

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра физики

Н. В. Горячун

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ

для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения

Минск 2007

УДК 53 (075)
ББК 22.3 я 7
Г 71

Р е ц е н з е н т

доц. кафедры физики БГУИР, канд. физ.-мат. наук В. И. Мурзов

Горячун, Н. В.

Г 71 Курс лекций по физике для студ. экон. спец. заоч. формы обуч./
Н. В. Горячун. – Минск : БГУИР, 2007. – 92 с. : ил.
ISBN 978-985-488-160-7

В данном учебном издании, предназначенном для студентов экономических специальностей заочной формы обучения, кратко и доступно изложены вопросы основных разделов курса общей физики в соответствии с учебными планами экономических специальностей заочного факультета.

Цель издания – помочь студентам-заочникам при выполнении контрольных работ, а также подготовке к теоретическому зачету и экзамену по курсу общей физики.

**УДК 53 (075)
ББК 22.3 я 7**

ISBN 978-985-488-160-7

© Горячун Н. В., 2007
© УО «Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники», 2007

ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса физики способствует развитию у студентов физического мышления, формированию научного представления о современной физической картине мира. Все это имеет большое методологическое значение и создает основу для успешного изучения специальных дисциплин.

Физика – это наука о наиболее общих формах движения материи (механических, тепловых, электромагнитных и т.д.) и их взаимных превращениях. Формы движения – способ существования материи, это любой процесс, происходящий с материей. Материя существует в виде вещества и в виде поля.

Различные виды материи могут превращаться друг в друга.

Физические законы устанавливаются на основе обобщения опытных фактов и выражают объективные закономерности, существующие в природе. Эти законы формулируются в виде количественных соотношений между различными величинами.

Физическая теория включает в себя систему основных идей, положений, законов и гипотез о возникновении, строении и развитии мира.

Раздел 1. МЕХАНИКА

Механика – раздел физики, в котором изучается механическое движение и равновесие тел.

Движением в механике называют изменение положения тел в пространстве с течением времени относительно других тел.

Механику разделяют на *классическую* и *квантовую*.

Классическая нерелятивистская механика рассматривает движение макроскопических тел, движущихся со скоростями, гораздо меньшими скорости света в вакууме: $v \ll c$ ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Классическая релятивистская механика (теория относительности) изучает движение макроскопических тел со скоростями, близкими к скорости света в вакууме: $v \sim c$.

Квантовая механика изучает движение микрочастиц (молекул, атомов, электронов, протонов и т.д.). Квантовая механика также подразделяется на релятивистскую $v \sim c$ и нерелятивистскую $v \ll c$.

В классической механике основные представления связаны с пространством и временем, причем они рассматриваются независимыми друг от друга, абсолютными и неизменными.

В релятивистской механике пространство, и время относительны.

Классическая механика состоит из трех основных разделов: статики, кинематики и динамики.

Статика рассматривает законы сложения сил и условия равновесия тел.

Кинематика рассматривает движение тел без учета причин, вызывающих это движение.

Динамика рассматривает движение тел с учетом причин, вызывающих это движение, т.е. с учетом действующих на них сил.

Для описания реально движущихся тел в механике пользуются различными упрощенными моделями: материальная точка, абсолютно твердое тело, абсолютно упругое тело и т.д.

Материальная точка (м.т.) – тело произвольной массы, размерами и формой которого в данной задаче можно пренебречь.

Глава 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Для описания движения материальной точки (тела) необходимо ввести систему отсчёта.

Системой отсчёта называют систему координат, жестко связанную с телом отсчета, и неподвижные относительно тела отсчета часы.

Наиболее употребительна прямоугольная декартова система координат, ортонормированный базис которой образован тремя единичными взаимно перпендикулярными векторами: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ (рис. 1).

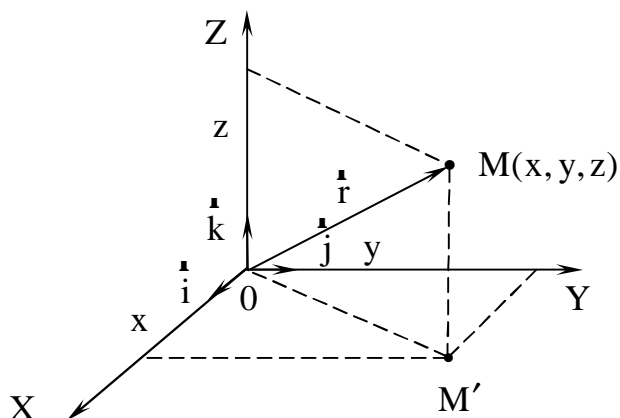


Рис. 1

Положение точки в этой системе определяется радиусом-вектором, проведённым из начала координат в рассматриваемую точку.

По определению

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1.1)$$

где x, y, z – проекции \mathbf{r} на координатные оси или координаты точки M .

Модуль радиуса-вектора $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. (1.1')

Движение м.т. можно полностью описать, задав её положение в любой момент времени относительно выбранной системы отсчёта, т.е. если известны $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ или

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t). \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется *кинематическим законом движения материальной точки*.

Траектория – линия, описываемая в пространстве движущейся точкой. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движение точки. Движение точки называется *плоским*, если её траектория целиком лежит в одной плоскости.

1.1. Линейные кинематические величины

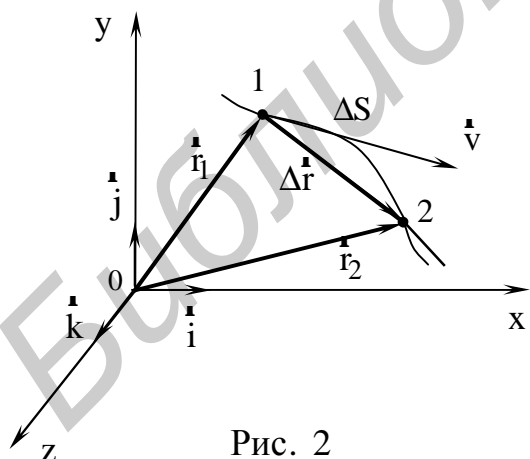


Рис. 2

Пусть м.т. за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ переместилась по криволинейной траектории из точки 1 в точку 2. Тогда $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ – вектор перемещения м.т. за время Δt (рис. 2).

Перемещение м.т. в единицу времени называется *мгновенной скоростью точки*, т.е.

$$\dot{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{\&}. \quad (1.3)$$

Вектор $\dot{\mathbf{v}}$ всегда направлен по касательной к траектории движения.

Если ΔS – путь, пройденный точкой за время Δt , тогда модуль мгновенной скорости равен

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \mathcal{S}. \quad (1.4)$$

Ускорение материальной точки равно

$$\mathbf{\ddot{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \dot{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt} = \mathbf{\ddot{v}} = \mathbf{\ddot{r}}. \quad (1.5)$$

Из (1.3), (1.5) и (1.4) интегрированием можно найти

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \dot{\mathbf{v}}(t) dt, \quad (1.6)$$

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{v}}_0 + \int_0^t \mathbf{\ddot{r}}(t) dt, \quad (1.7)$$

$$S(t) = \int_0^t v(t) dt, \quad (1.8)$$

где \mathbf{r}_0 и $\dot{\mathbf{v}}_0$ – соответственно радиус-вектор и скорость м.т. в начальный момент времени $t_0 = 0$.

По аналогии с (1.1) и (1.1') $\dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{\ddot{r}}$ и их модули можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\mathbf{\ddot{r}} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Рассмотрим движение м.т. М по кривой, лежащей в одной плоскости (плоской кривой) (рис. 3). Вектор $\mathbf{\ddot{r}}$ характеризует быстроту изменения вектора скорости материальной точки как по модулю, так и по направлению. Следовательно, при движении м.т. по плоской кривой его можно разложить на две составляющие $\mathbf{\ddot{a}}_n$ и $\mathbf{\ddot{a}}_\tau$, причём $\mathbf{\ddot{a}}_n$ характеризует изменение скорости по направлению, а $\mathbf{\ddot{a}}_\tau$ – по модулю скорости, при этом $\mathbf{\ddot{a}}_\tau$ называют *тангенциальным ускорением*, $\mathbf{\ddot{a}}_n$ – *нормальным ускорением*:

$$\mathbf{\ddot{a}}_\tau = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{\ddot{a}}_n = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}, \quad (1.10)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} – единичные взаимно ортогональные векторы, направленные по касательной и нормали к кривой в данной точке; R – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке.

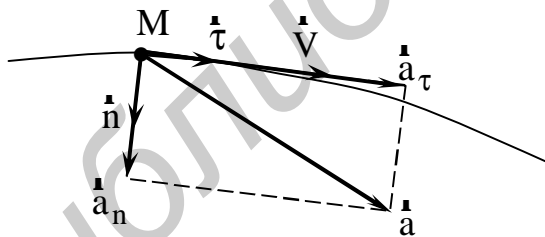


Рис. 3

$$\text{Ускорение точки равно } \mathbf{\ddot{a}} = \mathbf{\ddot{a}}_\tau + \mathbf{\ddot{a}}_n. \quad (1.11)$$

Если $a_n = 0$, то движение прямолинейное.

Если $a_\tau = 0$, то движение равномерное.

1.2. Угловые кинематические величины

Пусть м.т. движется по окружности радиусом R вокруг неподвижной оси

Z (рис. 4), $\Delta\phi$ – угловой путь, пройденный м.т. за время Δt . Тогда угловая скорость точки равна

$$\overset{\mathbf{r}}{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\overset{\mathbf{r}}{\phi}}{\Delta t} = \frac{d\overset{\mathbf{r}}{\phi}}{dt} = \frac{\overset{\mathbf{r}}{v}}{\overset{\mathbf{r}}{R}}, \quad (1.12)$$

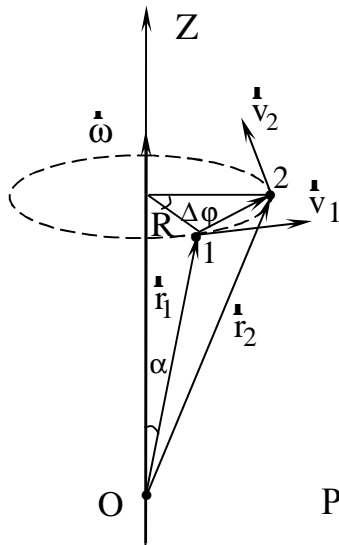


Рис. 4

где $\Delta\overset{\mathbf{r}}{\phi}, \overset{\mathbf{r}}{\omega}$ – псевдовекторы. Псевдовекторы – это векторы, направление которых связывается с направлением вращения точки правилом правого винта. Угловое ускорение точки равно

$$\overset{\mathbf{r}}{\epsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\overset{\mathbf{r}}{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\overset{\mathbf{r}}{\omega}}{dt} = \frac{\overset{\mathbf{r}}{a}}{\overset{\mathbf{r}}{R}}. \quad (1.13)$$

При ускоренном движении

$$\overset{\mathbf{r}}{\epsilon} \uparrow \uparrow \overset{\mathbf{r}}{\omega}.$$

При замедленном движении

$$\overset{\mathbf{r}}{\epsilon} \downarrow \downarrow \overset{\mathbf{r}}{\omega}.$$

При равномерном движении точки по окружности $\omega = \text{const}$. Тогда

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.14)$$

где n – число оборотов точки (частота вращения);

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{n} \text{ – период обращения точки по окружности.}$$

1.3. Связь между линейными и угловыми величинами

Связь между $\overset{\mathbf{r}}{v}$ и $\overset{\mathbf{r}}{\omega}$ задается формулой

$$\overset{\mathbf{r}}{v} = [\overset{\mathbf{r}}{\omega}, \overset{\mathbf{r}}{r}]. \quad (1.15)$$

Векторы $\overset{\mathbf{r}}{v}, \overset{\mathbf{r}}{\omega}, \overset{\mathbf{r}}{r}$ образуют правую тройку векторов, при этом $v = \omega r \sin \alpha = \omega R$, где α – угол между $\overset{\mathbf{r}}{r}$ и $\overset{\mathbf{r}}{\omega}$, $R = r \sin \alpha$ – радиус вращения (рис.4).

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R \frac{d\omega}{dt} = \pm R\epsilon, \quad (1.16)$$

так как $\frac{d\omega}{dt} \geq 0$, $\epsilon = |\overset{\mathbf{r}}{\epsilon}|$.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R. \quad (1.17)$$

Модуль ускорения точки равен

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2} = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (R\epsilon)^2} = \sqrt{\omega^4 R^2 + \epsilon^2 R^2} = R \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2}. \quad (1.18)$$

Глава 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Основные положения динамики были сформулированы Ньютоном в его «Математических началах натуральной философии» (1687 г.) в виде трех законов движения, которые явились результатом обобщения большого количества опытных фактов.

2.1. Первый закон Ньютона (закон инерции)

Существует система отсчета, относительно которой тело, не подверженное действию других тел, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Это утверждение называется *1-м законом Ньютона*, или *законом инерции*. Системы отсчета, в которых выполняется закон инерции, называются *инерциальными* (ИСО).

Любая система отсчета, движущаяся относительно (ИСО) с постоянной скоростью, также будет инерциальной, а система отсчета, движущаяся относительно нее с ускорением, называется *неинерциальной* (НСО).

В ИСО тело приобретает ускорение, только если на него действуют другие тела.

Сила \vec{F} – векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел.

Сила характеризуется модулем, направлением и точкой приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*.

Масса m – положительная скалярная величина, являющаяся мерой инертности тела. Масса есть величина аддитивная, т.е. масса системы равна сумме масс всех материальных точек, входящих в состав этой системы:

$$m = \sum_{i=1}^N m_i . \quad (2.1)$$

Масса не меняется при переходе из одной системы отсчета в другую.

Импульс м.т. \vec{p} – векторная величина, равная произведению массы м.т. на ее скорость \vec{v} :

$$\vec{p} = m\vec{v} . \quad (2.2)$$

Импульсом системы N материальных точек называется векторная сумма импульсов отдельных материальных точек, из которых эта система состоит, т.е.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i . \quad (2.3)$$

Силы, действующие на материальные точки системы, можно разделить на внутренние и внешние.

Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками самой системы.

Внешние силы – это силы, с которыми внешние тела действуют на точки системы.

Система называется *замкнутой*, если на неё не действуют внешние силы.

2.2. Второй закон Ньютона

Произведение массы м.т. на ускорение равно действующей на нее силе:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{F}}. \quad (2.4)$$

Так как $m = \text{const}$, то

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m \frac{d\dot{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d(m\dot{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{d\dot{\mathbf{p}}}{dt}.$$

Тогда (2.4) можно записать в виде

$$\frac{d\dot{\mathbf{p}}}{dt} = \dot{\mathbf{F}}. \quad (2.5)$$

Если на м. т. действует не одна, а несколько сил $\dot{\mathbf{F}}_i$, то

$$\frac{d\dot{\mathbf{p}}}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{F}}_i. \quad (2.6)$$

Таким образом, *2-й закон Ньютона* гласит: изменение импульса м.т. в единицу времени равно векторной сумме всех сил, действующих на эту точку.

Единица силы в СИ: $1 [F] = 1 \text{Н} = \frac{1 \text{кг} \cdot 1 \text{м}}{1 \text{с}^2}.$

Замечание: Уравнение (2.6) описывает также поступательное движение тела.

2.3. Третий закон Ньютона

Силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине, противоположны по направлению и лежат на одной прямой (в частности, соединяющей точки их приложения). Это утверждение называется *3-м законом Ньютона*:

$$\dot{\mathbf{F}}_{12} = -\dot{\mathbf{F}}_{21} \quad (2.7)$$

Из него следует, что сумма всех внутренних сил в любой механической

системе равна нулю, т.е. $\sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i} \dot{\mathbf{F}}_{ik} = 0.$

Тогда, используя (2.6), можно показать, что

$$\frac{d\dot{\mathbf{P}}}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{F}}_{i \text{внеш}}, \quad (2.8)$$

где $\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i$ – импульс системы материальных точек, $\dot{\mathbf{F}}_{i \text{внеш}}$ – внешняя сила,

действующая на i -ю м.т. системы.

Уравнение (2.8) называется *законом изменения импульса системы материальных точек*.

Из (2.8) следует, что если сумма всех внешних сил, действующих на систему материальных точек, равна нулю, то ее полный импульс не изменяется (сохраняется), т.е. если

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{i \text{ внеш}} = 0, \text{ то } \frac{d\dot{\mathbf{P}}}{dt} = 0 \text{ и, следовательно, } \dot{\mathbf{P}} = \text{const}. \quad (2.9)$$

Утверждение (2.9) называется *законом сохранения импульса системы материальных точек*.

2.4. Преобразования Галилея. Закон сложения скоростей

Пусть система отсчета К неподвижна, а система К' движется относительно К поступательно с постоянной скоростью $\dot{\mathbf{v}}_0$ вдоль оси 0x (рис. 5). Отсчёт времени по часам в неподвижной и движущейся системах отсчёта начнём с момента, когда начала координат обеих систем совпадали. При этом в нерелятивистской физике предполагается, что время во всех системах отсчета течёт одинаково, т. е. $t = t'$.

Если точки 0 и 0' в момент $t_0 = t'_0 = 0$ совпадают, то связь между координатами некоторой точки М и временем в системе К и К' описывается следующим образом:

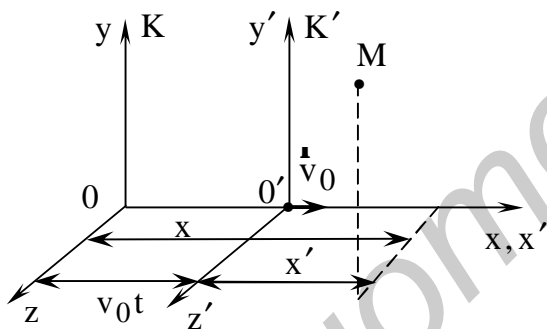


Рис. 5

$$x = x' + v_0 t' \quad (2.10)$$

$$y = y' \quad (2.11)$$

$$z = z' \quad (2.12)$$

$$t = t' \quad (2.13)$$

преобразования Галилея,

причем формулы (2.10) – (2.13)

справедливы лишь для $v_0 \ll c$ (где c – скорость света в вакууме).

Продифференцировав соотношения (2.10) – (2.12) по времени, найдем связь между скоростями точки М и системами отсчета К и К':

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v'_x + v_0 \\ v_y &= v'_y \\ v_z &= v'_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0. \quad (2.14)$$

Это – *закон сложения скоростей Галилея*.

Из закона (2.14) следует, что если существует одна инерциальная система отсчёта, то их существует бесчисленное множество. Используя преобразования Галилея (2.10)–(2.13) и закон сложения скоростей (2.14), можно показать, что 2-й закон Ньютона имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчёта, что является математическим выражением принципа относительности Галилея: *во всех инерциальных системах отсчета механические явления протекают одинаково*.

2.5. Работа и мощность силы

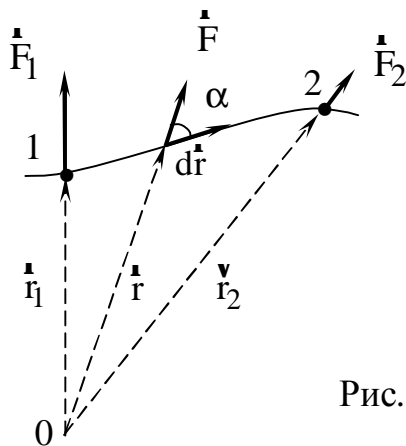


Рис. 6

Энергия является единой количественной мерой различных форм движения и взаимодействия материи. Изменение механического движения и энергии тела происходит в процессе силового взаимодействия этого тела с другими телами. Для количественной характеристики этого процесса вводят понятие работы силы,

приложенной к рассматриваемому телу.

Элементарной работой силы $\dot{\mathbf{F}}$ на бесконечно малом перемещении $d\dot{\mathbf{r}}$ (рис. 6) называют величину

$$\delta A = F |d\dot{\mathbf{r}}| \cos \alpha = (\dot{\mathbf{F}}, d\dot{\mathbf{r}}). \quad (2.15)$$

Тогда работа силы $\dot{\mathbf{F}}$ на участке траектории 1-2 равна

$$A_{1,2} = \int_1^2 (\dot{\mathbf{F}}, d\dot{\mathbf{r}}). \quad (2.16)$$

Единица работы в СИ: $1 [A] = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ Дж} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$.

Для характеристики быстроты совершения работы вводят понятие мощности силы, которая показывает работу силы в единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{(\dot{\mathbf{F}}, d\dot{\mathbf{r}})}{dt} = (\dot{\mathbf{F}}, \dot{\mathbf{v}}) = Fv \cos \alpha. \quad (2.17)$$

Единица мощности в СИ: $1 [N] = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}} = 1 \text{ Вт}$.

2.6. Поле сил. Консервативные силы. Потенциальная энергия

Если частица в каждой точке пространства подвержена воздействию других тел, то говорят, что эта частица находится в поле сил.

Если во всех точках поля силы, действующие на частицу, одинаковы по величине и направлению ($\dot{\mathbf{F}} = \text{const}$), то поле называется *однородным*.

Поле сил, не изменяющееся со временем, называется *стационарным*.

Если работа силы не зависит от формы пути, соединяющей две заданные точки, или равна нулю по замкнутому пути: $\oint (\dot{\mathbf{F}}, d\dot{\mathbf{r}}) = 0$, то такая сила (L)

называется *консервативной*.

Если м.т. находится в поле консервативных сил, то для неё можно ввести понятие потенциальной энергии, которая является функцией координат м.т.

Обозначим потенциальную энергию м.т. через $U(\mathbf{r})$. Тогда работа консервативной силы определяется в виде разности значений функций $U(\mathbf{r})$, которые вычисляются в начальной и конечной точках пути, т.е. $A_{12} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2)$.

Тогда сила в каждой точке поля определяется градиентом функции $U(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad}U(\mathbf{r}). \quad (2.18)$$

В декартовой системе координат:

$$\text{grad}U(\mathbf{r}) = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Примеры консервативных сил: сила упругости, сила тяготения, электростатическая сила.

К *неконсервативным силам* относятся диссипативные и гироскопические силы. Работа диссипативных сил всегда отрицательна и зависит от пройденного расстояния. К диссипативным силам относят силу трения скольжения, силу сопротивления среды.

Гироскопические силы зависят от скорости материальной точки и направлены перпендикулярно этой скорости. Работа гироскопических сил всегда равна нулю независимо от того, как перемещается эта точка. Примером гироскопической силы является сила Лоренца в магнитном поле.

2.7. Кинетическая энергия. Полная механическая энергия

Запишем 2-й закон Ньютона для м.т.: $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$.

Умножим уравнение $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$ скалярно на $d\mathbf{r}$:

$$m \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}, d\mathbf{r} \right) = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \delta A.$$

Но

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}, d\mathbf{r} \right) = (d\mathbf{v}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}) = (\mathbf{v}, d\mathbf{v}) = \frac{1}{2} d(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Откуда следует, что изменение кинетической энергии материальной точки равно

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \delta A,$$

или

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}, \quad (2.19)$$

где v_1 – начальная, а v_2 – конечная скорости точки, $A_{1,2}$ – работа силы \mathbf{F} на участке траектории 1-2.

Величина

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = T \quad (2.20)$$

называется *кинетической энергией материальной точки*. Из (2.19) с учётом (2.20) получаем

$$T_2 - T_1 = \Delta T = A_{1,2}. \quad (2.21)$$

Работа силы, действующей на м.т., идет на приращение ее кинетической энергии.

Если м.т. находится в силовом поле, то сумму ее кинетической и потенциальной энергий называют *полной механической энергией материальной точки*:

$$E = T + U. \quad (2.22)$$

Для системы невзаимодействующих материальных точек, находящихся в силовом поле, полная механическая энергия равна

$$E = T + U_{\text{внеш}}. \quad (2.23)$$

Если к тому же материальные точки взаимодействуют между собой, то полная механическая энергия такой системы равна

$$E = T + U_{\text{внеш}} + U_{\text{вз}}, \quad (2.24)$$

где $T = \sum_{i=1}^N T_i$ – суммарная кинетическая энергия всех точек системы;

$U_{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^N U_i$ – потенциальная энергия точек системы во внешнем силовом

поле, U_i – потенциальная энергия i -й точки во внешнем силовом поле;

$U_{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} U_{ij}$ – потенциальная энергия взаимодействия материальных точек

системы между собой; U_{ij} – энергия взаимодействия i -й и j -й материальных точек.

2.8. Закон сохранения и изменения полной механической энергии

Если система материальных точек находится в консервативном поле сил и силы взаимодействия между точками системы также консервативны, то полная механическая энергия такой системы остается постоянной (сохраняется):

$$E = T + U_{\text{вз}} + U_{\text{внешн}} = \text{const}. \quad (2.25)$$

Для системы невзаимодействующих точек

$$E = T + U_{\text{внешн}} = \text{const}. \quad (2.26)$$

Формулы (2.25) и (2.26) выражают *закон сохранения полной механической энергии*.

Если в замкнутой системе, кроме консервативных, действуют также неконсервативные силы, например силы трения, то полная механическая энергия такой системы не сохраняется, причём

$$E_2 - E_1 = \Delta E = A_{\text{неконс}}^{\text{внутр}} . \quad (2.27)$$

Если система не замкнута и на неё действуют внешние неконсервативные силы, то

$$E_2 - E_1 = \Delta E = A_{\text{неконс}}^{\text{внутр}} + A_{\text{неконс}}^{\text{внеш}} . \quad (2.28)$$

Формулы (2.27) и (2.28) выражают закон изменения полной механической энергии.

Глава 3. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

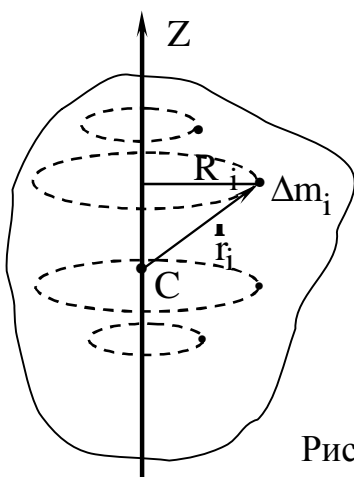


Рис. 7

Твёрдым телом в механике называется тело, расстояние между двумя любыми точками которого не меняется при его движении.

Если любая прямая в твёрдом теле в процессе движения остаётся параллельной самой себе, то движение тела называется *поступательным*. Если при движении твёрдого тела по крайней мере одна его точка остаётся неподвижной, то движение тела называется *вращательным*. Твёрдое

тело также может совершать сложное движение – совокупность двух одновременно совершающихся поступательного и вращательного движений.

Простейший случай сложного движения тела – плоское, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях. Примером плоского движения может служить круговой цилиндр, скатывающийся с наклонной плоскости.

3.1. Вращательное движение твёрдого тела. Момент инерции

Рассмотрим простейший случай вращательного движения – движение твёрдого тела вокруг фиксированной оси. В этом случае все точки твёрдого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой *осью вращения* (рис. 7).

Центром масс (инерции) системы материальных точек, состоящей из N -частиц, называется точка, радиус-вектор которой определяется формулой

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad (3.1)$$

где \mathbf{r}_i и m_i – радиус вектор и масса i -й точки, $m = \sum_{i=1}^N m_i$ – полная масса всей

системы материальных точек.

Движение центра масс системы материальных точек описывается уравнением

$$m \mathbf{a}_c = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \text{ внеш}, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{a}_c = \ddot{\mathbf{r}}_c$ – ускорение центра масс системы м.т. Уравнение (3.2) справедливо также и для твердого тела.

Моментом инерции твёрдого тела относительно некоторой оси называется сумма произведений масс его материальных точек на квадрат их расстояний до выбранной оси (рис. 7):

$$I = \sum_{i=1}^N \Delta m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^N \rho_i R_i^2 \Delta V_i, \quad (3.3)$$

где ρ_i – плотность тела в i -й точке, а $N \rightarrow \infty$.

Сумма (3.3) является в случае твёрдого тела интегральной и поэтому

$$I = \int_{(V)} \rho R^2 dV. \quad (3.4)$$

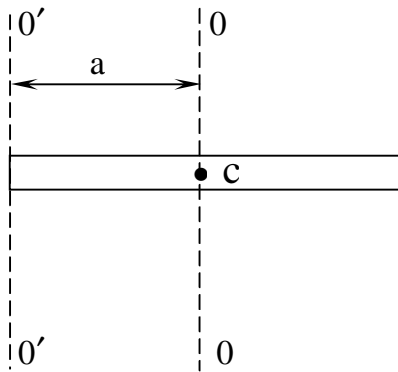


Рис. 8

Если выбранная ось не проходит через центр инерции тела, то по теореме Штейнера

$$I = I_0 + ma^2, \quad (3.5)$$

где I_0 – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции (точка C), а – расстояние между осью (00) , проходящей через центр инерции, и параллельной ей заданной осью $(0'0')$ (рис. 8).

3.2. Момент силы. Момент импульса

Моментом силы относительно точки O называется векторное произведение радиуса-вектора \mathbf{r} точки ее приложения на силу \mathbf{F} (рис. 9):

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}], \quad (3.6)$$

$$M = rF \sin \alpha = lF \quad (3.7)$$

– модуль момента силы,
где $l = r \sin \alpha$ – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой направлена сила;
 l – плечо силы.

Момент силы \mathbf{F} относительно оси Z , проходящей через точку O , есть проекция вектора \mathbf{M} на эту ось:

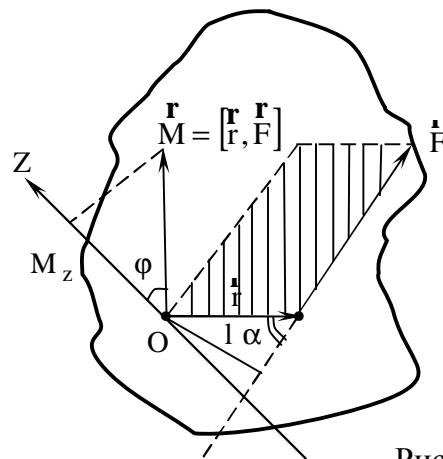


Рис. 9

$$M_Z = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]_{\text{пр.}Z} . \quad (3.8)$$

Из рис. 9 видно, что

$$M_Z = |\mathbf{M}| \cos \varphi . \quad (3.9)$$

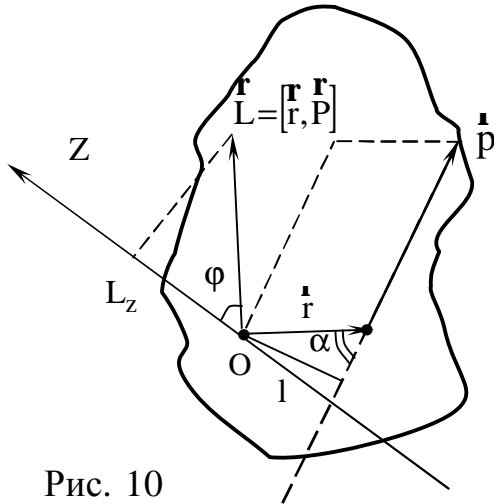


Рис. 10

Аналогично (3.9)

Моментом импульса частицы тела относительно точки O называется векторное произведение ее радиуса-вектора \mathbf{r} на импульс \mathbf{p} (рис. 10):

$$\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}] , \quad (3.10)$$

где $L = r p \sin \alpha = I p$ – модуль момента импульса, l – плечо импульса.

Момент импульса частицы относительно оси Z, проходящей через точку O, есть проекция вектора $\dot{\mathbf{L}}$ на эту ось:

$$L_Z = [\dot{\mathbf{L}}]_{\text{пр.}Z} . \quad (3.11)$$

$$L_Z = |\dot{\mathbf{L}}| \cos \varphi . \quad (3.12)$$

Используя 2-й закон Ньютона, получим уравнение вращательного движения твёрдого тела. Для i -й точки тела

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad \text{или} \quad m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{F}_i , \quad (3.13)$$

где \mathbf{F}_i – сумма внешних и внутренних сил, действующих на i -ю точку тела.

Умножим (3.13) векторно на \mathbf{r}_i :

$$m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] .$$

Учтём, что $[\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] = \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i]$, тогда

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i] = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] \Rightarrow \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] = [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{M}_i .$$

Суммируя последнее равенство по i и учитывая, что сумма всех моментов внутренних сил в любой механической системе равна нулю, для тела получаем

$$\frac{d\dot{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i\text{внеш}} , \quad (3.14)$$

где $\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]$ – момент импульса тела.

Формула (3.14) выражает закон изменения момента импульса твёрдого тела: изменение момента импульса тела в единицу времени равно векторной сумме моментов всех внешних сил, действующих на это тело.

Спроецируем (3.14) на ось Z:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^N M_{iz_{\text{внеш}}} . \quad (3.15)$$

Скорость i -й точки твёрдого тела, вращающейся вокруг фиксированной оси, равна $\dot{\mathbf{v}}_i = [\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}_i]$.

Следовательно, момент импульса твёрдого тела равен

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i m_i, \dot{\mathbf{v}}_i] = \sum_{i=1}^N m_i [\mathbf{r}_i [\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}_i]]. \quad (3.16)$$

Можно показать, используя (3.16), что проекция $\dot{\mathbf{L}}$ на ось вращения Z равна $L_z = I\omega_z$,

где I – момент инерции тела относительно оси Z .

Таким образом, с учётом того, что для твёрдого тела $I = \text{const}$, имеем

$$\frac{d}{dt}(I\omega_z) = I \frac{d\omega_z}{dt} = I\epsilon_z,$$

и тогда (3.15) запишется в виде

$$I\epsilon_z = \sum_{i=1}^N M_{iz_{\text{внеш}}}, \quad (3.17)$$

выражающем *основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения Z* .

3.3. Закон сохранения момента импульса

Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно некоторой точки, равна нулю, то её момент импульса относительно этой точки сохраняется, т.е. если

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{i_{\text{внеш}}} = \mathbf{0}, \text{ то } \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \text{ и } \dot{\mathbf{L}} = \text{const}. \quad (3.18)$$

В частности, когда тело вращается вокруг неподвижной оси Z и $\sum_{i=1}^N M_{iz_{\text{внеш}}} = 0$, то (3.18) можно представить в виде

$$L_z = I\omega_z = \text{const}. \quad (3.19)$$

(3.18) и (3.19) – *законы сохранения момента импульса системы материальных точек (тела) относительно точки O и оси Z* .

3.4. Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела

Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси Z (рис. 7). Линейная скорость элементарной массы Δm_i равна $v_i = \omega R_i$, где R_i – расстояние массы Δm_i до оси вращения. Кинетическая энергия i -й элементарной массы равна

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2.$$

Тогда для тела
$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 I, \quad (3.20)$$

где I – момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения.

При плоском движении твёрдого тела кинетическая энергия равна

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \quad (3.21)$$

где $\frac{mv_c^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения тела, $\frac{I_c \omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения твёрдого тела вокруг оси, проходящей через его центр масс. Примеры плоского движения: шар, цилиндр, скатывающиеся по наклонной плоскости.

Глава 4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определённой повторяемостью во времени. Различают: механические, электромагнитные, электромеханические и другие колебания.

С колебательными процессами мы встречаемся при изучении самых различных физических явлений: звука, света, радиоволн, переменных токов, качаний маятников и т. д. Существует общность закономерностей этих явлений и математических методов их исследования. На примере механических колебаний можно изучать различные виды колебаний.

4.1. Гармонические колебания

Колебания называются периодическими, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим типом периодических колебаний являются *гармонические* колебания. Это значит, что зависимость колеблющейся величины x от времени имеет вид

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

причем A, ω и φ_0 с течением времени не изменяются.

Различают *свободные* и *вынужденные* колебания. Свободными называются колебания, которые совершает система, предоставленная самой себе после некоторого воздействия. Вынужденные колебания совершаются системой под действием внешней периодически изменяющейся силы.

Силы вида $\vec{F} = -k\vec{r}$, где $k = \text{const} > 0$, называются *квазиупругими*. Квазиупругая сила консервативна.

Если на колеблющуюся систему действует только квазиупругая сила, то при колебаниях не происходит потери энергии. В этих случаях свободные колебания называются незатухающими. При наличии сил сопротивления колебания будут затухающими.

Пусть материальная точка совершает движение вдоль оси X под действием квазиупругой силы (*линейный гармонический осциллятор*).

Тогда второй закон Ньютона для нее запишется в виде

$$m a_x = F_x. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) – динамическое уравнение гармонических колебаний, где m – масса материальной точки, $a_x = \ddot{x}$, $F_x = -kx$.

Учитывая это, перепишем (4.1) так:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2), представленное в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.2')$$

называется *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

Здесь $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ называется *собственной циклической частотой гармонических колебаний*.

Из теории дифференциальных уравнений следует, что общее решение уравнения (4.2') имеет вид

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.3)$$

где A , φ_0 – константы, определяемые из начальных условий.

Уравнения (4.3) – *кинематические уравнения гармонических колебаний*, где

$A = x_{\max} > 0$ – амплитуда колебаний; $\varphi = (\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза колебаний в момент времени t ; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Минимальный промежуток времени T , по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебания, называется *периодом колебаний*. За время T совершается одно полное колебание:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (4.4)$$

Число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется *частотой колебаний*:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (4.5)$$

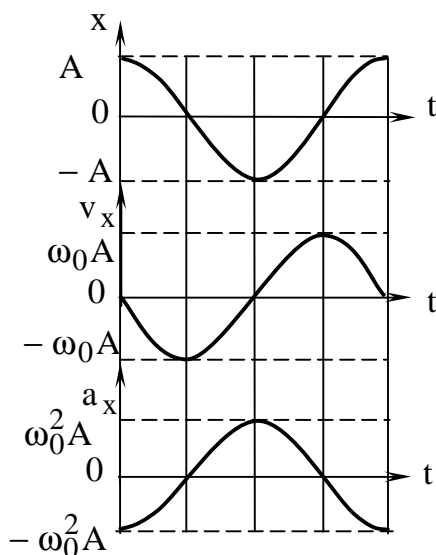


Рис. 11

Единица ω_0 в СИ: $1[\omega_0] = \frac{1 \text{ рад}}{1 \text{ с}}$.

Единица частоты в СИ: $1[\nu] = \frac{1}{\text{с}} = 1 \text{ Гц}$.

Из (4.4) и (4.5) следует, что

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.6)$$

Найдём скорость и ускорение м.т., совершающей гармонические колебания.

Так как $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

то
$$v_x(t) = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) \quad (4.7)$$

и
$$a_x(t) = \ddot{x} = \dot{v}_x = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi). \quad (4.8)$$

Графики функций, изображающие зависимость $x(t)$, $v_x(t)$, $a_x(t)$ при $\varphi_0 = 0$ и $\omega_0 = 1 \text{ рад/с}$, представлены на рис. 11.

Как видно из формул (4.3), (4.7), (4.8) и графиков, проекции ускорения и смещения находятся в противофазе, т.е. когда смещение достигает наибольшего положительного значения, проекция ускорения достигает наибольшего по модулю отрицательного значения, и наоборот.

Рассмотрим несколько примеров свободных незатухающих колебаний тел.

4.2. Физический маятник

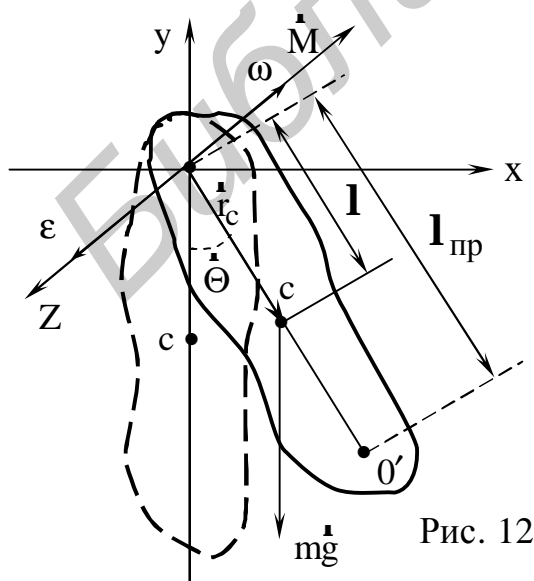


Рис. 12

Физическим маятником называется абсолютно твёрдое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси Z , не проходящей через его центр масс. При малых углах Θ отклонения маятника от положения равновесия $\sin \Theta \approx \Theta$. Поэтому при малых колебаниях физического маятника момент его силы тяжести относительно оси вращения Z , как видно из рис. 12, равен

$$M_z = -mgl \sin \Theta = -mgl\Theta, \quad (4.9)$$

где l – расстояние от оси вращения до центра масс маятника: $|\vec{r}_c| = l$.

Уравнение динамики вращательного движения для физического маятника таково:

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z = -mgl\Theta$$

или, учитывая, что $\frac{d\omega_z}{dt} = \ddot{\Theta}$:

$$I\ddot{\Theta} + mgl\Theta = 0,$$

$$\ddot{\Theta} + \frac{mgl}{I}\Theta = 0.$$

Обозначим

$$\frac{mgl}{I} = \omega_0^2, \quad (4.10)$$

тогда

$$\ddot{\Theta} + \omega_0^2\Theta = 0. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) идентично уравнению (4.2'). Его решение имеет вид

$$\Theta(t) = \Theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.12)$$

где Θ_m – максимальный угол отклонения маятника от положения равновесия, φ_0 – начальная фаза колебаний.

Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение физического маятника от положения равновесия изменяется со временем по гармоническому закону. Поэтому *период T малых колебаний физического маятника* можно определить по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (4.13)$$

4.3. Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длиной l и совершающая гармонические колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. На практике математическим маятником можно считать тяжёлое тело, подвешенное на лёгкой нити, длина которой во много раз больше размеров тела. Математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, у которого вся масса m сосредоточена в его центре масс. Поэтому, положив в формуле (4.13) $I = ml^2$, получим следующее выражение для *периода малых колебаний математического маятника*:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.14)$$

4.4. Энергия гармонических колебаний

С учётом (4.3), (4.7), (4.8) найдём энергию материальной точки, совершающую гармонические колебания под действием квазиупругой силы F .

Её кинетическая энергия равна

$$E_K = \frac{mV^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.15)$$

Потенциальная энергия, учитывая, что $k = m\omega_0^2$, будет равна

$$E_P = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.16)$$

Сложив (4.15) и (4.16) и учитывая, что $\sin^2 \varphi(t) + \cos^2 \varphi(t) = 1$, получим формулу для полной механической энергии материальной точки:

$$E = E_K + E_P = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \text{const}, \quad (4.17)$$

т.е. механическая энергия гармонических колебаний сохраняется.

4.5. Затухающие колебания

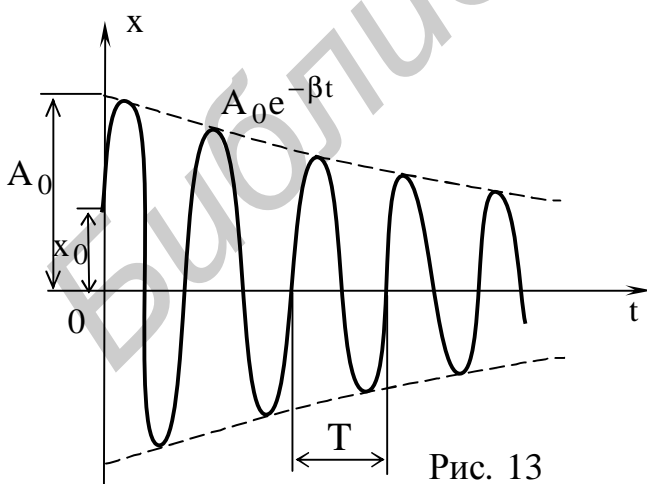


Рис. 13

Реальные колебательные процессы являются затухающими. Энергия механических колебаний реальной системы постепенно расходуется на работу против диссипативных сил, и амплитуда таких колебаний постепенно уменьшается (рис. 13).

Приближённо можно считать, что при небольших скоростях движения силы, вызывающие затухание механических колебаний, пропорциональны величине скорости. Будем называть эти силы силами сопротивления:

$$\dot{\mathbf{F}}_c = -\mathbf{жv},$$

где $\mathbf{ж}$ – коэффициент сопротивления.

Знак « \leftarrow » указывает, что сила сопротивления всегда направлена в сторону, противоположную направлению скорости.

Второй закон Ньютона для затухающих колебаний имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}_c, \quad (4.18)$$

где \mathbf{F} – квазиупругая сила.

Для колебаний вдоль оси X имеем:

$$m\ddot{x} = -kx - \mathbf{ж}v_x, \quad (4.19)$$

$$\ddot{x} + \frac{\mathbf{ж}}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Обозначая $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\frac{\mathbf{ж}}{m} = 2\beta$ (β называют коэффициентом затухания),

получим

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.20)$$

(4.20) – дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

В случае $\beta < \omega_0$ общее решение уравнения (4.20) имеет следующий вид:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4.21)$$

Здесь

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (4.22)$$

– частота затухающих колебаний;

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (4.23)$$

– амплитуда затухающих колебаний;

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (4.24)$$

– период затухающих колебаний.

4.6. Вынужденные колебания

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью внешней вынуждающей силы, которая в простейшем случае будет меняться по гармоническому закону

$$\dot{\mathbf{F}}_B = \dot{\mathbf{F}}_0 \cos \omega t.$$

Тогда 2-й закон Ньютона для вынужденных колебаний имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}_c + \dot{\mathbf{F}}_B. \quad (4.25)$$

Если м.т. колеблется вдоль оси X , то

$$m\ddot{x} = -kx - \mathbf{ж}v_x + F_0 \cos \omega t, \quad (4.26)$$

или

$$m\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

Обозначим $\frac{k}{m} = \omega_0^2$; $\frac{\gamma}{m} = 2\beta$; $\frac{F_0}{m} = f_0$.

Тогда

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (4.27)$$

(4.27) – дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

Общим решением уравнения (4.27) является функция вида

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha_0) + A(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)). \quad (4.28)$$

Частное решение уравнения (4.27), получающееся из (4.28) при больших t (когда вклад первого слагаемого стремится к нулю), имеет вид

$$x = A(\omega) \cos(\omega t - \varphi(\omega)) \quad (4.29)$$

и описывает установившиеся вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы ω и амплитудой

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (4.30)$$

При этом

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (4.31)$$

где φ – величина сдвига по фазе вынужденных колебаний от обусловившей их вынуждающей силы.

Из (4.30) следует, что при некоторой частоте ω_p вынуждающей силы амплитуда достигает максимального значения. Это явление называется *резонансом*, а ω_p – *резонансной частотой*, равной

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (4.32)$$

При этом $A_{\max} = \frac{F_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.33)$

Глава 5. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды.

Процесс распространения колебаний в среде называется *волновым процессом* (или волной).

Упругими (механическими) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде.

При распространении волны частицы среды не перемещаются вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице передается энергия колебаний.

Волны, которые переносят энергию в пространстве, называются *бегущими*.

Упругие волны бывают продольные и поперечные. В продольных волнах частицы среды колеблются в направлении распространения волны, а в поперечных – перпендикулярно направлению распространения волны. Продольные волны возникают в твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные – только в твердых телах.

Распространяясь от источника колебаний, волновой процесс охватывает все новые и новые части пространства.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется *волновым фронтом*.

Геометрическое место точек, фаза колебаний относительно которых имеет одно и то же значение, называется *волновой поверхностью*.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях они имеют форму плоскости или сферы. Соответственно волна в этих случаях называется *плоской* или *сферической*.

Уравнением упругой волны называют функцию

$$\xi = \xi(\vec{r}, t), \quad (5.1)$$

где ξ - смещение колеблющейся частицы от положения равновесия с радиусом-вектором \vec{r} в момент времени t .

Упругая волна будет незатухающей, если энергия волны не поглощается средой. Тогда колебания частиц среды можно описать гармоническим законом.

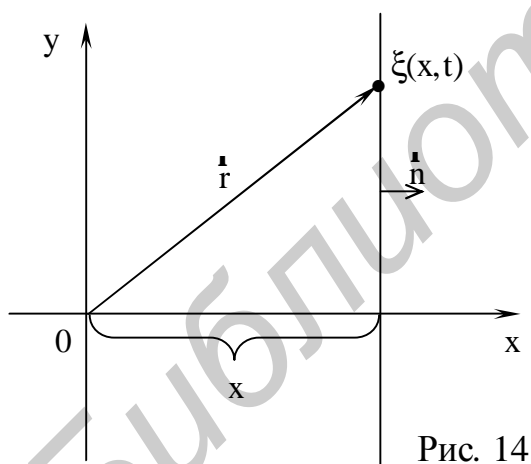


Рис. 14

5.1. Плоская и сферическая гармонические волны

Пусть плоская гармоническая волна распространяется вдоль оси x (рис.14).

Уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости с координатой x , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha_0), \quad (5.2)$$

где A – амплитуда волны; ω – циклическая частота волны; x – абсцисса равновесного положения колеблющейся точки; α_0 – начальная фаза волны; k – волновое число.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}, \quad (5.3)$$

где λ – длина волны; v – скорость распространения волны или фазовая скорость.

Расстояние λ , на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды, называется длиной волны:

$$\lambda = vT. \quad (5.4)$$

Волна, возбуждаемая в однородной, изотропной среде точечным источником, будет сферической.

Уравнение гармонической сферической волны имеет вид

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha_0), \quad (5.5)$$

где r – расстояние от источника до рассматриваемой точки.

5.2. Волновое уравнение

Уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения в частных производных, называемого волновым:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (5.6)$$

Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (5.7)$$

5.3. Стоячие волны

Если в среде распространяется одновременно несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Это утверждение выражает принцип суперпозиции (наложения) волн.

Особым случаем суперпозиции волн являются *стоячие волны* – волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A \cos(\omega t - kx), \\ \xi_2 &= A \cos(\omega t + kx). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Сложив эти уравнения и учитывая, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, получим уравнение стоячей волны:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t. \quad (5.9)$$

В стоячей волне каждая частица среды колеблется относительно положения равновесия с амплитудой

$$A_{ст} = 2A \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|, \quad (5.10)$$

называемой *амплитудой стоячей волны*.

В точках среды, где $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), ее частицы колеблются с максимальными амплитудами, т.е. $A_{ст} = 2A$, образуя *пучности* стоячей волны.

А в точках среды, где $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(m + \frac{1}{2})\pi$, ($m = 0, 1, 2, \dots$), ее частицы покоятся, т.е. $A_{ст} = 0$. Эти точки называются *узлами* стоячей волны.

Стоячие волны не переносят энергию.

Раздел 2. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Глава 6. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Молекулярная физика и термодинамика – разделы физики, которые изучают физические свойства и процессы, происходящие в макроскопических системах, состоящих из очень большого числа атомов и молекул. Существуют статистические и термодинамические методы изучения физических свойств макросистем.

В основе *молекулярной физики* лежит статистический (молекулярно-кинетический) метод исследования. Он основан на том, что свойства макроскопической системы определяются усреднёнными значениями динамических характеристик частиц, из которых состоит система (скорости, энергии и т.д.). Например, температура тела определяется среднеквадратичной скоростью хаотического движения его молекул. Нельзя говорить о температуре одной молекулы.

Термодинамика изучает свойства макроскопических систем и протекающие в них процессы путем анализа условий и количественных соотношений для процессов превращения энергии в рассматриваемых системах. *Термодинамической системой* называется совокупность макроскопических тел, например жидкость и находящийся в соприкосновении с нею пар или газ.

Термодинамические системы, которые не обмениваются с внешней средой ни энергией, ни веществом, называются *изолированными*.

Состояние системы задаётся термодинамическими параметрами (температура, давление, объём).

Система находится в равновесном состоянии, если её термодинамические параметры с течением времени не меняются (при неизменных внешних условиях).

Температура характеризует интенсивность теплового движения молекул, образующих систему. Измеряется в градусах Кельвина – T , или Цельсия – t , которые связаны между собой соотношением

$$T = 273,15 + t.$$

Температура $T = 0$ К называется абсолютным нулём температуры, ей соответствует $t = -273,15^{\circ}\text{C}$.

Давление P численно равно силе, действующей нормально на единицу поверхности тела по направлению к этой поверхности. В СИ давление измеряется в паскалях. $1\text{Па} = \frac{1\text{Н}}{1\text{м}^2}$. В технике и быту используется также измерения в миллиметрах ртутного столба. $1\text{мм рт.ст.} \approx 133,3\text{ Па}$. Объем измеряется в метрах кубических – (м^3).

Параметры состояния системы могут изменяться. Любые изменения в термодинамической системе, связанные с изменением хотя бы одного из её термодинамических параметров, называются *термодинамическим процессом*.

Бесконечно медленный процесс, состоящий из непрерывной последовательности равновесных состояний, называется *квазистатическим*.

Параметры состояния системы разделяются на внешние и внутренние. Внешними параметрами системы называются физические величины, которые являются внешними по отношению к данной системе телами.

Например, для газа объем V сосуда, в котором находится газ, является внешним параметром. А для жидкости, находящейся в открытом сосуде, внешним параметром является атмосферное давление. Внутренними параметрами газа являются его давление и энергия.

В термодинамике и статической физике пользуются моделью *идеального газа*. Ему приписывают следующие свойства:

- 1) собственный объём молекул идеального газа пренебрежимо мал по сравнению с объёмом сосуда;
- 2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- 3) столкновения молекул газа между собой или со стенками сосуда являются абсолютно упругими.

Реальный газ можно считать идеальным при достаточно большом разрежении.

6.1. Уравнение состояния идеального газа

Состояние заданной массы идеального газа определяется значениями трёх параметров: P, V, T .

Эти параметры связаны между собой *уравнением состояния идеального газа*:

$$PV = \frac{m}{M}RT, \quad (6.1)$$

где m – масса газа, M – молярная масса газа, R – универсальная газовая постоянная, $R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.

Уравнение (6.1) называется уравнением Менделеева – Клапейрона.

$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана, где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ –

число Авогадро (число молекул в одном моле газа); $\frac{m}{M} = \nu$ – число молей газа (количество вещества).

Преобразуем (6.1):

$$pV = \frac{\nu N_A RT}{N_A} = NkT. \quad (6.2)$$

Здесь $\nu N_A = N$ – число молекул, содержащихся в массе газа m .

Разделив (6.2) на V , получим

$$\frac{pV}{V} = \frac{NkT}{V}.$$

Обозначим: $\frac{N}{V} = n$ – концентрация молекул, равная числу молекул в единице объема. Тогда

$$p = nkT. \quad (6.3)$$

Из (6.3) следует, что давление идеального газа при данной температуре определяется только числом молекул в единице объема и не зависит от рода молекул. Формулы (6.1) – (6.3) – *различные формы записи уравнения состояния идеального газа.*

6.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов (МКТ)

При своем движении молекулы газа ударяют о стенку сосуда, в котором заключен газ, создавая тем самым давление газа на стенку. Рассмотрим одноатомный идеальный газ. Предположим, что молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа пренебрежимо мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда, а соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие.

Проведя соответствующие выкладки и вычисления, можно определить давление газа на стенку сосуда:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 v_{\text{КВ}}^2, \quad (6.4)$$

где n – концентрация молекул, m_0 – масса одной молекулы, $v_{\text{КВ}}$ – среднеквадратичная скорость молекул газа.

$\langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{m_0 v_{\text{КВ}}^2}{2}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы.

Тогда

$$P = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle. \quad (6.5)$$

Формула (6.3) или (6.5) – основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.

$$\text{Так как } n = \frac{N}{V} \text{ и } m = Nm_0, \text{ то } \frac{PV}{N} = \frac{1}{3} m_0 v_{\text{кв}}^2 \Rightarrow PV = \frac{1}{3} m_0 N v_{\text{кв}}^2 = \frac{1}{3} m v_{\text{кв}}^2.$$

$E_K = \frac{m v_{\text{кв}}^2}{2}$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа массы m .

$$\text{Тогда} \quad PV = \frac{2}{3} E_K. \quad (6.6)$$

Используя уравнения (6.3) и (6.5), имеем

$$\langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (6.7)$$

где $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ – средняя энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа. Отсюда *среднеквадратичная* скорость молекулы равна

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (6.8)$$

6.3. Распределение Максвелла. Распределение Больцмана

Согласно молекулярно-кинетической теории, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, среднеквадратичная скорость молекул газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, остаётся постоянной и равной (6.8). Это объясняется тем, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется закону распределения Максвелла.

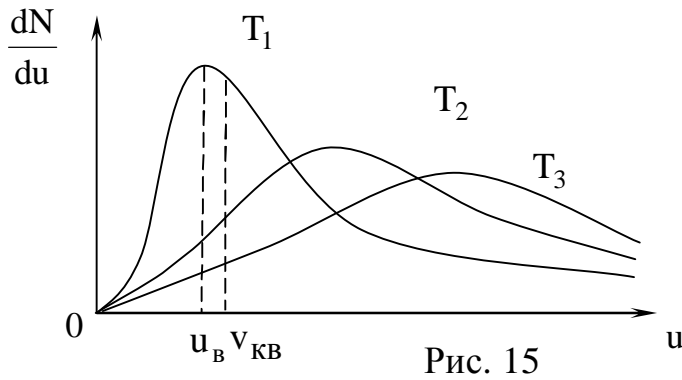
Приведём без вывода закон распределения Максвелла по величине скорости:

$$dN = N \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 u^2}{2kT}} 4\pi u^2 du,$$

(6.9)

где u – модуль скорости молекул, m_0 – масса молекулы, dN – число молекул однородного одноатомного идеального газа, обладающих при данной температуре модулями скоростей, заключёнными в интервале от u до $u + du$.

На рис.15 изображены кривые распределения молекул по скоростям при различных температурах $T_1 < T_2 < T_3$,



u_B – наиболее вероятная скорость молекул при данной температуре T :

$$u_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = v_{KB} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Рис. 15

Используя (6.9), можно получить закон распределения Максвелла по энергиям, перейдя от переменной u к переменной $\epsilon = \frac{m_0 u^2}{2}$, получим

$$dN(\epsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\epsilon^2} e^{-\frac{\epsilon}{kT}} d\epsilon, \quad (6.10)$$

где $dN(\epsilon)$ – число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключённую в интервале от ϵ до $\epsilon + d\epsilon$.

При выводе основного уравнения МКТ и распределения Максвелла предполагалось, что на молекулы газа внешние силы не действуют, поэтому молекулы равномерно разделены по объёму. Однако молекулы любого газа находятся в потенциальном поле тяготения Земли. Тяготение, с одной стороны, и тепловое движение молекул – с другой, приводят к некоторому стационарному состоянию газа, при котором давление газа с высотой убывает.

Эту зависимость выражает *барометрическая формула*. Она позволяет найти атмосферное давление в зависимости от высоты:

$$P = P_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (6.11)$$

где P_0 – давление на уровне моря, считающееся нормальным; P – давление на высоте h .

Так как $P = nkT$, то (6.11) можно представить в виде

$$n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \quad (6.12)$$

где n – концентрация молекул на высоте h ; n_0 – концентрация молекул на высоте $h = 0$, M – молярная масса.

$$M = m_0 N_A \text{ и } R = kN_A, \text{ то } n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}},$$

где $m_0gh = U$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения Земли.

Тогда согласно (6.12) распределение молекул идеального газа по координатам можно представить в виде, справедливом для любого потенциального силового поля $U = U(\mathbf{r})$:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (6.13)$$

Так как $n = \frac{dN}{dV}$, то $dN(x, y, z) = n_0 e^{-\frac{U}{kT}} dV$. (6.14)

Формула (6.14) – *распределение Больцмана для молекул идеального газа по координатам.*

Из (6.14) следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

6.4. Число степеней свободы молекул

Числом степеней свободы i механической системы называют число независимых координат, которые необходимо задать для того, чтобы полностью определить положение системы в пространстве. Так, например, материальная точка, свободно движущаяся в пространстве, обладает тремя степенями свободы (координаты x, y, z) (рис.16). Молекулу одноатомного газа можно рассматривать как материальную точку. Такая молекула имеет три степени свободы. Двух- и многоатомные молекулы могут совершать также вращательные и колебательные движения.

Молекула двухатомного газа жёстко связанных атомов (жесткая молекула), находящихся на расстоянии l между собой, обладает пятью степенями свободы: тремя поступательными и двумя вращательными: $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}}$, где $i_{\text{пост}} = 3$, $i_{\text{вращ}} = 2$. Для жесткой двухатомной молекулы

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \text{const}.$$

Молекулы, состоящие из трёх и более жёстко связанных атомов, имеют, подобно абсолютно твёрдому телу, три поступательные степени свободы $i_{\text{пост}} = 3$ и три вращательные степени свободы $i_{\text{вращ}} = 3$.

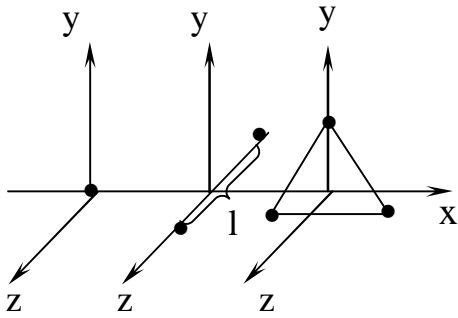


Рис16

Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы гласит: на каждую степень свободы молекулы в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная $\frac{kT}{2}$.

Таким образом, если жесткая молекула имеет i степеней свободы, то её средняя кинетическая энергия равна

$$\langle E_K \rangle = \frac{i}{2} kT = \frac{i_{\text{пост}}}{2} kT + \frac{i_{\text{вращ}}}{2} kT. \quad (6.15)$$

Если молекулы не жесткие, т.е. атомы в них могут совершать колебательные движения и их равновесные положения не лежат на одной прямой, то i в (6.15) определяется так: $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + i_{\text{колеб}}$, где $i_{\text{колеб}} = 2(3N - 6)$, $i_{\text{пост}} = i_{\text{вращ}} = 3$, а N – число атомов, входящих в молекулу. В противном последнему условию случае $i_{\text{пост}} = 3$, $i_{\text{вращ}} = 2$, $i_{\text{колеб}} = 2(3N - 5)$

Внутренняя энергия идеального газа представляет собой кинетическую энергию его молекул. Для одного моля

$$U = \langle E_K \rangle N_A = \frac{i}{2} kT N_A = \frac{i}{2} RT. \quad (6.16)$$

Внутренняя энергия газа произвольной массы m равна

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT, \quad (6.17)$$

где M – молярная масса; ν – число молей.

Из (6.17) вытекает, что изменение внутренней энергии идеального газа равно

$$\Delta U = \nu \frac{i}{2} R \Delta T. \quad (6.18)$$

6.5. Первое начало термодинамики

Рассмотрим термодинамическую систему, в которой изменяется её внутренняя энергия. Она может меняться за счёт совершения системой работы или сообщения ей теплоты. И тогда

$$Q = \Delta U + A, \quad (6.19)$$

где Q – количество теплоты, полученное системой; A – работа, совершённая системой над внешними телами; ΔU – изменение внутренней энергии системы.

В дифференциальной форме

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (6.20)$$

где dU – изменение внутренней энергии системы; δA – элементарная работа, совершаемая системой; δQ – бесконечно малое количество поглощаемой системой теплоты.

Уравнения (6.19) и (6.20) выражают *первое начало термодинамики*: количество теплоты, сообщенное системе, идет на приращение ее внутренней энергии и на совершение системой работы над внешними телами.

Круговым (замкнутым) процессом или циклом называется процесс, при котором система, пройдя ряд состояний, возвращается в исходное.

Для замкнутого процесса $\Delta U = 0$ и $A = Q$. Из этого следует, что процесс, при котором $A > Q$, невозможен. Периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия, называется *вечным двигателем I-го рода*. Из первого начала термодинамики следует запрет на создание такого двигателя.

6.6. Работа газа при изменении его объёма

Рассмотрим газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде (рис. 17). При перемещении поршня на dl работа силы давления газа F равна

$$\delta A = Fdl = PSdl, \quad (6.21)$$

где S – площадь поршня.

Так как $Sdl = dV$ – изменение объёма газа, то элементарная работа

$$\delta A = PdV.$$

При конечном изменении объёма от V_1 до V_2 работа газа равна

$$A_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} PdV. \quad (6.22)$$

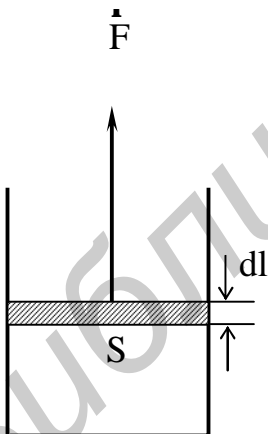


Рис. 17

Выражение (6.22) справедливо для любых изменений объёма твёрдых, жидких и газообразных тел.

6.7. Теплоёмкость газов

Для однородных тел удобно пользоваться удельной и молярной теплоёмкостью. *Удельная теплоёмкость* – величина, численно равная количеству теплоты, которое нужно сообщить единице массы вещества для изменения его температуры на 1К :

$$c = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT}, \quad (6.23)$$

где m – масса газа.

Единица удельной теплоемкости в СИ: $1 [c] = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ К}}$.

Молярная теплоёмкость – величина, численно равная количеству теплоты, которое нужно сообщить 1 молю вещества для изменения его температуры на 1К :

$$C = cM = \frac{M \delta Q}{m dT} = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \quad (6.24)$$

где M – молярная масса вещества.

Единица молярной теплоемкости в СИ: $1 [C] = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ моль} \cdot 1 \text{ К}}$.

Так как $\delta A = PdV$, то уравнение (6.20) запишется в виде

$$\delta Q = dU + PdV. \quad (6.25)$$

Если газ нагревают при $V = \text{const}$, то

$\delta A = PdV = 0$ и из (6.20) следует, что $\delta Q = dU$, $dU = \frac{i}{2} R dT$ при $\nu = 1$ (для одного моля). Тогда

$$C_V = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} R \frac{dT}{dT} = \frac{i}{2} R, \quad (6.26)$$

где C_V – молярная теплоёмкость газа при $V = \text{const}$.

Если газ нагревают при $P = \text{const}$, то

$$\delta Q = dU + PdV,$$

тогда

$$C_P = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{PdV}{dT}.$$

Так как для $\nu=1$ $\frac{PdV}{dT} = \frac{RdT}{dT} = R$ (из уравнения состояния идеального

газа), то
$$C_P = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R, \quad (6.27)$$

где C_P – молярная теплоёмкость газа при $P = \text{const}$.

Из (6.26) и (6.27) следует, что

$$C_P = C_V + R. \quad (6.28)$$

Уравнение (6.28) называется *уравнением Майера*.

Адиабатическим процессом называется процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой ($\delta Q = 0$). К адиабатическим процессам можно отнести все быстропротекающие процессы, при которых система не успевает обменяться тепловой энергией с окружающей средой.

Уравнение адиабатического процесса (уравнение Пуассона):

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad (6.29)$$

где $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты (коэффициент Пуассона).

6.8. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Рассмотрим для простоты 1 моль газа.

1. *Изохорический процесс* ($V = \text{const}$). Для него $\delta A = 0$. Тогда 1-е начало термодинамики для изохорического процесса будет иметь вид

$$\delta Q = dU = C_V dT. \quad (6.30)$$

2. *Изобарический процесс* ($P = \text{const}$):

1-е начало термодинамики для изобарического процесса

$$\delta Q = dU + PdV = C_V dT + PdV = C_V dT + RdT = C_P dT. \quad (6.31)$$

3. *Изотермический процесс* ($T = \text{const}$). Для него $dU = \frac{i}{2}RdT = 0$,

1-е начало термодинамики для изотермического процесса

$$\delta Q = \delta A = PdV. \quad (6.32)$$

4. *Адиабатический процесс* ($\delta Q = 0$).

1-е начало термодинамики для адиабатического процесса $0 = dU + \delta A$, следовательно,

$$\delta A = -dU. \quad (6.33)$$

При этом процессе работа совершается за счёт убыли внутренней энергии газа.

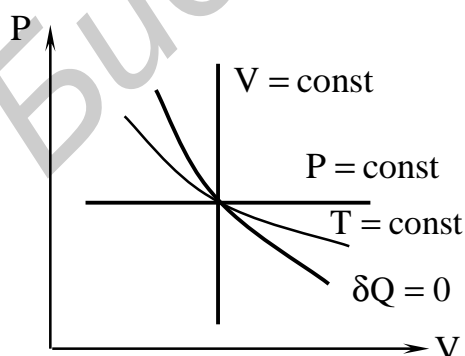
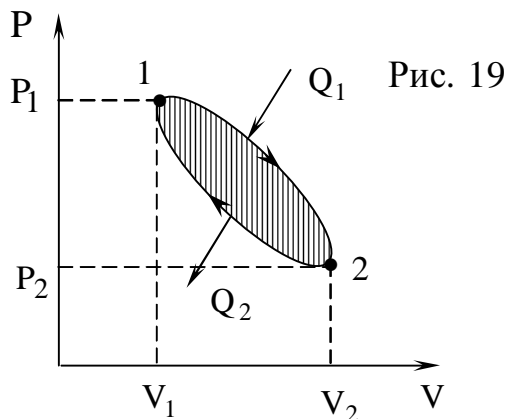


Рис 18

На рис. 18 изображены графики зависимостей рассмотренных равновесных процессов в координатах P и V .

6.9. Второе начало термодинамики

Рассмотрим круговой процесс. Представим его на диаграмме в координатах P и V замкнутой кривой (рис. 19).



Здесь Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим веществом (газом, паром) от нагревателя, Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим веществом холодильнику (окружающей среде). В ходе цикла рабочее вещество сначала расширяется до объема V_2 , а затем снова сжимается до первоначального объема V_1 .

Чтобы работа A была больше нуля, газу нужно в ходе расширения сообщать тепло, а в ходе сжатия – отнимать от него тепло. Совершив цикл, газ возвращается в исходное состояние. Поэтому $\Delta U = 0$.

Из первого начала термодинамики следует, что $Q = A$, так как $Q = Q_1 - Q_2$, то, следовательно,

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (6.34)$$

Если работа, совершаемая газом за цикл $A > 0$, цикл называется *прямым*.

Если $A < 0$, то цикл называется *обратным*.

Прямой цикл используется в тепловых двигателях, совершающих работу за счёт получения теплоты извне. Обратный цикл используется в холодильных машинах, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

Коэффициент полезного действия тепловой машины равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (6.35)$$

Процесс называется *обратимым*, если при изменении внешних условий в обратном порядке система проходит в обратном порядке те же состояния, что и в прямом процессе.

Процесс, не удовлетворяющий этим условиям, называют *необратимым*.

Любой обратимый процесс является равновесным.

Неравновесный процесс необратим. Реальные процессы всегда необратимы, они могут лишь приближаться к обратимым процессам, протекая

бесконечно медленно. КПД необратимой тепловой машины всегда меньше, чем у обратимой машины, работающей в том же интервале температур, вследствие потерь на трение и неравновесность необратимых процессов.

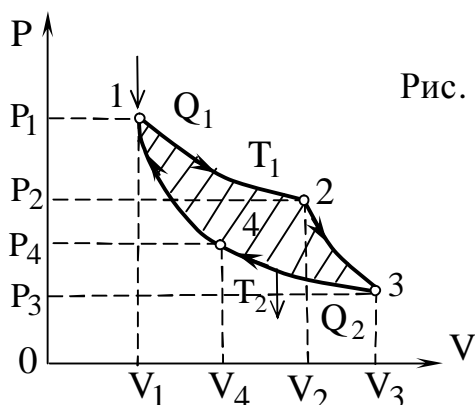


Рис. 20

В качестве примера кругового обратимого процесса рассмотрим цикл Карно для идеального газа, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рис. 20), где

- 1-2 обозначает изотермическое расширение при температуре T_1 ;
- 2-3 – адиабатическое расширение;
- 3-4 – изотермическое сжатие при температуре T_2 ;
- 4-1 – адиабатическое сжатие.

В процессе 1-2 нагреватель передаёт газу теплоту Q_1 для изотермического расширения, в процессе 3-4 газ изотермически сжимается и передаёт холодильнику теплоту Q_2 . На стадиях 2-3 и 4-1 газ теплоизолируют для адиабатического расширения и затем сжатия.

Для цикла Карно КПД равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.36)$$

Тепловой двигатель, который бы имел КПД, равный единице, был бы необычайно выгодным. Он не требовал бы наличия холодильника, так как вся тепловая энергия переходила бы в работу. Он работал бы за счет охлаждения любых тел: океана, земной коры и был бы практически неисчерпаемым источником энергии. При этом не было бы противоречия с законом сохранения энергии. Однако не все процессы, удовлетворяющие закону сохранения энергии, реализуются в действительности.

Опыт показывает, что невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу (*вечный двигатель 2-го рода*). Последнее утверждение носит название *второго начала термодинамики*.

6.10. Энтропия

Понятие энтропии введено в 1865 г. Р. Клаузиусом. Отношение теплоты Q , полученной телом в изотермическом процессе, к температуре T теплоотдающего тела, называется *приведённым количеством теплоты*.

Приведённое количество теплоты, сообщаемое телом на бесконечно малом участке процесса, равно $\frac{\delta Q}{T}$.

Для любого кругового процесса

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \quad (6.37)$$

где знак равенства выполняется для обратимого процесса.

Это означает, что в обратимом процессе

$$\frac{\delta Q}{T} = dS, \quad (6.38)$$

где dS – дифференциал некоторой функции состояния S .

Функция состояния S называется *энтропией*.

Изменение энтропии равно

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (6.39)$$

Из (6.37) и (6.38) вытекает, что для адиабатических обратимых процессов

$$\Delta S = 0, \quad (6.40)$$

а для адиабатических необратимых процессов

$$\Delta S > 0. \quad (6.41)$$

Соотношения (6.40) и (6.41) можно представить в виде неравенства Клаузиуса:

$$\Delta S \geq 0. \quad (6.42)$$

Энтропия теплоизолированной системы может либо возрасть (необратимые процессы), либо оставаться постоянной (обратимые процессы).

Энтропия обладает свойством аддитивности: энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему.

Более глубокий смысл энтропии даётся в статической физике.

Термодинамическая вероятность W состояния системы – число микросостояний, которыми может быть реализовано данное макросостояние системы.

Согласно Больцману энтропия системы и термодинамическая вероятность связаны между собой следующим соотношением:

$$S = k \ln W, \quad (6.43)$$

где k – постоянная Больцмана.

Из (6.43) энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Статистический подход позволяет дать следующее толкование: энтропия – мера неупорядоченности системы.

Таким образом, второе начало термодинамики можно сформулировать так:

- невозможен процесс, единственным результатом которого является передача энергии в форме теплоты от холодного тела к горячему;
- энтропия изолированной системы не может убывать: $dS \geq 0$;
- термодинамическая вероятность состояния изолированной системы при всех происходящих в ней процессах не может убывать: $dW \geq 0$.

Раздел 3. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Глава 7. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

В природе существуют два рода электрических зарядов, условно называемых положительными и отрицательными. Электрон и протон являются носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.

Электрический заряд дискретен, т.е. заряд любого тела составляет целое кратное элементарного электрического заряда, т.е.: $q = \pm Ne$, $N = 0, 1, 2, 3, \dots$, где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

В 1843 г. М. Фарадей установил *закон сохранения заряда*: алгебраическая сумма электрических зарядов любой изолированной системы остаётся неизменной, какие бы процессы не происходили внутри этой системы.

7.1. Закон Кулона. Напряженность. Принцип суперпозиции

Точечным зарядом называется заряженная материальная точка.

Закон взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов установил Ш. Кулон в 1785 г.

Сила \vec{F} , с которой точечный заряд q действует в вакууме на точечный заряд q' , определяется выражением

$$\vec{F} = k \frac{qq' \vec{r}}{r^3}. \quad (7.1)$$

Формула (7.1) является математическим выражением закона Кулона.

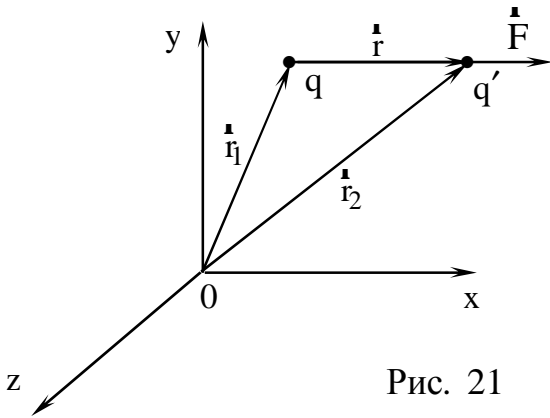


Рис. 21

В (7.1) \vec{r} – вектор, проведённый из точки с зарядом q в точку с зарядом q' (рис. 21).

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф.}$$

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ – электрическая постоянная.

Если заряды одноименные, $qq' > 0$, то $\vec{F} \uparrow \uparrow \vec{r}$ (заряды отталкиваются).

Если заряды разноименные, $qq' < 0$, то $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{r}$ (заряды притягиваются).

$F = k \frac{|qq'|}{r^2}$ – модуль силы Кулона.

Для системы неподвижных зарядов $q_1, q_2 \dots q_n$ справедлив *принцип суперпозиции (наложения) сил*, согласно которому сила, с которой система зарядов действует на пробный заряд q' , равна векторной сумме сил, с которой каждый заряд системы действует на пробный заряд в отдельности:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i(\vec{r}). \quad (7.2)$$

Покоящиеся электрические заряды взаимодействуют друг с другом посредством силового электростатического поля.

Силовой характеристикой поля является *напряженность*. Напряжённость электростатического поля точечного заряда равна отношению силы \vec{F} , действующей со стороны электрического поля на точечный заряд q' , помещённый в данную точку поля, к величине этого заряда, т. е.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'}. \quad (7.3)$$

Единица напряженности в СИ: $1 [\text{E}] = \frac{1\text{Н}}{1\text{Кл}} = \frac{1\text{Дж}}{1\text{М} \cdot 1\text{Кл}} = \frac{1\text{В}}{1\text{М}}$.

Графически электростатическое поле изображается с помощью силовых линий, т.е. линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряжённости поля в этой точке. Силовые линии вектора \vec{E} нигде не пересекаются, так как в каждой точке поля вектор \vec{E} определен однозначно.

Для поля системы неподвижных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n справедлив *принцип суперпозиции электростатических полей*: напряжённость \vec{E} результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i(\mathbf{r}). \quad (7.4)$$

7.2. Потенциал. Работа электростатического поля

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q , находящимся в начале координат. В любой точке этого поля на точечный заряд q' действует электростатическая сила (рис. 22):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k \frac{qq'}{r^3} \mathbf{r}. \quad (7.5)$$

Эта сила является *центральной*. Центральное поле сил консервативно. Следовательно, работа, которая совершается силами поля над зарядом q' при перемещении его из одной точки поля в другую, не зависит от формы пути. Эта работа равна

$$A_{12} = \int_1^2 (\mathbf{F}, d\mathbf{l}). \quad (7.6)$$

Как видно из рис. 22, $d\mathbf{l} = dl \cdot \boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}$, тогда

$$A_{12} = \int_1^2 (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = kqq' \int_1^2 \frac{\mathbf{r}, d\mathbf{r}}{r^3} = kqq' \int_1^2 \frac{dr}{r^2}, \quad (7.7)$$

поскольку $(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = r |d\mathbf{l}| \cos \alpha = r dr$, то $|d\mathbf{l}| \cos \alpha = dr$.

Следовательно:

$$A_{12} = k \left(\frac{qq'}{r_1} - \frac{qq'}{r_2} \right). \quad (7.8)$$

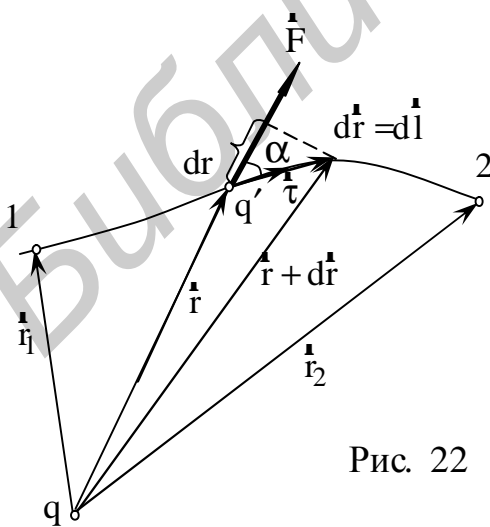


Рис. 22

Работа сил консервативного поля в свою очередь может быть представлена как убыль потенциальной энергии этого поля:

$$A_{12} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2). \quad (7.9)$$

Сравнив (7.7) и (7.9), получим следующее выражение для потенциальной энергии заряда q' в поле заряда q :

$$U(\mathbf{r}) = k \frac{qq'}{r} + \text{const}.$$

Если учесть, что при $r \rightarrow \infty$ $U = 0$, то $\text{const} = 0$.

Следовательно,

$$U(\mathbf{r}) = k \frac{qq'}{r}. \quad (7.10)$$

Энергетической характеристикой электростатического поля является *потенциал*, который по определению равен отношению потенциальной энергии точечного электрического заряда, помещённого в данную точку поля, к величине этого заряда:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{U(\mathbf{r})}{q'}. \quad (7.11)$$

Единица потенциала в СИ: $1 [\varphi] = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}} = 1 \text{ В}$.

Из (7.10) следует, что потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = k \frac{q}{r}. \quad (7.12)$$

Потенциал поля, созданный несколькими зарядами, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных каждым зарядом в отдельности (*принцип суперпозиции*):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{r}). \quad (7.13)$$

Так как электрическое поле консервативно, то $\dot{\mathbf{F}} = -\nabla U$ или $q\dot{\mathbf{E}} = -\nabla(q\varphi)$. Сократив на q , получим

$$\dot{\mathbf{E}} = -\nabla\varphi. \quad (7.14)$$

Это уравнение выражает *связь напряжённости $\dot{\mathbf{E}}$ и потенциала φ* .

В декартовых координатах

$$\dot{\mathbf{E}} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right), \text{ где} \quad (7.14')$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Проекция $\dot{\mathbf{E}}$ на произвольное направление l равна

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}. \quad (7.15)$$

Геометрическое место точек электростатического поля, в которых значения потенциала одинаковы, называется *эквипотенциальной поверхностью*.

Уравнение эквипотенциальной поверхности:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

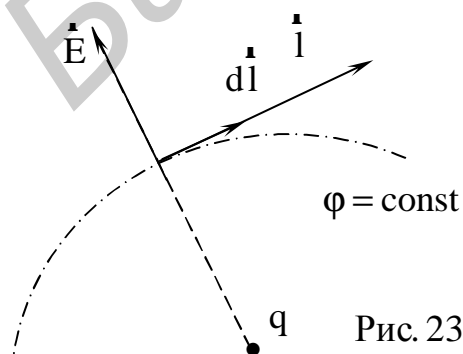


Рис. 23

Если вектор $d\vec{l}$ направлен по касательной к эквипотенциальной поверхности, то $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = 0$ и $E_l = 0$, т.е. $\vec{E} \perp d\vec{l}$ (рис. 23).

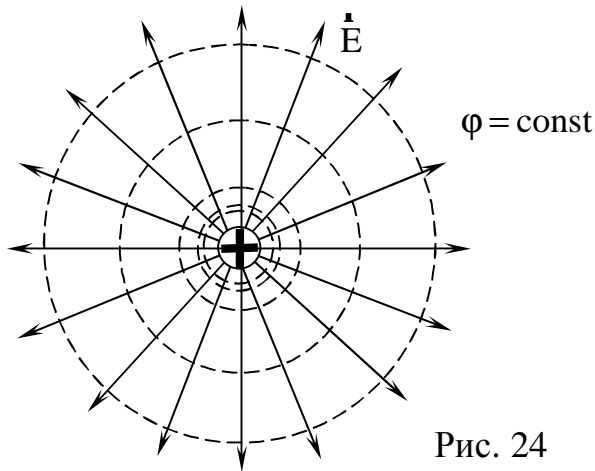


Рис. 24

Отсюда следует, что эквипотенциальные поверхности ортогональны к силовым линиям поля \vec{E} в каждой точке.

Силовые линии \vec{E} поля положительного точечного заряда и эквипотенциальные поверхности этого поля представлены на рис. 24.

7.3. Теорема о циркуляции вектора \vec{E}

Из (7.6), (7.9) и (7.11) следует, что работа электростатического поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2 равна

$$A_{12} = q(\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)) = q \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Приравняв эти выражения и сократив на q , получим

$$\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}). \quad (7.16)$$

Поскольку работа сил электростатического поля не зависит от пути, то интеграл можно брать по любой линии, соединяющей точку 1 и точку 2. Для обхода по замкнутому контуру $\varphi(\vec{r}_1) = \varphi(\vec{r}_2)$ и (7.16) переходит в соотношение

$$\oint_{(L)} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0, \quad (7.17)$$

являющееся математическим выражением *теоремы о циркуляции вектора \vec{E}* . $C_E = \oint_{(L)} (\vec{E}, d\vec{l})$ называется циркуляцией вектора \vec{E} по замкнутому контуру L .

Поле, для которого $C = 0$, называют потенциальным или безвихревым. Таким образом, из теоремы о циркуляции вектора \vec{E} следует важное свойство: *электростатическое поле является безвихревым (потенциальным)*.

7.4. Поток вектора \vec{E} . Теорема Гаусса

Пусть силовые линии поля пронизывают произвольную поверхность (рис. 25). Тогда *потоком вектора напряжённости электростатического поля* через поверхность S называют интеграл вида

$$\Phi_E = \int_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{(S)} (\vec{E}, \vec{n}) dS = \int_{(S)} E_n dS, \quad (7.18)$$

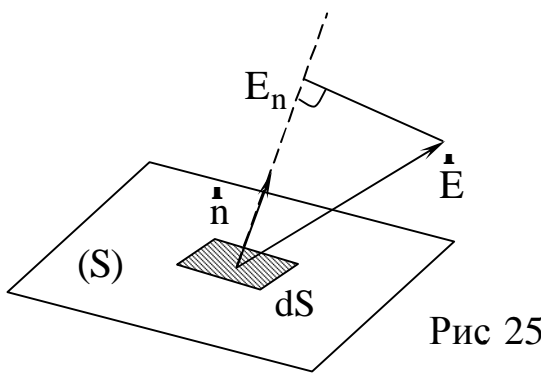


Рис 25

причем $d\vec{S} = \vec{n} dS$, где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности в данной точке,

$$|\vec{n}| = 1.$$

Для произвольной замкнутой поверхности $\Phi_E = \oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S})$.

Здесь интеграл берётся по замкнутой поверхности, ориентированной наружу, т.е. единичный вектор нормали \vec{n} в каждой точке поверхности (S) направлен наружу ограничиваемой ею области пространства.

Поток вектора напряжённости электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность (S) равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью и делённой на ϵ_0 (рис. 26):

$$\Phi_E = \oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\epsilon_0} q, \quad (7.19)$$

где q – суммарный заряд.

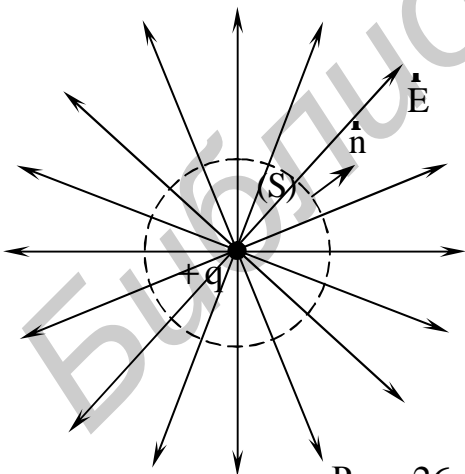


Рис. 26

Утверждение (7.19) называется *теоремой Гаусса для поля вектора \vec{E}* . Причем $q = \int \lambda dl$ – если тело заряжено по контуру (L) ; $q = \int_{(S)} \sigma dS$ – если тело заряжено по поверхности (S) , $q = \int_{(V)} \rho dV$ – если тело заряжено по объёму (V) , где λ – линейная плотность заряда; σ – поверхностная плотность заряда; ρ – объёмная плотность заряда.

Используя теорему Гаусса, легко рассчитать напряженности следующих электростатических полей.

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости является однородным и его напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad (7.20)$$

где σ – поверхностная плотность заряда (рис. 27).

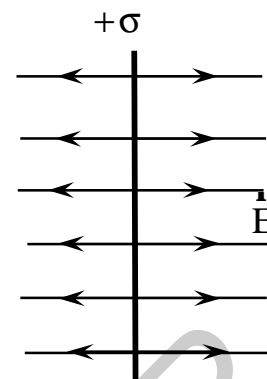


Рис. 27

2. Напряженность поля двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей в пространстве между плоскостями равна

$$E_{\text{рез}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (7.21)$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

Вне плоскостей результирующая напряжённость $\vec{E}_{\text{рез}}$ равна нулю (рис. 28).

Рис. 28

3. Напряженность поля равномерно заряженной сферической поверхности радиусом R равна

$$E(r) = 0 \quad (r < R),$$

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \quad (r > R), \quad (7.22)$$

где R – радиус заряженной сферы; r – расстояние от центра сферы до рассматриваемой точки; σ – поверхностная плотность заряда (рис. 29, а).

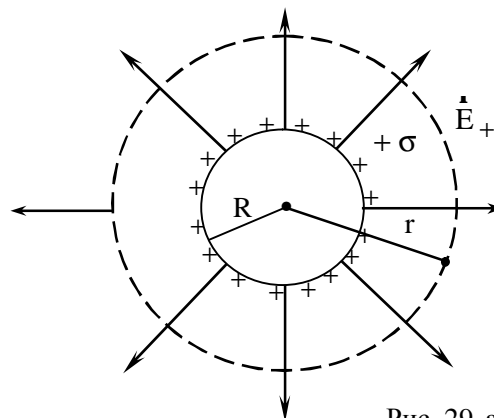


Рис. 29, а

4. Напряженность поля равномерно заряженного по объему шара равна

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r < R) \text{ – внутри шара;}$$

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r > R) \text{ – вне шара,} \quad (7.23)$$

где ρ – объёмная плотность заряда; r – расстояние от центра шара до рассматриваемой точки (рис. 30, а).

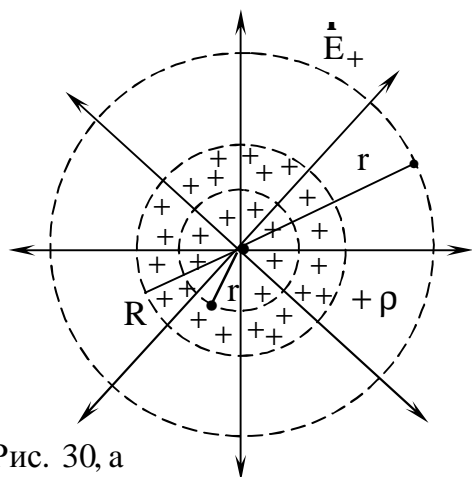


Рис. 30, а

5. Напряженность поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиусом R равна

$$E(r) = 0 \quad (r < R);$$

(внутри цилиндра зарядов нет) и

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R), \quad (7.24)$$

где λ – линейная плотность заряда; r – расстояние от оси цилиндра до рассматриваемой точки (рис. 31).

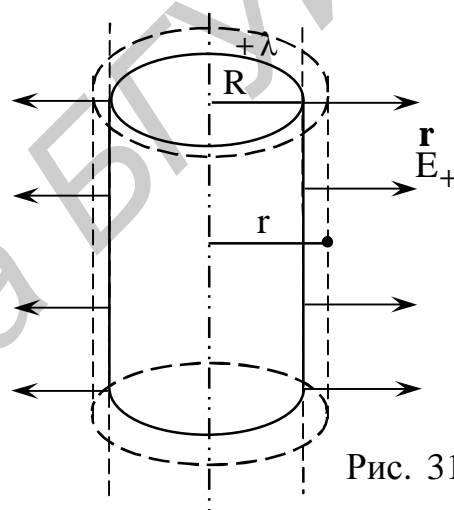


Рис. 31

Графики зависимости E от r рассматриваемых заряженных тел к случаям 3 и 4 представлены на рис. 29, б и 30, б.

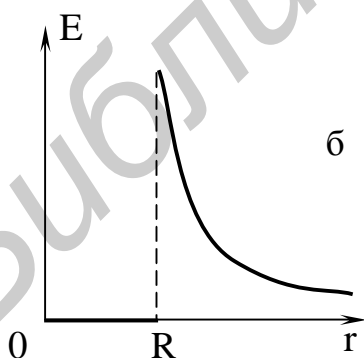


Рис. 29, б – напряженность поля E равномерно заряженной сферической поверхности

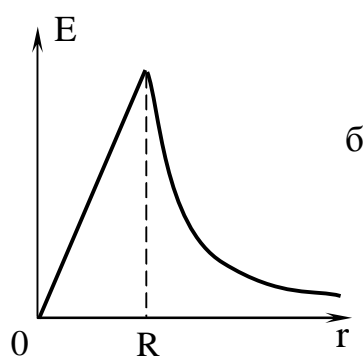


Рис. 30, б – напряженность поля E равномерно заряженного по объему шара

Глава 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

Дипольный электрический момент системы точечных зарядов q_i определяется следующим образом:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i. \quad (8.1)$$

Диэлектрики – это вещества, которые не проводят электрический ток. Диэлектрик называется *неполярным* (H_2, N_2, O_2, CCl_4), если в отсутствие внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в молекулах этого диэлектрика совпадают, т.е. дипольный момент равен нулю.

Диэлектрик называется *полярным* (H_2O, NH_3, SO_2, CO), если в отсутствие внешнего электрического поля «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов в молекулах не совпадают, т.е. молекулы обладают отличным от нуля дипольным моментом.

Таким образом, для неполярных молекул $\mathbf{p} = 0$, для полярных – $\mathbf{p} \neq 0$.

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле он *поляризуется*. Это означает, что в любом малом его объёме ΔV возникает отличный от нуля суммарный дипольный электрический момент молекул.

Поле в диэлектрике является суперпозицией двух полей: сторонних ($E_{\text{стор}}$) и связанных ($E_{\text{связ}}$) зарядов.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{стор}} + \mathbf{E}_{\text{связ}}. \quad (8.2)$$

Связанными зарядами называются заряды, входящие в состав нейтральных молекул диэлектрика.

Сторонние заряды – заряды, не входящие в состав молекул диэлектрика, а также заряды, расположенные за пределами диэлектрика.

Для количественного описания поляризации диэлектрика вводят *вектор поляризованности* \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}, \quad (8.3)$$

где \mathbf{p} – дипольный момент одной молекулы, входящей в элемент объёма ΔV .

Для однородных изотропных диэлектриков $\mathbf{P} \uparrow \uparrow \mathbf{E}$. Поэтому

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (8.4)$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость вещества.

Электрическим смещением (индукцией) называется векторная величина

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}. \quad (8.5)$$

Безразмерная величина

$$\epsilon = 1 + \chi \quad (8.6)$$

называется *диэлектрической проницаемостью* среды.

Из соотношений (8.5) и (8.6) для поляризованности изотропного диэлектрика следует, что

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}. \quad (8.7)$$

Теорема Гаусса для вектора электрического смещения \mathbf{D} :

$$\Phi_D = \oint_{(S)} (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = \sum_{i=1}^n q_i^{\text{стор}}, \quad (8.8)$$

т.е. поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Глава 9. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Металлические проводники – вещества, в которых имеется большое количество свободных зарядов, т. е. слабо связанных с ионом. Под действием внешнего электрического поля свободные заряды способны перемещаться по проводнику, положительные – по направлению поля, отрицательные – против поля. В результате на одном конце проводника будет скапливаться избыток положительного заряда, на другом – избыток отрицательного. Эти заряды называются *индуцированными*. Они распределяются по внешней поверхности проводника. Явление, описанное выше, называется *электростатической индукцией*. Процесс перераспределения зарядов в проводнике будет продолжаться до тех пор, пока поле внутри проводника не обратится в нуль, т.е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

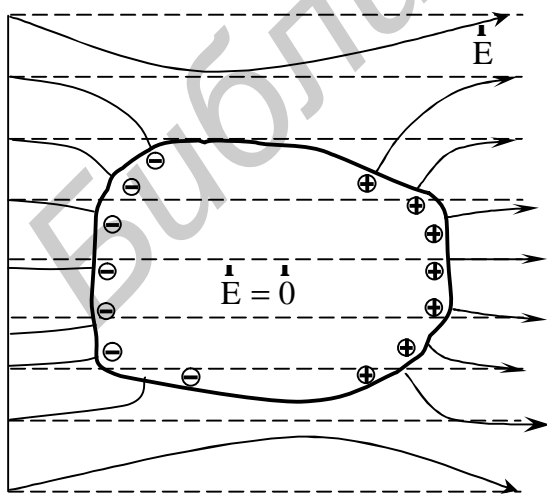


Рис. 32

Это происходит в течение очень короткого времени. Отсутствие поля внутри проводника означает, что потенциал во всех точках проводника постоянен ($\phi = \text{const}$), поэтому поверхность проводника является эквипотенциальной. Из этого следует, что вектор \mathbf{E} на внешней поверхности проводника направлен по нормали к каждой точке его поверхности, т.е.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n.$$

9.1. Электроёмкость проводников

Сообщённый уединённому проводнику заряд q распределяется по его поверхности так, чтобы напряжённость поля внутри проводника была равна нулю. Опыт показывает, что потенциал уединённого проводника пропорционален находящемуся на нём заряду, т.е.

$$q = C\varphi, \quad (9.1)$$

где C – коэффициент пропорциональности, называемый *электроёмкостью*. При этом полагают, что $\varphi(\infty) = 0$.

Из (9.1) следует, что

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (9.2)$$

Единица ёмкости в СИ: $1 [C] = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}} = 1 \text{ Ф}$.

Если за уединённый проводник взять шар радиусом R , погруженный в безграничный диэлектрик с проницаемостью ϵ , то его электроёмкость будет равна

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (9.3)$$

Уединённые проводники обладают небольшой ёмкостью. Даже шар таких размеров, как Земля, имеет ёмкость всего лишь 700 мкФ.

На практике же необходимы устройства, которые при небольшом потенциале накапливали бы на себе значительные по величине заряды.

Такие устройства называются *конденсаторами*. Их делают в виде двух проводников, помещённых близко друг к другу. Образующие конденсатор проводники называются *обкладками конденсатора*.

В зависимости от формы обкладок различают плоские, цилиндрические и сферические конденсаторы.

Ёмкость конденсатора определяется по формуле

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (9.4)$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – напряжение между обкладками.

Ёмкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}, \quad (9.5)$$

где S – площадь обкладки, d – расстояние между обкладками.

Ёмкость цилиндрического конденсатора равна

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon\mathbf{l}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad (9.6)$$

где \mathbf{l} – длина конденсатора, R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок конденсатора.

Ёмкость сферического конденсатора равна

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad (9.7)$$

где R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок конденсатора.

Электрическая ёмкость параллельно соединённых конденсаторов определяется формулой

$$C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (9.8)$$

Электрическая ёмкость последовательно соединённых конденсаторов определяется формулой

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (9.9)$$

9.2. Энергия электрического поля

Энергия электрического поля определяется выражением

$$W_{\text{Э}} = \int_{(V)} w dV, \quad (9.10)$$

где w – объемная плотность энергии электрического поля, V – объем пространства, в котором заключена энергия.

Электрическое поле двух параллельных бесконечных разноименно заряженных плоскостей (аналог плоского конденсатора) однородно и отлично от нуля внутри плоскостей. Тогда

$$W_{\text{Э}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} V, \quad (9.11)$$

где $C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$; $U = Ed$; $V = Sd$; E – напряженность электрического поля между плоскостями.

Для однородного электрического поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2}. \quad (9.12)$$

Тогда, зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме V :

$$W_{\text{Э}} = \int_{(v)} w dV = \int_{(v)} \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV. \quad (9.13)$$

Глава 10. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов. Заряды, образующие электрический ток, называются *носителями тока*. Под направлением тока понимается направление вектора плотности тока:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}, \quad (10.1)$$

где ρ – объемная плотность носителей тока, \vec{v} – скорость их упорядоченного движения.

$$\begin{cases} \rho > 0, \Rightarrow \vec{j} \uparrow \uparrow \vec{v}; \\ \rho < 0, \Rightarrow \vec{j} \uparrow \downarrow \vec{v}. \end{cases}$$

Заряд, переносимый через площадку dS_{\perp} , перпендикулярную плотности тока \vec{j} , за промежуток времени равен

$$dq = \rho dV = \rho v dt \Delta S_{\perp} = j dt \Delta S_{\perp},$$

отсюда

$$j = \frac{dq}{\Delta S_{\perp} dt} = \frac{I}{\Delta S_{\perp}}, \quad (10.2)$$

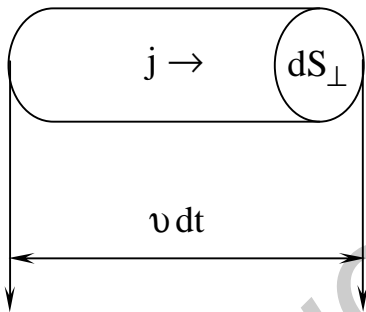


Рис. 33

где $I = \frac{dq}{dt}$ – сила тока, идущего через площадку dS_{\perp} . Из (10.2) вытекает, что сила тока, идущего через произвольную поверхность S , равна

$$I = \int_{(S)} (\vec{j}, d\vec{S}). \quad (10.3)$$

Для постоянного тока: $I = \frac{q}{t}$.

Единица электрического тока в СИ: $1 [I] = 1 \text{А}$.

Единица электрического заряда в СИ: $1 [q] = 1 \text{А} \cdot 1 \text{с} = 1 \text{Кл}$.

Под действием электрического поля положительные носители тока в проводнике перемещаются от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Это приводит к выравниванию потенциалов во всех точках проводника и исчезновению электрического тока. Поэтому для существования

постоянного тока в проводнике необходимо наличие источника тока, поддерживающего разность потенциалов на его концах за счет работы неэлектростатических (сторонних) сил. Необходимо создать замкнутую проводящую цепь, в которой на носители тока действуют также неэлектростатические (сторонние) силы.

Природа сторонних сил может быть разной: химической, механической и т.д. Сторонние силы характеризуются электродвижущей силой (ЭДС), действующей в цепи или на некотором ее участке:

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q},$$

где $A_{\text{ст}}$ – работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда q на рассматриваемом участке цепи.

10.1. Закон Ома



Рис. 34

На концах участка цепи 1-2 разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ (рис. 34).

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным. В противном случае – неоднородным.

Закон Ома для однородного участка цепи имеет следующий вид:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (10.4)$$

где R – электрическое сопротивление проводника.

Для однородного линейного проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (10.5)$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление; l – длина проводника; S – площадь поперечного сечения проводника.

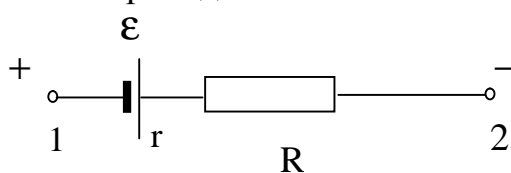


Рис. 35

Для неоднородного участка цепи (рис. 35), т.е. участка, где действует ϵ , закон Ома имеет вид

$$I = \frac{U \pm \epsilon}{R + r}, \quad (10.6)$$

где r – внутреннее сопротивление источника тока.

Знаки « \pm » отражают тот факт, что сторонние силы могут совершать как положительную, так и отрицательную работу на рассматриваемом участке цепи.

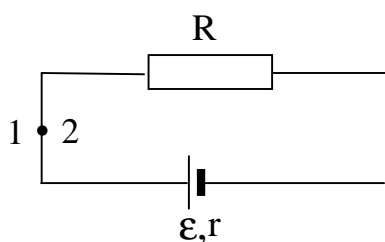


Рис. 36

Если же электрическая цепь замкнута, то выбранные точки 1 и 2 совпадают (рис. 36), $\varphi_1 = \varphi_2 = U = 0$, тогда

$$I = \frac{\epsilon}{R + r}. \quad (10.7)$$

Формула (10.7) представляет собой закон Ома для замкнутой цепи.

Единица электрического сопротивления в СИ: $1 [R] = \frac{1\text{В}}{1\text{А}} = 1 \text{ Ом}$.

Единица напряжения (ЭДС) в СИ: $1 [U] = 1[\epsilon] = \frac{1\text{Дж}}{1\text{Кл}} = 1 \text{ В}$.

10.2. Правила Кирхгофа

Расчеты сложных разветвленных цепей легко производить с помощью двух правил Кирхгофа.

Узлом называется точка разветвленной цепи, в которой сходится более двух проводников. Положительными считаются токи, входящие в узел, отрицательными – токи, выходящие из узла.

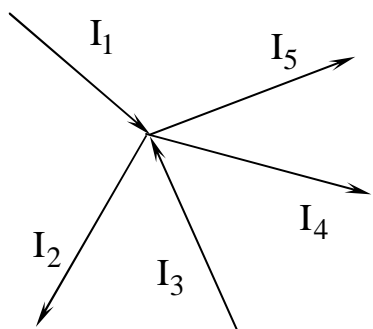


Рис. 37

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (10.8)$$

Рассмотрим это на примере (рис. 37):

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Второе правило Кирхгофа: алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления, через которые эти токи идут, равна алгебраической сумме всех ЭДС, встречающихся в данном контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \epsilon_k. \quad (10.9)$$

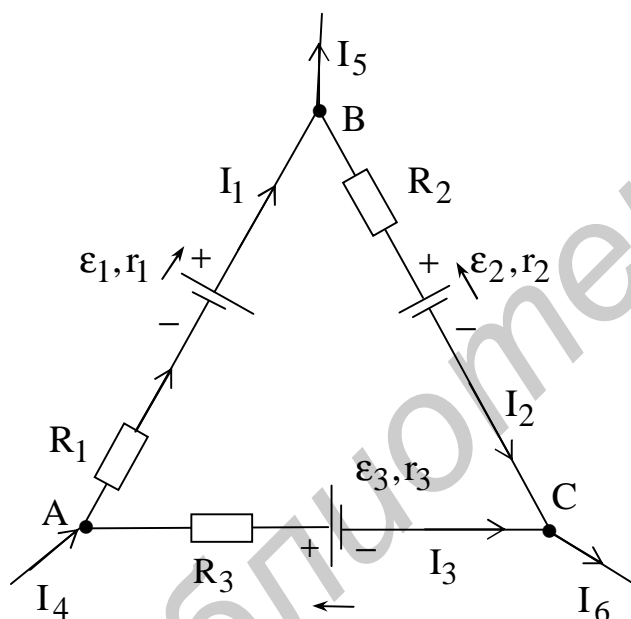


Рис. 38

В формуле (10.9) значение ϵ берется со знаком «+», если она создает ток, направленный в сторону обхода контура. В противном случае – со знаком «-». Токи, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считаются положительными, не совпадающие с направлением обхода – отрицательными.

Рассмотрим контур ABC (рис. 38). За положительное направление обхода примем направление обхода по часовой стрелке. Тогда из (10.8) следует, что

$$\begin{aligned} \text{для узла A: } I_4 - I_1 + I_3 &= 0; \\ \text{для узла B: } I_1 - I_5 - I_2 &= 0; \\ \text{для узла C: } I_2 + I_3 - I_6 &= 0. \end{aligned} \quad (10.8')$$

Система уравнений, следующая из закона Ома для каждого из трех неоднородных участков цепи с учетом наличия у ЭДС внутренних сопротивлений r_1, r_2, r_3 , примет вид:

$$\begin{aligned} I_1 r_1 + I_1 R_1 &= \varphi_A - \varphi_B + \varepsilon_1; \\ I_2 r_2 + I_2 R_2 &= \varphi_B - \varphi_C - \varepsilon_2; \\ -I_3 r_3 - I_3 R_3 &= \varphi_C - \varphi_A + \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Их алгебраическая сумма равна

$$I_1 r_1 + I_1 R_1 + I_2 r_2 + I_2 R_2 - I_3 r_3 - I_3 R_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3. \quad (10.9')$$

Решая совместно (10.8') и (10.9'), можно определить любые неизвестные величины.

10.3. Закон Джоуля – Ленца

Если ток проходит по неподвижному проводнику, то проводник нагревается. Количество выделившейся теплоты определяется *законом Джоуля–Ленца*. Для постоянного тока I оно равно

$$Q = UIt = RI^2 t = \frac{U^2}{R} t. \quad (10.10)$$

Если сила тока изменяется со временем, то

$$Q = \int_0^t RI^2 dt. \quad (10.11)$$

Величину $P = \frac{dQ}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$ называют тепловой мощностью тока на рассматриваемом участке цепи.

Единица тепловой мощности в СИ: $1[P] = \frac{1\text{Дж}}{1\text{с}} = 1\text{Вт}$.

Глава 11. МАГНИТОСТАТИКА

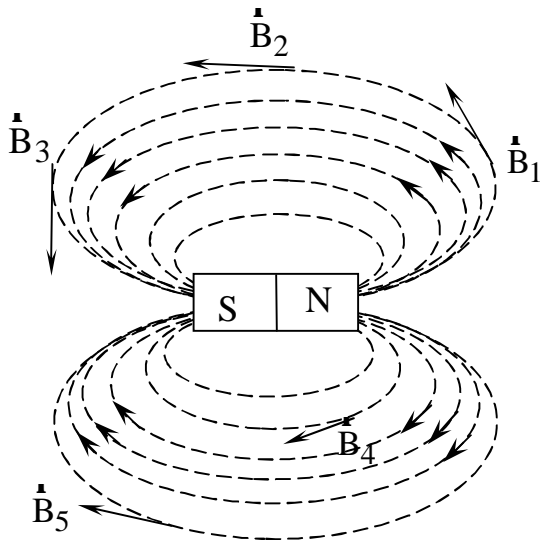
11.1. Магнитная индукция. Сила Лоренца

Магнитное поле создается движущимися зарядами (токами), телами, обладающими магнитным моментом (постоянный магнит) и переменным электрическим полем. *Силовой характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции \vec{B}* .

Магнитное поле изображают с помощью линий магнитной индукции, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \vec{B} .

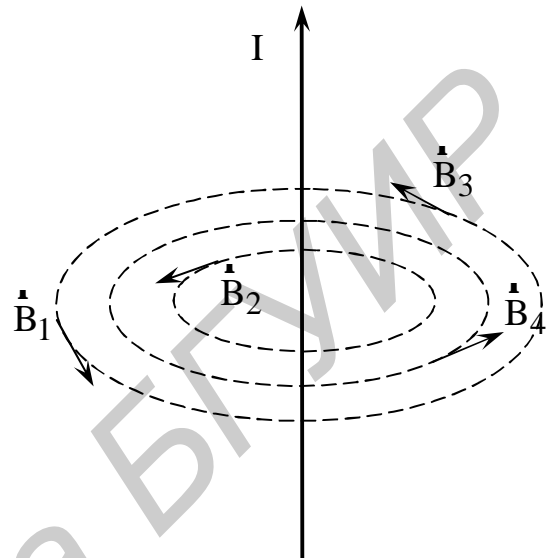
Линии магнитной индукции всегда замкнуты и охватывают проводники с током.

На рис. 39 и 40 изображены магнитные поля:



Поле постоянного магнита

Рис. 39



Поле бесконечно длинного
прямолинейного проводника
с током

Рис. 40

Магнитная индукция поля движущегося с постоянной скоростью \vec{v} заряда q (рис. 41) определяется в нерелятивистском случае ($v \ll c$) формулой

$$\vec{r} \vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} q \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (11.1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды, для вакуума $\mu = 1$.

Единица магнитной индукции в СИ: $[B] =$ тесла (Тл).

Магнитное поле действует на движущийся в нем заряд q с силой \vec{F} , которая называется *силой Лоренца*:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (11.2)$$

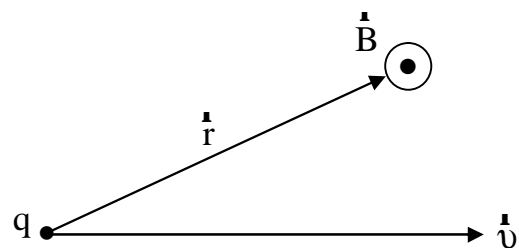


Рис. 41

Если заряд q положителен, направление силы $\dot{\mathbf{F}}_L$ совпадает с направлением вектора $[\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{B}}]$, если заряд отрицательный, $\dot{\mathbf{F}}_L$ и вектор $[\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{B}}]$ противоположны (рис. 42).

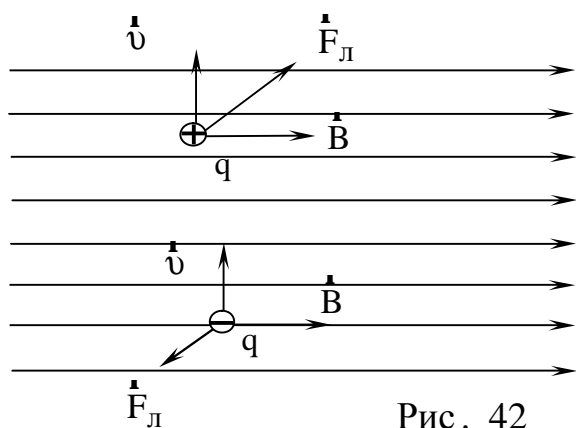


Рис. 42

Сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно скорости движения заряда, и поэтому она работы над зарядом не совершает, и кинетическая энергия заряженной частицы при движении в магнитном поле не изменяется. Модуль силы Лоренца равен

$F_L = |q|vB\sin\alpha$, из чего следует, что в однородном магнитном поле, если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, траекторией движения частицы является окружность; при $\alpha = 0$ частица движется вдоль силовых линий $\dot{\mathbf{B}}$ по прямой; при α – любом другом угле частица движется по винтовой линии.

11.2. Магнитное поле проводника с током.

Закон Био–Савара–Лапласа

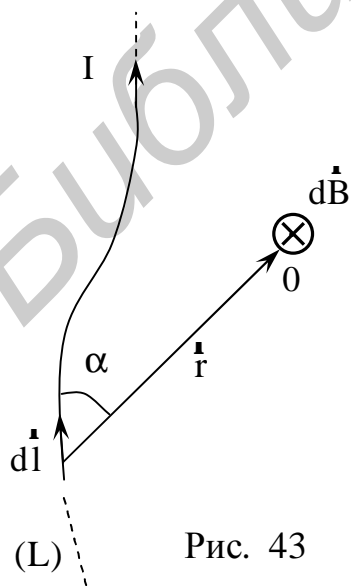


Рис. 43

Пусть по бесконечно длинному проводнику (L) течет ток I . Элемент проводника с током $d\dot{\mathbf{l}}$, направленный по току, создает в некоторой точке O магнитное поле, индукция которого $d\dot{\mathbf{B}}$ записывается в следующем виде:

$$d\dot{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \frac{[d\dot{\mathbf{l}}, \dot{\mathbf{r}}]}{r^3}. \quad (11.3)$$

Формула (11.3) – закон Био–Савара–Лапласа.

Модуль вектора $d\dot{\mathbf{B}}$ определяется выражением

$$d\mathbf{B} = |d\mathbf{B}| = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \frac{\sin \alpha dl}{r^2}.$$

Магнитная индукция поля всего проводника с током равна

$$\mathbf{B} = \int_{(L)} d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \int_{(L)} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (11.4)$$

Эта формула следует из принципа суперпозиции магнитных полей: магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме индукций магнитных полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i. \quad (11.5)$$

Формула (11.5) – математическая запись *принципа суперпозиции магнитных полей*.

11.3. Проводник с током и контур с током в магнитном поле.

Закон Ампера

На проводник с током, находящийся в магнитном поле, действует *сила Ампера* (рис. 44).

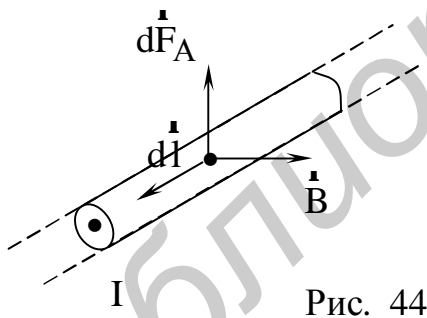


Рис. 44

Выделим элемент проводника с током $d\mathbf{l}$, направленный по току I . Тогда для проводника пренебрежимо малого сечения

$$d\mathbf{F}_A = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}], \quad (11.6)$$

где $d\mathbf{F}_A$ – сила, действующая на элемент проводника с током $d\mathbf{l}$ со стороны магнитного поля. Модуль силы Ампера равен

$$dF_A = |d\mathbf{F}_A| = IB \sin \alpha dl.$$

Если $d\mathbf{l} \uparrow \uparrow \mathbf{B}$, то $d\mathbf{F}_A = 0$.

Сила, действующая на весь проводник с током, равна

$$\mathbf{F}_A = \int_{(L)} d\mathbf{F}_A = I \int_{(L)} [d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (11.7)$$

На контур с током, помещенный в магнитное поле с индукцией \vec{B} , действует момент сил (рис. 45):

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (11.8)$$

$\vec{p}_m = IS\vec{n}$ – магнитный момент контура с током, где S – площадь поверхности контура; \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности контура, образующий с направлением тока правый винт.

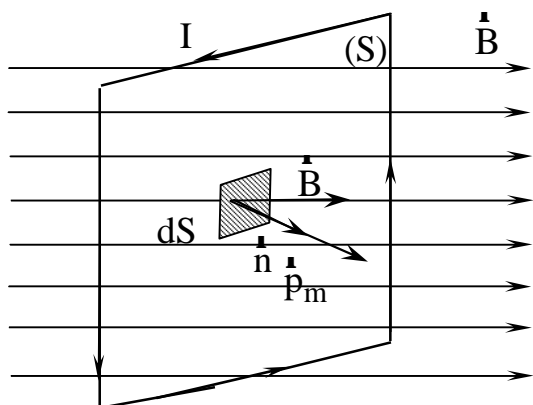


Рис. 45

Рамка с током будет поворачиваться в магнитном поле до тех пор, пока \vec{M} не станет равным нулю. Это будет, когда \vec{p}_m станет $\uparrow\uparrow \vec{B}$ (устойчивое положение равновесия). Если $\vec{p}_m \uparrow\downarrow \vec{B}$, то неустойчивое.

Работа сил поля по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна

$$A_{12} = I\Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1), \quad (11.9)$$

где Φ_1 и Φ_2 – значения магнитного потока вектора \vec{B} через поверхность контура в начальном и конечном положениях.

11.4. Поток и циркуляция вектора \vec{B}

Магнитный поток вектора \vec{B} через произвольную поверхность S (рис. 45) равен

$$\Phi_B = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_{(S)} (\vec{B}, \vec{n}) dS = \int_{(S)} B_n dS, \quad (11.10)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности S в данной точке.

Единица магнитного потока в СИ: $1[\Phi] = 1$ вебер (Вб).

Циркуляция вектора \vec{B} по произвольному контуру L равна

$$C_B = \oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{(L)} (\vec{B}, \vec{\tau}) dl = \oint_{(L)} B_\tau dl, \quad (11.11)$$

где $\hat{\tau}$ – единичный вектор, касательный к контуру L .

Теорема Гаусса

Поток вектора $\dot{\mathbf{B}}$ через любую замкнутую поверхность (S) равен нулю:

$$\oint_{(S)} (\dot{\mathbf{B}}, d\dot{\mathbf{S}}) = 0. \quad (11.12)$$

Из этой теоремы следует, что в природе отсутствуют магнитные заряды–точечные магнитные однополюсники (монополи).

Теорема о циркуляции вектора $\dot{\mathbf{B}}$ (Закон полного тока)

Циркуляция вектора $\dot{\mathbf{B}}$ по произвольному замкнутому контуру (L) равна произведению $\mu\mu_0$ на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_{(L)} (\dot{\mathbf{B}}, d\dot{\mathbf{l}}) = \oint_{(L)} \dot{\mathbf{B}}_{\tau} dl = \mu\mu_0 \sum_{k=1}^N I_k. \quad (11.13)$$

При этом ток I_k считается положительным, если он образует правый винт с выбранным направлением обхода контура. Вектор $\dot{\mathbf{H}} = \frac{\dot{\mathbf{B}}}{\mu_0\mu}$ называется напряженностью магнитного поля. Токи свободных зарядов (т.е. не входящих в состав молекул вещества) называются токами проводимости. Закон полного тока для вектора $\dot{\mathbf{H}}$:

$$\oint_{(L)} (\dot{\mathbf{H}}, d\dot{\mathbf{l}}) = \sum_{k=1}^N I_{k_{\text{пр}}} = I_{\text{пр}} = \int_{(S)} (\dot{\mathbf{j}}_{\text{пр}}, d\dot{\mathbf{S}}), \quad (11.14)$$

где (S) – произвольная поверхность, ограниченная контуром (L) ; $\dot{\mathbf{j}}_{\text{пр}}$ – плотность тока проводимости; $I_{\text{пр}}$ – ток проводимости.

11.5. Явление электромагнитной индукции

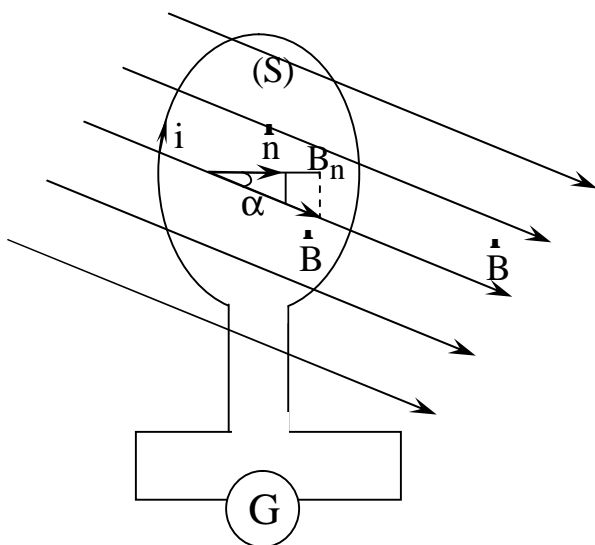


Рис. 46

При изменении потока магнитной индукции через поверхность (S), ограниченную контуром, возникает электродвижущая сила индукции ϵ_i , которая приводит к появлению в контуре индукционного тока i . Электродвижущая сила индукции в контуре равна с обратным знаком скорости изменения магнитного потока Φ через поверхность, ограниченную контуром:

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (11.15)$$

Равенство (11.15) называется законом Фарадея, или *законом электромагнитной индукции*.

Знак «—» в формуле обусловлен правилом Ленца.

Правило Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

Величина ϵ_i не зависит от способа изменения Φ , а определяется лишь скоростью изменения Φ , т.е. $\frac{d\Phi}{dt}$.

Так как поток определяется формулой $\Phi_B = \int_{(S)} (\mathbf{B}, d\mathbf{S}) = \int_{(S)} (\mathbf{B}, \mathbf{n}) dS$, то

причинами изменения потока Φ_B могут быть:

- 1) изменение \mathbf{B} ;
- 2) изменение (S);
- 3) изменение направления \mathbf{n} по отношению к \mathbf{B} .

11.6. Явление самоиндукции

Электрический ток, текущий в контуре, создает пронизывающий этот контур магнитный поток Φ . При изменении Φ в контуре индуцируется ЭДС самоиндукции (ε_c). Это явление называется *самоиндукцией*. Если контур содержит N витков (соленоид), то $\Psi = N\Phi$ – потокосцепление. Так как $B \sim I$, из закона Био-Савара-Лапласа следует, что $\Psi = LI$, где L – коэффициент пропорциональности, называемый индуктивностью контура.

Единица индуктивности в СИ: $1[L] = 1$ генри (Гн).

Тогда

$$\varepsilon_c = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \quad (11.16)$$

Если $L = \text{const}$, то

$$\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}. \quad (11.16')$$

Можно показать, что индуктивность длинного соленоида равна

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l} = \mu_0\mu\frac{N^2SI}{l^2} = \mu_0\mu n^2V,$$

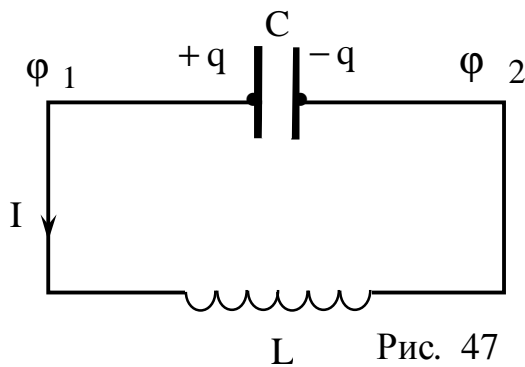
где N – число витков; S – площадь витка; l – длина соленоида; $V = Sl$ – объем соленоида.

При самоиндукции в контуре возникает ток самоиндукции, который противодействует изменению основного тока в цепи, замедляя его убывание или возрастание.

11.7. Электромагнитные колебания

Электромагнитные колебания можно разделить на незатухающие, затухающие и вынужденные.

Рассмотрим свободные гармонические колебания в электрическом колебательном контуре.



Простейший колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью C и соединённой с ним последовательно катушки индуктивностью L (рис. 47). При замыкании на катушку заряженного конденсатора в колебательном контуре возникают свободные колебания заряда конденсатора и тока в катушке.

Полагая справедливым для данного контура закон Ома, запишем

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_c \quad \text{или} \quad IR = \frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}. \quad (11.17)$$

Так как $I = -\frac{dq}{dt}$, $dq < 0$ (заряд на положительной пластине в указанной

ситуации убывает), то $\frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0$ или $R + \frac{R}{L}q + \frac{q}{LC} = 0$.

$$R + \frac{1}{LC}q = 0 \quad \text{или} \quad R + \omega_0^2 q = 0. \quad (11.18)$$

Это дифференциальное уравнение гармонических незатухающих электромагнитных колебаний, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная циклическая частота колебаний контура.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (11.19)$$

(11.9) – формула Томпсона (период незатухающих электромагнитных колебаний).

Решением уравнения (11.18) является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (11.20)$$

описывающая процесс колебаний заряда в контуре, где q_m – амплитуда заряда конденсатора, φ_0 – начальная фаза колебаний.

Свободные затухающие колебания

Электрическое сопротивление реального контура $R \neq 0$, и дифференциальное уравнение колебаний в контуре имеет вид

$$L\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0, \text{ или } \ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (11.21)$$

Это дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний,

где $\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Решение уравнения (11.21) запишется так:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi_0), \quad (11.22)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний контура, константы q_0 и φ_0 определяются из начальных условий.

Вынужденные колебания

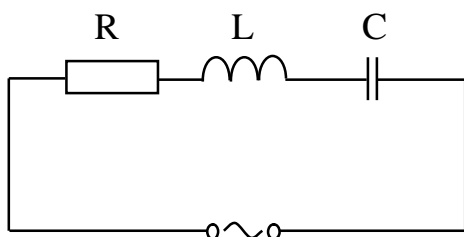


Рис. 48

Если в колебательный контур включить источник электрической энергии, ЭДС которого изменяется с течением времени по гармоническому закону (рис. 48), то

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \Omega t, \quad (11.23)$$

где Ω – циклическая частота вынуждающей ЭДС.

Тогда
$$L\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L} \varepsilon(t). \quad (11.24)$$

Это дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний в контуре.

11.8. Уравнения Максвелла

В 1871 году Максвелл предложил теорию единого электромагнитного поля, создаваемого электрическими зарядами и токами. Теория Максвелла явилась результатом обобщения опытных фактов и важнейших законов, описывающих электрические и магнитные явления.

Электромагнитное поле – совокупность двух взаимосвязанных полей – электрического и магнитного.

Электромагнитное поле описывают следующими векторами:

- \vec{E} (напряжённость электрического поля);
- \vec{D} (электрическая индукция (электрическое смещение));
- \vec{B} (магнитная индукция);

$\dot{\mathbf{H}}$ (напряжённость магнитного поля).

Запишем уравнения Максвелла в интегральной форме*.

Первое уравнение:

$$\oint_{(L)} (\dot{\mathbf{E}}, d\mathbf{l}) = - \int_{(S)} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right) \quad (11.25)$$

является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея.

Из уравнения (11.25) можно сделать вывод: изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.

Второе уравнение:

$$\oint_{(L)} (\dot{\mathbf{H}}, d\mathbf{l}) = \int_{(S)} (\dot{\mathbf{j}}_{\text{пр}}, d\mathbf{S}) + \int_{(S)} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t}, d\mathbf{S} \right) = I_{\text{пр}} + I_{\text{см}}, \quad (11.26)$$

где $\dot{\mathbf{j}}_{\text{пр}}$ – плотность тока проводимости; $\frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t} = \dot{\mathbf{j}}_{\text{см}}$ – плотность тока смещения.

Это уравнение является обобщением закона полного тока.

Из уравнения (11.26) можно сделать вывод: ток проводимости и ток смещения (т.е. изменяющееся электрическое поле) порождают магнитное поле.

Третье уравнение:

$$\oint_{(S)} (\dot{\mathbf{D}}, d\mathbf{S}) = \int_{(S)} \rho_{\text{стор}} dV = q_{\text{стор}} \quad (11.27)$$

* Используя теоремы Стокса и Остроградского – Гаусса, из уравнений Максвелла в интегральной форме можно перейти к уравнениям Максвелла в дифференциальной форме, которые более удобны для описания электромагнитного поля.

описывает теорему Гаусса для $\dot{\mathbf{D}}$. Оно выражает тот факт, что источником вектора электрического смещения $\dot{\mathbf{D}}$ являются сторонние заряды.

Четвёртое уравнение:

$$\oint_{(S)} (\dot{\mathbf{B}}, d\mathbf{S}) = 0 \quad (11.28)$$

описывает теорему Гаусса для индукции магнитного поля $\dot{\mathbf{B}}$. Оно отражает опытные данные об отсутствии однополюсных магнитных зарядов (монополей).

Систему уравнений Максвелла необходимо дополнить материальными уравнениями, характеризующими электрические и магнитные свойства среды.

В случае изотропных сред имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}} &= \varepsilon_0 \varepsilon \dot{\mathbf{E}}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mu \mathbf{H}, \\ \dot{\mathbf{j}}_{\text{пр}} &= \sigma \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (11.29)$$

где σ – удельная электрическая проводимость; ε – диэлектрическая проницаемость среды; μ – магнитная проницаемость среды; $\dot{\mathbf{j}}_{\text{пр}}$ – плотность тока проводимости.

Из уравнений Максвелла вытекает существование электромагнитных волн – переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью.

$$\begin{aligned} v &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \\ c &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}, \end{aligned} \quad (11.30)$$

где n – абсолютный показатель преломления среды; c – скорость света в вакууме; для вакуума $v = c$ (т.к. $\varepsilon = \mu = 1$).

11.9. Электромагнитные волны и их свойства

Существование электромагнитных волн следует из уравнений Максвелла. Векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ удовлетворяют в однородной, изотропной, непроводящей среде волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (11.31)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (11.32)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Свойства электромагнитных волн:

1) электромагнитные волны – поперечные. Векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, т.е. вектору $\dot{\mathbf{v}}$;

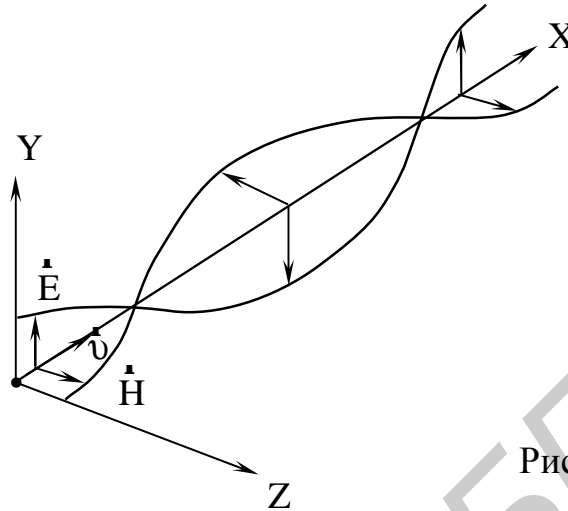


Рис. 49

2) векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{v}}$ образуют правую тройку векторов;
 3) в случае плоской монохроматической волны, распространяющейся в направлении оси X (рис. 49), проекции векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ на оси координат совершают гармонические колебания одинаковой частоты, равной частоте волны ω .

$$\begin{cases} E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi_{10}); \\ H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \varphi_{20}), \end{cases} \quad (11.33)$$

где $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ – начальные фазы.

Волны, описываемые уравнениями (11.33), удовлетворяют волновым уравнениям (11.31) и (11.32);

4) векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ всегда колеблются в одинаковых фазах, т.е. векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ одновременно обращаются в нуль, и их модули одновременно достигают максимальных значений. Математически это означает, что в уравнениях (11.33) $\varphi_{10} = \varphi_{20}$.

Амплитудные значения E_m и H_m связаны соотношением

$$E_m \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_m \sqrt{\mu_0 \mu}. \quad (11.34)$$

5) электромагнитная волна обладает импульсом и переносит энергию вдоль направления своего распространения.

Плотность потока электромагнитной энергии определяется по формуле

$$\dot{\mathbf{S}} = [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}]. \quad (11.35)$$

Вектор $\dot{\mathbf{S}}$ называют *вектором Пойнтинга*.

Вектор $\dot{\mathbf{S}}$ направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

11.10. Энергия магнитного поля

Энергия магнитного поля определяется выражением

$$W_M = \int_{(V)} w dV, \quad (11.36)$$

где w – объёмная плотность энергии магнитного поля; V – объём пространства, в котором заключена энергия.

Магнитное поле бесконечно длинного соленоида однородно и отлично от нуля только внутри соленоида. Энергия магнитного поля, заключённого внутри соленоида, равна

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu n^2 VI^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H^2 V}{2}, \quad (11.37)$$

где $L = \mu_0 \mu n^2 V$, $H = nI$ – напряжённость магнитного поля.

Для однородного магнитного поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Тогда, зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключённую в любом объёме V :

$$W_M = \int_{(V)} w dV = \int_{(V)} \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} dV. \quad (11.38)$$

Энергия электрического поля определялась в разд. 9.2.

Раздел 4. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Глава 12. ВОЛНОВАЯ ПРИРОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

12.1. Световые волны. Принцип суперпозиции световых волн.

Когерентность световых волн

Свет – сложное явление, обладающее двойственной корпускулярно-волновой природой.

В одних случаях он ведёт себя как волны, в других – как поток особых частиц-фотонов (или квантов). Волновая оптика рассматривает явления, в которых проявляется волновая природа света (интерференция, дифракция, поляризация).

Световая волна – электромагнитная волна. Поэтому в основе волновой оптики лежат уравнения Максвелла и вытекающие из них соотношения для электромагнитных волн. В волновой оптике справедлив принцип суперпозиции волн.

Вектор $\dot{\mathbf{E}}$ называют *световым вектором*, т.к. физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и другие действия света вызываются колебаниями именно электрического вектора.

Колебания светового вектора в случае плоской волны описываются уравнением

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \dot{A} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \varphi_0), \quad (12.1)$$

где A – амплитуда колебаний светового вектора; $\mathbf{k} = k \frac{\mathbf{v}}{v}$ – волновой вектор, $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, v – скорость света в среде. Если световой поток

создается несколькими источниками, излучающими волны $\dot{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, t)$ $1 \leq i \leq N$, то колебания светового вектора в области их перекрытия описываются уравнением

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, t). \text{ Это утверждение называется } \textit{принципом суперпозиции волн}.$$

Монохроматическая волна – световая волна определённой частоты.

Когерентными называются монохроматические волны, которые имеют постоянную во времени в каждой точке пространства разность фаз. При наложении двух (или нескольких) когерентных световых волн с одинаковым направлением колебаний вектора $\dot{\mathbf{E}}$ происходит пространственное перераспределение светового потока, в результате чего в одних местах возникают максимумы (усиление света), а в других – минимумы интенсивности (ослабление света). Это явление называется *интерференцией света*.

Естественные источники света некогерентны. Когерентные световые волны можно получить, разделив свет от одного источника на две или несколько волн (с помощью отражений и преломлений).

12.2. Интерференция света

Пусть две монохроматические световые волны, накладываясь друг на друга, возбуждают в определённой точке пространства колебания одинакового направления.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}_1 &= \dot{A}_1 \cos \varphi_1(\mathbf{r}, t), \\ \dot{\mathbf{E}}_2 &= \dot{A}_2 \cos \varphi_2(\mathbf{r}, t),\end{aligned}\quad (12.2)$$

где A_1, A_2 – амплитуды колебаний волн, $\varphi_1(\mathbf{r}, t), \varphi_2(\mathbf{r}, t)$ – фазы волн.

Амплитуда результирующего колебания равна

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Для однородных сред интенсивность света I пропорциональна усредненному по времени значению A^2 , т.е.

$$I \sim \langle A^2 \rangle.$$

Тогда

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle. \quad (12.3)$$

$\delta\varphi = \varphi_2(\mathbf{r}, t) - \varphi_1(\mathbf{r}, t)$ – разность фаз двух волн в рассматриваемой точке пространства. Если $\delta\varphi$ зависит от времени (волны некогерентны), то $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = 0$, $I = I_1 + I_2$ и интерференция отсутствует. Если же $\delta\varphi$ в каждой точке \mathbf{r} не зависит от t , то в случае $\cos \delta\varphi > 0$ $I > I_1 + I_2$, т.е. наблюдается усиление света (*max* интенсивности, если $\cos \delta\varphi = 1$).

Если же $\cos \delta\varphi < 0$, то $I < I_1 + I_2$, т.е. наблюдается ослабление света (*min* интенсивности, если $\cos \delta\varphi = -1$).

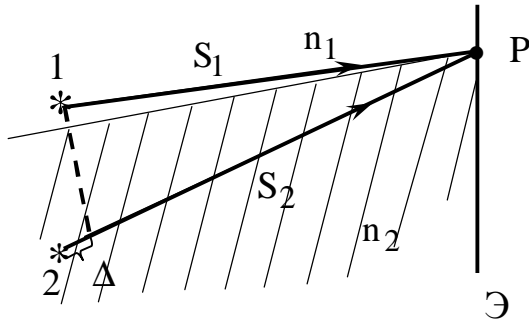


Рис. 50

Пусть два когерентных источника посылают свет в точку P, находящуюся на экране. Оптической разностью хода двух волн называют величину

$$\Delta = n_2 S_2 - n_1 S_1 = L_2 - L_1, \quad (12.4)$$

где $L_1 = n_1 S_1$, $L_2 = n_2 S_2$ – оптические пути волн 1 и 2, S_1, S_2 – геометрические пути волн.

Формула связи Δ и $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta, \quad (12.5)$$

где λ_0 – длина волны в вакууме.

Длина волны в среде

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n},$$

где n – абсолютный показатель преломления среды.

Из сказанного выше следует, что если в рассматриваемой точке разность фаз двух когерентных волн равна

$$\delta\varphi = \pm 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.6)$$

то получаем условие интерференционного *максимума*.

Если же разность фаз

$$\delta\varphi = \pm(2m + 1)\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.7)$$

то получаем условие интерференционного *минимума*.

Из (12.5) и (12.7) следует, что в случае интерференционного максимума

$$\Delta = \pm 2m \frac{\lambda_0}{2} = \pm m \lambda_0, \quad (12.8)$$

а минимума –

$$\Delta = \pm(2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}. \quad (12.9)$$

12.3. Дифракция света. Принцип Гюйгенса – Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция Френеля от круглого отверстия

Дифракцией называется совокупность явлений, связанных с перераспределением светового потока, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями (прохождение света через малые отверстия, вблизи границ непрозрачных тел и т.д.)

Различают два вида дифракции: дифракцию в расходящихся лучах (дифракция Френеля) и дифракцию в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера). Для описания дифракции используется принцип Гюйгенса–Френеля.

Принцип Гюйгенса–Френеля: каждая точка произвольной волновой поверхности является источником вторичных когерентных волн, а интенсивность света в любой точке перед волновой поверхностью определяется как результат интерференции вторичных волн.

Рассмотрим это на примере.

Пусть из точечного источника S распространяется сферическая волна. Разобьём сферическую волновую поверхность на кольцевые зоны так, чтобы расстояние от краёв каждой зоны до точки наблюдения P отличалось бы на $\lambda/2$. Тогда фаза колебаний, возбуждаемых соседними зонами в точке P , отличается на π .

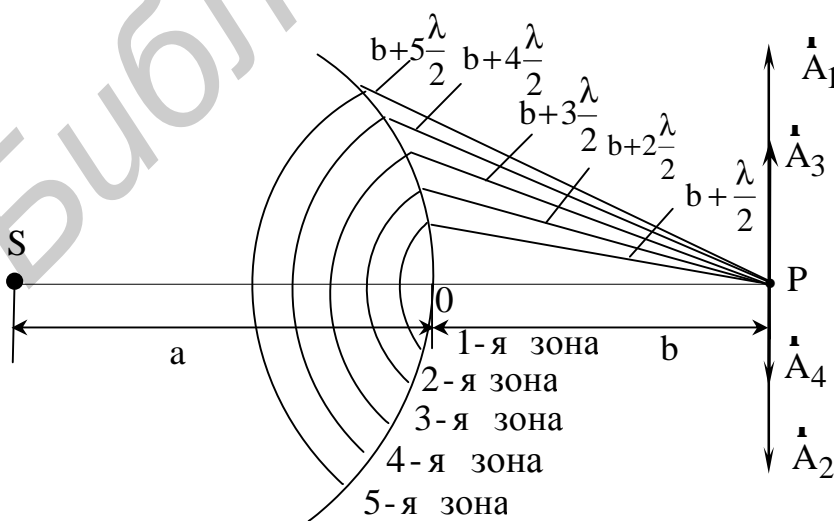


Рис. 51

Амплитуда A результирующего колебания в точке P может быть представлена в виде

$$\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3 + \dots + \dot{A}_m \dots, \quad (12.10)$$

или

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \dots \pm A_m \dots \quad (12.10')$$

Так как $A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_m \dots$, т.е. амплитуды колебаний образуют монотонно убывающую последовательность в точке P , то, учитывая (12.10'), получаем

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2}\right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2}\right) + \dots \quad (12.11)$$

Вследствие монотонного убывания A_m можно приблизительно считать, что

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Поэтому слагаемые (в сумме в скобках) близки к нулю, и для большого m можно приближенно считать, что амплитуда, создаваемая в точке P всей сферической волновой поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной лишь центральной зоной, т.е.

$$A = \frac{A_1}{2}. \quad (12.12)$$

Поставим на пути сферической световой волны непрозрачный экран с вырезанным в нём круглым отверстием радиуса r_0 (рис. 52). Радиус m -й зоны волновой поверхности, укладывающийся в отверстие, обозначим r_m . Зная a и b , можно получить формулу

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}, \quad (12.13)$$

где a – расстояние от источника S до отверстия в преграде Π , b – расстояние от отверстия до точки P на экране, λ – длина волны.

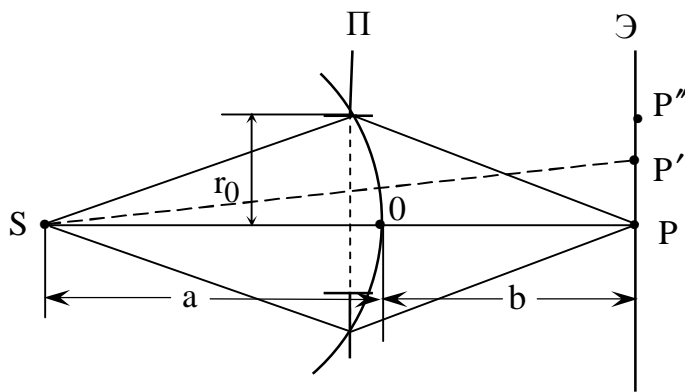


Рис. 52



Рис. 53

Если отверстие оставит открытым m первых зон Френеля, построенных для точки P , то $r_0 = r_m$, и тогда

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda}. \quad (12.14)$$

Из (12.14) следует, что число открытых зон

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (12.15)$$

В соответствии с (12.11) амплитуда в точке P будет равна

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{Am}{2}, \quad (12.16)$$

где «+» берётся для нечётных m , а «-» для чётных. Аналогичные рассуждения можно провести для точек P' и P'' .

На экране будет наблюдаться система чередующихся тёмных и светлых колец с общим центром в точке P , лежащих напротив центра отверстия (рис. 53). Если в отверстие укладывается чётное число зон Френеля, то в точке P будет наблюдаться тёмное пятно, если в отверстие укладывается нечётное число зон Френеля, то в центре картины будет светлое пятно.

12.4. Дифракция Фраунгофера от щели

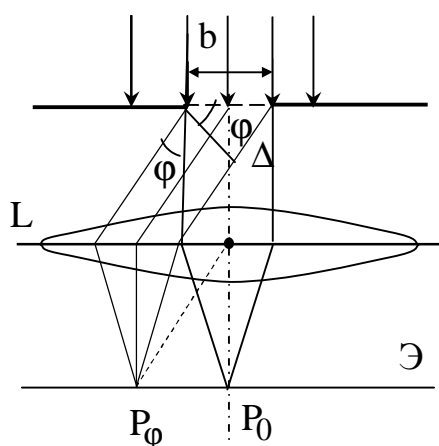


Рис. 54

Рассмотрим дифракцию света на узкой длинной щели в непрозрачном экране (рис. 54). Плоская световая волна падает нормально на щель. Поместим за щелью собирающую линзу L , а в фокальной плоскости линзы – экран.

Разобьём открытую часть волновой поверхности на равные по ширине зоны.

Вторичные волны, посылаемые зонами в направлении, определяемом углом φ , соберутся на экране в точке P_φ . Разность хода

двух волн, идущих в точку P на экране от краев щели, равна $\Delta = b \sin \varphi$, где b – ширина щели.

При значении φ , удовлетворяющих условию

$$\Delta = b \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda \quad (k=1,2,3...), \quad (12.17)$$

на экране будет наблюдаться *min* интенсивности.

Положение *max* интенсивности, кроме центрального, определяется условием

$$\Delta = b \sin \varphi = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (12.18)$$

На экране будет наблюдаться дифракционная картина в виде чередующихся темных и светлых полос, параллельных щели. Кривая, описывающая дифракционную картину от одной щели, представлена на рис. 55.

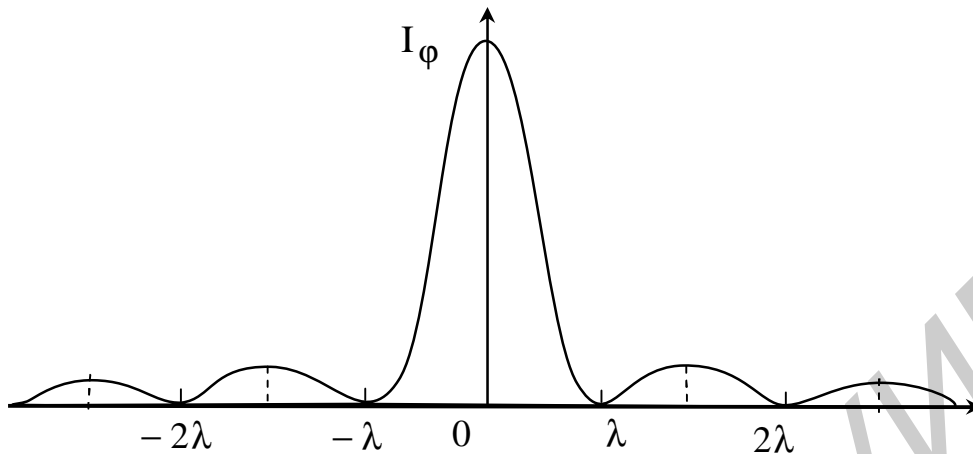


Рис. 55

$b \sin \phi$

12.5. Дифракционная решетка

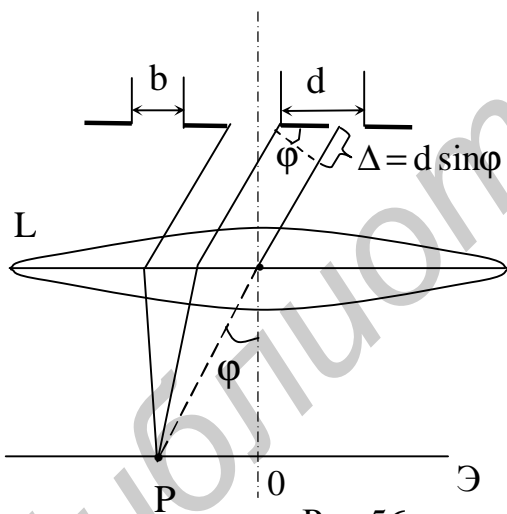


Рис 56

Дифракционная решетка – система параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками (рис. 56). Расстояние d называется периодом решетки:

$$d = a + b,$$

где b – ширина щели, a – ширина непрозрачного промежутка.

Зная длину решетки l и число щелей N , период решетки определится отношением $d = \frac{l}{N}$.

Используя принцип Гюйгенса – Френеля, можно показать, что распределение интенсивности света, прошедшего через решетку, в точках

фокальной плоскости линзы L (рис. 56), задаваемых углом φ , в случае $N = 4$ и $\frac{d}{b} = 3$ изображается графиком, представленным на рис. 57.

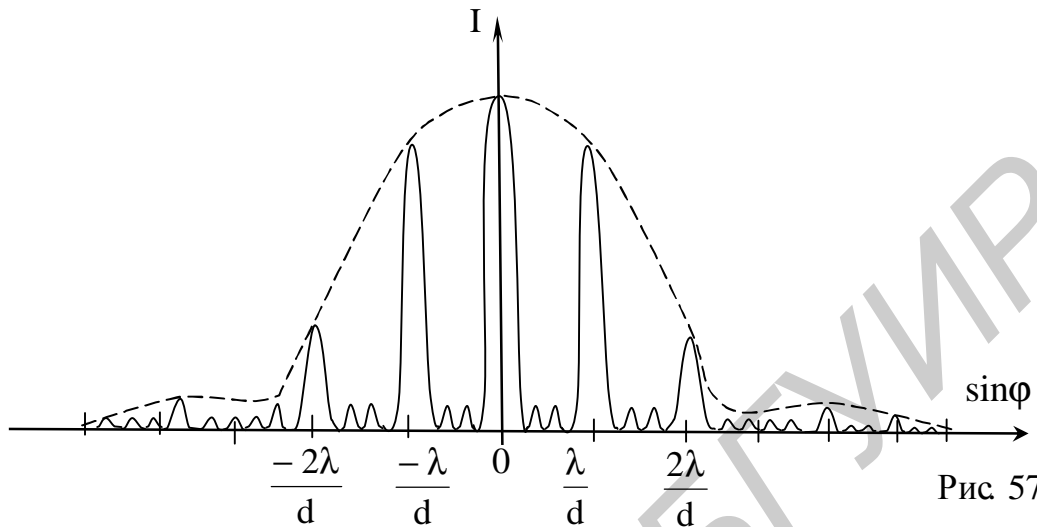


Рис 57

В общем случае дифракционная картина решетки будет определяться тремя условиями:

$$\begin{aligned}
 b \sin \varphi &= k\lambda & k &= \pm 1, 2, 3, \dots & \text{min} \\
 d \sin \varphi &= k' \frac{\lambda}{N} & k' &= \pm 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, N-1, N+1, N+2, \dots & \text{добавочные min} \\
 (12.19) \quad d \sin \varphi &= m\lambda & m &= \pm 0, 1, 2, \dots & \text{главные max.}
 \end{aligned}$$

Между добавочными минимумами располагаются слабые *вторичные максимумы*. Число таких максимумов, приходящееся на промежуток между соседними главными максимумами, равно $N - 2$.

Количество наблюдаемых главных максимумов определяется неравенством $m \leq \frac{d}{\lambda}$, т.к. модуль $\sin \varphi$ не может превысить единицу, и, следовательно,

$$m_{\max} = \left[\frac{d}{\lambda} \right].$$

Всего наблюдаемых главных максимумов будет $2m_{\max} + 1$

(центральный). Положение главных максимумов зависит от длины волны λ . Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального, разложатся в спектр, фиолетовая часть которого будет обращена

к центру дифракционной картины, а красная – наружу. Эти главные максимумы будут образовывать спектры 1, 2, 3 и т.д. порядков, расположенных симметрично относительно центральной белой полосы. Таким образом, дифракционная решетка представляет собой спектральный прибор.

12.6. Поляризация света. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса. Закон Брюстера

Если все направления колебаний светового вектора \vec{E} в световой волне равновероятны, такой свет называют *естественным* (рис. 58, а). Если колебания вектора \vec{E} имеют какое-либо преимущественное направление колебаний, то имеет место *частично поляризованный свет* (рис. 58, б). Свет, в котором вектор \vec{E} колеблется только в одном направлении, перпендикулярном направлению распространения, называется *плоскополяризованным* (линейно поляризованным) (рис. 58, в).

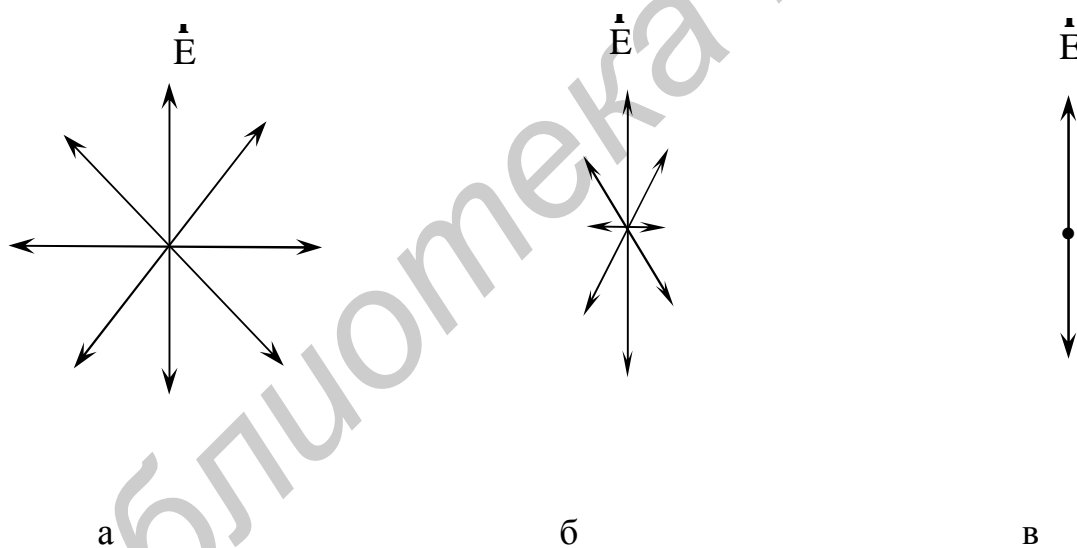


Рис. 58

Естественный свет можно преобразовать в плоскополяризованный, используя приборы, называемые *поляризаторами*. Эти приборы свободно пропускают колебания, параллельные плоскости, которая называется плоскостью поляризатора, а колебания, перпендикулярные его плоскости, полностью или частично задерживают.

В качестве поляризатора используют плоскопараллельную пластинку, вырезанную специальным образом из анизотропного кристалла, например турмалина.

Возьмем пластинку турмалина T_1 и поставим ее на пути естественного света. Пластинка преобразует естественный свет в плоскополяризованный.

Такая пластинка называется поляризатором. Вторая пластинка T_2 , служащая для анализа степени поляризации света, называется анализатором.

В естественном свете все значения φ (угол между колебаниями вектора \vec{E} и плоскостью поляризатора) равновероятны. Интенсивность прошедшей волны

$I_0 = I_e \langle \cos^2 \varphi \rangle$. А так как $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$, то поляризованный свет, вышедший

из поляризатора T_1 , будет иметь интенсивность

$$I_0 = \frac{1}{2} I_e$$

(12.20)

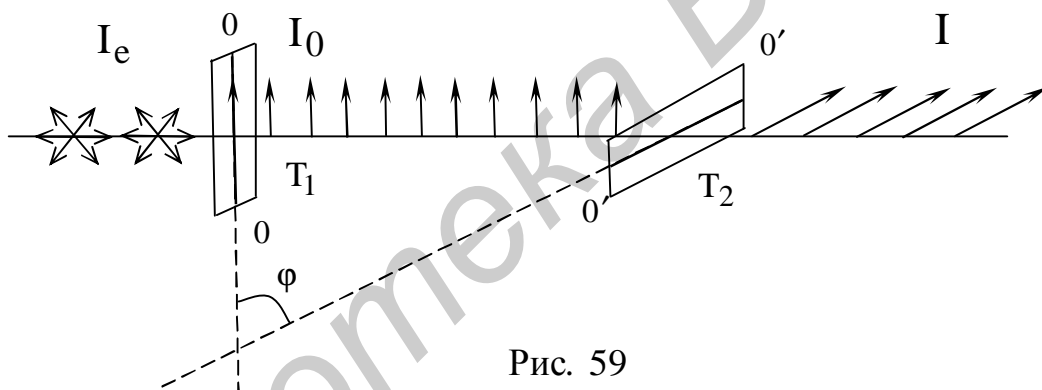


Рис. 59

Из анализатора T_2 выйдет свет интенсивностью

$$I = I_0 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_e \cos^2 \varphi, \quad (12.21)$$

где φ – угол между главными плоскостями поляризатора T_1 и анализатора T_2 . Соотношение (12.21) называют *законом Малюса*.

Если поляризаторы параллельны ($\varphi = 0$), то

$$I = I_{\max} = \frac{1}{2} I_e.$$

Если поляризаторы скрещены ($\alpha = 90^0$), то

$$I = I_{\min} = 0. \quad (12.22)$$

Явление поляризации света имеет место и при отражении или преломлении света на границе двух изотропных диэлектриков. При падении света на границу раздела двух диэлектриков (пример: воздух и стекло), часть лучей отражается в первую среду, часть преломляется и распространяется во второй среде.

Существует такой угол падения, при котором отраженный свет полностью поляризован, а преломленный – частично. Этот угол называется *углом Брюстера*.

Для угла Брюстера выполняется соотношение

$$\operatorname{tg} i_{\text{Бр}} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

(12.23)

называемое *законом Брюстера*, где n_{21} – показатель преломления второй среды относительно первой.

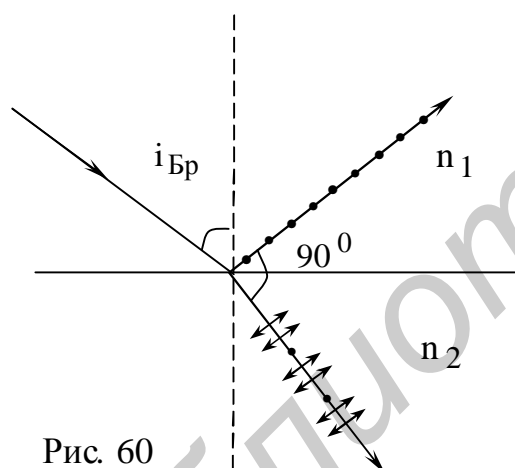


Рис. 60

Если свет падает на границу раздела двух сред под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны и отраженный луч полностью поляризован (он содержит только колебания, перпендикулярные плоскости падения). Степень поляризации преломленного луча при угле падения, равном $\Theta_{\text{Бр}}$, достигает наибольшего значения, однако этот луч остается поляризован лишь частично.

Раздел 5. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Глава 13. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В предыдущем разделе на примере явлений интерференции, дифракции и поляризации было показано, что свет (э/м излучение) обладает волновой природой. Однако существуют явления с участием света, которые невозможно объяснить, используя волновые представления. Рассмотрим явления, подтверждающие квантовую (корпускулярную) природу света.

13.1. Тепловое излучение. Законы теплового излучения

Тепловым излучением называется электромагнитное излучение тел за счет их внутренней энергии. Тепловое излучение может быть *равновесным*. При равновесном излучении расход энергии тела на тепловое излучение компенсируется за счет поглощения телом такого же количества энергии падающего на него излучения.

Поток энергии, испускаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям, называется энергетической светимостью тела и обозначается буквой R_T :

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\omega T} d\omega, \quad (13.1)$$

где $r_{\omega T}$ – испускательная способность тела.

Поглощательной способностью тела называют величину

$$a_{\omega T} = \frac{d\Phi'_{\omega}}{d\Phi}, \quad (13.2)$$

где $d\Phi$ – поток лучистой энергии, падающий на поверхность тела; $d\Phi'_{\omega}$ – часть потока энергии, которая поглощается телом.

Если $a_{\omega T} = 1$ для всех ω , то тело называют *абсолютно черным (АЧТ)*.

АЧТ – тело полностью поглощает упавшее на него излучение.

Тела, для которых $a_{\omega T} < 1$ для всех ω , называют серыми.

Закон Кирхгофа

Отношение испускательной к поглотительной способности не зависит от природы тела, а является для всех тел одной и той же универсальной функцией частоты и температуры.

$$\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} = f(\omega, T), \quad (13.3)$$

где $f(\omega, T)$ – универсальная функция Кирхгофа.

Для АЧТ $f(\omega, T) = r_{\omega T}$, т.е. совпадает со спектральной испускательной способностью АЧТ.

Закон Стефана – Больцмана

Для АЧТ справедлив закон Стефана – Больцмана, установленный экспериментально:

$$R^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4, \quad (13.4)$$

где R^* – энергетическая светимость АЧТ, σ – постоянная Стефана – Больцмана, $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$.

Энергетическая светимость АЧТ пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры.

Закон смещения Вина

Излучение можно характеризовать вместо частоты ω длиной волны λ .

Тогда универсальная функция Кирхгофа будет $\varphi(\lambda, T)$.

Экспериментальная зависимость $\varphi(\lambda, T)$ от λ для АЧТ приведена на рис. 61. Разные кривые относятся к различным значениям температуры АЧТ. Площадь, охватываемая кривой, дает энергетическую светимость АЧТ при соответствующей температуре. Для АЧТ $r_{\lambda T} = \varphi(\lambda, T)$.

$\varphi(\lambda, T), 10^{11} \text{ Вт/м}^3$

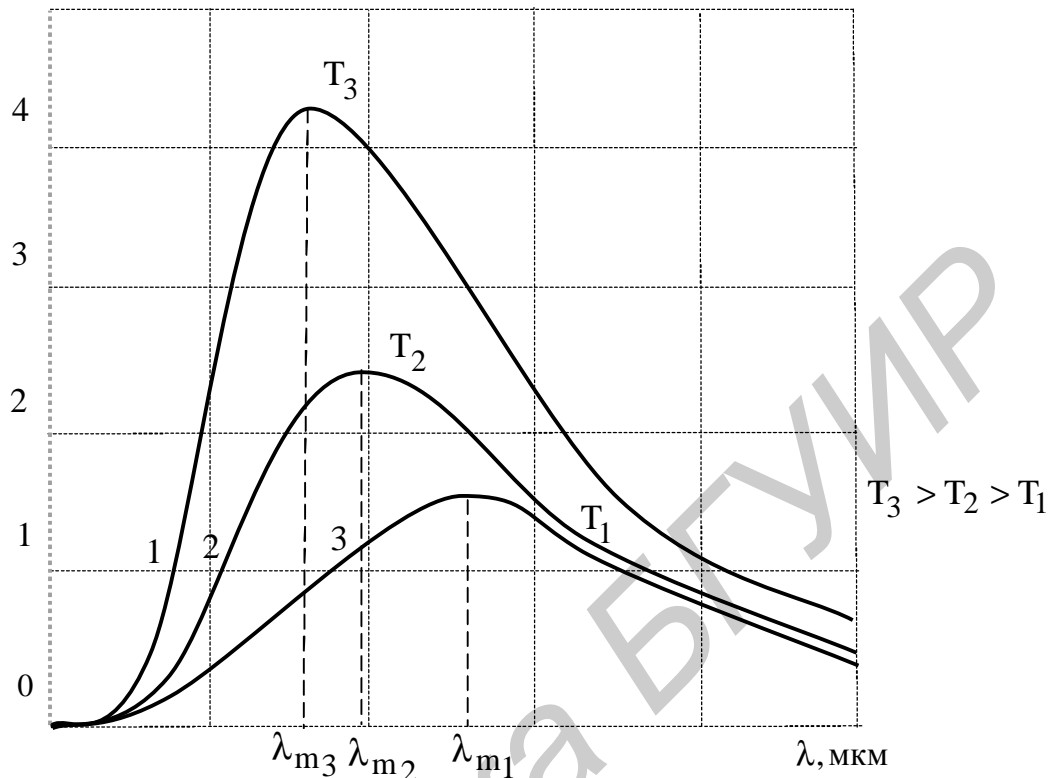


Рис. 61

Из графика видно, что максимум испускательной способности с увеличением температуры ($T_3 > T_2 > T_1$) сдвигается в коротковолновую область ($\lambda_{m3} < \lambda_{m2} < \lambda_{m1}$).

Вин установил зависимость между λ_m и T :

$$T\lambda_m = b, \quad (13.5)$$

называемую *законом смещения Вина*, где λ_m – длина волны, соответствующая максимуму функции $\varphi(\lambda, T)$, b – постоянная Вина, $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}\cdot\text{К}$.

Универсальную функцию Кирхгофа удалось найти Планку путем введения квантовой гипотезы. Суть ее в следующем.

В качестве модели АЧТ можно взять бесконечную систему гармонических осцилляторов, излучающих электромагнитную энергию

(см. разд. 4.1, с. 18). Каждый из таких осцилляторов соответствует монохроматической компоненте черного излучения. Пусть ϵ_ν – энергия осциллятора с собственной частотой ν . В классической физике предполагается, что энергия любой системы изменяется непрерывно, т.е. может принимать любые сколь угодно близкие значения. Согласно квантовой гипотезе Планка энергия осциллятора ϵ_ν может принимать лишь определенные значения, равные целому числу элементарных порций энергии – квантов энергии: $E_n = nh\nu$, где $n = 1, 2, 3 \dots$, а $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Минимальная порция энергии $\epsilon = h\nu$ называется *квантом энергии*.

Используя квантовую гипотезу, Планк получил следующее выражение для $f(\omega, T)$ АЧТ:

$$r_{\omega T}^* = f(\omega, T) = \frac{h\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\omega/kT} - 1}, \quad (13.6)$$

где $r_{\omega T}^*$ – испускательная способность АЧТ; c – скорость света;
 $h = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж/с; $\omega = 2\pi\nu$.

13.2. Фотоэффект. Закономерности фотоэффекта.

Формула Эйнштейна

Фотоэффектом называется явление испускания электронов с поверхности вещества под действием падающего на него света. Фотоэффект подтверждает квантовую природу света.

Установка для наблюдения явления фотоэффекта представлена на рис. 62. Свет через окошко в электронной лампе освещает катод (К). Электроны, испущенные катодом вследствие фотоэффекта, перемещаются к аноду (А). В результате в цепи прибора течет фототок I_ϕ , измеряемый гальванометром (G).

Напряжение между анодом и катодом можно измерять с помощью потенциометра П.

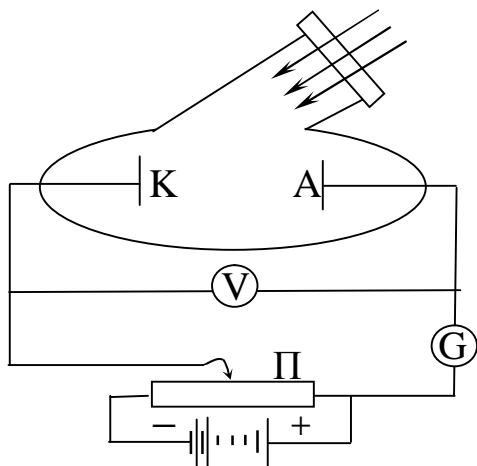


Рис. 62

Экспериментально получена зависимость силы фототока $I_{\text{ф}}$ от напряжения U между катодом и анодом (рис. 63) и установлены следующие законы фотоэффекта:

1. Сила фототока насыщения пропорциональна освещенности катода ($I_{\text{н}} \sim E$).

2. Величина задерживающего напряжения U_3 не зависит от интенсивности света, а зависит только от его частоты.

3. Для каждого вещества существует *красная граница фотоэффекта*, т.е. минимальная частота света ν_0 , при которой еще возможен фотоэффект.

ν_0 зависит от состава вещества катода и состояния его поверхности.

2-й и 3-й законы фотоэффекта не удалось объяснить с помощью классической электромагнитной теории света. Лишь квантовая теория позволила это сделать.

В 1905 году Эйнштейн развил гипотезу Планка и предположил, что свет не только излучается, но и распространяется в пространстве и поглощается веществом отдельными порциями – квантами (фотонами). При фотоэффекте электрон вещества, поглощая фотон, получает его энергию $h\nu$, которая расходуется на совершение работы выхода A из металла и на сообщение вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии

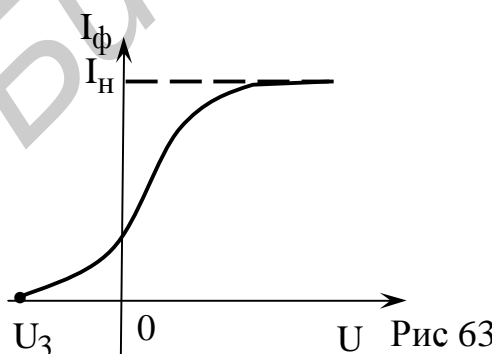


Рис 63

$\frac{m\nu_{\text{max}}^2}{2}$ Уравнение, отражающее эту закономерность, называется *формулой Эйнштейна для фотоэффекта*:

$$(13.7)$$

График зависимости $I_{\text{ф}}$ от напряжения U приведен на рис. 63.

$$h\nu = A + \frac{m v_{\max}^2}{2}.$$

Так как электроны вылетают из катода с различными скоростями, можно определить максимальное значение скорости фотоэлектронов, приложив к электродам задерживающее напряжение U_3 . При таком напряжении $I_{\phi} = 0$ и

$$\frac{m v_{\max}^2}{2} = eU_3. \quad (13.8)$$

Используя формулы (13.8) и (13.9), можно легко объяснить 2-й и 3-й законы фотоэффекта. В частности, если $v_{\max} = 0$ (начало фотоэффекта), то частота красной границы

$$\nu_0 = \frac{A}{h}. \quad (13.9)$$

13.3. Фотоны. Импульс фотона

Согласно теории относительности связь между энергией E и импульсом p при движении частицы выражается формулой

$$m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2. \quad (13.10)$$

Если за частицу взять фотон, то учитывая, что для фотона $m_0 = 0$, из (13.10) получим

$$E = pc, \quad (13.11)$$

где E – энергия фотона, p – импульс фотона, c – скорость света в вакууме.

Обозначим энергию одного фотона ϵ , тогда (13.11) примет вид $\epsilon = pc$.

Так как $\left. \begin{array}{l} c = \lambda\nu \\ \varepsilon = h\nu \\ h = 2\pi\hbar \\ \omega = 2\pi\nu \end{array} \right\}$, то с учетом этих формул из (13.11) следует, что импульс

фотона равен
$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{\lambda\nu} = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \hbar k,$$

(13.12)

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Как было сказано выше, энергия фотона равна

$$\varepsilon = h\nu = 2\pi\hbar\nu = \hbar\omega. \quad (13.13)$$

Обобщив сказанное, запишем два важных соотношения:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \hbar\omega, \quad (13.12')$$

где $\mathbf{k} = k \frac{\mathbf{c}}{c}$ – волновой вектор.

В них заложена суть корпускулярно-волнового дуализма света, т.к. с одной стороны, корпускулярные свойства излучения характеризуются энергией ε и импульсом \mathbf{p} , с другой стороны, волновые свойства излучения характеризуются частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} .

Глава 14. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

14.1. Волновые свойства микрочастиц. Гипотеза де Бройля

В 1924 г. Луи де Бройль выдвинул гипотезу, в которой распространил идеи корпускулярно-волнового дуализма света на вещество. Де Бройль предположил, что движению любой частицы, обладающей импульсом \mathbf{p} и энергией E , соответствует волновой процесс с длиной волны

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad (14.1)$$

и частотой $\omega = \frac{E}{\hbar}$.

Величина (14.1) называется *длиной волны де Бройля* для материальной частицы.

Уравнение волны де Бройля таково:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p}\mathbf{r})}, \quad (14.2)$$

где $E = \hbar\omega$, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$.

14.2. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Физические величины никогда не могут быть измерены абсолютно точно, т.к. при выполнении любого измерения неизбежна ошибка. Например, измерение координаты материальной точки производится с определенной погрешностью Δx , измерение компоненты импульса p_x – с погрешностью Δp_x . В классической механике можно измерить x и p_x одновременно сколь угодно точно. В микромире существуют ограничения на возможности одновременного точного определения координаты частицы и величины ее импульса. Эти ограничения носят принципиальный характер и связаны с корпускулярно-волновым дуализмом свойств микрочастиц.

Эти ограничения задаются *соотношениями неопределенностей Гейзенберга*:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (14.3)$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2},$$

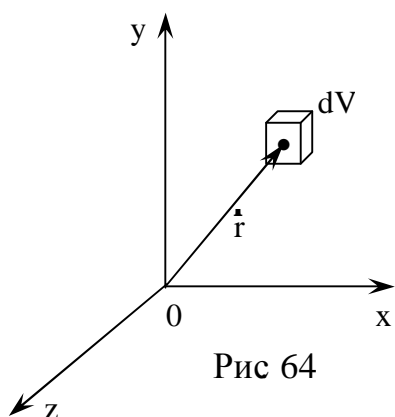
$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Кроме этих соотношений существует соотношение между точностью измерения энергии и промежутком времени, за который эта энергия может быть измерена:

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar.$$

14.3. Волновая функция, её физический смысл

С учётом наличия у микрочастиц (атомов, молекул, элементарных частиц) волновых свойств их состояния в квантовой механике задаются с помощью некоторой функции координат и времени $\Psi(x, y, z, t)$, называемой *волновой или пси-функцией*. Квадрат ее модуля $\Psi\Psi^* = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ есть плотность вероятности обнаружить частицу в точке пространства \mathbf{r} в данный момент времени t .



Вероятность того, что частица находится в окрестности точки \mathbf{r} внутри объёма dV в момент времени t , пропорциональна $|\Psi|^2$ и элементу объёма dV (рис. 64), т.е.

$$dW \sim |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV.$$

Условие $\int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1$ называется (v)

условием нормировки волновой функции.

Если Ψ -функция удовлетворяет условию нормировки, то $dW = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$.

Таким образом, физический смысл Ψ -функции носит статистический, вероятностный характер.

14.4. Уравнение Шрёдингера.

Собственные значения энергии. Собственные функции

Уравнение, которому удовлетворяет $\Psi(x, y, z, t)$, называется *нестационарным, или временным уравнением Шрёдингера*. Его решение определяет

Ψ -функцию для микрочастиц, движущихся в силовом поле $F(x, y, z, t) = -\nabla U(x, y, z, t)$ со скоростью $v \ll c$. Это уравнение имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (14.4)$$

$$\text{где } \Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}.$$

Уравнение (14.4) называют *основным уравнением нерелятивистской квантовой механики*.

В соответствии со своим смыслом Ψ -функция должна быть однозначной, непрерывной и конечной, а также она должна иметь непрерывные и конечные частные производные, за исключением точек, в которых $U = \infty$.

В этих точках Ψ -функция полагается равной нулю. Перечисленные требования называются *стандартными условиями*.

В случае, когда U не зависит от времени,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\mathbf{r}),$$

где $\psi(\mathbf{r})$ удовлетворяет *стационарному уравнению Шрёдингера*:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (14.5)$$

Здесь E – полная энергия частицы.

В уравнение (14.5) входит в качестве параметра *полная энергия частицы*. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнения такого вида имеют решения, удовлетворяющие стандартным условиям не при любых значениях параметра E , а лишь при некоторых избранных значениях. Эти избранные значения называются *собственными значениями энергии*. Решения уравнения (14.5), соответствующие собственным значениям E , называются принадлежащими им *собственными функциями*.

Совокупность собственных значений энергии называется *спектром энергии*. Если эта совокупность образует дискретную последовательность, спектр называется *дискретным*, или *квантованным*. Если собственные значения образуют непрерывную последовательность, спектр называют *непрерывным*, или *сплошным*.

Дискретному спектру значений: $E_1, E_2, \dots, E_n \dots$ соответствуют собственные функции: $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n \dots$

Найдём на простом примере собственные значения энергии и соответствующие им собственные функции.

14.5. Частица в одномерной потенциальной яме бесконечной глубины.

Квантование энергии

Рассмотрим одномерное движение частицы в силовом поле, имеющем вид бесконечно глубокой потенциальной ямы с вертикальными стенками.

График потенциальной энергии частицы $U(x)$ представлен на рис. 65.

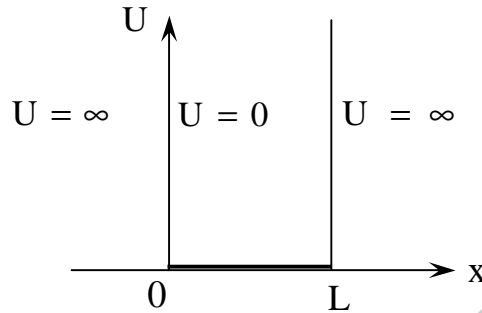


Рис. 65

Движение частицы ограничено непреодолимыми для нее стенками: $x = 0$ и $x = L$.

Частица может находиться лишь на участке $0 < x < L$, причём

$$U = 0 \text{ при } 0 < x < L,$$

$$U = \infty \text{ при } x \leq 0 \text{ и } x \geq L.$$

Движение частицы описывается волновой функцией $\psi(x)$. За пределы потенциальной ямы частица попасть не может. Поэтому вероятность обнаружить частицу, а следовательно, и функция $\psi(x)$ за пределами ямы равна нулю. Тогда граничные условия для волновой функции, следующие из требования ее непрерывности, таковы

$$\psi(0) = \psi(L) = 0. \quad (14.6)$$

Поскольку силовое поле U не меняется с течением времени, то уравнение (14.5) в области $0 < x < L$ принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0,$$

или

$$\psi'' + k^2\psi = 0,$$

(14.7)

где волновое число $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны де Бройля.

Общим решением уравнения (14.7) является функция

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad (14.8)$$

где A, B – постоянные.

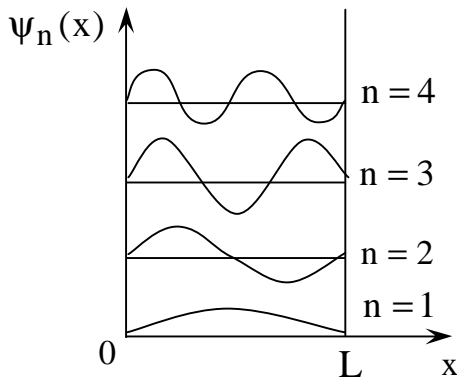


Рис. 66

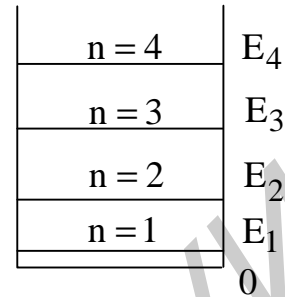


Рис. 67

Из граничных условий $\psi(0) = \psi(L) = 0$ следует, что $\psi(0) = B = 0$, $\psi(L) = A \sin kL = 0$. Это возможно лишь в случае, если $kL = n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, отсюда $k = \frac{n\pi}{L}$.

Выразив полную энергию частицы через волновое число

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}, \quad (14.9)$$

находим энергический спектр частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме (рис. 67):

$$E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi \hbar n}{L} \right)^2, \quad (14.10)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$.

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A \sin \frac{\pi n}{L} x, & 0 \leq x \leq L; \\ 0, & x < 0, x > L \end{cases} \quad (14.11)$$

– собственные функции, соответствующие (14.10). Их графики представлены на рис. 66.

Найдем A из условия нормировки $\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1$. Для данной задачи

$$A^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1.$$

Вычислив интеграл, получим $A^2 \frac{1}{2} L = 1$, откуда $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$.

Тогда формула (14.11) примет окончательный вид:

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x, & 0 \leq x \leq L; \\ 0, & x < 0, \quad x > L. \end{cases} \quad (14.12)$$

Собственные значения энергии частицы представляют собой дискретный (квантованный) ряд значений. Квантованные значения E_n называются *уровнями энергии*, а число n , определяющее энергетический уровень частицы в потенциальной яме, называется *главным квантовым числом*.

Раздел 6. ФИЗИКА АТОМА И ЯДРА

Глава 15. Элементы атомной физики

15.1 Атом водорода

Атомом называется наименьшая частица вещества, обладающая всеми химическими свойствами данного химического элемента. В состав атома входит положительно заряженное ядро и электроны, движущиеся в электрическом поле ядра. Заряд ядра Ze по абсолютной величине равен суммарному заряду всех электронов атома. Простейшим атомом является атом водорода, состоящий из одного протона (ядра) и одного электрона, движущегося в кулоновском электрическом поле ядра.

Потенциальная энергия электрона в поле неподвижного протона равна

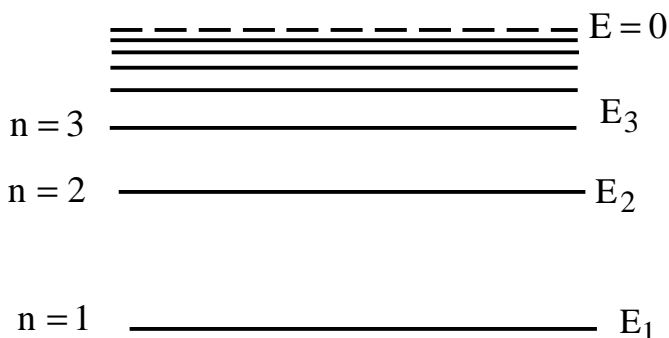
$$U(\mathbf{r}) = -\frac{ke^2}{r}, \quad (15.1)$$

где $k = 9 \cdot 10^{-9} \frac{\text{М}}{\text{Ф}}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, r – расстояние электрона до протона.

Тогда с помощью стационарного уравнения Шрёдингера (14.5), в котором $U(\mathbf{r})$ задается формулой (15.1), можно определить собственные значения энергии электрона в атоме водорода:

$$E_n = -\frac{m_e e^4 k^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad (15.2)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – главное квантовое число.



Формула (15.2) была ранее (1913 г.) получена датским физиком Н. Бором в рамках упрощенной теории атома водорода, которая явилась переходным этапом к строгой квантовой теории. По теории Бора внутренняя энергия атома складывается из кинетической энергии электрона (ядро неподвижно) и

Рис. 68

энергии взаимодействия электрона с ядром:

$$E = K + U,$$

где $K = \frac{m_e v^2}{2}$ – кинетическая энергия электрона; $U = -\frac{ke^2}{r}$ – потенциальная энергия взаимодействия ядра и электрона.

Момент импульса электрона удовлетворяет квантовому постулату Бора:

$$mvr = nh, \quad (15.3)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$.

Тогда внутренняя энергия атома равна

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{ke^2}{r}. \quad (15.4)$$

Уравнение движения электрона по орбите вокруг ядра имеет вид

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2}, \quad (15.5)$$

где r – радиус орбиты; m_e – масса электрона; v – скорость электрона; e – заряд электрона.

Из (15.5) имеем $\frac{m_e v^2}{2} = \frac{ke^2}{2r}$, тогда $E = \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r}$. Отсюда следует,

что полная энергия атома отрицательна. Решая совместно уравнения (15.3) и (15.5), легко показать, что энергия электрона в атоме водорода определяется формулой (15.2), следовательно, квантовая теория подтвердила вывод Н. Бора.

Упрощенная схема энергетических уровней атома водорода представлена на рис. 68.

Минимальной энергией (E_1) атом обладает в *невозбуждённом* (основном) состоянии. В этом случае электрон находится на нижнем энергетическом уровне. Все остальные состояния атома называются *возбуждёнными*.

При переходе атома водорода из состояния n в состояние m излучается или поглощается фотон, энергия которого равна

$$\hbar\omega = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4 k^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (15.6)$$

15.2. Квантовые числа. Спин электрона. Принцип запрета Паули

Как уже было сказано, энергетические уровни, на которых может находиться электрон в атоме, определяются главным квантовым числом $n = 1, 2, 3, \dots$

Кроме этого, состояние электрона в атоме характеризуется *моментом импульса*, который может принимать лишь дискретный набор значений, определяемых соотношением

$$L_1 = \hbar\sqrt{1(1+1)}, \quad (15.7)$$

где $1 = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ – *орбитальное квантовое число*.

Величина проекции момента импульса электрона на некоторое выделенное в пространстве направление Z равна

$$L_{1z} = m_1 \hbar, \quad (15.8)$$

где $m_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 1$ – *магнитное квантовое число*.

Электрон обладает также *собственным моментом импульса* L_s , не связанным с движением электрона в пространстве. Этот собственный момент называется *спином* (от англ. spin – вращаться).

Спин является внутренним свойством электрона, подобно массе и заряду. Величина собственного момента импульса определяется по формуле

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad (15.9)$$

где $s = \frac{1}{2}$ – *спиновое квантовое число*.

Проекция спина на заданное направление равна

$$L_{sz} = m_s \hbar, \quad (15.10)$$

где $m_s = \pm s = \pm \frac{1}{2}$ – *магнитное спиновое квантовое число*.

Таким образом, четыре квантовых числа n, l, m_l, m_s полностью характеризуют состояние и энергию электрона в атоме (квантовое состояние). Используя это обстоятельство, а также *принцип запрета Паули*, утверждающий, что в системе электронов не может находиться более одного электрона в данном квантовом состоянии, можно теоретически обосновать периодическую систему химических элементов Менделеева.

Глава 16. ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

16.1. Характеристики атомного ядра. Масса и энергия связи ядра

Ядро – центральная часть атома, в которой содержится основная масса атома. Ядро состоит из нуклонов:

1) протонов ($m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг, $q_p = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл),

2) нейтронов ($m_n \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг, $q_n = 0$).

Заряд ядра равен Ze , где e – заряд протона, Z – порядковый номер химического элемента в периодической системе Менделеева, равный числу протонов.

В настоящее время известны ядра с $Z = 1$ до $Z = 107$. Z – *зарядовое число*.

Число нуклонов в ядре $A = N + Z$ называется *массовым числом*.

Число нейтронов в ядре $N = A - Z$.

Ядро химического элемента обозначается



где X – химический элемент.

Ядра с одинаковыми Z , но разными A называются *изотопами*.

Пример: ${}_8\text{O}^{16}$, ${}_8\text{O}^{17}$, ${}_8\text{O}^{18}$ – изотопы кислорода.

${}_1\text{H}^1$ – обычный водород, протий ($Z = 1, N = 0$);

${}_1\text{H}^2$ – тяжелый водород, дейтерий ($Z = 1, N = 1$);

${}_1\text{H}^3$ – тритий ($Z = 1, N = 2$).

Масса ядра $m_{\text{я}}$ всегда меньше суммы масс, входящих в него частиц. Это обусловлено тем, что при объединении нуклонов в ядро выделяется энергия, равная энергии связи нуклонов друг с другом:

$$E_{\text{св}} = c^2 \{ [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{яд}} \}. \quad (16.1)$$

Величину $\Delta = \frac{E_{\text{св}}}{c^2}$ называют дефектом массы ядра. Таким образом,

$$\Delta = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{яд}}. \quad (16.2)$$

16.2. Радиоактивность. Закон радиоактивного превращения

Радиоактивностью называется самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождаемое испусканием элементарных частиц.

Радиоактивные процессы:

- 1) α -распад;
- 2) β -распад;
- 3) γ -излучение;
- 4) спонтанное деление тяжелых ядер;
- 5) протонная радиоактивность.

Радиоактивность, наблюдающаяся у ядер, существующих в природных условиях, называется естественной. Радиоактивность ядер, полученных посредством ядерных реакций, называется искусственной. В обоих случаях процесс радиоактивного превращения ядер будет протекать по одинаковому закону.

Пусть dN – количество ядер, распадающихся за время dt , N_0 – первоначальное количество ядер, N – количество нераспавшихся ядер.

Тогда

$$dN = -\lambda N dt, \quad (16.3)$$

где λ – постоянная распада.

Интегрирование выражения (16.3) приводит к соотношению

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (16.4)$$

где N_0 – количество ядер в начальный момент времени при $t = 0$; N – количество нераспавшихся ядер в момент времени t . Формула (16.4) выражает закон радиоактивного превращения.

Время, за которое распадается половина первоначального количества ядер, называется *периодом полураспада* T . Это время определяется условием

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T},$$

откуда

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda}. \quad (16.5)$$

Среднее время жизни радиоактивного ядра определяется выражением

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

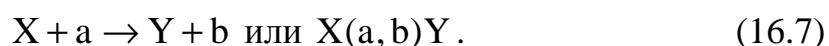
Следовательно,

$$T = 0,693\tau. \quad (16.6)$$

16.3. Ядерные реакции

Ядерной реакцией называется процесс сильного взаимодействия атомного ядра с элементарной частицей или с другим ядром, приводящий к преобразованию ядра (или ядер).

Наиболее распространенным видом ядерной реакции является взаимодействие легкой частицы a с ядром X , в результате которого образуется легкая частица b и ядро Y .



В качестве легких частиц a и b могут фигурировать нейтрон (n), протон (p), дейтрон (d), (α)-частица (α) и γ -фотон (γ).

Ядерные реакции могут сопровождаться как выделением, так и поглощением энергии. Количество выделяющейся энергии называется *энергией реакции*. Она определяется разностью масс (в энергетических единицах) исходных и конечных ядер. Если сумма масс образующихся ядер превосходит сумму масс исходных ядер, реакция идет с поглощением энергии и энергия реакции будет отрицательной. Если наоборот – то реакция идет с выделением энергии и энергия реакции будет положительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И. В. Курс физики / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1987.– Т.1–3.
2. Зисман, Г. А. Курс общей физики / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – М. : Наука, 1972. – Т.1–3.
3. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1985.
4. Детлаф, А. А. Курс физики. Т.1–3 / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский, Л. Б. Милковская. – М. : Высш. шк., 1973–1979.
5. Квасов, Н. Т. Лекции по физике / Н. Т. Квасов. – Минск : БГУИР, 2006.
6. Дынич, Р. А. Начала квантовой механики / Р. А. Дынич.– Минск : БГУИР, 2002.
7. Андреев, В. Ф. Лабораторный практикум по физике. Механика, колебания и волны / В. Ф. Андреев, З. А. Боброва, В. И. Мурзов. – Минск : БГУИР, 2003.
8. Аксенов, В. В. Физика: методическое пособие для студентов экономических специальностей заочной формы обучения. Ч. 1, 2 / В. В. Аксенов [и др.]. – Минск : БГУИР, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
РАЗДЕЛ 1. Механика	4
Глава 1. Кинематика материальной точки	4
1.1. Линейные кинематические величины	5
1.2. Угловые кинематические величины	6
1.3. Связь между линейными и угловыми величинами.....	7
Глава 2. Динамика материальной точки.....	8
2.1. Первый закон Ньютона (закон инерции).....	8
2.2. Второй закон Ньютона	9
2.3. Третий закон Ньютона	9
2.4. Преобразование Галилея. Закон сложения скоростей.....	10
2.5. Работа и мощность силы	11
2.6. Поле сил. Консервативные силы. Потенциальная энергия	11
2.7. Кинетическая энергия. Полная механическая энергия.....	12
2.8. Закон сохранения и изменения полной механической энергии.....	13
Глава 3. Механика твердого тела.....	14
3.1. Вращательное движение твердого тела. Момент инерции	14
3.2. Момент силы. Момент импульса.....	15
3.3. Закон сохранения момента импульса	17
3.4. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела	17
Глава 4. Механические колебания.....	18
4.1. Гармонические колебания.....	18
4.2. Физический маятник	20
4.3. Математический маятник.....	21
4.4. Энергия гармонических колебаний	21
4.5. Затухающие колебания.....	22
4.6. Вынужденные колебания	23
Глава 5. Упругие волны	24
5.1. Плоская и сферическая гармонические волны	24
5.2. Волновое уравнение	25
5.3. Стоячие волны	25
РАЗДЕЛ 2. Статистическая физика и термодинамика	26
Глава 6. Общие сведения	26
6.1. Уравнение состояния идеального газа	27

6.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов (МКТ)	28
6.3. Распределение Максвелла. Распределение Больцмана	29
6.4. Число степеней свободы молекул.....	31
6.5. Первое начало термодинамики	32
6.6. Работа газа при изменении его объема.....	32
6.7. Теплоемкость газов.....	33
6.8. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам.....	34
6.9. Второе начало термодинамики	34
6.10. Энтропия	36
РАЗДЕЛ 3. Электромагнетизм.....	37
Глава 7. Электростатика.....	37
7.1. Закон Кулона. Напряженность. Принцип суперпозиции	38
7.2. Потенциал. Работа электростатического поля.....	39
7.3. Теорема о циркуляции вектора $\dot{\mathbf{E}}$	41
7.4. Поток вектора $\dot{\mathbf{E}}$. Теорема Гаусса.....	41
Глава 8. Электрическое поле в диэлектриках	44
Глава 9. Проводники в электрическом поле	45
9.1. Электроемкость проводников	46
9.2. Энергия электрического поля	47
Глава 10. Постоянный электрический ток	48
10.1. Закон Ома.....	49
10.2. Правила Кирхгофа	50
10.3. Закон Джоуля – Ленца.....	52
Глава 11. Магнитостатика	52
11.1. Магнитная индукция. Сила Лоренца	52
11.2. Магнитное поле проводника с током. Закон Био–Савара–Лапласа.....	54
11.3. Проводник с током и контур с током в магнитном поле. Закон Ампера	55
11.4. Поток и циркуляция вектора $\dot{\mathbf{B}}$	56
11.5. Явление электромагнитной индукции	57
11.6. Явление самоиндукции	58
11.7. Электромагнитные колебания.....	59
11.8. Уравнения Максвелла	61

11.9. Электромагнитные волны и их свойства.....	62
11.10. Энергия магнитного поля.....	64
РАЗДЕЛ 4. Волновая оптика.....	65
Глава 12. Волновая природа электромагнитного поля.....	65
12.1. Световые волны. Принцип суперпозиции световых волн. Когерентность световых волн.....	65
12.2. Интерференция света.....	66
12.3. Дифракция света. Принцип Гюйгенса–Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция Френеля от круглого отверстия	67
12.4. Дифракция Фраунгофера от щели	69
12.5. Дифракционная решетки.....	70
12.6. Поляризация света. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса. Закон Брюстера	71
РАЗДЕЛ 5. Квантовая физика	73
Глава 13. Квантовая природа электромагнитного излучения	73
13.1. Тепловое излучение. Законы теплового излучения.....	73
13.2. Фотоэффект. Закономерности фотоэффекта. Формула Эйнштейна.....	76
13.3. Фотоны. Импульс фотона.....	77
Глава 14. Элементы квантовой механики	78
14.1. Волновые свойства микрочастиц. Гипотеза де Бройля	78
14.2. Соотношение неопределенностей Гейзенберга	79
14.3. Волновая функция, ее физический смысл.....	79
14.4. Уравнение Шрёдингера. Собственные значения энергии. Собственные функции.....	80
14.5. Частица в одномерной потенциальной яме бесконечной глубины. Квантование энергии.....	81
РАЗДЕЛ 6. Физика атома и ядра	83
Глава 15. Элементы атомной физики	83
15.1. Атом водорода	83
15.2. Квантовые числа. Спин электрона. Принцип запрета Паули.....	84
Глава 16. Элементы ядерной физики.....	85
16.1. Характеристики атомного ядра. Масса и энергия связи ядра	85
16.2. Радиоактивность. Закон радиоактивного превращения	86
16.3. Ядерные реакции	87
Литература	88

Учебное издание

Горячун Наталья Владимировна

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ

для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения

Редактор Т. П. Андрейченко

Корректор Е. Н. Батурчик

Подписано в печать 27.03.2007.

Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная.

Гарнитура «Таймс».

Печать ризографическая.

Усл.

печ. л. 5,46.

Уч.-изд. л. 5,0.

Тираж 300 экз.

Заказ 764.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и
радиоэлектроники»

ЛИ №02330/0056964 от 01.04.2004. ЛП №02330/0131666 от 30.04.2004.

220013, Минск, П. Бровки, 6