x^2+4x$ задает параболу. Абсциссы точек пересечения этой параболы с осью Ox равны 0 и 4. Искомая площадь заштрихована на рис. 11. Она ограничена сверху параболой, снизу осью Ox. Поэтому, применяя формулу для нахождения площади (см. прил. 10), запишем

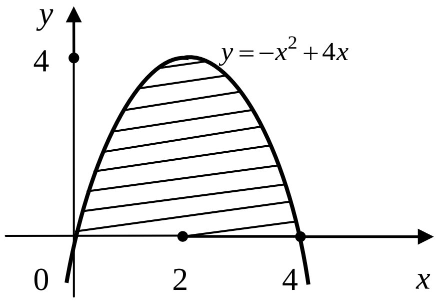


Рис. 11

$$S=\int_0^4(-x^2+4x)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_0^4=-\frac{64}{3}+32=10\frac{2}{3}\ \left(\text{ед.}^2\right);$$

2) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^3,\ y=\sqrt{x}$.

Решение

Решая уравнение $x^3=\sqrt{x}$, найдем абсциссы точек пересечения кривых: $x_1=0$ и $x_2=1$. Криволинейная трапеция, ограниченная заданными кривыми, изображена на рис. 12. Сверху она ограничена графиком функции $y=\sqrt{x}$, снизу – графиком $y=x^3$.

Найдем искомую площадь, применив соответствующую формулу (см. прил. 10). Получим

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx-\int_0^1 x^3dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1-\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1=\frac{2}{3}-0-\left(\frac{1}{4}-0\right)=\frac{5}{12}\left(\text{ед.}^2\right).$$

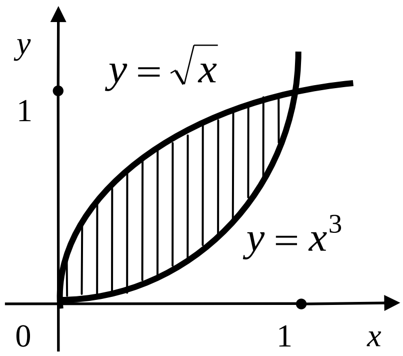


Рис. 12

9. Вычисление объемов тел, полученных вращением вокруг оси Ox фигур из задачи 8.

Решение:

1) для нахождения объема воспользуемся соответствующей формулой (см. прил. 10). Итак,

$$V=\pi\int_0^4\left(-x^2+4x\right)^2dx=\pi\int_0^4\left(x^4-8x^3+16x^2\right)dx=$$

$$=\pi\left(\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^4-2x^4\Big|_0^4+\frac{16}{3}x^3\Big|_0^4\right)=\pi\cdot 4^4\left(\frac{4}{5}-2+\frac{4}{3}\right)=256\cdot\frac{2}{15}\pi=34\frac{2}{15}\pi\text{ (ед.}^3\text{)};$$

2) применив формулу для нахождения требуемого объема (см. прил. 10), получим

$$V=\pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^3\right)^2\right]dx=\pi\int_0^1\left(x-x^6\right)dx=\pi\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^7}{7}\right)\right|_0^1=\frac{5\pi}{14}\text{ (ед.}^3\text{)}.$$

5.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Вычислите интегралы, используя таблицу основных интегралов и свойства интеграла.

1) $\int\left(2-\frac{1}{x^3}+\frac{5}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$; 2) $\int_1^4\left(6x+\frac{8}{x^2}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int\left(2e^x-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$; 4) $\int\left(3\sin x+7^x+\frac{1}{x^2-25}\right)dx$;

5) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$; 6) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$;

7) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$.

2. Вычислите интегралы, используя метод поднесения под знак дифференциала или замену переменной.

1) $\int\frac{\ln x}{x}dx$; 2) $\int\sin(3x-4)dx$; 3) $\int(2x+3)^{2015}dx$;

4) $\int\frac{5x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$; 5) $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt[4]{5x+1}}$; 6) $\int_0^2\frac{7-2x}{\sqrt{x^2+5}}dx$;

7) $\int_0^{1/2}\frac{5xdx}{\left(1-x^2\right)^3}$; 8) $\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$; 9) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;

10) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; 11) $\int 5e^{x^5}x^4dx$; 12) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$;

13) $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3. Вычислите интегралы, используя метод интегрирования по частям.

1) $\int xe^{-4x}dx$; 2) $\int_1^e x\ln x dx$; 3) $\int x\sin 4x dx$; 4) $\int x2^x dx$;

5) $\int \arcsin x dx$; 6) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos x dx$; 7) $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x dx$.

4. Вычислите интегралы от рациональных функций.

1) $\int \frac{(2x+1)dx}{3x-2x^2}$; 2) $\int \frac{(4x-1)dx}{x^2+x+1}$; 3) $\int_1^2 \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$;

4) $\int \frac{x^3dx}{(x-1)^2(x+1)}$; 5) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+x+1)}dx$.

5. Вычислите интегралы от иррациональных функций.

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$; 2) $\int_0^{26} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

6. Вычислите интегралы от тригонометрических функций.

1) $\int \cos^3 x dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$; 3) $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$;

4) $\int_0^{\pi} \sin^3 x\cos x dx$; 5) $\int \operatorname{ctg} x dx$; 6) $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$;

7) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$; 8) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$; 9) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$;

10) $\int \frac{2-3\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx$.

7. Выполните следующее:

а) для заданных кривых найдите площади фигур, ограниченных этими линиями;

б) найдите объемы тел, полученных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных этими линиями:

1) $y^2=4x,\ x=0,\ x=4,\ y=0,\ (y\ge 0)$;

2) $y = e^x,\ y = 1,\ x = 1;$

3) $y = x^2 - 3x,\ y = -2.$

Ответы

1.

1) $\frac{25}{2}\sqrt[5]{x^2}+\frac{1}{2x^2}+2x+C$; 2) 45; 3) $2e^x-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$;

4) $-3\cos x+\frac{7^x}{\ln 7}+\frac{1}{10}\lg\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$; 5) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)+\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$;

6) $\ln|x|+\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 7). $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2.

1) $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$; 2) $-\frac{1}{3}\cos(3x-4)+C$; 3) $\frac{(2x+3)^{2016}}{4032}+C$;

4) $\frac{5}{3}\arcsin(x^3)+C$; 5) $\frac{28}{15}$; 6) $2\sqrt{5}-6+\frac{7\ln 5}{2}+C$;

7) $\frac{35}{36}$; 8) $\frac{1}{2}\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$; 9) $\ln|\arcsin x|+C$;

10) $\frac{\pi^2}{32}$; 11) $e^{x^5}+C$; 12) $\frac{\pi}{12}$;

13) $2e^{\sqrt{x}}+C$.

3.

1) $-\frac{1}{4}xe^{-4x}-\frac{1}{16}e^{-4x}+C$; 2) $\frac{1+e^2}{4}$; 3) $\frac{\sin(4x)}{16}-\frac{x\cos(4x)}{4}+C$;

4) $\frac{2^x x}{\ln 2}-\frac{2^x}{\ln^2 2}+C$; 5) $\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x+C$; 6) $\frac{\pi^2}{2}-4$;

7) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

4.

1) $\frac{1}{3}\ln\frac{|x|}{(2x-3)^4}+C$; 2) $2\ln(x^2+x+1)-2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

3) $\frac{3}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 5-\ln 2$; 4) $x+\frac{1}{2(1-x)}+\frac{5}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C$;

5) $-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+2\ln|x|-3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

5.

1) $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C$; 2) $6+\ln 8$;

3) $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$; 4) $10-16\ln 2$;

5) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{3-4x}{5}+C$; 6) $\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C$.

6.

1) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $x-\sin x+C$;

4) 0; 5) $\ln\left|\sin(x)\right|+C$; 6) $\frac{\pi}{2}$; 7) $\frac{1}{3\cos^3 x}+C$;

8) $\frac{5}{6}(\mathrm{tg}\,x)^{6/5}+C$; 9) $\mathrm{tg}\,x-x+C$; 10) $2(\mathrm{ctg}\,x)^{3/2}-2\,\mathrm{ctg}\,x+C$.

7.

1) а) $10\frac{2}{3}$; б) 32π; 2) а) $e-2$; б) $\frac{\pi}{2}(e^2-3)$; 3) а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{7\pi}{10}$.

5.4. ТЕСТОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по теме
«Интегральное исчисление функции одной переменной»

I вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(\frac{1}{x}+3x^3+2\cos 2x\right)dx$.

1) $2\ln\lvert x\rvert+x^3+\sin 2x+C$;	2) $\ln\lvert x\rvert+x^4+\sin 2x+C$;
3) $\ln\lvert 2x\rvert+x^4+\sin 3x+C$;	4) $\ln x^3+x+\sin x+C$.

2. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1) $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C$;	2) $\arcsin(2x)+C$;
3) $(\arcsin x)^2+C$;	4) $\arcsin x+C$.

3. $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x dx$.

1) 0;	2) –1;	3) 2;	4) 1.

4. $\int\limits_{3/5}^{6/5}\frac{x}{\sqrt{5x-2}}dx$.

1) $\frac{75}{26}$;	2) $\frac{76}{25}$;	3) $\frac{26}{75}$;	4) $\frac{25}{76}$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми: $y=-x+3,\ x=0,\ x=3,\ y=0$.

1) $\frac{9}{2}$;	2) 1;	3) $\frac{2}{9}$;	4) $\frac{9}{3}$.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) 9;	2) 1;	3) 9π;	4) $\frac{9}{2}\pi$.

II вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int \left(2 + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + 2e^{2x} \right) dx$.

1) $x + \sqrt[3]{x} + 2e^{2x} + C$;	2) $2 + 9\sqrt[3]{x^5} + e^{\sqrt{x}} + C$;
3) $2x + 9\sqrt[3]{x^2} + e^{x} + C$;	4) $2x + 9\sqrt[3]{x} + e^{2x} + C$.

2. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$.

1) $2\pi - \sqrt{3}$;	2) $\frac{3\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$;	3) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$;	4) $\frac{2\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

1) $2\pi - \sqrt{3}$;	2) $\ln \frac{1}{2}$;	3) $\log_3 4$;	4) $\ln \frac{4}{3}$.

4. $\int \sin^2 x \cos x dx$.

1) $\frac{\sin^3 x}{3} + C$;	2) $3\sin^3 x + C$;	3) $\frac{\sin^2 x}{2} + C$;	4) $2\cos 2x + C$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$.

1) $\ln 2$;	2) $\ln 4$;	3) $\ln 3$;	4) 2.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) 3;	2) 1;	3) 3π;	4) $\frac{3}{4}\pi$.

III вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(3x^2+\frac{8}{x^5}-\frac{3}{\cos^2 3x}\right)dx$.

1) $x^3-\frac{2}{x^3}-\operatorname{tg}(3x)+C$;	2) $x^4-\frac{2}{x^4}-\operatorname{tg}(4x)+C$;
3) $x^3-\frac{2}{x^4}-\operatorname{tg}(3x)+C$;	4) $x^3+\frac{2}{x^4}+\operatorname{tg}(3x)+C$.

2. $\int_1^e x^3\ln x dx$.

1) $1+3e^3$;	2) $\frac{1}{16}\left(1+3e^4\right)$;	3) $\frac{1}{4}\left(1+3e^{16}\right)$;	4) $\frac{1}{3}\left(1+16e^4\right)$.

3. $\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg} x dx$.

1) $\frac{\ln 2}{2}$;	2) $2\ln 2$;	3) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2$;	4) 1.

4. $\int\frac{x^2+x}{x^2-1}dx$.

1) $(x-1)\ln\lvert x\rvert+C$;	2) $x-1+\ln\lvert x\rvert+C$;
3) $x+\ln\lvert x-1\rvert+C$;	4) $x\cdot\ln\lvert x-1\rvert+C$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

1) $\frac{1}{2}$;	2) 1;	3) 2;	4) $\frac{1}{3}$.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) $\frac{3}{10}\pi$;	2) $\frac{3}{10}$;	3) $\frac{9}{70}\pi$;	4) $\frac{3}{4}$.

IV вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(4x^3+8\sqrt[5]{x^3}+5\sin 5x\right)dx$.

1) $8\sqrt[5]{x^8}+x^3-\cos 5x+C$;	2) $5\sqrt[8]{x^5}+x^4+\cos 5x+C$;
3) $5\sqrt[5]{x^8}+x^4+\sin 5x+C$;	4) $5\sqrt[5]{x^8}+x^4-\cos 5x+C$.

2. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$.

1) $1-\frac{2}{e}$;	2) $\frac{1}{e}-2$;	3) $e-2$;	4) $1-\frac{e}{2}$.

3. $\int\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

1) $\ln\left\lvert\frac{1}{x}\right\rvert+\cos\frac{1}{x}+C$;	2) $\ln\left\lvert\frac{1}{x}\right\rvert+\cos x+C$;	3) $\ln x+\cos x+C$;	4) $\ln\lvert x\rvert+\cos\frac{1}{x}+C$.

4. $\int\limits_1^4\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

1) $\frac{9}{4}+\ln 1$;	2) $1+\ln\frac{9}{4}$;	3) $1+\ln\frac{4}{9}$;	4) $\ln 9+\ln 4$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y^2=4x,\ \ y=x$.

1) $\frac{3}{8}$;	2) $\frac{8}{3}$;	3) $\frac{4}{5}$;	4) $\frac{5}{4}$.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) $\frac{2}{3}\pi$;	2) $\frac{3}{10}$;	3) $10\frac{2}{3}\pi$;	4) $2\frac{2}{15}\pi$.

V вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int \left(5x^4 - \frac{4}{x^5} + 3e^{3x}\right)dx$.

1) $x^4 - \frac{1}{x^5} + e^{3x} + C$;	2) $x^3 + \frac{1}{x^4} + e^{5x} + C$;
3) $x^5 + \frac{1}{x^4} + e^{3x} + C$;	4) $5x^5 - \frac{4}{x^4} + 3e^{3x} + C$.

2. $\int_0^2 x\cos(2-x)dx$.

1) $1-\cos 2$;	2) 0;	3) $2\cos 2$;	4) 2.

3. $\int \frac{2dx}{x(x+1)(x+2)}$.

1) $\ln\lvert x\rvert + \ln\lvert x+1\rvert + \ln\lvert x+2\rvert + C$;	2) $\ln\frac{\lvert x^2+2x\rvert}{(x+1)^2} + C$;
3) $\ln\lvert x\rvert - \ln\lvert x+1\rvert + \ln\lvert x+2\rvert + C$;	4) $\ln\frac{(x+1)^2}{\lvert x^2+2x\rvert} + C$.

4. $\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^2 x dx$.

1) π;	2) $\frac{\pi}{2}$;	3) $\frac{2}{\pi}$;	4) $\frac{\pi}{8}$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$.

1) 2;	2) 1;	3) 0;	4) 3.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) $\frac{\pi^2}{2}$;	2) $\frac{\pi}{2}$;	3) $\frac{\pi}{4}$;	4) π.

VI вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(7x^6-11\sqrt[9]{x^2}+\frac{4}{\sin^2 4x}\right)dx$.

1) $7x^7-11\sqrt[9]{x^{11}}+4\operatorname{ctg}4x+C$;	2) $x^7-9\sqrt[9]{x^{11}}-\operatorname{ctg}4x+C$;
3) $x^5-11\sqrt[11]{x^9}-\operatorname{tg}4x+C$;	4) $7x^7-9\sqrt[9]{x^{11}}+\operatorname{tg}4x+C$.

2. $\int x\arcsin x dx$.

1) $\sqrt{1-x^2}+\left(2x^2-1\right)\arcsin x+C$;	2) $\left(2x^2-1\right)\cdot x+\sqrt{1-x^2}\cdot\sin x+C$;
3) $\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x\right)+C$;	4) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{1-x^2}\cdot x+\left(2x^2-1\right)\arcsin x\right)+C$.

3. $\int\limits_0^1 x^2 5^{x^3}dx$.

1) $\frac{4}{3\ln 5}$;	2) $\frac{3}{4\ln 5}$;	3) $\frac{5}{3\ln 4}$;	4) $\frac{4}{5\ln 3}$.

4. $\int\limits_1^2 \sqrt[3]{2x-3}dx$.

1) 1;	2) $\arcsin 4{,}5$;	3) $\frac{3}{4}$;	4) $\frac{45}{8}$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y=e^x,\ x=0,\ y=0,\ x=1$.

1) $1-e$;	2) e;	3) $e-1$;	4) $e-2$.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) $\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$;	2) $\frac{\pi}{2}(e-1)$;	3) $e-1$;	4) e^2-1.

VII вариант

В заданиях 1 – 4 вычислите определенные или неопределенные интегралы.

1. $\int\left(7\sqrt[6]{x}-\frac{4}{x^5}+3^{2x}\right)dx$.

1) $7\sqrt[6]{x}-\frac{4}{x^5}+3^{2x}+C$;	2) $7\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{x^4}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$;
3) $6\sqrt[6]{x^7}+\frac{1}{x^4}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$;	4) $6\sqrt[7]{x^6}-\frac{2}{x^3}+9^x+C$.

2. $\int\limits_1^e \frac{\ln^5 x}{x}dx$.

1) $\ln^6 e$;	2) 2;	3) $\ln e$;	4) $\frac{1}{6}$.

3. $\int\limits_0^{\pi} \cos^3 x \sin^{10} x dx$.

1) 0;	2) π;	3) 1;	4) $\frac{\pi}{2}$.

4. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$.

1) $\ln\lvert x-2\rvert-\ln\lvert x-3\rvert+C$;	2) $\ln\lvert x-4\rvert-\ln\lvert x-2\rvert-\ln\lvert x-3\rvert+C$;
3) $\ln\frac{(x-2)^2}{\lvert x-3\rvert}+C$;	4) $\ln\left\lvert\frac{x-3}{x-2}\right\rvert+C$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y=x^2$, $y=x$.

1) 1;	2) $\frac{1}{6}$;	3) $\frac{1}{3}$;	4) 3.

6. Найдите объем тела, полученный вращением фигуры из задачи 5 вокруг оси Ox.

1) $\frac{\pi}{15}$;	2) $\frac{2}{15}\pi$;	3) $\frac{\pi}{30}$;	4) 1.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

Таблица П.1.1

Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция (б.м.ф.) при $x \to a$, тогда			
1	$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	7	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
2	$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	8	$\ln\cos\alpha(x) \sim -\frac{1}{2}(\alpha(x))^2$
3	$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	9	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
4	$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	10	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$
5	$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{1}{2}(\alpha(x))^2$	11	$(1+\alpha(x))^{\mu} - 1 \sim \mu \cdot \alpha(x)$
6	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{1}{\ln a} \cdot \alpha(x)$		

2. Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

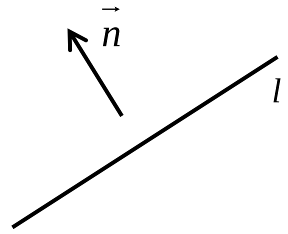
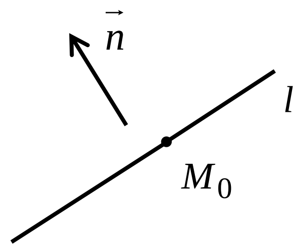
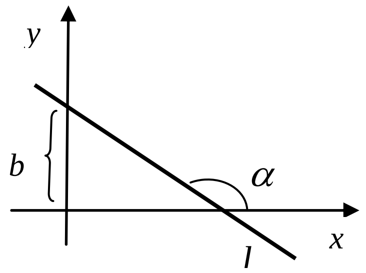
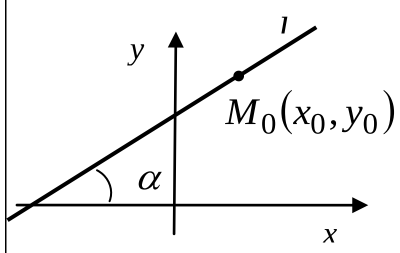
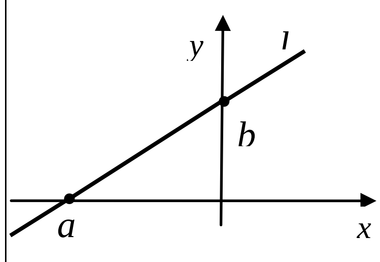
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$; при $a = e$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

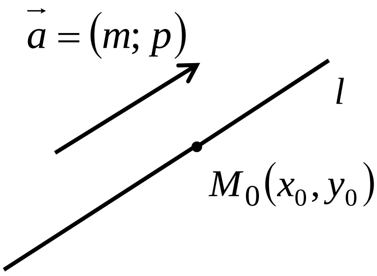
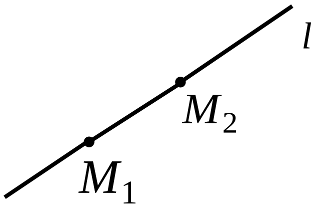
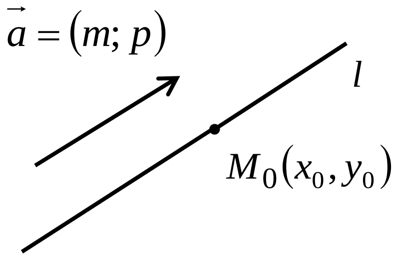
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$; при $a = e$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$.

3. Виды уравнения прямой на плоскости

Таблица П.3.1

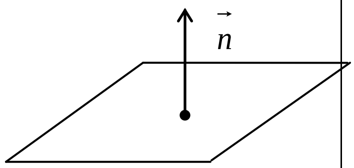
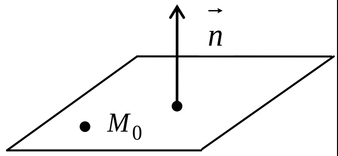
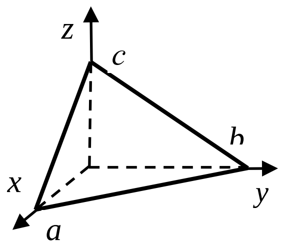
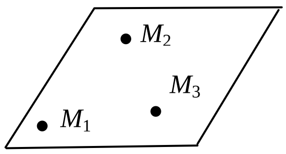
№	Вид уравнения	Уравнение	Рисунок
1	Общее уравнение прямой	$Ax + By + C = 0$, $\vec{n} = (A;\ B)$ –вектор нормали (перпендикулярный прямой l)	
2	Уравнение прямой с вектором нормали $\vec{n}$, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, $\vec{n} = (A;\ B)$	
3	Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y = kx + b$, $k = \mathrm{tg}\,\alpha$ – угловой коэффициент	
4	Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$	$y - y_0 = k(x - x_0)$, $k = \mathrm{tg}\,\alpha$ – угловой коэффициент	
5	Уравнение прямой «в отрезках»	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a, b – величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях Ox и Oy соответственно	

Окончание табл. П.3.1

6	Каноническое уравнение прямой	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{p}$, $\vec{a}=(m;\,p)$ – направляющий вектор прямой	
7	Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$	
8	Параметрические уравнения прямой	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+pt, \end{cases}$ $\vec{a}=(m;\,p)$ – направляющий вектор прямой, $t\in\mathbb{R}$,	

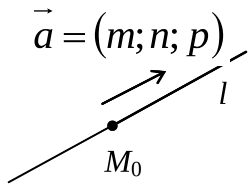
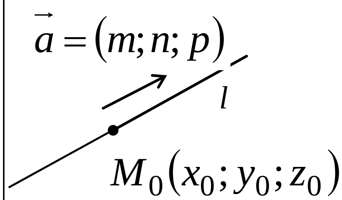
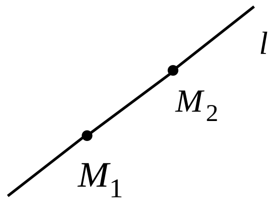
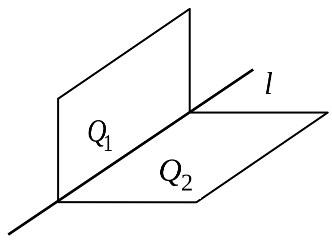
4. Виды уравнения плоскости

Таблица П.4.1

№	Вид уравнения	Уравнение	Рисунок
1	Общее уравнение плоскости	$Ax+By+Cz+D=0$, $\vec{n}=(A;\,B;C)$ – вектор, перпендикулярный плоскости	
2	Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n}=(A;B;C)$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	
3	Уравнение плоскости «в отрезках»	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, a,b,c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях Ox,Oy и Oz соответственно	
4	Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	

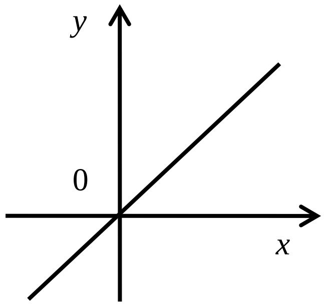
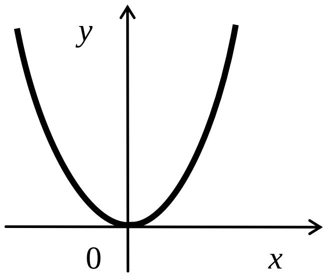
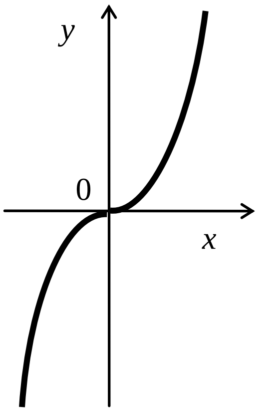
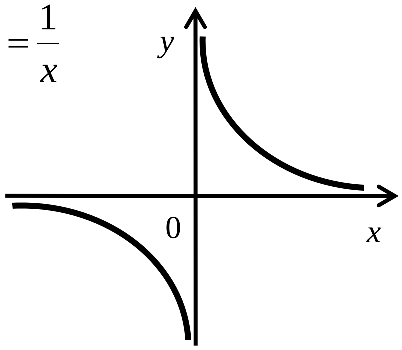
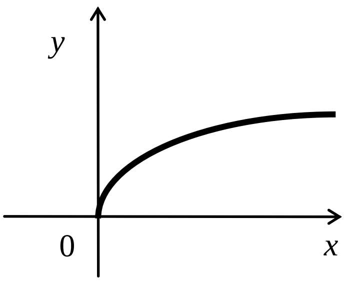
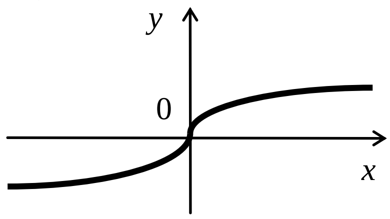
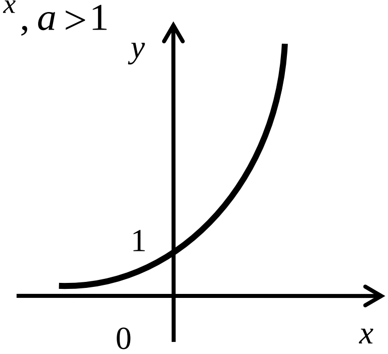
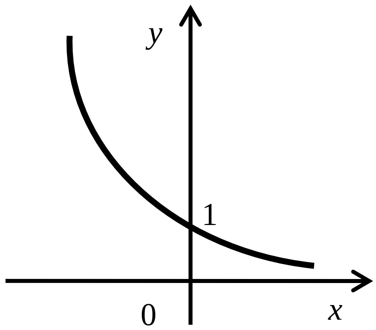
5. Виды уравнения прямой в пространстве

Таблица П.5.1

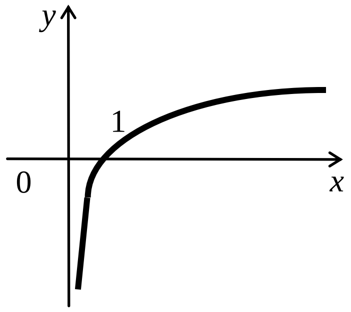
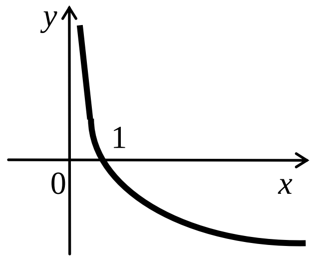
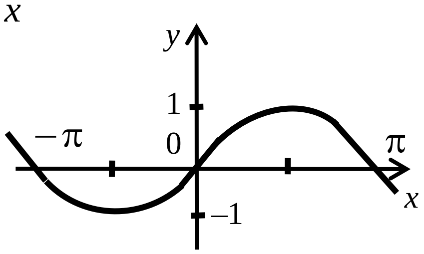
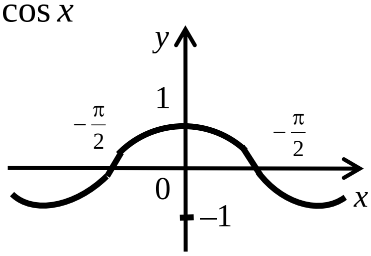
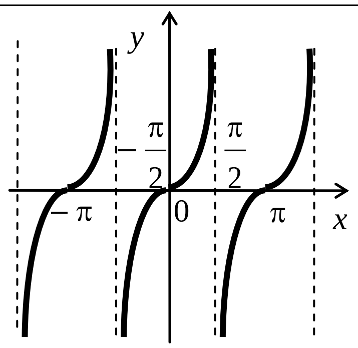
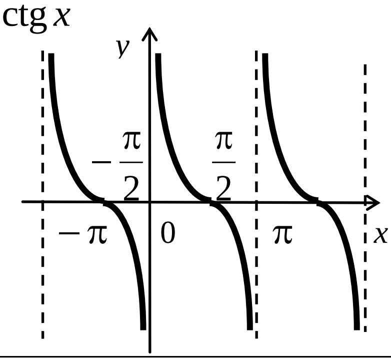
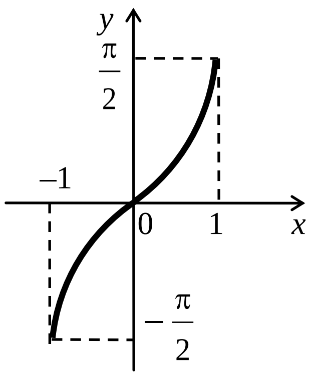
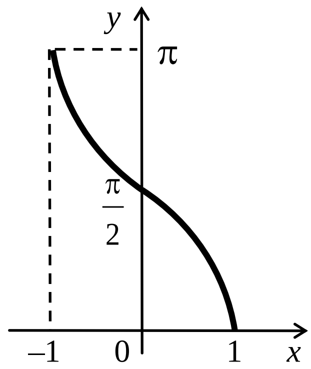
№	Вид уравнения	Уравнение	Рисунок
1	Канонические уравнения	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, где $\vec{a}=(m;n;p)$ – направляющий вектор прямой; $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка прямой	
2	Параметрические уравнения прямой	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$ $\vec{a}=(m;n;p)$ – направляющий вектор; $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка прямой, $t\in\mathbb{R}$	
3	Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	
4	Уравнения прямой как линии пересечения двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	

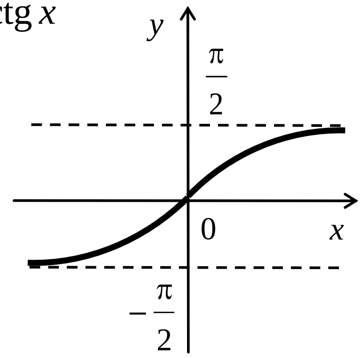
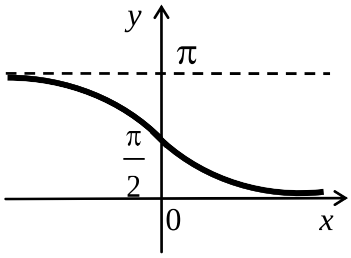
6. Графики основных элементарных функций

Таблица П.6.1

№ п/п	Функция/График	№ п/п	Функция/График
1	$y = x$ 	2	$y = x^2$ 
3	$y = x^3$ 	4	$y = \frac{1}{x}$ 
5	$y = \sqrt{x}$ 	6	$y = \sqrt[3]{x}$ 
7	$y = a^x, a > 1$ 	8	$y = a^x, 0 < a < 1$ 

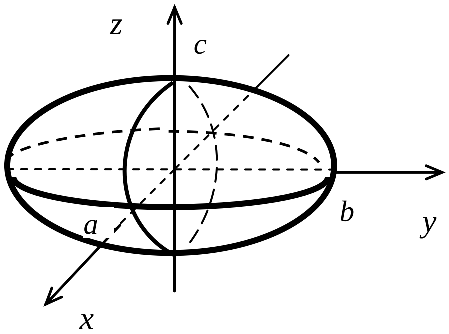
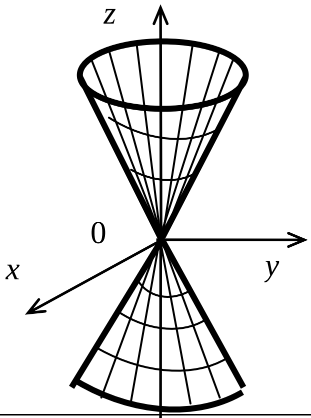
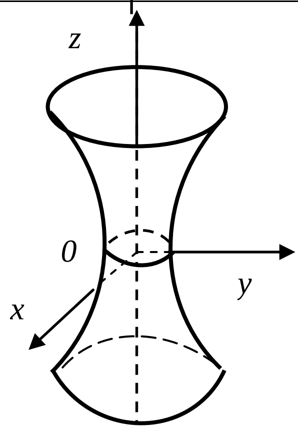
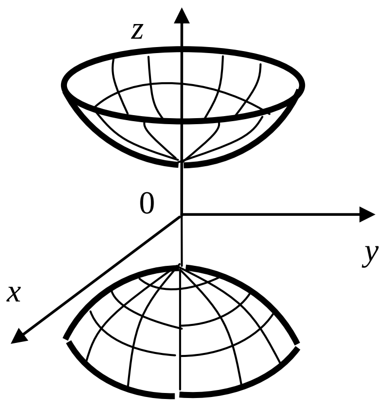
Окончание табл. П.6.1

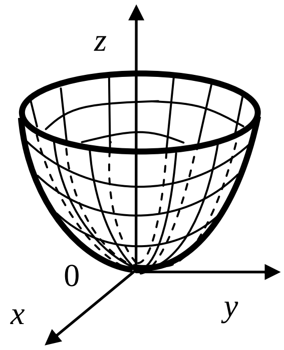
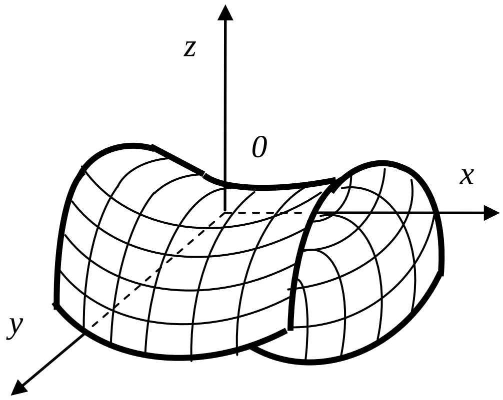
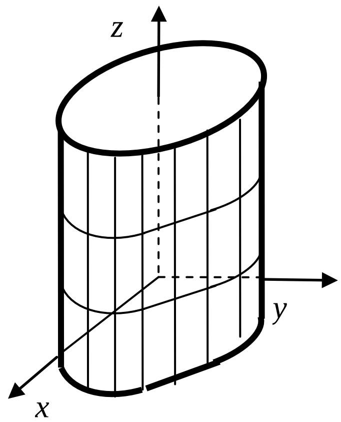
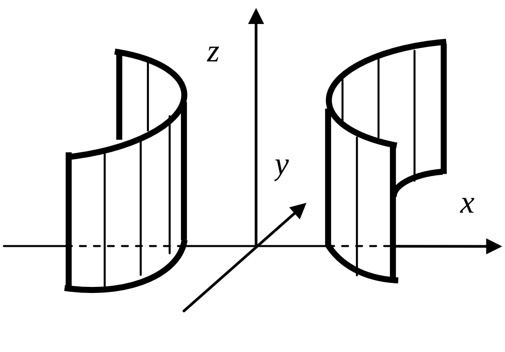
9	$y = \log_a x, a > 1$ 	10	$y = \log_a x, 0 < a < 1$ 
11	$y = \sin x$ 	12	$y = \cos x$ 
13	$y = \mathrm{tg}\, x$ 	14	$y = \mathrm{ctg}\, x$ 
15	$y = \arcsin x$ 	16	$y = \arccos x$ 

17	$y = \operatorname{arctg} x$ 	18	$y = \operatorname{arcctg} x$ 

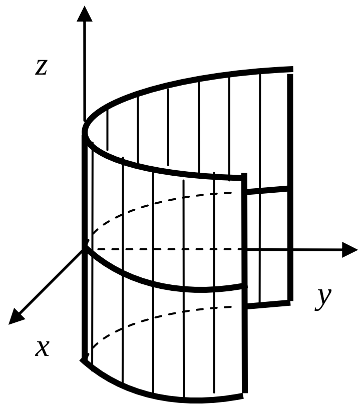
7. Поверхности второго порядка

Таблица П.7.1

№	Название поверхности	Канонические уравнения	Чертеж
1	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0, b>0, c>0)$	
2	Конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $(a>0, b>0, c>0)$	
3	Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>0, b>0, c>0)$	
4	Двуполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ $(a>0, b>0, c>0)$	

5	Эллиптический параболоид	$\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$ $(p>0, q>0)$	
6	Гиперболический параболоид	$\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$ $(p>0, q>0)$	
7	Эллиптический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$	
8	Гиперболический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$	

Окончание табл. П.7.1

9	Параболический цилиндр	$x^2 = 2py$ $(p > 0)$	

8. Таблица основных интегралов

Таблица П.8.1

1	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$	7	$\int e^{u} du = e^{u} + C$
2	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	8	$\int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq 1$
3	$\int \sin u du = -\cos u + C$	9	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C$
4	$\int \cos u du = \sin u + C$	10	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C,\ a \neq 0$
5	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	11	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C, a \neq 0$
6	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$	12	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + a}\right\rvert + C,\ a \neq 0$

9. Формулы, используемые при интегрировании

1. Свойство линейности:

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx,$$

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

2. Метод замены переменной (подстановки):

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(x)dx, \qquad (П.9.1)$$

здесь $x=\varphi(t)$ ($d\varphi(t)=\varphi'(t)dt$);

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int_a^b f(x)dx, \qquad (П.9.2)$$

здесь $x=\varphi(t), \varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$.

Формулы (П.9.1) – (П.9.2) можно использовать как слева направо, так и справа налево. При использовании слева направо их называют формулами поднесения под знак дифференциала.

3. Формулы интегрирования по частям:

$$\int udv=uv-\int vdu,$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

4. Формулы понижения степени:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

5. Формула синуса двойного угла:

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

6. Формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ – любая первообразная непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$;

7. Свойства интегралов от четной и нечетной функций по симметричному отрезку:

1) если $f(x)$ – нечетная функция, интегрируемая по симметричному отрезку $[-a,a]$, то

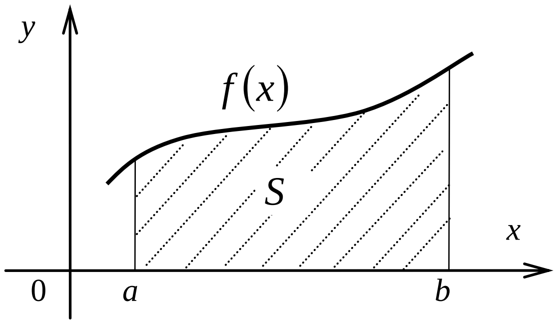
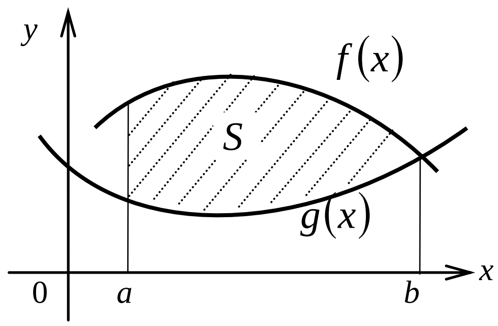
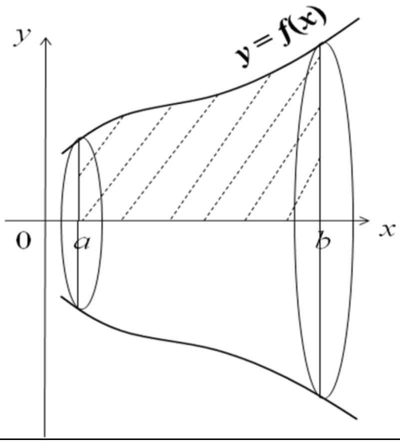
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0;$$

2) если $f(x)$ – четная функция, интегрируемая по симметричному отрезку $[-a, a]$, то

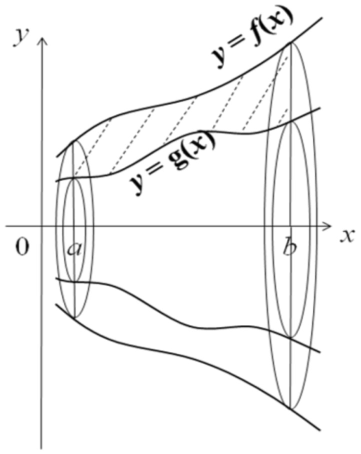
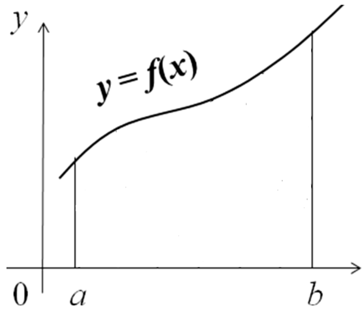
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

10. Приложения определенного интеграла

Таблица П.10.1

Площадь плоской фигуры	
$S = \int_{a}^{b} f(x)dx$	
$S = \int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]dx$	
Объем тела вращения	
$V = \pi\int_{a}^{b} f^2(x)dx$	

Окончание табл. 10.1

$V=\pi\int\limits_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$	
Длина дуги кривой	
$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$	

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1. / Д. Т. Письменный. –М. : Айрис-пресс, 2005. – 288 с.

3. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М. : Астрель, 2003. – 656 с.

4. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 432 с.

5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 616 с.

6. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие для студентов втузов. В 5 ч. Ч. 1 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – 223 с.

7. Жевняк, Р. М. Высшая математика : учеб. пособие для студентов втузов. В 5 ч. Ч. 2 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1985. – 223 с.

8. Высшая математика : учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 391 с.

9. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.– 560 с.

10. Задачи и упражнения по математическому анализу : учеб. пособие для втузов / Г. С. Бараненков [и др.] ; ред. Б. П. Демидович. – М. : Интеграл-пресс, 1997. – 416 с.

11. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для втузов. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Выш. шк., 1986. – 304 с.

12. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис-пресс, 2003. – 576 с.

13. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 416 с.

14. Высшая математика: задачник : учеб. пособие / Е. А. Ровба [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 319 с.

15. Воднев, В. Т. Основные математические формулы: справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; ред. Ю. С. Богданов. – Минск : Выш. шк., 1988. – 269 с.

16. Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 640 с.

Св. план 2015, резерв

Учебное издание

Черняк Жанна Альбертовна
Князюк Наталья Владимировна
Фомичева Людмила Александровна и др.

КОМПЛЕКС ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ В 2-Х ЧАСТЯХ

Часть 1

ПОСОБИЕ

Редактор *Е. И. Герман*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *А. В. Савинова*

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л. 9,6. Тираж 200 экз.
Заказ 271

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ № 02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП № 02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки,