

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра физики

Н. В. Горячун

ФИЗИКА

Методическое пособие
к выполнению контрольных работ
для студентов специальности
«Экономика и организация производства»
заочной формы обучения

Минск БГУИР 2011

УДК 53(076)
ББК 22.3я73
Г71

Рецензент:
доцент кафедры физики учреждения образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»,
кандидат физико-математических наук В. И. Мурзов

Горячун, Н. В.

Г71 Физика : метод. пособие к выполнению контр. работ для студ. спец.
«Экономика и организация производства» заоч. формы обуч. / Н. В. Го-
рячун. – Минск : БГУИР, 2011. – 104 с. : ил.
ISBN 978-985-488-729-6.

Пособие содержит рабочую программу, основные формулы, примеры реше-
ния задач и контрольные задания по трем частям курса физики, а также некоторые
справочные данные, необходимые для решения задач при выполнении контроль-
ных работ.

УДК 53(076)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-488-729-6

© Горячун Н. В., 2011
© УО «Белорусский государственный
университет информатики
и радиоэлектроники», 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Содержание рабочей программы курса физики	4
Общие методические указания	7
1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика (Основные формулы)	9
1.1. Физические основы классической механики	9
1.2. Механические колебания	13
1.3. Молекулярная физика и термодинамика.....	14
1.4. Примеры решения задач	16
1.5. Контрольная работа №1	32
2. Электромагнетизм (Основные формулы).....	41
2.1. Электростатическое поле в вакууме	41
2.2. Постоянный ток	43
2.3. Магнитное поле в вакууме	44
2.4. Электромагнитные колебания	46
2.5. Примеры решения задач	48
2.6. Контрольная работа №2.....	65
3. Оптика. Элементы квантовой и атомной физики (Основные формулы)	75
3.1. Оптика.....	75
3.2. Элементы квантовой и атомной физики.....	77
3.3. Примеры решения задач	81
3.4. Контрольная работа №3	95
Приложение. Основные физические постоянные	102
Литература.....	103

СОДЕРЖАНИЕ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ КУРСА ФИЗИКИ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Кинематика материальной точки. Система отсчета. Материальная точка. Кинематический закон движения материальной точки. Линейные кинематические величины. Угловые кинематические величины. Связь между линейными и угловыми кинематическими величинами.

Динамика материальной точки. Инерциальные системы отсчета. Масса и импульс. Сила. Классификация сил. Законы Ньютона. Закон сохранения импульса. Преобразования Галилея. Закон сложения скоростей. Закон всемирного тяготения.

Работа и мощность силы. Поле сил. Связь между потенциальной энергией и силой поля. Кинетическая энергия. Полная механическая энергия материальной точки, системы материальных точек. Законы изменения и сохранения полной механической энергии.

Механика твердого тела. Вращательное движение твердого тела. Центр масс системы материальных точек. Момент инерции. Теорема Штейнера. Момент силы и момент импульса. Закон изменения момента импульса твердого тела. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела относительно фиксированной оси вращения. Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела.

Механические колебания. Свободные и вынужденные колебания. Гармонические колебания. Кинематический закон гармонических колебаний. Амплитуда, фаза, частота, период гармонических колебаний. Зависимости от времени скорости и ускорения при гармонических колебаниях. Математический и физический маятники. Энергия гармонических колебаний. Затухающие колебания. Добротность колеблющейся системы. Вынужденные колебания. Резонанс.

Волновые процессы. Продольные и поперечные упругие волны. Плоская и сферическая гармонические волны. Длина волны, волновой вектор, волновое число. Волновое уравнение. Стоячие волны.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Основные понятия молекулярно-кинетической теории (МКТ) идеальных газов. Основное уравнение МКТ. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы. Среднеквадратичная скорость молекулы. Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул. Распределение Максвелла. Распределение Больцмана.

Термодинамические параметры. Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа. Работа сил давления газа при изменении его объема. Количество теплоты. Первое начало термодинамики. Теплоемкость. Второе начало термодинамики. Тепловой двигатель. КПД теплового двигателя. Цикл Карно. Энтропия.

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Электростатика. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Основные характеристики электростатического поля: напряженность и потенциал. Принцип суперпозиции. Связь напряженности и потенциала. Теорема Гаусса для вектора \vec{E} . Работа сил электростатического поля. Теорема о циркуляции вектора \vec{E} .

Электрическое поле в диэлектриках. Типы диэлектриков. Дипольный электрический момент молекул. Вектор поляризованности \vec{P} . Вектор электрического смещения \vec{D} . Теорема Гаусса для вектора \vec{D} .

Проводники в электростатическом поле. Электроемкость проводников. Энергия электрического поля.

Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования. Законы постоянного тока.

Магнитостатика. Силовая характеристика магнитного поля. Магнитная индукция электрического заряда, движущегося с постоянной скоростью $v \ll c$. Сила Лоренца. Магнитная индукция поля проводника с током. Закон Био-Савара – Лапласа. Магнитный момент контура с током. Закон Ампера. Теорема Гаусса для вектора индукции магнитного поля. Закон полного тока для вектора \vec{B} . Напряженность магнитного поля. Закон полного тока для вектора \vec{H} . Явление электромагнитной индукции. Закон электромагнитной индукции. Явление самоиндукции. Явление взаимной индукции. Энергия магнитного поля. Электромагнитные колебания.

Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в интегральной и дифференциальной форме. Электромагнитные волны и их свойства. Энергия электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга.

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Волновая природа света. Световые волны. Принцип суперпозиции световых волн. Когерентность световых волн. Интерференция света. Интерференция в тонких пленках. Многолучевая интерференция. Дифракция света. Принцип Гюйгенса – Френеля. Метод зон Френеля. Дифракция Френеля от круглого отверстия. Дифракция Фраунгофера от щели. Дифракционная решетка. Дифракция на пространственной решётке. Понятие о голографии. Поляризация света. Естественный и поляризованный свет. Поляризация света при отражении и преломлении. Закон Брюстера. Прохождение света через кристаллическую пластинку. Закон Малюса. Дисперсия света. Оптика движущихся сред. Эффект Доплера.

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ И АТОМНОЙ ФИЗИКИ

Квантовая природа электромагнитного излучения. Тепловое излучение. Равновесное тепловое излучение. Абсолютно чёрное тело. Закон Кирхгофа. Закон Стефана – Больцмана. Закон смещения Вина. Квантовая гипотеза и формула Планка. Энергия и импульс фотона. Внешний фотоэффект. Закономерности фотоэффекта. Формула Эйнштейна для фотоэффекта.

Волновые свойства микрочастиц. Гипотеза де Бройля. Дифракция электронов. Соотношение неопределённостей, как проявление корпускулярно-волнового дуализма свойств материи. Волновая функция и её статистический смысл. Временное уравнение Шрёдингера. Стационарное уравнение Шрёдингера. Собственные функции и собственные значения энергии. Частица в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме. Прохождение частицы через потенциальный барьер. Гармонический осциллятор.

Модель атома водорода Н. Бора. Квантовомеханическая модель атома водорода. Квантовые числа электрона в атоме. Механический и магнитный моменты атома. Кратность вырождения энергетического уровня. Символы состояний. Схема уровней атома водорода. Спектральные серии атома водорода. Атом в магнитном поле. Эффект Зеемана. Распределение электронов в атоме по состояниям. Принцип Паули. Оболочка и подоболочка. Периодическая система элементов Менделеева. Характеристическое рентгеновское излучение. Закон Мозли. Молекулярные спектры. Комбинационное рассеяние света. Лазеры.

Кристаллическое состояние вещества. Физические типы кристаллических решёток. Теплоемкость кристаллов. Закон Дюлонга и Пти. Квантовая теория теплоемкости. Элементы квантовой статистики. Распределение Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна. Понятие электронного газа. Квантовая теория свободных электронов в металле. Энергия Ферми. Энергетические зоны в кристаллах. Металлы, полупроводники, диэлектрики. Электропроводность металлов и полупроводников. Эффект Холла. Термоэлектрические явления. Внешняя и внутренняя контактная разность потенциалов. Явление Пельтье, явление Зеебека и явление Томпсона. Сверхпроводимость.

ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Характеристики атомного ядра. Масса и энергия связи ядра. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада. Ядерные реакции и законы сохранения. Реакция деления ядер. Понятие о ядерной энергетике. Элементарные частицы. Классификация элементарных частиц.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Изучение курса «Физика» студентами заочной формы обучения состоит из самостоятельной работы с учебными пособиями в течение семестра, выполнения контрольных работ в сроки, предусмотренные графиком, а также практических занятий в течение сессии. Общий контроль над усвоением учебного материала осуществляется в течение сессии в форме решения задач на практических занятиях, контролирующего тестирования, экзамена.

Указания к самостоятельной работе с учебными пособиями

Необходимо изучать курс систематически в течение всего учебного процесса.

Выбрав какое-либо учебное пособие в качестве основного, следует пользоваться им при изучении всего материала. При чтении учебного пособия необходимо составлять конспект, в котором следует записывать определения основных понятий, физических величин и их единиц измерения, законы и формулы, их выражающие, делать чертежи и решать типовые задачи. При решении задач необходимо пользоваться Международной системой единиц (СИ).

Для студента заочной формы обучения очень важно прослушать курс лекций, воспользоваться очными консультациями преподавателей, а также задавать вопросы преподавателям по курсу «Физика» в письменном виде и проводить анализ ответов.

Указания к решению задач

При решении задач необходимо:

- указать основные законы и формулы, на которых базируется решение, и дать словесную формулировку этих законов;
- разъяснить буквенные обозначения формул. Если при решении задач применяется формула, не являющаяся математическим выражением какого-либо физического закона или определения какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести;
- аккуратно с помощью чертежных принадлежностей выполнить чертеж, поясняющий содержание задачи;
- сопровождать решение задачи краткими пояснениями;
- получить решение задачи в общем виде, т. е. получить конечную формулу, выражающую искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. При таком способе вычисления промежуточных величин не производится;
- проверить размерность полученного результата;

– подставить в конечную формулу числовые значения величин, выраженные в единицах СИ. Несоблюдение этого правила приводит к неверному результату;

– оценить по возможности правдоподобность полученного численного ответа.

Указания к оформлению и выполнению контрольных работ

К выполнению контрольной работы студент приступает только после изучения теоретического материала, внимательного ознакомления с примерами решения задач, помещенными в данном пособии.

При оформлении контрольных работ необходимо знать следующее:

1. Контрольные работы выполняются в обычной школьной тетради, на обложке которой приводятся сведения по образцу:

Студент заочного факультета БГУИР

группа 901501 Титов А.Д.

Адрес: г. Борисов, ул. Красная, 25-6.

Физика. Контрольная работа №1.

2. Тексты условий каждой задачи переписываются полностью с новой страницы. Для замечаний преподавателя оставляются поля.

3. В контрольной работе студент должен решать восемь задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по таблице вариантов.

4. В конце работы указывается, какими учебными пособиями пользовался студент.

5. Если контрольная работа при рецензировании не допущена к защите, необходимо представить ее на повторную рецензию с исправленными решениями тех задач, в которых были допущены ошибки.

1. МЕХАНИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА (Основные формулы)

1.1. Физические основы классической механики

Кинематический закон движения материальной точки в декартовой системе координат:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Мгновенная скорость материальной точки в декартовой системе координат

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \dot{\vec{r}},$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора скорости точки на координатные оси; $\dot{\vec{r}}$ – первая производная радиуса – вектора по времени.

Модуль мгновенной скорости

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s},$$

где s – путь, пройденный точкой.

Путь, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 ,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt,$$

где $v(t)$ – зависимость модуля скорости от времени.

Ускорение материальной точки в декартовой системе координат:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \ddot{\vec{r}},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения точки на координатные оси; $\ddot{\vec{r}}$ – вторая производная радиуса вектора по времени.

Полное ускорение точки при движении по плоской кривой

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

Тангенциальное ускорение точки

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau},$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Нормальное ускорение точки

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n},$$

где \vec{n} – единичный вектор, направленный по нормали к траектории; R – радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке.

Радиус-вектор и вектор скорости материальной точки можно найти по формулам:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

и

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt,$$

где \vec{r}_0 и \vec{v}_0 – соответственно радиус-вектор и скорость материальной точки в начальный момент времени $t_0 = 0$.

Среднее значение вектора скорости за промежуток времени от t_1 до t_2

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt,$$

Среднее значение вектора ускорения за промежуток времени от t_1 до t_2

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt,$$

Вектор угловой скорости точки

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt},$$

где $d\vec{\phi}$ – вектор, образующий правый винт с направлением вращения, модуль которого равен элементарному угловому пути $|d\phi|$.

Вектор углового ускорения точки

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Связь между модулями линейных и угловых кинематических величин:

$$v = \omega R;$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \pm R\beta;$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

где m – масса тела; \vec{a} – ускорение тела; $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ – векторная сумма сил, действующих на тело.

Импульс материальной точки

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Импульс системы n материальных точек

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i.$$

Закон изменения импульса системы материальных точек:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}}.$$

Если $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0$, то выполняется закон сохранения импульса системы материальных точек:

$$\sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}.$$

Элементарная работа силы \vec{F} на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением силы \vec{F} и направлением перемещения $d\vec{r}$.

Работа силы \vec{F} на участке траектории 1 – 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_1^2 F_x dx + \int_1^2 F_y dy + \int_1^2 F_z dz,$$

где $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ – бесконечно малое перемещение точки.

Мощность силы

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{(\vec{F}, d\vec{r})}{dt} = (\vec{F}, \vec{v}) = |\vec{F}| |\vec{v}| \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением силы \vec{F} и направлением скорости \vec{v} .

Закон изменения полной механической энергии системы материальных точек:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A_{\text{нкс}}^{\text{внутр}} + A_{\text{нкс}}^{\text{внеш}},$$

где $A_{\text{нкс}}^{\text{внутр}}$ – работа всех внутренних неконсервативных сил; $A_{\text{нкс}}^{\text{внеш}}$ – работа всех внешних неконсервативных сил, действующих на систему.

Если $A_{\text{нкс}}^{\text{внеш}} + A_{\text{нкс}}^{\text{внутр}} = 0$, то выполняется закон сохранения полной механической энергии:

$$E = T + U_{\text{вз}} + U_{\text{внеш}} = \text{const},$$

где E – полная механическая энергия системы материальных точек; T – суммарная кинетическая энергия системы; $U_{\text{вз}}$ – потенциальная энергия взаимодействия системы материальных точек между собой; $U_{\text{внеш}}$ – потенциальная энергия точек системы во внешнем силовом поле.

Момент инерции тела относительно некоторой оси

$$I = \int_{(V)} \rho R^2 dV,$$

где ρ – плотность тела; dV – элементарный объем; R – расстояние от dV до выбранной оси.

Момент инерции сплошного однородного диска (цилиндра) относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости:

$$I = \frac{mR^2}{2},$$

где m – масса диска; R – радиус диска (цилиндра).

Момент инерции однородного шара относительно оси, проходящей через центр шара:

$$I = \frac{2}{5} mR^2,$$

где m – масса шара; R – радиус шара.

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через центр стержня перпендикулярно к нему:

$$I = \frac{ml^2}{12},$$

где m – масса стержня; l – длина стержня.

Модуль момента силы $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ равен

$$M = rF \sin \alpha = lF,$$

где r – модуль радиуса-вектора точки приложения силы; F – модуль силы; α – угол между направлением силы и направлением радиуса-вектора точки; $l = r \sin \alpha$ – плечо силы.

Модуль момента импульса $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ равен

$$L = rps \sin \alpha = lp,$$

где p – импульс тела; $l = r \sin \alpha$ – плечо импульса.

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения z :

$$I\beta_z = \sum_{i=1}^N M_{iz}^{\text{внеш}},$$

где I – момент инерции тела; β_z – проекция углового ускорения тела на ось z ;

$\sum_{i=1}^N M_{iz}^{\text{внеш}}$ – сумма моментов всех внешних сил, действующих на тело, относительно оси z .

Если $\sum_{i=1}^N M_{iz}^{\text{внеш}} = 0$, то выполняется закон сохранения момента импульса

тела относительно оси z :

$$L_z = I\omega_z = \text{const},$$

где ω_z – проекция угловой скорости тела на ось z ; I – момент инерции тела относительно оси z .

Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении

$$T = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2},$$

где v_c – скорость центра масс твердого тела; I_c – момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через его центр масс.

1.2. Механические колебания

Кинематический закон гармонических колебаний материальной точки:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где x – смещение точки от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $(\omega_0 t + \varphi_0) = \varphi$ – фаза колебаний; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Квазиупругая сила

$$F_x = -kx.$$

Собственная циклическая частота гармонических колебаний под действием квазиупругой силы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

где k – коэффициент квазиупругой силы; m – масса колеблющейся точки.

Период гармонических колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Частота колебаний

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Скорость точки при гармонических колебаниях

$$v_x = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}).$$

Ускорение точки при гармонических колебаниях

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi).$$

Полная механическая энергия материальной точки при гармонических колебаниях

$$E = E_k + E_n = \frac{m v_x^2}{2} + \frac{k x^2}{2},$$

где E_k – кинетическая энергия точки; E_n – потенциальная энергия точки.

Период малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина математического маятника; g – ускорение свободного падения.

1.3. Молекулярная физика и термодинамика

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов:

$$p = \frac{1}{3}nm_0v_{\text{кв}}^2 = \frac{2}{3}n\langle\varepsilon_{\text{пост}}\rangle,$$

где p – давление газа; n – концентрация молекул; m_0 – масса одной молекулы;

$v_{\text{кв}}$ – среднеквадратичная скорость молекул газа; $\langle\varepsilon_{\text{пост}}\rangle = \frac{m_0v_{\text{кв}}^2}{2}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы.

Среднеквадратичная скорость молекулы газа

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура;

$R = 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная; M – молярная масса газа.

Средняя кинетическая энергия жесткой молекулы газа, имеющей i степеней свободы,

$$\langle\varepsilon_k\rangle = \langle\varepsilon_{\text{пост}}\rangle + \langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle = \frac{i}{2}kT = \frac{i_{\text{пост}}}{2}kT + \frac{i_{\text{вр}}}{2}kT,$$

где i – число степеней свободы жесткой молекулы; $i_{\text{пост}}$ – число поступательных степеней свободы; $i_{\text{вр}}$ – число вращательных степеней свободы.

Для одноатомной молекулы

$$i = i_{\text{пост}} = 3$$

Для двухатомной жесткой молекулы

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 2 = 5.$$

Для трехатомной жесткой молекулы

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 3 = 6.$$

Кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа массой m

$$E_{\text{пост}} = N\langle\varepsilon_{\text{пост}}\rangle = \frac{Nm_0v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{m v_{\text{кв}}^2}{2}.$$

Внутренняя энергия идеального газа массой m

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} k N_A T = \frac{i}{2} pV,$$

где $\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$ – число молей газа (количество вещества); N – число молекул,

содержащихся в газе массой m ; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ – число Авагадро.

Уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

где p – давление; V – объем; T – температура газа.

Работа сил давления газа при изменении его объема:

$$A_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

где V_1 – начальный объем газа; V_2 – конечный объем газа; p – давление газа.

Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, полученное системой (газом); ΔU – изменение внутренней энергии системы; A – работа, совершенная силами давления системы.

Молярная теплоемкость газа при $V = \text{const}$:

$$C_V = \frac{i}{2} R.$$

Молярная теплоемкость газа при $p = \text{const}$:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R.$$

Уравнение Майера:

$$C_p = C_V + R.$$

Уравнение адиабатического процесса:

$$pV^\gamma = \text{const},$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты.

Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1},$$

где A – работа, совершенная газом за цикл ($A > 0$); Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим веществом (газом, паром) тепловой машины от нагревателя ($Q_1 > 0$); Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим веществом холодильнику (окружающей среде) ($Q_2 < 0$).

Коэффициент полезного действия (КПД) цикла Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

1.4. Примеры решения задач

Пример 1.1. Радиус-вектор точки A относительно начала координат меняется по закону $\vec{r}(t) = \alpha t \vec{i} + bt^2 \vec{j}$, где α , b – постоянные, \vec{i} , \vec{j} – орты осей x и y . Найти: а) уравнение траектории точки $y(x)$; изобразить ее график; б) зависимость от времени вектора \vec{v} , ускорения \vec{a} и модулей этих величин; в) зависимость от времени угла φ между векторами \vec{a} и \vec{v} .

Дано:

$$\vec{r}(t) = \alpha t \vec{i} + bt^2 \vec{j}$$

$$\alpha, \beta - \text{const} > 0$$

$$y(x) - ?, \vec{v}(t) - ?,$$

$$\vec{a}(t) - ?, v(t) - ?,$$

$$a(t) - ?, \varphi(t) - ?$$

Решение. В задаче задан закон движения материальной точки

$$\vec{r}(t) = \alpha t \vec{i} + bt^2 \vec{j}, \quad (1)$$

где $\alpha t = x(t)$; $bt^2 = y(t)$. Найдем t из $x = \alpha t$, $t = x/\alpha$. Подставим его в $y(t) = bt^2$, получим

$$y(x) = \frac{b}{\alpha^2} x^2. \quad (2)$$

Это есть уравнение параболы.

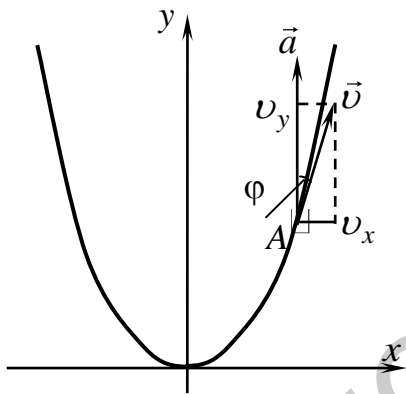


Рис. 1.1

Нарисуем ее график. Точка A движется по параболе. Вектор скорости точки A направлен по касательной к траектории. Разложим его на составляющие v_x и v_y :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}.$$

Найдем $\vec{v}(t)$ и $v(t)$, используя уравнение (1):

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = \quad (3)$$

$$= \alpha \vec{i} + 2bt \vec{j},$$

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4b^2 t^2}. \quad (4)$$

Найдем $\vec{a}(t)$ и $a(t)$, используя уравнение (3):

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} = 2b \vec{j}. \quad (5)$$

$$a(t) = 2b. \quad (6)$$

Как видно из (5), $\vec{a}(t)$ направлено по оси y . Из рис. 1.1 видно, что угол φ между \vec{v} и \vec{a} можно найти через v_x и v_y :

$$\text{tg} \varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\alpha}{2bt}. \quad (7)$$

Отсюда $\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2bt}$.

Ответ: $y(x) = \frac{b}{\alpha^2} x^2$; $\vec{v}(t) = \alpha \vec{i} + 2bt \vec{j}$; $v(t) = \sqrt{\alpha^2 + 4b^2 t^2}$;

$$\vec{a}(t) = 2b \vec{j}; \quad a(t) = 2b; \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{2bt}.$$

Пример 1.2. Частица движется в положительном направлении оси X так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α – положительная постоянная. В момент времени $t = 0$ частица находится в точке $x = 0$. Найти: а) зависимость от времени скорости и ускорения частицы; б) среднюю скорость частицы за время, в течение которого она пройдет первые s метров пути.

Дано:

$$v = \alpha\sqrt{x}, \quad s$$

При $t = 0$ $x = 0$

$$\alpha - \text{const} > 0$$

Решение. Модуль скорости частицы, движущейся вдоль оси x , есть первая производная от координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

$v(t) - ?$, $a(t) - ?$,
 $\langle v \rangle - ?$

По условию задачи скорость частицы меняется по закону

$$v = \alpha\sqrt{x}. \quad (2)$$

Приравняем (1) и (2), получим

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x}. \quad (3)$$

Разделим переменные в (3) и, проинтегрировав

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^t \alpha dt,$$

получим $2\sqrt{x} = \alpha t$.

Следовательно,

$$x(t) = \frac{\alpha^2 t^2}{4}. \quad (4)$$

Скорость частицы как функцию t найдем по формуле (2):

$$v(t) = \frac{\alpha^2 t}{2}. \quad (5)$$

Ускорение частицы есть первая производная от скорости по времени и с учетом (5):

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\alpha^2}{2}. \quad (6)$$

Как видно из (6), $a = \text{const}$.

Средняя скорость частицы определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (7)$$

Для нашей задачи $t_1 = 0$, а t_2 — это время, за которое частица пройдет первые s метров пути. Определим это время из (4): $t = \sqrt{\frac{4x}{\alpha^2}}$, заменив в формуле $x = s$, получим

$$t_2 = \sqrt{\frac{4s}{\alpha^2}}. \quad (8)$$

С учетом (5) найдем среднюю скорость частицы $\langle v \rangle$:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{\alpha^2 t}{2} dt = \frac{1}{t_2} \frac{\alpha^2 t_2^2}{4} = \frac{\alpha^2 t_2}{4},$$

или с учетом (8)

$$\langle v \rangle = \frac{\alpha^2}{4} \sqrt{\frac{4s}{\alpha^2}} = \frac{\alpha \sqrt{s}}{2}. \quad (9)$$

$$\text{Ответ: } v(t) = \frac{\alpha^2 t}{4}; \quad a(t) = \frac{\alpha^2}{2}; \quad \langle v \rangle = \frac{\alpha \sqrt{s}}{2}.$$

Пример 1.3. Колесо радиусом $R = 0,1$ м вращается по закону $\varphi(t) = a + bt + ct^3$, где $b = 3$ рад/с и $c = 2$ рад/с³. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через 3 с после начала движения следующие величины: 1) угловую скорость, 2) угловое ускорение, 3) линейную скорость, 4) тангенциальное ускорение, 5) нормальное ускорение.

Дано:

$$R = 0,1 \text{ м}$$

$$\varphi(t) = a + bt + ct^3$$

$$b = 3 \text{ рад/с}$$

$$c = 2 \text{ рад/с}^3$$

$$t = 3 \text{ с}$$

$$t_0 = 0 \text{ с}$$

$$\omega - ?, \quad \beta - ? \quad v(t) - ?,$$

$$a_\tau(t) - ?, \quad a_n(t) - ?$$

Решение. Задан кинематический закон движения любой точки на ободе колеса (угловой путь, проходимый точкой за время t):

$$\varphi(t) = a + bt + ct^3. \quad (1)$$

Угловая скорость вращения колеса есть первая производная от углового пути по времени:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = b + 3ct^2. \quad (2)$$

Угловое ускорение колеса есть первая производная от угловой скорости по времени:

$$\beta(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = 6ct. \quad (3)$$

Связь между линейной скоростью точек, лежащих на ободе колеса, и угловой скоростью колеса определяется формулой

$$v = \omega R = R(b + 3ct^2). \quad (4)$$

Тангенциальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\beta = 6Rct. \quad (5)$$

Нормальное ускорение точек, лежащих на ободе колеса:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2(b + 3ct^2)^2}{R} = R(b + 3ct^2)^2. \quad (6)$$

Мы нашли все искомые величины как функции времени. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо в уравнения (2) – (6) подставить $t = 3$ с:

$$\omega(t)|_{t=3 \text{ с}} = b + 3c \cdot 3^2 = (3 + 3 \cdot 2 \cdot 9) \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 57 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\beta(t)|_{t=3 \text{ с}} = 6c \cdot 3 = (6 \cdot 2 \cdot 3) \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 36 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2};$$

$$v(t)|_{t=3 \text{ с}} = R(b + 3c \cdot 3^2) = 0,1 \cdot 57 = 5,7 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$a_\tau(t)|_{t=3 \text{ с}} = 6Rct = 6 \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 3 = 3,6 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$a_n(t)|_{t=3 \text{ с}} = R(b + 3ct^2)^2 = 0,1 \cdot (57)^2 = 324,9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $\omega = 57 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \beta = 36 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}; v = 5,7 \frac{\text{м}}{\text{с}}; a_\tau = 3,6 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; a_n = 324,9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

Пример 1.4. Частица движется вдоль оси x по закону $x(t) = \alpha t^2 - bt^3$, где α и b – положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0 . Найти значение силы F_x в точке поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

Дано:

$$x(t) = \alpha t^2 - bt^3$$

$\alpha, b - \text{const}$

при $t = 0, F_x = F_0$

$$F_x (v_x = 0) - ?$$

$$F_x (x = 0) - ?$$

Решение. Запишем уравнение движения (2-й закон Ньютона) для частицы, движущейся вдоль оси x :

$$ma_x = F_x. \quad (1)$$

Проекция скорости на ось x частицы есть первая производная от координаты x по времени, найдем ее, используя условие задачи

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = 2\alpha t - 3bt^2. \quad (2)$$

Проекция ускорения на ось x частицы есть первая производная от проекции скорости на ось x по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 2\alpha - 6bt. \quad (3)$$

Подставим a_x из (3) в уравнение (1):

$$m(2\alpha - 6bt) = F_x. \quad (4)$$

В уравнении (4) неизвестна масса частицы m , найдем ее из начальных условий. Известно, что в начальный момент при $t = 0$ $F_x = F_0$, подставим это условие в (4), получим

$$m2\alpha = F_0,$$

откуда

$$m = \frac{F_0}{2\alpha}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим

$$F_x = \frac{F_0}{2\alpha}(2\alpha - 6bt). \quad (6)$$

В точке поворота частицы ее скорость $v_x = 0$. Положим в (2) $v_x = 0$, получим $0 = 2\alpha t_1 - 3bt_1^2$, где t_1 – время, когда частица окажется в точке поворота. Поскольку $t_1 \neq 0$, то

$$t_1 = \frac{2\alpha}{3b}. \quad (7)$$

Подставим (7) в (6) и найдем значение силы F_x в точке поворота:

$$F_{1x} = \frac{F_0}{2\alpha}(2\alpha - 6bt_1) = \frac{F_0}{2\alpha}\left(2\alpha - 6b\frac{2\alpha}{3b}\right) = \frac{F_0}{2\alpha}(-2\alpha) = -F_0.$$

Теперь найдем время t_2 , когда частица опять окажется в точке $x = 0$. Для этого в законе движения $x(t) = \alpha t^2 - bt^3$ приравняем $x(t_2) = 0$, получим

$$0 = \alpha t_2^2 - bt_2^3, \text{ или } t_2 = \frac{\alpha}{b}. \quad (8)$$

Подставим (8) в (6), получим

$$F_{2x} = \frac{F}{2\alpha} (2\alpha - 6bt_2) = \frac{F_0}{2\alpha} \left(2\alpha - 6b \frac{\alpha}{b} \right) = -2F_0.$$

Мы нашли значение проекции силы в точке $x = 0$.

Ответ: 1) $F_{1x} = -F_0$; 2) $F_{2x} = -2F_0$.

Пример 1.5. Пуля, пробив доску толщиной h , изменила свою скорость от v_0 до v . Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

Дано:
 h, v_0, v
 $\vec{F}_{\text{сопр}} = -k v \vec{v}$

$t = ?$

Решение.

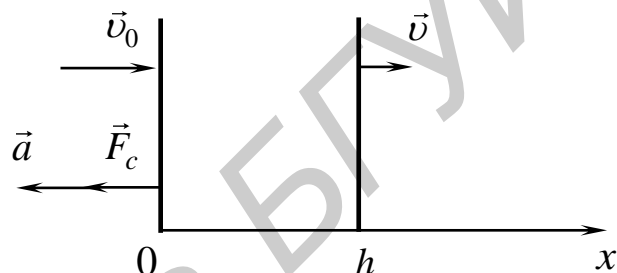


Рис. 1.2

Запишем 2-й закон Ньютона для пули:

$$m\vec{a} = \vec{F}_c$$

или

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k v \vec{v}. \quad (1)$$

Проекция уравнения (1) на ось x дает

$$m \frac{dv}{dt} = -k v^2. \quad (2)$$

Для того чтобы решить уравнение (2), надо в нем разделить переменные и проинтегрировать

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = - \int_0^t \frac{k}{m} dt. \quad (3)$$

В результате интегрирования получим $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{k}{m} t$ или $\frac{v_0 - v}{v_0 v} = \frac{k}{m} t$.

Отсюда время движения пули в доске

$$t = \frac{m}{k} \left(\frac{v_0 - v}{v_0 v} \right). \quad (4)$$

В уравнении (4) неизвестны m и k . Чтобы их найти, решим уравнение (2), сделав в нем замену переменных $t = f(s)$, где s – пройденный путь.

Тогда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}. \quad (5)$$

Подставим (5) в (2), получим

$$v \frac{dv}{ds} = -\frac{k}{m} v^2 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} ds. \quad (6)$$

Проинтегрируем уравнение (6) в пределах от начальной скорости v_0 при толщине доски 0 до конечной скорости v при толщине доски h :

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int_0^h ds,$$

откуда

$$\frac{m}{k} = \frac{h}{\ln \frac{v_0}{v}}. \quad (7)$$

Подставим (7) в (4) и найдем время движения пули в доске:

$$t = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln \frac{v_0}{v}}.$$

Ответ: $t = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln \frac{v_0}{v}}.$

Пример 1.6. Найти приращение кинетической энергии системы из двух шаров с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг при их абсолютно неупругом центральном соударении. До соударения скорости шаров были $v_1 = 5$ м/с и $v_2 = 3$ м/с.

Дано:

$$m_1 = 2 \text{ кг}$$

$$m_2 = 3 \text{ кг}$$

$$v_1 = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$v_2 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\Delta T - ?$$

Решение.

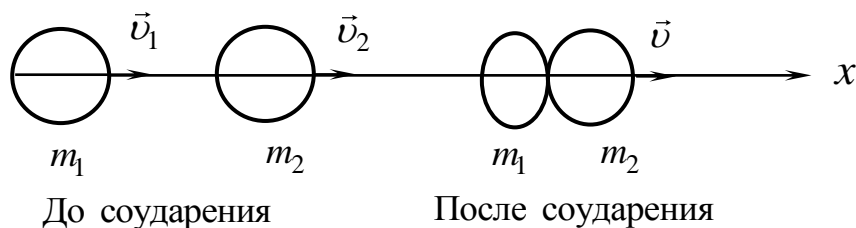


Рис. 1.3

Если считать систему шаров замкнутой, то выполняется закон сохранения импульса движущихся тел:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}. \quad (1)$$

Поскольку согласно условию $m_1 v_1 > m_2 v_2$, то шары до соударения и после движутся в положительном направлении оси x . Поэтому проекция (1) на ось x дает

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v. \quad (2)$$

Тогда

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

Кинетическая энергия шаров до соударения

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (4)$$

Кинетическая энергия шаров после соударения

$$T_2 = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}. \quad (5)$$

Тогда приращение кинетической энергии системы из двух шаров будет

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (6)$$

Подставим в (6) значения скорости v из (3):

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{(m_1 + m_2)(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)^2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = \\ &= \frac{m_1^2 v_1^2 + 2m_1 v_1 m_2 v_2 + m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = -\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

Проверим размерность ΔT :

$$[\Delta T] = \frac{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Произведем вычисления:

$$\Delta T = -\frac{2 \cdot 3(5-3)^2}{2(2+3)} \text{ Дж} = -\frac{24}{10} \text{ Дж} = -2,4 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta T = -2,4$ Дж.

Пример 1.7. Небольшая шайба массой $m = 0,1$ кг без начальной скорости соскальзывает с гладкой горки высотой $h = 1$ м и попадает на доску массой $M = 1$ кг, лежащую у основания горки на гладкой горизонтальной плоскости. Вследствие трения между шайбой и доской шайба тормозится

и, начиная с некоторого момента, движется вместе с доской как единое целое. Найти работу силы трения в этом процессе.

Дано:

$$m = 0,1 \text{ кг}$$

$$h = 1 \text{ м}$$

$$M = 1 \text{ кг}$$

$$A_{\text{тр}} - ?$$

Решение.

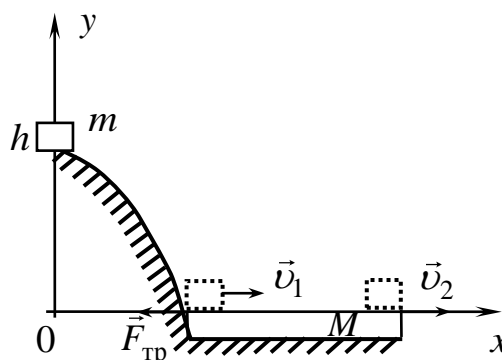


Рис. 1.4

По условию задачи поверхность горки и поверхности земли гладкая, следовательно, трение действует только между шайбой и доской. На рис. 1.4 пунктиром обозначено положение шайбы, когда она попадает на доску со скоростью \vec{v}_1 , и положение шайбы, когда она движется с доской как единое целое со скоростью \vec{v}_2 . Тогда работу сил трения можно определить по формуле

$$A_{\text{тр}} = E_2 - E_1, \quad (1)$$

где E_1 – полная механическая энергия системы шайба – доска в момент, когда шайба попадает на доску; E_2 – полная механическая энергия системы шайба – доска в момент, когда они движутся вместе как единое целое.

Полная механическая энергия системы шайба – доска складывается из кинетической энергии тел T и из их потенциальной энергии в поле силы тяжести U , т. е.

$$E = T + U.$$

Выберем за нулевой уровень потенциальной энергии в поле силы тяжести поверхность доски. В этом случае, пренебрегая толщиной доски, согласно (1)

$$A_{\text{тр}} = T_2 - U_1, \quad (2)$$

где $E_2 = T_2$ – кинетическая энергия системы шайба – доска в момент, когда они движутся вместе как единое целое со скоростью v_2 , а $E_1 = U_1 = mgh$.

Тогда

$$A_{\text{тр}} = \frac{(m + M)v_2^2}{2} - mgh. \quad (3)$$

Найдем скорость шайбы v_1 , с которой она попадает на доску. Для системы горка – шайба до момента попадания шайбы на доску будет выполняться закон сохранения полной механической энергии:

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2}. \quad (4)$$

Отсюда

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (5)$$

С момента попадания шайбы на доску сила тяжести будет скомпенсирована силой реакции опоры, и поэтому сохраняется импульс системы. Для системы доска – шайба будет выполняться закон сохранения импульса, а именно

$$mv_1 = (m + M)v_2. \quad (6)$$

Отсюда

$$v_2 = \frac{mv_1}{m + M} = \frac{m\sqrt{2gh}}{m + M}. \quad (7)$$

Теперь подставим (7) в уравнение (3):

$$A_{\text{тр}} = T_2 - U_1 = \frac{m^2 gh}{(m + M)} - mgh = -\frac{mMgh}{(m + M)}.$$

Как и должно быть, работа сил трения отрицательна. Произведем вычисления:

$$A_{\text{тр}} = -\frac{0,1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1}{0,1 + 1} \text{ Дж} = -\frac{1}{1,1} \text{ Дж} = -0,91 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_{\text{тр}} = -0,91 \text{ Дж}$.

Пример 1.8. На однородный сплошной цилиндр массой $m_1 = 0,6 \text{ кг}$ и радиусом $R = 0,1 \text{ м}$ плотно намотана легкая нерастяжимая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m_2 = 0,1 \text{ кг}$. В момент $t = 0$ система пришла в движение. Пренебрегая трением в оси цилиндра, найти в момент времени $t = 3 \text{ с}$; 1) модуль угловой скорости цилиндра; 2) кинетическую энергию системы груз – цилиндр.

Дано:

$$m_1 = 0,6 \text{ кг}$$

$$R = 0,1 \text{ м}$$

$$m_2 = 0,1 \text{ кг}$$

$$t = 3 \text{ с}$$

$$\omega - ? \quad T - ?$$

Решение. Для решения задачи необходимо записать уравнения движения цилиндра и груза. Груз движется поступательно вдоль оси x . Уравнение поступательного движения груза (2-й закон Ньютона):

$$m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}. \quad (1)$$

Цилиндр вращается вокруг фиксированной оси z . Уравнение движения цилиндра:

$$I\beta_z = M_z, \quad (2)$$

где I – момент инерции сплошного цилиндра относительно оси z ; β_z – проекция углового ускорения цилиндра на ось z ; M_z – момент силы натяжения нити относительно оси z .

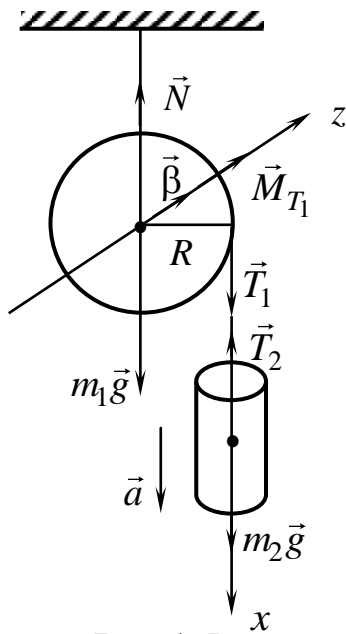


Рис. 1.5

В проекциях на ось x и ось z уравнения (1) и (2) запишутся в виде

$$m_2 a = m_2 g - T_2; \quad (1^*)$$

$$I\beta = M_{T_1}. \quad (2^*)$$

Момент силы $M_{T_1} = RT_1$.

Момент инерции цилиндра относительно оси z

$$I = \frac{m_1 R^2}{2}.$$

Поскольку нить нерастяжима и намотана плотно, то линейное ускорение связано с угловым вращением цилиндра формулой

$$a = R\beta. \quad (3)$$

В пренебрежении массой нити $T = T_1 = T_2$, учитывая это, получим систему уравнений для решения задачи:

$$\left. \begin{aligned} m_2 a &= m_2 g - T, \\ \frac{m_1 R^2}{2} \beta &= RT, \\ a &= R\beta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

или, исключая a ,

$$\left. \begin{aligned} m_2 R\beta &= m_2 g - T, \\ \frac{m_1 R\beta}{2} &= T. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Складывая почленно уравнение (5), получаем

$$m_2 R\beta + \frac{m_1 R\beta}{2} = m_2 g,$$

откуда

$$\beta = \frac{m_2 g}{\frac{m_1 R}{2} + m_2 R} = \frac{2m_2 g}{m_1 R + 2m_2 R}. \quad (6)$$

Как видно из (6) $\beta = \text{const}$, следовательно,

$$\omega = \beta t = \frac{2m_2 g t}{m_1 R + 2m_2 R}.$$

Произведем вычисления:

$$\omega(t) \Big|_{t=3c} = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 10 \cdot 3}{0,6 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,1 \cdot 0,1} \frac{1}{c} = \frac{6}{0,08} \frac{1}{c} = 75 \frac{1}{c} = 75 \text{ c}^{-1}.$$

Суммарная кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии поступательного движения груза и кинетической энергии вращательного движения цилиндра:

$$T = \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}, \quad (7)$$

т. к. $v = \omega R$, то

$$T = \frac{m_2 \omega^2 R^2}{2} + \frac{m_1 R^2 \omega^2}{2 \cdot 2} = \frac{\omega^2 R^2}{2} \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right). \quad (8)$$

Произведем вычисления:

$$T = \frac{75^2 \cdot 0,1^2}{2} \left(\frac{0,6}{2} + 0,1 \right) \text{ Дж} = 28,125 \cdot 0,4 \text{ Дж} = 11,25 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\omega = 75 \text{ с}^{-1}$; $T = 11,25 \text{ Дж}$.

Пример 1.9. Частица массой 20 г совершает гармонические колебания по закону $x(t) = 0,5 \sin(\pi t + 0,5\pi)$ (м). Определить амплитуду, период колебаний, частоту ν и начальную фазу φ_0 колебаний. Найти зависимость от времени скорости и ускорения частицы. Чему равна фаза колебаний φ_1 и смещение точки x_1 в момент времени $t = 0,5 \text{ с}$ с начала колебаний? Чему равна полная механическая энергия точки в этот момент времени?

Дано:

$$x(t) = 0,5 \sin(\pi t + 0,5\pi) \text{ (м)}$$

$$m = 20 \text{ г} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$$

$$t_1 = 0,5 \text{ с}$$

$$A - ? \quad T - ? \quad \nu - ? \quad \varphi_0 - ?$$

$$v(t) - ? \quad a(t) - ? \quad \varphi_1 - ? \quad x_1 - ?$$

$$E - ?$$

Решение. Кинематический закон гармонических колебаний частицы вдоль оси x имеет вид

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1)$$

Наше уравнение

$$x(t) = 0,5 \sin(\pi t + 0,5\pi). \quad (2)$$

Сравнив (1) и (2), видно, что $A = 0,5 \text{ м}$ – амплитуда смещения; $\varphi_0 = 0,5\pi$ – начальная фаза колебаний; $\omega_0 = \pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – циклическая частота колебаний.

$\omega_0 = 2\pi\nu$, следовательно,

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ Гц.}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ с.}$$

Проекция скорости частицы, совершающей колебания вдоль оси x , определяется по формуле

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \pi \cdot 0,5 \cos(\pi t + 0,5\pi) = -0,5\pi \sin \pi t. \quad (3)$$

Проекция ускорение частицы

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0,5\pi^2 \cos \pi t. \quad (4)$$

Фаза колебаний φ_1 в момент времени $t_1 = 0,5$ с:

$$\varphi_1 = (\omega_0 t_1 + \varphi_0) = (\pi \cdot 0,5 + 0,5\pi) = \pi. \quad (5)$$

Смещение частицы в момент времени $t_1 = 0,5$ с:

$$x_1 = A \sin \varphi_1 = 0,5 \sin \pi = 0. \quad (6)$$

Из равенства нулю x_1 следует, что в момент $t_1 = 0,5$ с частица находится в положении равновесия. В этом положении полная механическая энергия частицы E равна максимальной кинетической энергии частицы, т. е.

$$E = E_k^{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2}. \quad (7)$$

Как видно из (3), $v_{\max} = 0,5\pi$, тогда

$$E = \frac{m(0,5\pi)^2}{2} \text{ Дж} = \frac{0,25m\pi^2}{2} \text{ Дж} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,25 \cdot 9,86}{2} \text{ Дж} = 2,46 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 0,5$ м; $\nu = 0,5$ Гц; $T = 2$ сек; $v_x = -0,5\pi \cdot \sin \pi t$;

$a_x = -0,5\pi^2 \cdot \cos \pi t$; $\varphi_1 = \pi$; $x_1 = 0$; $E = 2,46 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Пример 1.10. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle$ вращательного движения одной молекулы азота при температуре $T = 300$ К, а также кинетическую энергию $E_{\text{вр}}$ вращательного движения всех молекул азота массой $m = 5$ г. Какова среднеквадратичная скорость поступательного движения молекулы?

Дано:

$$T = 300 \text{ К}$$

N_2

$i = 5$

$$M_{N_2} = 28 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle - ? \quad E_{\text{вр}} - ? \quad v_{\text{кв}} - ?$$

Решение. На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя кинетическая энергия, равная $\frac{kT}{2}$, где k – постоянная

Больцмана; T – абсолютная температура газа.

Для жесткой молекулы, имеющей i степеней свободы, средняя кинетическая энергия равна

$$\langle \epsilon_k \rangle = \frac{i_{\text{пост}}}{2} kT + \frac{i_{\text{вр}}}{2} kT = \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle + \langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle.$$

Для двухатомной молекулы (молекула азота – двухатомная) $i_{\text{пост}} = 3$, $i_{\text{вр}} = 2$, следовательно,

$$\langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle = \frac{2}{2} kT = kT. \quad (1)$$

Число всех молекул газа

$$N = N_A \nu = N_A \frac{m}{M}, \quad (2)$$

где m – масса газа; M – молярная масса газа.

Кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа

$$E_{\text{вр}} = N \langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle. \quad (3)$$

Подставим (2) в (3), получим

$$E_{\text{вр}} = N_A \frac{m}{M} \langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle. \quad (4)$$

Среднеквадратичная скорость молекулы определяется по формуле

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (5)$$

Произведем вычисления:

$$\langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle = kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \text{ Дж} = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж};$$

$$E_{\text{вр}} = N_A \frac{m}{M} \langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 445 \text{ Дж};$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 300}{28 \cdot 10^{-3}}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 5,13 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}; E_{\text{вр}} = 445 \text{ Дж}; v_{\text{кв}} = 5,13 \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

Пример 1.11. Какое количество теплоты Q получает идеальный одноатомный газ, занимающий объем $V_1 = 20$ л, переходя из состояния 1 в состояние 3, если в состоянии 1 его давление $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, а в состоянии 2 $p_2 = 2p_1$, $V_2 = 3V_1$?

Дано:

$$p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$V_1 = 20 \text{ л} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$$

$$p_2 = 2p_1, V_2 = 3V_1$$

$$i = 3$$

$$Q = ?$$

Решение. Количество теплоты Q , полученное газом в этом процессе, складывается из количества теплоты Q_{12} , полученного при переходе из состояния 1 в состояние 2, и количества теплоты Q_{23} , полученного при переходе из состояния 2 в состояние 3:

$$Q = Q_{12} + Q_{23}. \quad (1)$$

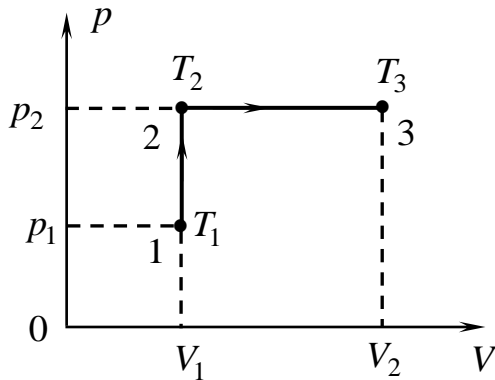


Рис. 1.6

Согласно первому началу термодинамики

$$Q = A + \Delta U, \quad (2)$$

где Q – количество теплоты, полученное системой; A – работа, совершенная силами давления газа; ΔU – изменение внутренней энергии системы.

Процесс, соответствующий участку 1 – 2 графика (рис. 1.6), является изохорическим ($V = \text{const}$).

Работа газа при постоянном объеме $A_{12} = p\Delta V$,

в нашем случае $V = \text{const}$, следовательно, $\Delta V = 0$ и $A_{12} = 0$ (т. е. работа газа при изохорическом процессе не совершается):

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{i}{2} V \Delta p, \quad (3)$$

где i – число степеней свободы (для одноатомного газа $i = 3$); ν – число молей газа; R – универсальная газовая постоянная; V_1 – объем газа в состоянии 1; V_2 – объем газа в состоянии 2.

Из (3) для нашего случая

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} (p_2 - p_1) V_1 = 1,5 p_1 V_1, \quad (4)$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = 1,5 p_1 V_1. \quad (5)$$

Процесс, соответствующий участку 2 – 3 (см. рис. 1.6), изобарический, поэтому

$$Q_{23} = A_{23} + \Delta U_{23}.$$

Здесь

$$\Delta U_{23} = \frac{i}{2} p \Delta V = \frac{3}{2} p_2 (V_2 - V_1) = 6 p_1 V_1. \quad (6)$$

$$A_{23} = p_2 (V_2 - V_1) = 2 p_1 (3V_1 - V_1) = 4 p_1 V_1. \quad (7)$$

Подставим (6) и (7) в Q_{23} :

$$Q_{23} = 6 p_1 V_1 + 4 p_1 V_1 = 10 p_1 V_1. \quad (8)$$

Теперь подставим (5) и (8) в (1):

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = 1,5 p_1 V_1 + 10 p_1 V_1 = 11,5 p_1 V_1.$$

Произведем вычисления:

$$Q = 11,5 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} = 4,6 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Ответ: $Q = 4,6 \cdot 10^4$ Дж.

Пример 1.12. Температура нагревателя идеальной тепловой машины $T_1 = 400$ К, а холодильника $T_2 = 300$ К. Количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя за $t = 1$ с, равно $Q_1 = 80$ кДж. Найти количество теплоты Q_2 , отдаваемое холодильнику за это время, и мощность тепловой машины N .

Дано:

$$T_1 = 400 \text{ К}$$

$$T_2 = 300 \text{ К}$$

$$t = 1 \text{ с}$$

$$Q_1 = 80 \text{ кДж} = 8 \cdot 10^4 \text{ Дж}$$

$$Q_2 - ?, \quad N - ?$$

Решение. КПД любой тепловой машины (теплого двигателя), как реальной, так и идеальной, по определению равен

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

($Q_2 < 0$, т. к. теплота выделяется рабочим телом).

КПД только идеальной тепловой машины, кроме этого, равен

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (2)$$

Приравняв (1) и (2), получим

$$\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \text{ или } 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \text{ или } \frac{Q_2}{Q_1} = -\frac{T_2}{T_1},$$

откуда

$$Q_2 = -Q_1 \frac{T_2}{T_1} < 0, \quad (3)$$

где Q_2 – количество теплоты, отданное холодильнику.

Мощность тепловой машины N равна ее работе A в единицу времени t , т. е.

$$N = \frac{A}{t}. \quad (4)$$

В свою очередь работа A равна сумме количества теплоты Q_1 , полученной рабочим телом от нагревателя, и количества теплоты Q_2 , отданной им холодильнику:

$$A = Q_1 + Q_2. \quad (5)$$

Тогда

$$N = \frac{Q_1 + Q_2}{t}. \quad (6)$$

Произведем вычисления:

$$Q_2 = -8 \cdot 10^4 \cdot \frac{300}{400} \text{ Дж} = -6 \cdot 10^4 \text{ Дж}; \quad N = \frac{8 \cdot 10^4 - 6 \cdot 10^4}{1} \text{ Вт} = 2 \cdot 10^4 \text{ Вт}.$$

Ответ: $Q_2 = -6 \cdot 10^4$ Дж; $N = 2 \cdot 10^4$ Вт.

1.5 Контрольная работа №1

Таблица 1.1

Варианты	Номера задач							
1	1	11	21	31	41	51	61	71
2	2	12	22	32	42	52	62	72
3	3	13	23	33	43	53	63	73
4	4	14	24	34	44	54	64	74
5	5	15	25	35	45	55	65	75
6	6	16	26	36	46	56	66	76
7	7	17	27	37	47	57	67	77
8	8	18	28	38	48	58	68	78
9	9	19	29	39	49	59	69	79
0	10	20	30	40	50	60	70	80

1. Частица движется вдоль прямой по закону $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ м, $B = 2,5$ м/с, $C = 0,25$ м/с³. Найти скорость v и ускорение a в зависимости от времени, а также средние значения скорости и ускорения за интервал времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с.

2. Ускорение материальной точки изменяется по закону $\vec{a} = \alpha t^2 \vec{i} - b \vec{j}$, где $\alpha = 2$ м/с⁴; $b = 1$ м/с². Найти кинематический закон движения точки, а также модуль ее перемещения за время $\Delta t = t_1 - t_0$, где $t_1 = 1$ с, если при $t_0 = 0$ $\vec{r}_0 = 3\vec{i}$ и $\vec{v}_0 = 0$.

3. Скорость материальной точки, движущейся в плоскости XU , изменяется со временем по закону $\vec{v} = \alpha \vec{i} - 2bt \vec{j}$, где $\alpha = 5$ м/с и $b = 3$ м/с² – положительные постоянные. Найти: 1) зависимость от времени модуля скорости и ускорения точки; 2) зависимость от времени радиуса-вектора точки; 3) модуль радиуса-вектора точки в момент времени $t = 2$ с. В момент $t_0 = 0$ радиус-вектор точки равен нулю.

4. Точка движется в плоскости XU по закону $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1 - bt)$, где α и b – положительные постоянные. Найти: 1) уравнение траектории точки $y(x)$, изобразить ее график; 2) зависимость от времени модуля скорости и ускорения точки; 3) зависимость от времени угла φ между векторами скорости и ускорения.

5. Точка движется в плоскости XU по закону $x = A \sin \omega t$, $y = A(1 - \cos \omega t)$, где A и ω – положительные постоянные. Найти: 1) скорость и ускорение точки в зависимости от времени; 2) путь s , проходимый точкой за время τ .

6. Частица вращается по окружности радиусом $R = 2$ м по закону $\varphi = At + Bt^2$, где $A = 1$ рад/с; $B = 0,2$ рад/с². Найти тангенциальное, нормальное и полное ускорение частицы в момент времени $t = 4$ с.

7. Частица движется с ускорением по закону $a = At^2$ вдоль оси X , где $A = 2 \text{ м/с}^4$. Найти зависимость скорости и координаты частицы от времени. Вычислить ускорение частицы в момент времени, когда ее скорость $v = 6 \text{ м/с}$.

8. Точка движется по окружности со скоростью $v = \alpha t$, где $\alpha = 0,5 \text{ м/с}^2$. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет $\eta = 0,1$ длины окружности после начала движения.

9. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени, как $\varphi = bt^2$, где $b = 0,2 \text{ рад/с}^2$. Найти полное ускорение a точки A на ободе колеса в момент $t = 2,5 \text{ с}$, если скорость точки A в этот момент $v = 0,65 \text{ м/с}$.

10. Твердое тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega} = \alpha t \vec{i} + bt^2 \vec{j}$, где $\alpha = 0,5 \text{ рад/с}^2$, $b = 0,06 \text{ рад/с}^3$, \vec{i} и \vec{j} – орты осей x и y . Найти модули угловой скорости и углового ускорения в момент $t = 10 \text{ с}$.

11. На тело массой m , лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент времени $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени как $F = kt$, где k – постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти: 1) скорость тела в момент отрыва от плоскости; 2) путь, пройденный телом к этому моменту.

12. Частица массой m в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin \omega t$, где \vec{F}_0 и ω – постоянные. Найти путь, пройденный частицей, в зависимости от t .

13. В момент $t = 0$ частица массой m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t$, где \vec{F}_0 и ω – постоянные. Сколько времени частица будет двигаться до первой остановки? Какой путь она пройдет за это время?

14. Катер массой m движется по озеру со скоростью v_0 . В момент $t = 0$ выключили его двигатель. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости катера, $\vec{F} = -k\vec{v}$, $k = \text{const} > 0$, найти: 1) время движения катера с выключенным двигателем; 2) скорость катера в зависимости от пути, пройденного с выключенным двигателем; 3) полный путь до остановки.

15. К бруску массой m , лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = \frac{mg}{3}$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = ks$, где k – постоянная, s – пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α .

16. Найти модуль и направление силы, действующей на частицу массой m , при ее движении в плоскости XU по закону $x = A \sin \omega t$, $y = B \cos \omega t$, где A, B, ω – постоянные.

17. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от прой-

денного пути x по закону $k = \gamma x$, где γ – постоянная. Найти путь, пройденный бруском до остановки.

18. На частицу массой $m = 100$ г действует сила, зависящая от времени по закону $F = Bt$, где $B = 0,6$ кг·м/с³. Частица движется вдоль оси X . Найти кинематический закон движения частицы и ее координату в момент времени $t = 3$ с. В начальный момент времени частица находилась в начале координат и ее скорость была равна нулю.

19. Частица массой $m = 200$ г движется из начала координат прямолинейно вдоль оси X под действием силы $F = Bt$, где $B = 0,2$ кг·м/с³. Найти кинематический закон движения частицы и ее координату в момент времени $t = 2$ с. В начальный момент времени $x_0 = 1$ м и скорость частицы была равна 1 м/с.

20. Частица массой $m = 1$ кг движется по окружности радиусом $R = 2$ м по закону $s = At + Bt^2$, где s – пройденный путь, $A = 1$ м/с, $B = 2$ м/с². Найти силу, действующую на частицу через 2 с после начала движения.

21. Локомотив массой m начинает двигаться от станции так, что его скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{s}$, где α – постоянная, s – пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив за первые t секунд после начала движения.

22. Тело массой m начинают поднимать с поверхности земли под действием силы $\vec{F} = 2(\alpha y - 1)m\vec{g}$, где α – положительная постоянная. Найти работу всех сил, действующих на тело на высоте h .

23. Тело массой m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Найти среднюю мощность, развиваемую силой тяжести за все время движения тела, и мгновенную мощность этой силы как функцию времени.

24. Частица массой m движется по окружности радиусом R с нормальным ускорением, которое меняется со временем по закону $a_n = \alpha t^2$, где α – постоянная. Найти зависимость от времени мощности всех сил, действующих на частицу, а также среднее значение этой мощности за первые t секунд после начала движения.

25. В результате упругого центрального столкновения частицы 1 массой m_1 с покоившейся частицей 2 обе частицы разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Найти массу частицы 2.

26. Человек массой $m_1 = 70$ кг, бегущий со скоростью $v_1 = 9$ км/ч, догоняет тележку массой $m_2 = 190$ кг, движущуюся со скоростью $v_2 = 3,6$ км/ч, и вскакивает на нее. С какой скоростью станет двигаться тележка с человеком? С какой скоростью будет двигаться тележка с человеком, если человек до прыжка бежал навстречу тележке?

27. По краю платформы в виде диска массой 500 кг начинает двигаться человек массой 70 кг. На какой угол повернется платформа, если человек, идя по краю платформы, вернется в исходную точку?

28. Платформа в виде диска диаметром 2 м и массой 100 кг может вращаться вокруг вертикальной оси. Человек массой 50 кг, первоначально покоившийся, начинает идти по краю платформы со скоростью 1 м/с относительно платформы. Чему будет равна угловая скорость вращения платформы?

29. Пуля массой 20 г, летящая со скоростью 300 м/с, застревает в нижнем конце вертикального стержня длиной 1 м и массой 2 кг, который может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через верхний конец. Найти угловую скорость стержня сразу после попадания пули и его кинетическую энергию.

30. Пуля массой m , летящая со скоростью v , попадает в деревянный шар массой M , подвешенный на невесомой, нерастяжимой нити, и застревает в нем. На какую высоту поднимется шар с пулей после столкновения.

31. На ступенчатый блок (рис. 1.7) намотаны в противоположных направлениях две нити. На конец одной из них действуют постоянной силой \vec{F} , а к концу другой нити прикреплен груз массой m . Известны радиусы R_1 и R_2 блока и его момент инерции I относительно оси вращения. Трения нет. Найти угловое ускорение блока.

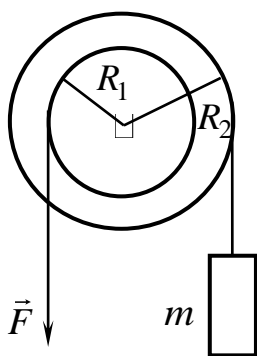


Рис. 1.7

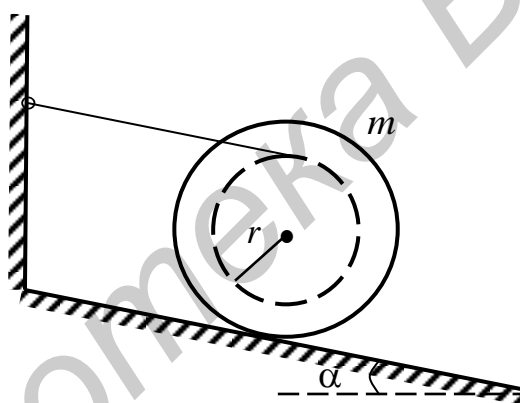


Рис. 1.8

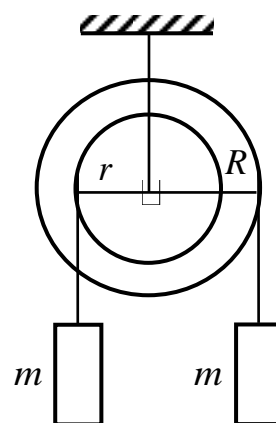


Рис. 1.9

32. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, находится катушка с ниткой, свободный конец которой укреплен, как показано на рис. 1.8. Масса катушки $m = 200$ г, ее момент инерции относительно собственной оси $I = 0,45$ г·м², радиус намотанного слоя ниток $r = 3$ см. Найти ускорение оси катушки.

33. Однородный шар скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти ускорение центра шара и значение коэффициента трения качения.

34. Однородный шар массой $m = 0,5$ кг скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Найти кинетическую энергию шара через $t = 1,6$ с после начала движения.

35. На ступенчатый вал, радиусы которого r и R , намотаны нити, нагруженные одинаковыми массами m (рис. 1.9). Момент инерции вала I . Массой нити и трением в оси блока пренебречь. Найти ускорение a_1 и a_2 грузов.

36. К краю стола прикреплен блок, представляющий собой однородный диск. Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы. Один груз движется по поверхности стола, а другой – вдоль вертикали вниз. Определить коэффициент трения между поверхностями груза и стола, если массы каждого груза и масса блока одинаковы и грузы движутся с ускорением $a = 0,5 \text{ м/с}^2$.

37. Нить с привязанными к ее концам грузами массами $m_1 = 50 \text{ г}$ и $m_2 = 80 \text{ г}$ перекинута через блок, представляющий собой однородный диск диаметром $d = 10 \text{ см}$. Определить момент инерции блока I , если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение $\beta = 5 \text{ рад/с}^2$. Трением оси блока и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

38. Однородный цилиндр массой M и радиусом R вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием груза массой m , прикрепленного к легкой нерастяжимой нити, намотанной на цилиндр. Найти угол поворота цилиндра в зависимости от времени, если при $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

39. По горизонтальной плоскости катится однородный диск с начальной скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$. Определить коэффициент трения между плоскостью и диском, если диск, будучи предоставленным самому себе, остановится, пройдя путь $s = 20 \text{ м}$.

40. Блок, представляющий собой однородный диск массой $M = 0,5 \text{ кг}$, вращается под действием сил натяжения легкой нерастяжимой нити, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 0,2 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,6 \text{ кг}$. Определить силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока.

41. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 3 \text{ см}$ и циклической частотой $\omega_0 = 10 \text{ рад/с}$. Начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$. Найти зависимость от времени смещения x , скорости v и ускорения a точки. Чему равно ускорение a_1 точки при смещении $x_1 = 1,5 \text{ см}$?

42. Через какое минимальное время t после начала колебаний смещение колеблющейся материальной точки составит половину амплитуды. Период колебаний $T = 12 \text{ с}$. Найти среднюю скорость точки за это время. Амплитуда колебаний $A = 5 \text{ см}$, $\varphi_0 = 0$.

43. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси X из положения равновесия. Циклическая частота колебаний частицы $\omega_0 = 3 \text{ рад/с}$. Найти момент времени t после начала движения, когда частица первый раз окажется в точке с координатой $x = 20 \text{ см}$, со скоростью $v = 0,6 \text{ м/с}$.

44. Пружинный маятник вывели из положения равновесия и отпустили. Через какое минимальное время t , считая от начала колебания, его потенци-

альная энергия станет равна кинетической, если масса маятника $m = 200$ г, а жесткость пружины $k = 20$ Н/м?

45. Частица совершает колебания вдоль оси x по закону $x = 6\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$. Найти путь, пройденный частицей за период, а также среднее значение скорости $\langle v \rangle$ и среднее значение ускорения $\langle a \rangle$ за первую четверть периода.

46. Математический маятник массой $m = 20$ г колеблется по закону $x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Найти максимальную силу F_m , действующую на маятник, и полную механическую энергию E маятника.

47. Частица совершает гармонические колебания. Период колебаний $T = 2$ с, амплитуда $A = 4$ см. Найти скорость частицы v в момент времени, когда смещение частицы от положения равновесия $x = 2$ см.

48. Частица совершает колебания вдоль оси x по закону $x = 5\sin 0,5\pi t$. Найти промежуток времени Δt , за который частица проходит путь от положения равновесия до максимального смещения. Чему равны промежутки времени Δt_1 и Δt_2 , за которые частица проходит первую и вторую половину этого пути.

49. Материальная точка совершает гармонические колебания так, что в начальный момент времени ее смещение $x_0 = 4$ см, а скорость $v_0 = 10$ см/с. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 колебаний точки, если ее период $T = 2$ с.

50. Шарик массой $m = 50$ г колеблется с периодом $T = 2$ с. В начальный момент времени смещение шарика $x_0 = 4$ см и он обладает энергией $E = 0,02$ Дж. Найти смещение x шарика и возвращающую силу F_x в момент $t = \frac{T}{2}$.

51. Найти среднюю кинетическую энергию поступательного и вращательного движения одной молекулы гелия (He) при температуре $t = 27$ °С, а также ее среднеквадратичную скорость.

52. Водород (H_2) находится при температуре $t = 50$ °С. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы, а также кинетическую энергию всех молекул газа, если количество вещества $\nu = 0,5$ моль.

53. Азот (N_2) находится при температуре $t = 200$ °С. Определить среднюю кинетическую энергию поступательного и вращательного движения одной молекулы, а также ее среднеквадратичную скорость.

54. Определить среднеквадратичную скорость молекулы газа, масса которого $m = 0,5$ г заключена в сосуде объемом $V = 2$ л под давлением $p = 100$ кПа.

55. Определить среднеквадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы кислорода (O_2), находящегося при температуре $t = 300$ °С.

56. Определить среднюю кинетическую энергию молекулы водорода (H_2) и внутреннюю энергию 2 молей этого газа, если водород находится при температуре $t = 200$ °С.

57. Определить среднюю кинетическую энергию молекулы азота (N_2), если ее среднеквадратичная скорость равна $v_{\text{кв}} = 7 \cdot 10^2$ м/с.

58. Определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения, среднюю кинетическую энергию вращательного движения и среднеквадратичную скорость молекулы водорода (H_2), если температура газа $T = 400$ К.

59. Определить внутреннюю энергию 1 моля водорода (H_2) и среднюю кинетическую энергию молекулы водорода, если газ находится при температуре $t = 300$ °С.

60. Найти среднеквадратичную скорость молекулы азота (N_2), если внутренняя энергия 3 молей газа $U = 2,5 \cdot 10^4$ Дж.

61. Какое количество тепла необходимо сообщить азоту при изобарическом нагревании, чтобы газ совершил работу $A = 2,0$ Дж?

62. Найти молярную массу газа, если при нагревании $m = 0,5$ кг этого газа на $\Delta T = 10$ К изобарически требуется на $\Delta Q = 1,48$ кДж тепла больше, чем при изохорическом нагревании.

63. Один моль некоторого идеального газа изобарически нагрели на $\Delta T = 72$ К, сообщив ему количество тепла $Q = 1,6$ кДж. Найти приращение его внутренней энергии и величину $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$.

64. Водород (H_2) занимает объем $V = 10$ м³ при давлении $p_1 = 0,1$ МПа. Его нагрели при постоянном объеме до давления $p_2 = 0,3$ МПа. Определить изменение ΔU внутренней энергии водорода, работу A , совершенную им, и теплоту Q , сообщенную газу.

65. Кислород (O_2) нагревают при постоянном давлении $p = 60$ кПа. Его объем увеличивается от $V_1 = 2$ л до $V_2 = 5$ л. Определить изменение ΔU внутренней энергии кислорода, работу A , совершенную газом при расширении, а также теплоту Q , сообщенную кислороду при нагревании.

66. Азот (N_2) массой $m = 0,3$ кг изотермически расширили при температуре $T = 290$ К, при этом его объем увеличился в 3 раза. Определить изменение ΔU внутренней энергии азота, совершенную при расширении газа работу A , количество теплоты Q , полученное газом.

67. Кислород (O_2) массой $m = 300$ г, занимающий объем $V_1 = 200$ л при давлении $p_1 = 300$ кПа, нагревают при постоянном давлении до объема $V_2 = 400$ л, а затем нагревают при неизменном объеме до давления $p_2 = 500$ кПа. Найти изменение внутренней энергии ΔU кислорода, совершенную газом работу A и теплоту Q , переданную газу.

68. Два моля водорода (H_2) при температуре $t = 27$ °С изотермически расширили, сообщив ему теплоту $Q = 700$ Дж. Во сколько раз увеличится объем водорода?

69. Азот (N_2) массой $m = 200$ г изобарно нагревают от температуры $T_1 = 300$ К до температуры $T_2 = 400$ К. Определить изменение внутренней энергии азота ΔU , работу A , совершенную газом, и полученную им теплоту Q в этом процессе.

70. Два моля идеального двухатомного газа при температуре $T_1 = 300$ К охладили изохорически, вследствие чего его давление уменьшилось в 2 раза. Затем газ изобарически расширили так, что в конечном состоянии его температура стала равна первоначальной. Найти количество тепла, поглощенное газом в данном процессе.

71. У тепловой машины, работающей по циклу Карно, температура нагревателя в $n = 1,6$ раза больше температуры холодильника. Какая доля ω количества теплоты, полученного за один цикл от нагревателя, передается холодильнику?

72. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, получает теплоту $Q_1 = 100$ кДж. Определить работу газа, если температура нагревателя T_1 в 2 раза выше температуры холодильника T_2 .

73. Идеальный газ совершает цикл Карно. Определить температуру холодильника T_2 и КПД цикла, если теплота, полученная газом за цикл, в 4 раза больше совершенной им работы. Температура нагревателя $T_1 = 400$ К.

74. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя $T_1 = 400$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Определить КПД цикла, а также работу газа при изотермическом расширении, если при изотермическом сжатии совершена работа $A = 100$ Дж.

75. Идеальный газ совершает цикл Карно. Определить температуру T_1 нагревателя, если за один цикл газ отдает холодильнику $Q_2 = 20$ кДж, а при температуре холодильника $T_2 = 250$ К работа цикла $A = 10$ кДж.

76. Идеальный газ совершает цикл Карно при температуре холодильника $T_2 = 300$ К и нагревателя $T_1 = 400$ К. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя возрастает до 500 К?

77. Идеальный газ совершает цикл Карно при температуре холодильника $T_2 = 250 \text{ К}$ и нагревателя $T_1 = 500 \text{ К}$. Во сколько раз уменьшится КПД цикла, если температура холодильника увеличится до 350 К ?

78. Определить работу изотермического сжатия газа, совершающего цикл Карно, если работа изотермического расширения $A = 20 \text{ Дж}$, а КПД цикла $\eta = 30 \%$.

79. Тепловой двигатель работает по циклу Карно. За цикл двигатель совершает работу $A = 2 \text{ кДж}$ и 70% теплоты, полученной от нагревателя, отдает холодильнику. Найти КПД цикла и количество теплоты Q_1 , полученной двигателем от нагревателя.

80. Тепловой двигатель работает по циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 300 \text{ К}$. Определить КПД цикла и температуру T_2 холодильника, если за счет $Q_1 = 2 \text{ кДж}$ теплоты, получаемой от нагревателя, двигатель совершает работу $A = 0,5 \text{ кДж}$.

Библиотека БГУИР

2. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ (Основные формулы)

2.1. Электростатическое поле в вакууме

Закон Кулона в скалярном виде:

$$F = k \frac{|qq'|}{r^2},$$

где F – модуль силы взаимодействия между точечными зарядами q и q' ; $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – электрическая постоянная; q' – точечный заряд, создающий электростатическое поле; q – точечный заряд, внесенный в электростатическое поле; r – расстояние между зарядами q и q' .

Напряженность электростатического поля

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q},$$

где $\vec{F}(\vec{r})$ – сила, действующая на точечный заряд q , внесенный в данную точку поля с радиусом-вектором \vec{r} .

Потенциал электростатического поля

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q},$$

где $U(\vec{r})$ – потенциальная энергия точечного заряда q , помещенного в данную точку поля.

Напряженность и потенциал поля точечного заряда q' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kq'}{r^3} \vec{r};$$

$$\varphi(\vec{r}) = k \frac{q'}{r}.$$

Принцип суперпозиции полей:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r});$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\vec{r}),$$

где $\vec{E}_i(\vec{r})$ – напряженность поля i -го заряда системы в рассматриваемой точке, создаваемого им в отдельности; $\vec{E}(\vec{r})$ – напряженность поля, создаваемого системой зарядов в рассматриваемой точке.

Связь напряженности и потенциала электростатического поля:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = -\text{grad}\varphi.$$

где $\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$.

Работа, совершаемая силами электрического поля при перемещении точечного заряда q из точки 1 в точку 2, определяется формулой

$$A_{12} = q \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

Работа сил электростатического поля через разность потенциалов φ_1 и φ_2 :

$$A_{12} = q(\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)) = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где $\varphi(\vec{r}_1) = \varphi_1$ – потенциал поля в точке с радиусом-вектором \vec{r}_1 ; $\varphi(\vec{r}_2) = \varphi_2$ – потенциал поля в точке с радиусом-вектором \vec{r}_2 .

Теорема о циркуляции вектора \vec{E} :

$$\oint_{(L)} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0.$$

Теорема Гаусса:

$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i,$$

$\sum_{i=1}^n q_i$ – суммарный заряд, охватываемый поверхностью (S) .

Линейная плотность заряда (в случае равномерного распределения заряда)

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{q}{l},$$

где l – длина нити, несущая заряд q .

Поверхностная плотность заряда (в случае равномерного распределения заряда)

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{q}{S},$$

где S – площадь поверхности, несущая заряд q .

Объемная плотность заряда (в случае равномерного распределения заряда)

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{q}{V},$$

где V – объем тела, несущий заряд q .

2.2. Постоянный ток

Сила тока

$$I = \frac{dq}{dt},$$

где dq – заряд, перенесенный через поперечное сечение проводника за время dt .

Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t}.$$

Плотность тока

$$j = \frac{I}{S},$$

где S – площадь поперечного сечения проводника.

Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R},$$

где I – сила тока; U – разность потенциалов (напряжение) на концах участка; R – электрическое сопротивление проводника.

Закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{U \pm \varepsilon}{R + r},$$

где ε – электродвижущая сила (ЭДС), действующая на рассматриваемом участке цепи; r – внутреннее сопротивление источника тока.

Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}.$$

Электрическое сопротивление однородного линейного проводника

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление; l – длина проводника; S – площадь поперечного сечения проводника.

Первое правило Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

Второе правило Кирхгофа:

$$\sum_{i=1}^k I_i R_i = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k.$$

Закон Джоуля – Ленца для постоянного тока:

$$Q = UIt = RI^2t = \frac{U^2}{R}t,$$

где Q – количество выделившейся теплоты при прохождении тока I по проводнику за время t .

Работа тока

$$A = UIt.$$

Мощность тока

$$P = \frac{A}{t} = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

Для последовательного соединения N проводников:

$$\begin{aligned} I &= I_1 = I_2 = \dots = I_N; \\ U &= U_1 + U_2 + \dots + U_N; \\ R &= R_1 + R_2 + \dots + R_N. \end{aligned}$$

Для параллельного соединения N проводников:

$$\begin{aligned} U &= U_1 = U_2 = \dots = U_N; \\ I &= I_1 + I_2 + \dots + I_N; \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}. \end{aligned}$$

Сила тока короткого замыкания

$$I_{к.з} = \frac{\varepsilon}{r},$$

где r – внутреннее сопротивление источника тока; ε – ЭДС источника тока.

КПД источника тока η :

$$\eta = \frac{U}{\varepsilon} \cdot (100 \%),$$

где U – напряжение на концах внешнего участка цепи; ε – ЭДС источника тока.

Поскольку согласно закону Ома для однородного участка и полной цепи

$$U = IR \text{ и } \varepsilon = I(R + r),$$

то

$$\eta = \frac{R}{R + r} 100 \%,$$

где R – сопротивление внешней части цепи; r – внутреннее сопротивление источника тока.

2.3. Магнитное поле в вакууме

Закон Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

где $d\vec{B}$ – индукция магнитного поля элемента тока $d\vec{l} = I d\vec{l}$ в рассматриваемой точке; \vec{r} – вектор, проведенный от $d\vec{l}$ к этой точке; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Модуль вектора $d\vec{B}$ определяется выражением

$$dB = |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin\alpha dl}{r^2},$$

где α – угол между вектором \vec{r} и направлением тока в элементе провода.

Если все $d\vec{B}$ от различных элементов тока сонаправлены, то

$$B = \int dB.$$

Закон Ампера:

$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}, \vec{B}],$$

где $d\vec{F}_A$ – сила, действующая на элемент провода $d\vec{l}$ с током I в магнитном поле с индукцией \vec{B} .

Модуль силы Ампера

$$dF_A = |d\vec{F}_A| = IB \sin\alpha dl,$$

где α – угол между направлением $d\vec{l}$ и \vec{B} .

Если все $d\vec{F}_A$, действующие на различные элементы тока сонаправлены, то

$$F_A = \int dF_A,$$

где dF_A – модуль силы Ампера.

Магнитный момент тонкого плоского контура с током

$$\vec{P}_m = \vec{n} IS,$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к плоскости контура, образующий правый винт с направлением тока; I – сила тока, протекающего по контуру; S – площадь поверхности, ограниченной контуром.

Сила Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}],$$

где $q\vec{E} = \vec{F}_э$ – электрическая составляющая силы Лоренца; $q[\vec{v}, \vec{B}] = \vec{F}_м$ – магнитная составляющая силы Лоренца.

Модуль магнитной составляющей силы Лоренца

$$F_m = |q|vB \sin\alpha,$$

где α – угол между направлением скорости частицы \vec{v} и направлением магнитного поля \vec{B} .

Закон полного тока (теорема о циркуляции вектора \vec{B}):

$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \oint_{(L)} B_\tau dl = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k;$$

где $\sum_{k=1}^N I_k$ – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром (L).

Ток, текущий через поверхность (S), можно представить через плотность тока j :

$$I = \int_{(S)} (\vec{j}, d\vec{S}) = \int_{(S)} |\vec{j}| |\vec{n}| \cos\alpha dS = \int_{(S)} j_n dS,$$

Поток вектора \vec{B} через поверхность (S):

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_{(S)} |\vec{B}| |\vec{n}| \cos\alpha dS = \int_{(S)} B_n dS,$$

где α – угол между единичным вектором нормали \vec{n} к поверхности (S) и вектором магнитной индукции \vec{B} в данной точке поверхности.

Работа сил магнитного поля по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$A_{12} = I\Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где Φ_1 и Φ_2 – значения магнитного потока вектора \vec{B} через ограниченную контуром поверхность в начальном и конечном положениях.

Потокоцепление (полный поток) через N одинаковых витков (соленоид) $\Psi = N\Phi$;

где Φ – магнитный поток через один виток.

Закон Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где ε_i – электродвижущая сила индукции, возникающая в контуре при изменении потокоцепления.

2.4 Электромагнитные колебания

Дифференциальное уравнение гармонических электрических колебаний в идеальном колебательном контуре:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

где $\ddot{q} = \frac{dI}{dt}$ – изменение тока в контуре в единицу времени; q – заряд на обкладках конденсатора.

Собственная циклическая частота колебаний контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора.

Формула Томсона:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} ,$$

где T – период гармонических колебаний.

Закон изменения заряда q на обкладках конденсатора:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0) = q_m \cos \alpha ,$$

где q – заряд в момент времени t ; q_m – амплитудный заряд; α – фаза колебаний; α_0 – начальная фаза колебаний.

Закон изменения напряжения на конденсаторе

$$U = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0) ,$$

где U_m – амплитуда напряжения.

Закон изменения силы тока в катушке индуктивности:

$$I = \frac{dq}{dt} = -I_m \sin(\omega_0 t + \alpha_0) ,$$

где I – сила тока в момент времени t ; $I_m = \omega_0 q_m$ – амплитуда силы тока.

Дифференциальное уравнение затухающих электрических колебаний в контуре:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 ,$$

где $\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; $\dot{q} = \frac{dq}{dt} = I$ – ток.

Закон изменения заряда на обкладках конденсатора при затухающих колебаниях:

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha_0) ,$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний контура.

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \beta T .$$

Добротность контура

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} .$$

2.5. Примеры решения задач

Пример 2.1. По двум тонким длинным нитям равномерно распределен одинаковый заряд с линейной плотностью заряда λ . Найти модуль напряженности электрического поля E в точке O , расположенной на пересечении нитей, на расстоянии a от ближайших концов нитей.

Дано:

$$\lambda > 0, a$$

$E = ?$

Решение. Поместим точку O в начало координат осей Ox и Oy (рис. 2.1). Обозначим стержень, расположенный вдоль оси x , цифрой 1, а стержень вдоль оси y – цифрой 2. Ближайшие концы стержней расположены от точки O на расстоянии a , противоположные концы уходят в бесконечность. На стержнях выделим элементы длиной $dl_1 = dx$ и $dl_2 = dy$, несущие точечные заряды $dq_1 = \lambda dx$ и $dq_2 = \lambda dy$. Эти заряды создадут в точке O напряженности $d\vec{E}_1$ и $d\vec{E}_2$, модули которых равны

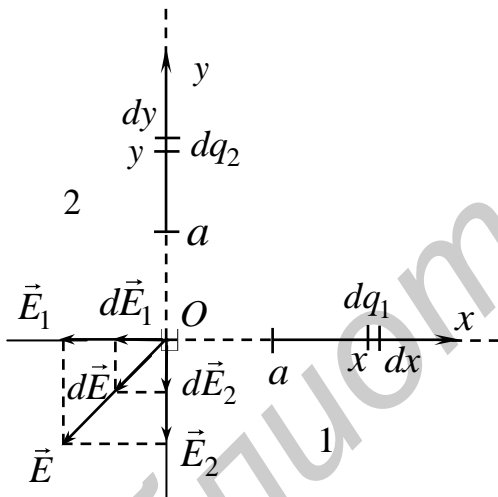


Рис. 2.1

$$dE_1 = k \frac{dq_1}{x^2} = k \frac{\lambda dx}{x^2}, \quad (1)$$

$$dE_2 = k \frac{dq_2}{y^2} = k \frac{\lambda dy}{y^2}. \quad (2)$$

Проинтегрируем выражения (1) и (2) в пределах от a до ∞ , получим

$$E_1 = k\lambda \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{k\lambda}{a}, \quad (3)$$

$$E_2 = k\lambda \int_a^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{k\lambda}{a}. \quad (4)$$

По принципу суперпозиции полей напряженность поля \vec{E} , создаваемого нитями в точке O , может быть найдена как геометрическая сумма напряженностей полей \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , создаваемых каждым заряженным телом (в нашем случае нитями) в отдельности, т. е.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (5)$$

где $\vec{E}_1 = -E_1 \vec{i} = -\frac{k\lambda}{a} \vec{i}$ и $\vec{E}_2 = -E_2 \vec{j} = -\frac{k\lambda}{a} \vec{j}$.

Тогда

$$\vec{E} = -\left(\frac{k\lambda}{a}\vec{i} + \frac{k\lambda}{a}\vec{j}\right). \quad (6)$$

Модуль напряженности поля \vec{E} равен

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(\frac{k\lambda}{a}\right)^2 + \left(\frac{k\lambda}{a}\right)^2} = \frac{k\lambda}{a}\sqrt{2}. \quad (7)$$

Ответ: $E = \frac{k\lambda}{a}\sqrt{2}.$

Пример 2.2. Шар радиусом $R = 10$ см равномерно заряжен по объему зарядом $Q = 5$ нКл. Найти напряженности поля в точках, отстоящих от центра шара на расстояниях $r_1 = 5$ см и $r_2 = 15$ см.

Дано:

$$R = 10 \text{ см} = 10^{-1} \text{ м}$$

$$Q = 5 \text{ нКл} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$r_1 = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r_2 = 15 \text{ см} = 15 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$E_1 - ? \quad E_2 - ?$$

Решение.

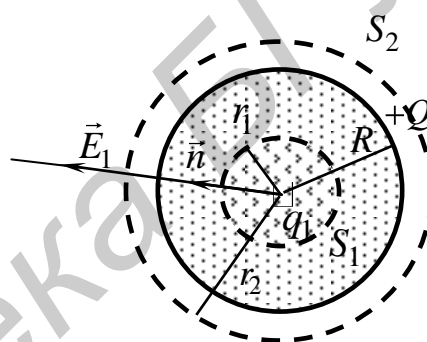


Рис. 2.2

Будем решать задачу по теореме Гаусса:

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Поток вектора \vec{E} напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью и деленной на ϵ_0 .

В нашей задаче надо рассмотреть два случая: 1) $r < R$ и 2) $r > R$.

1. Рассмотрим случай $r < R$.

$$\oint_{S_1} (\vec{E}_1, d\vec{S}) = \int_{(S_1)} E_{1n} dS = E_1 \int_{(S_1)} dS = E_1 S_1 = E_1 4\pi r_1^2. \quad (2)$$

Здесь учтено, что поскольку $Q > 0$, то $E_{1n} = E_1$ и в каждой точке сферы S_1 модуль напряженности одинаков.

Так как шар заряжен равномерно, то его объемная плотность в каждой точке одинакова и равна

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{q_1}{V_1} \text{ или } q_1 = \frac{Q}{V} V_1,$$

где q_1 – заряд шара, ограниченный сферой радиусом r_1 ; V_1 – объем сферы радиусом r_1 .

$$q_1 = \frac{Q}{V} V_1 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{Q r_1^3}{R^3}. \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1):

$$E_1 4\pi r_1 = \frac{Q r_1^3}{\varepsilon_0 R^3},$$

$$E_1 = \frac{Q r_1}{4\pi \varepsilon_0 R^3}. \quad (4)$$

2. Рассмотрим случай $r > R$.

Как и в первом случае $E_{2n} = E_2$:

$$\oint_{(S_2)} (\vec{E}_2, d\vec{S}) = E_2 \int_{(S_2)} dS = E_2 S_2 = E_2 4\pi r_2^2. \quad (5)$$

Так как внутри сферы S_2 входит весь заряд шара Q , то в соответствии с теоремой Гаусса (1)

$$E_2 4\pi r_2^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r_2^2}. \quad (6)$$

Произведем вычисления:

$$E_1 = \frac{Q r_1}{4\pi \varepsilon_0 R^3} = \frac{5 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (10^{-1})^3} \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{25 \cdot 10^{-11}}{11 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-3}} \frac{\text{В}}{\text{м}} = 2,27 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r_2^2} = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (15 \cdot 10^{-2})^2} \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{2,5 \cdot 10^{-12}} \frac{\text{В}}{\text{м}} = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

$$\text{Ответ: } E_1 = 2,27 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}; E_2 = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Пример 2.3. Тонкое полукольцо радиусом $R = 5$ см заряжено равномерно зарядом $q = 20$ нКл. Найти модуль напряженности электрического поля E и потенциал φ в центре кривизны этого полукольца.

Дано:

$$R = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$q = 20 \text{ нКл} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$$

$E - ? \quad \varphi - ?$

Решение. Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны полукольца. На полукольце выделим элемент длиной dl , несущий точечный заряд dq . Тогда $dq = \lambda dl$, где λ – линейная плотность заряда.

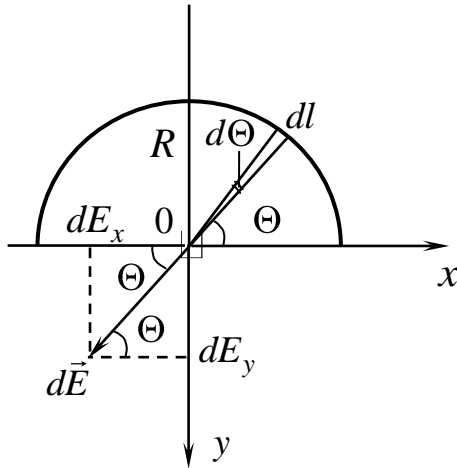


Рис. 2.3

Напряженность $d\vec{E}$ поля, создаваемого зарядом dq :

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^3} \vec{r} \quad (1)$$

где \vec{r} – вектор, направленный от dl к точке 0, в которой вычисляется напряженность.

Модуль вектора $d\vec{E}$ с учетом, что $|\vec{r}| = R$:

$$dE = k \frac{dq}{R^2}. \quad (2)$$

Так как для равномерного распределения заряда по полукольцу

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{q}{l} = \frac{q}{\pi R},$$

то

$$dq = \frac{q}{\pi R} dl. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2) и учитывая, что $dl = R d\Theta$, получим

$$dE = k \frac{q}{\pi R^3} dl = \frac{kqR}{\pi R^3} d\Theta = \frac{kq}{\pi R^2} d\Theta. \quad (4)$$

Выразим вектор $d\vec{E}$ через проекции $d\vec{E}_x$ и $d\vec{E}_y$:

$$\begin{cases} dE_x = -dE \cos \Theta, \\ dE_y = dE \sin \Theta. \end{cases} \quad (5)$$

Проинтегрируем (5) в пределах от 0 до π , подставив (4), получим

$$\begin{cases} E_x = -\frac{kq}{\pi R^2} \int_0^\pi \cos \Theta d\Theta = 0, \\ E_y = \frac{kq}{\pi R^2} \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta = \frac{2kq}{\pi R^2}. \end{cases} \quad (6)$$

Напряженность \vec{E} в точке 0:

$$\vec{E} = 0\vec{i} + E_y\vec{j} = \frac{2kq}{\pi R^2} \vec{j}. \quad (7)$$

Из формулы (7) видно, что напряженность поля по направлению совпадает с осью Oy .

Модуль \vec{E} равен

$$E = \frac{2kq}{\pi R^2} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0\pi R^2} = \frac{2q}{4\epsilon_0\pi^2 R^2} = \frac{q}{2\epsilon_0\pi^2 R^2}. \quad (8)$$

Найдем потенциал электрического поля в точке O .

Потенциал $d\phi$, создаваемый точечным зарядом dq в точке O :

$$d\phi = k \frac{dq}{R} = k \frac{q}{\pi R^2} dl = k \frac{q}{\pi R} d\Theta. \quad (9)$$

Интегрируя (9) от 0 до π , получаем

$$\phi = k \frac{q}{\pi R} \int_0^\pi d\Theta = k \frac{q\pi}{\pi R} = k \frac{q}{R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (10)$$

Произведем вычисления по формулам (8) и (10):

$$E = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3,14^2 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2} \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{0,436 \cdot 10^{-12}} \frac{\text{В}}{\text{м}} = 4,58 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$\phi = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \text{В} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{5,56 \cdot 10^{-12}} \text{В} = 0,36 \cdot 10^4 \text{В} = 3,6 \cdot 10^3 \text{В}.$$

Ответ: $E = 4,58 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}; \phi = 3,6 \cdot 10^3 \text{В}.$

Пример 2.4. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным с линейной плотностью заряда $\lambda = 20$ нКл/м. Определить работу электростатического поля по перемещению точечного заряда $q = 1$ нКл из точки, находящейся на расстоянии $a_1 = 0,5$ см, в точку, находящуюся на расстоянии $a_2 = 2$ см от поверхности цилиндра.

Дано:

$$R = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$$

$$\lambda = 20 \text{ нКл/м} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}$$

$$q = 1 \text{ нКл} = 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$a_1 = 0,5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$a_2 = 2 \text{ см} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Решение. Работа по перемещению точечного заряда q из точки 1 в точку 2 равна

$$A_{12} = q(\phi_1 - \phi_2). \quad (1)$$

Для определения разности потенциалов воспользуемся соотношением между напряженностью поля и потенциалом:

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi.$$

$$A_{1,2} - ?$$

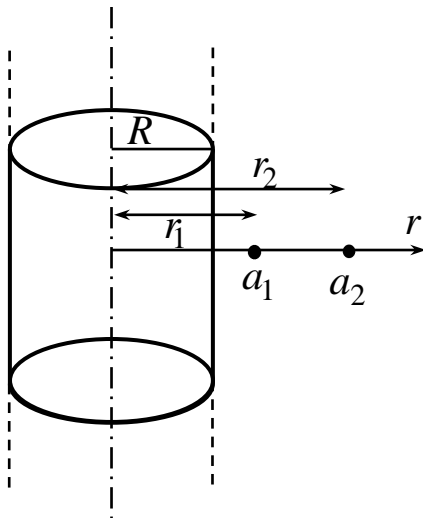


Рис. 2.4

Для поля с осевой симметрией, каким является поле цилиндра, это соотношение в проекции на радиальное направление дает следующее:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -E, \quad (2)$$

где E – напряженность поля на расстоянии r от оси цилиндра, создаваемого бесконечно длинным цилиндром. Эта напряженность равна

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (3)$$

Из (2)

$$d\varphi = -E dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r}. \quad (4)$$

Интегрируя уравнение (4), найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих на расстоянии r_1 и r_2 от оси цилиндра:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (5)$$

где

$$r_1 = R + a_1 \text{ и } r_2 = R + a_2. \quad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (1), получим

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R + a_2}{R + a_1}. \quad (7)$$

Произведем вычисления:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{10^{-9} \cdot 20 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \frac{3 \cdot 10^{-2}}{1,5 \cdot 10^{-2}} \text{ Дж} = \frac{20 \cdot 10^{-18}}{5,56 \cdot 10^{-11}} \ln 2 \text{ Дж} = \\ &= 3,6 \cdot 10^{-7} \ln 2 \text{ Дж} = 36 \cdot 10^{-8} \cdot 0,3 \text{ Дж} = 1,08 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Ответ: $A = 1,08 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$.

Пример 2.5. В схеме, изображенной на рис. 2.5, сопротивление $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, ЭДС источника $\varepsilon = 20 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$. Какой ток покажет амперметр? Сопротивление амперметра $R_A \ll R_2$.

Дано:
 $R_1 = 2 \text{ Ом}$
 $R_2 = 4 \text{ Ом}$
 $\varepsilon = 20 \text{ В}$
 $r = 1 \text{ Ом}$
 $I - ?$

Решение. Амперметр покажет ток I_2 , идущий через сопротивление R_2 . Ток I в узле В разветвляется на I_1 и I_2 :

$$I = I_1 + I_2. \quad (1)$$

Так как по условию $R_A \ll R_2$, то напряжения на

сопротивлениях R_1 и R_2 равны

$$I_1 R_1 = I_2 R_2. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что

$$(I - I_2) R_1 = I_2 R_2,$$

откуда

$$I_2 = \frac{I R_1}{R_1 + R_2}. \quad (3)$$

Силу тока найдем из закона Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \quad (4)$$

где R – сопротивление внешней части цепи; r – внутреннее сопротивление источника.

Сопротивление внешней части цепи состоит из сопротивления R_1 и R_2 , соединенных параллельно, и поэтому

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (4), получим

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{\varepsilon}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r} = \frac{\varepsilon (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + r R_1 + r R_2} = \frac{\varepsilon (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + r (R_1 + R_2)}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (3), получим

$$I_2 = \frac{\varepsilon R_1 (R_1 + R_2)}{(R_1 R_2 + r (R_1 + R_2)) (R_1 + R_2)} = \frac{\varepsilon R_1}{R_1 R_2 + r (R_1 + R_2)}. \quad (7)$$

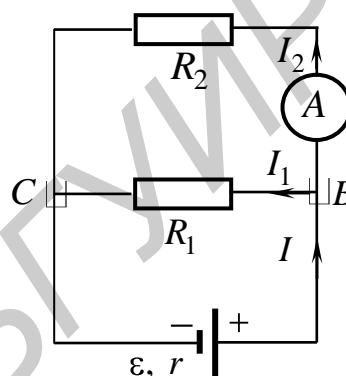
Произведем вычисления:

$$I_2 = \frac{20 \cdot 2}{2 \cdot 4 + 1 \cdot (2 + 4)} \text{ А} = \frac{40}{8 + 6} \text{ А} = \frac{40}{14} \text{ А} = 2,85 \text{ А}.$$

Решим задачу вторым способом по правилам Кирхгофа.

Для узла В на основании первого правила Кирхгофа

$$I - I_1 - I_2 = 0. \quad (8)$$



Дейн. 2.5

Рассмотрим контур $BR_1C\varepsilon B$ и BR_2CR_1B (см. рис. 2.5). Обходя контуры против часовой стрелки, на основании второго правила Кирхгофа составим уравнения:

$$I_1 R_1 + Ir = \varepsilon, \quad (9)$$

$$I_2 R_2 - I_1 R_1 = 0. \quad (10)$$

Подставив в уравнения (8), (9) и (10) числовые значения заданных величин, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} I - I_1 - I_2 = 0, & (11) \\ 2I_2 + I = 20, & (12) \\ 4I_2 - 2I_1 = 0. & (13) \end{cases}$$

Из последнего уравнения (13) найдем $I_1 = 2I_2$ и подставим в (11).

Получим $I - 2I_2 - I_2 = 0$, откуда $I = 3I_2$. Теперь подставим I_1 и I в (12), получим

$$4I_2 + 3I_2 = 20 \text{ или } 7I_2 = 20,$$

откуда $I_2 = \frac{20}{7} \text{ А} = 2,85 \text{ А}$.

$$\text{Ответ: } I_2 = \frac{20}{7} \text{ А} = 2,85 \text{ А}.$$

Пример 2.6. Спираль электрической плитки укоротили на 30 %. Во сколько раз изменилась при этом мощность тока в плитке?

Дано:

$$\frac{\Delta l}{l_1} = 0,3$$

$$\frac{P_2}{P_1} = ?$$

Решение. Обозначим через P_1 мощность тока в плитке при длине спирали l_1 и через P_2 мощность тока в плитке при длине спирали l_2 . $\Delta l = l_2 - l_1$ – изменение длины спирали. Мощность тока в электроплитке найдем по формуле

$$P = \frac{U^2}{R}, \quad (1)$$

где U – напряжение в сети; R – сопротивление спирали, равное

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (2)$$

Здесь ρ – удельное сопротивление металла, из которого изготовлена спираль электроплитки; S – площадь поперечного сечения спирали; l – длина спирали.

Для нашей задачи сопротивление спирали до ее укорочения

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S}, \quad (3)$$

а сопротивление спирали после ее укорочения

$$R_2 = \rho \frac{l_2}{S}. \quad (4)$$

Найдем отношение мощности P_2 к мощности P_1 :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{U^2 R_1}{U^2 R_2} = \frac{\rho l_1 S}{\rho l_2 S} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Согласно условию $\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{l_1 - l_2}{l_1} = 0,3$, откуда $1 - \frac{l_2}{l_1} = 0,3$;

$$\frac{l_2}{l_1} = 1 - 0,3 = 0,7 \text{ или } \frac{l_1}{l_2} = 1,43, \text{ значит, } \frac{P_2}{P_1} = 1,43.$$

Ответ: мощность тока в укороченной спирали увеличивается в 1,43 раза.

Пример 2.7. По длинному проводу течет ток I . Определить магнитную индукцию \vec{B} поля, создаваемого этим током в точке 0, находящейся на расстоянии a от провода.

Дано:
 I, a

$B_0 - ?$

Решение. Считаем, что концы провода уходят в бесконечность. Для решения задачи воспользуемся законом Био – Савара – Лапласа и принципом суперпозиции магнитных полей. Закон Био – Савара – Лапласа позволяет определить магнитную индукцию $d\vec{B}$, создаваемую элементом тока $I d\vec{l}$:

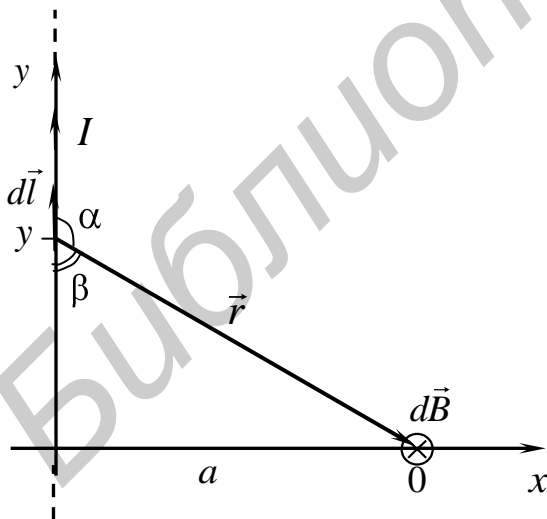


Рис. 2.6

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (1)$$

где \vec{r} – вектор, проведенный от элемента проводника $d\vec{l}$ к точке 0; μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды, в которой находится провод (для вакуума $\mu = 1$).

Вектор $d\vec{B}$ в точке 0 направлен за плоскость чертежа.

По принципу суперпозиции

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}. \quad (2)$$

Интегрирование ведется по длине проводника.

В нашем случае векторы $d\vec{B}$ от различных элементов тока сонаправлены, поэтому выражение (2) можно переписать в скалярной форме:

$$B = \int_l dB, \quad (3)$$

где

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl. \quad (4)$$

В скалярном выражении закона Био – Савара – Лапласа угол α есть угол между элементом тока $I d\vec{l}$ и радиусом-вектором \vec{r} .

Таким образом,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(l)} \frac{\sin \alpha}{r^3} dl. \quad (5)$$

Выразим dl через $d\alpha$. Для этого поместим длинный провод в систему координат xu . Расстояние от начала координат до выбранного отрезка $d\vec{l}$ обозначим через y . Тогда из треугольника на рис. 2.6 $y = a \operatorname{ctg} \beta$, где $\beta = 180^\circ - \alpha$, но $\operatorname{ctg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha$ и, следовательно, $y = -a \operatorname{ctg} \alpha$.

Тогда

$$dy = \frac{a}{\sin^2 \alpha} d\alpha. \quad (6)$$

Из этого же треугольника

$$r = \frac{a}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}. \quad (7)$$

Подставим (6) и (7) в (4), заменив dl на dy :

$$dB_0 = \frac{a \mu_0 I \sin^2 \alpha \sin \alpha d\alpha}{4\pi a^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha.$$

Таким образом, выражение (5) можно представить в виде

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha, \quad (8)$$

где α_1 и α_2 – пределы интегрирования.

Выполним интегрирование:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (9)$$

В нашей задаче $\alpha_1 \rightarrow 0$, а $\alpha_2 \rightarrow \pi$, следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (1 - (-1)) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

Ответ: $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$

Пример 2.8. Бесконечно длинный провод изогнут так, как это изображено на рис. 2.7. Радиус R дуги окружности равен 15 см. Определить магнитную индукцию \vec{B} поля, создаваемого током $I = 75$ А, текущем по этому проводу в точке 0.

Дано:
 $R = 0,15$ м
 $I = 75$ А

$B_0 - ?$

Решение. Магнитную индукцию \vec{B} в точке 0 найдем, используя принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i.$$

В нашем случае провод можно разбить на три части: два прямолинейных провода (1 и 3) одним концом, уходящих в бесконечность, и дугу полуокружности (2) радиусом R .

Тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3, \quad (1)$$

где \vec{B}_1 , \vec{B}_2 и \vec{B}_3 – магнитные индукции в точке 0, создаваемые током, текущим соответственно на первом, втором и третьем участках провода.

Так как точка 0 лежит на оси провода 1, то $\vec{B}_1 = 0$, и тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_3. \quad (2)$$

Векторы \vec{B}_2 и \vec{B}_3 сонаправлены и направлены перпендикулярно плоскости чертежа от нас (см. рис. 2.7). В этом случае векторную сумму можно заменить алгебраической, т. е.

$$B = B_2 + B_3. \quad (3)$$

Магнитную индукцию B_2 в точке 0 создает половина кругового тока радиусом R . Она будет равна

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}. \quad (4)$$

Магнитную индукцию B_3 найдем, воспользовавшись соотношением (9)

из примера 2.7 $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$.

В нашем случае $a = R$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 \rightarrow \pi$.

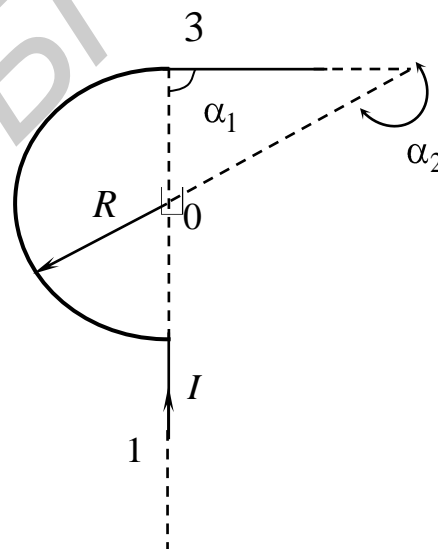


Рис. 2.7

Тогда

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}. \quad (5)$$

Подставим (4) и (5) в (3):

$$B = B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\pi + 1). \quad (6)$$

Произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 75}{4\pi \cdot 0,15}(\pi + 1) \text{ Тл} = 2,07 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$$

Ответ: $B = 2,07 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$.

Пример 2.9. По круглому бесконечно длинному проводнику радиусом R течет ток постоянной плотности \vec{j} . Найти индукцию магнитного поля B как функцию расстояния r от оси проводника. Построить график зависимости $B(r)$.

Дано:
 R, j

$B(r) - ?$

Решение. Силовые линии магнитного поля, созданные таким проводником с током, представляют собой концентрические окружности, охватывающие ось проводника внутри и снаружи. Магнитную индукцию B найдем, используя закон полного тока:

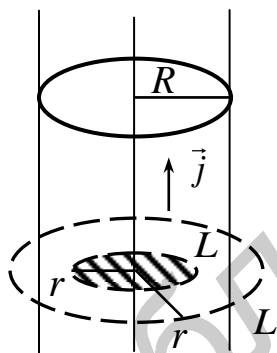


Рис. 2.8

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 I = \mu_0 \int_{(S)} (\vec{j}, d\vec{S}), \quad (1)$$

где $\oint_L (\vec{B}, d\vec{l})$ – циркуляция магнитного поля \vec{B} по замкнутому контуру L , совпадающему с силовой линией поля; $\int_{(S)} (\vec{j}, d\vec{S})$ – поток вектора \vec{j} через поверхность S , ограниченную контуром L ;

μ_0 – магнитная постоянная; j – плотность тока; S – площадь, ограниченная выбранным контуром L .

1. Рассмотрим случай $r < R$.

Полагая, что $d\vec{S} \uparrow \uparrow \vec{j}$, и учитывая, что L совпадает с силовой линией поля, т. е. $d\vec{l} \uparrow \uparrow \vec{B}$, из (1) получаем

$$B 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2, \quad (2)$$

откуда

$$B(r) = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j r}{2}. \quad (3)$$

2. Рассмотрим случай $r > R$.

Уравнение (1) для второго случая дает

$$B 2\pi r = \mu_0 j \pi R^2. \quad (4)$$

Во втором случае площадь $S = \pi R^2$, т. к. тока I вне провода нет. Отсюда из (4)

$$B(r) = \frac{\mu_0 j \pi R^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}. \quad (5)$$

Построим график зависимости $B(r)$.

В области $r < R$ зависимость B от r линейная, а в области $r > R$ – гиперболическая.

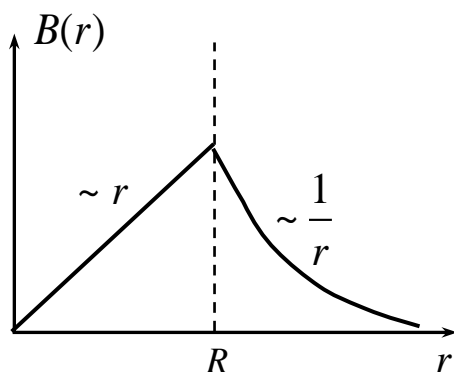


Рис. 2.9

$$\text{Ответ: } B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j r}{2}, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{\mu_0 j R^2}{2r}, & r > R. \end{cases}$$

Пример 2.10. Длинный прямой провод с током I находится в одной плоскости с равносторонним треугольником, одна из сторон которого параллельна прямому проводу и находится от него на расстоянии b . Сторона треугольника a , ток текущий по треугольнику I_1 . Найти силы, действующие на все стороны треугольника со стороны длинного прямого провода.

Дано:

a, b, I, I_1

Решение.

$F_{12} - ? \quad F_{21} - ? \quad F_{31} - ?$

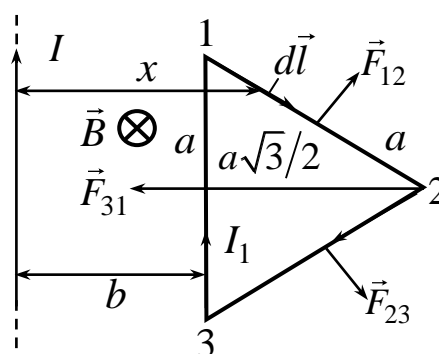


Рис. 2.10

Магнитное поле, созданное прямым бесконечно длинным проводом с током I , определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (\text{см. пример 2.7}), \quad (1)$$

где x – расстояние от провода с током I до выбранной точки треугольника (см. рис. 2.11).

Силы, действующие на все стороны треугольника, определим по закону Ампера

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}] \quad (2)$$

или в скалярном виде:

$$dF = I_1 B \sin \alpha dl, \quad (3)$$

где α – угол между вектором \vec{B} и $d\vec{l}$.

В нашем случае силовые линии \vec{B} направлены перпендикулярно плоскости треугольника за чертеж, а все $d\vec{l}$ для всех сторон треугольника перпендикулярны \vec{B} , следовательно, силы \vec{F}_{12} , \vec{F}_{21} и \vec{F}_{31} в соответствии с (2) перпендикулярны сторонам треугольника, причем для любой стороны треугольника L :

$$F = \int_{(L)} dF = \int_{(L)} I_1 B dl. \quad (4)$$

Отсюда для сторон 1, 2 и 2, 3

$$F_{12} = F_{23} = \int_{(L)} I_1 B dl = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi} \int_{(L)} \frac{dl}{x}. \quad (5)$$

Представим $dl = \frac{dx}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$ (см. рис. 2.11).

Тогда

$$F_{12} = F_{23} = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi\sqrt{3}} \int_b^{b+\frac{a\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I}{\pi\sqrt{3}} \ln \frac{b+\frac{a\sqrt{3}}{2}}{b}, \quad (6)$$

где b и $b + \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – пределы интегрирования.

$$F_{31} = \int_{(L)} I B dl = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi} \int_0^a dl = \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi b}. \quad (7)$$

$$\text{Ответ: } F_{12} = F_{23} = \frac{\mu_0 I_1 I}{\pi\sqrt{3}} \ln \frac{b+\frac{a\sqrt{3}}{2}}{b}; \quad F_{31} = \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi b}.$$

Пример 2.11. Квадратная проволочная рамка со стороной a и прямой проводник с постоянным током I лежат в одной плоскости. Сопротивление рамки R . Рамку повернули на 180° вокруг оси $00'$, отстоящей от проводника с током на расстоянии b (рис. 2.12). Найти количество электричества, протекающее в рамке.

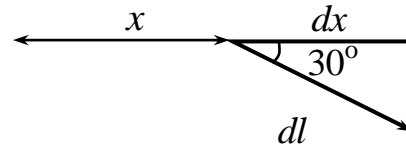


Рис. 2.11

Дано:
 R, I, b, a

$Q = ?$

Решение. Магнитное поле \vec{B} прямолинейного провода с током I направлено перпендикулярно площади рамки за чертеж.

При вращении рамки вокруг оси OO' в ней возникает индукционный ток.

Электрический заряд (количество электричества), который пройдет по рамке за время поворота ее на 180° , определим по формуле

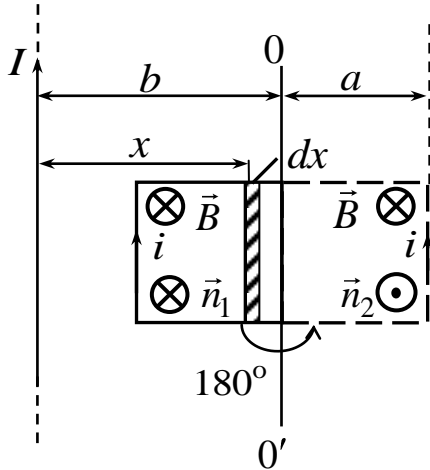


Рис. 2.12

$$dq = idt, \quad (1)$$

где i – индукционный ток.

Индукционный ток можно определить по закону Ома для замкнутой цепи:

$$i = \frac{\varepsilon_i}{R}, \quad (2)$$

где ε – ЭДС индукции, определяемая по закону Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1), получим

$$dq = -\frac{1}{R} d\Phi. \quad (4)$$

Проинтегрировав выражение (4) в пределах от 0 до Q и от Φ_1 до Φ_2 , получим

$$\int_0^Q dq = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi$$

или

$$Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}. \quad (5)$$

Найдем Φ_1 и Φ_2 . Для этого воспользуемся формулой

$$\Phi = \int_S (\vec{B}, \vec{n}) dS,$$

где $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$, а единичный вектор \vec{n}_1 выберем в направлении поля \vec{B} . Тогда при повороте рамки на угол 180° вокруг оси OO' $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$.

Учитывая, что $dS = adx$ (заштрихован на рис. 2.12) и $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{n}_1$, получаем

$$\Phi_1 = \int_S (\vec{B}, \vec{n}_1) dS = \int_S B dS = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{b-a}^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left| \frac{b}{b-a} \right|. \quad (6)$$

При повороте рамки на угол 180° поток Φ_2 через площадь рамки будет равен

$$\Phi_2 = \int_S (\vec{B}, \vec{n}_2) dS = - \int_S B dS, \text{ т. к. } \vec{B} \uparrow \downarrow \vec{n}_2.$$

Проинтегрируем это выражение с учетом пределов интегрирования:

$$\Phi_2 = - \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_b^{b+a} \frac{dx}{x} = - \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left| \frac{b+a}{b} \right|. \quad (7)$$

Подставим (6) и (7) в (5), получим

$$Q = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R} \ln \left| \frac{b+a}{b-a} \right|.$$

Ответ: $Q = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R} \ln \left| \frac{b+a}{b-a} \right|.$

Пример 2.12. Идеальный колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 4$ Гн. Амплитуда колебаний заряда на конденсаторе $q_m = 100$ мкКл. Записать уравнение колебаний заряда, напряжения и силы тока в контуре как функций времени. Вычислить период колебаний. Начальная фаза $\alpha_0 = 0$.

Дано:

$$C = 1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$L = 4 \text{ Гн}$$

$$q_m = 100 \text{ мкКл} = 10^{-4} \text{ Кл}$$

$$\alpha_0 = 0$$

$$q = q(t); U = U(t);$$

$$I = I(t); T = ?$$

Решение. Зависимость заряда q от времени:

$$q(t) = q_m \cos \omega_0 t. \quad (1)$$

По формуле Томсона период колебаний T контура равен

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (2)$$

Циклическая частота связана с периодом колебаний соотношением

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3)$$

Уравнение колебаний напряжения на конденсаторе имеет вид

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos \omega_0 t = U_m \cos \omega_0 t,$$

где $U_m = \frac{q_m}{C}.$

Уравнение колебаний тока в катушке индуктивности

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin \omega_0 t = -I_m \sin \omega_0 t, \quad (4)$$

где $I_m = \omega_0 q_m.$

Произведем вычисления:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{10^{-6} \cdot 4}} \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 500 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$q(t) = q_m \cos \omega_0 t = 10^{-4} \cos 500t;$$

$$U(t) = \frac{q_m}{C} \cos \omega_0 t = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} \cos 500t = 10^2 \cos 500t;$$

$$I(t) = -\omega_0 q_m \sin \omega_0 t = -500 \cdot 10^{-4} \sin 500t = -0,05 \sin 500t;$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 3,14}{500} \text{ с} = \frac{6,28}{500} \text{ с} = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

Ответ: $q(t) = 10^{-4} \cos 500t$; $U(t) = 10^2 \cos 500t$, $I(t) = -0,05 \sin 500t$,
 $T = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$

2.6. Контрольная работа №2

Таблица 2.1

Варианты	Номера задач							
1	1	11	21	31	41	51	61	71
2	2	12	22	32	42	52	62	72
3	3	13	23	33	43	53	63	73
4	4	14	24	34	44	54	64	74
5	5	15	25	35	45	55	65	75
6	6	16	26	36	46	56	66	76
7	7	17	27	37	47	57	67	77
8	8	18	28	38	48	58	68	78
9	9	19	29	39	49	59	69	79
0	10	20	30	40	50	60	70	80

1. В вершинах равностороннего треугольника находятся одинаковые положительные заряды q . Какой отрицательный заряд q_0 надо поместить в центр треугольника, чтобы система всех этих зарядов оказалась в равновесии? Будет ли равновесие устойчивым?

2. В трех вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые заряды $+q$. С какой силой F они будут действовать на отрицательный заряд q_0 , помещенный в четвертую вершину?

3. Тонкий, бесконечно длинный стержень равномерно заряжен по всей длине с линейной плотностью заряда λ . Найти модуль напряженности электрического поля в точке O , находящейся на расстоянии a от стержня.

4. Тонкий, бесконечно длинный стержень, ограниченный с одной стороны, равномерно заряжен по всей длине с линейной плотностью заряда λ . Определить модуль напряженности электрического поля в точке O , лежащей на оси стержня на расстоянии a от его конца.

5. Тонкий стержень длиной l равномерно заряжен зарядом q . Найти модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния r от центра стержня до точки, лежащей на оси симметрии стержня, если $r > l$.

6. Тонкое проволочное кольцо радиусом R равномерно заряжено по всей длине с линейной плотностью заряда λ . Найти модуль напряженности электрического поля на оси симметрии кольца, перпендикулярной его плоскости на расстоянии a от его центра.

7. Четверть тонкого кольца радиусом R равномерно заряжена зарядом q . Определить модуль напряженности электрического поля в точке O , совпадающей с центром кольца.

8. Найти силу взаимодействия тонкого стержня длиной l , равномерно заряженного зарядом Q , и точечного заряда q , находящегося на продолжении оси стержня, на расстоянии a от его ближайшего конца.

9. Найти силу взаимодействия тонкого, бесконечно длинного стержня, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда λ_1 , и тонкого стержня длиной l , равномерно заряженного по всей длине линейной плотностью заряда λ_2 . Стержень длиной l расположен перпендикулярно бесконечно длинному стержню на расстоянии a от него.

10. Найти силу взаимодействия точечного заряда q и трети тонкого кольца радиусом R , равномерно заряженного зарядом Q , если точечный заряд помещен в центр кривизны кольца.

11. Шар радиусом R равномерно заряжен по объему с объемной плотностью заряда ρ . Найти напряженность электрического поля как функцию расстояния r от центра шара. Построить график зависимости $E = E(r)$.

12. Полый шар радиусами R_1 и R_2 равномерно заряжен зарядом $+q$. Найти напряженность электрического поля как функцию расстояния r от центра шара. Построить график зависимости $E = E(r)$.

13. Два точечных заряда $q_1 = 4$ мкКл и $q_2 = -2$ мкКл находятся на расстоянии $a = 20$ см друг от друга. Найти разность потенциалов точек 1 и 2, если точка 1 находится посередине на прямой соединяющей заряды, а точки 2 – на перпендикуляре от точки 1 на расстоянии $a = 20$ см от нее.

14. По $1/6$ дуге окружности равномерно распределен заряд с линейной плотностью заряда $\lambda = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Найти потенциал в центре кривизны этой дуги.

15. Сфера радиусом $R = 5$ см равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 7,5 \cdot 10^{-10}$ Кл/м². Найти работу электрических сил при перемещении точечного заряда $q = 6$ мкКл из точки, находящейся на расстоянии $a = 10$ см от поверхности сферы, в точку, находящуюся на расстоянии $b = 20$ см от поверхности сферы.

16. По тонкому стержню длиной l равномерно распределен заряд с линейной плотностью заряда $\lambda = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл/м. Найти разность потенциалов точек 1 и 2, лежащих на продолжении оси стержня на расстояниях $2l$ и $3l$ от центра стержня.

17. Определить напряженность электрического поля, потенциал которого зависит от координат x и y по закону $\varphi = a(x^2 - y^2)$.

18. Тонкое кольцо радиусом $R = 25$ см имеет заряд $Q = 10$ мкКл, распределенный по кольцу. Найти работу электрических сил при перемещении точечного заряда $q = 5$ мкКл из центра кольца в точку, находящуюся на оси кольца, перпендикулярной плоскости кольца на расстоянии $l = 50$ см от его центра.

19. Определить напряженность электрического поля, потенциал которого зависит от координат x и y по закону $\varphi = axy$.

20. Две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 несут соответственно заряды Q_1 и $-Q_2$. Найти напряженность электрического поля этих сфер как функцию расстояния r от их общего центра. Построить график зависимости $E = E(r)$.

21. Два источника тока с $\varepsilon_1 = 1,5$ В и $\varepsilon_2 = 2$ В соединены одинаковыми полюсами. Вольтметр, подключенный к клеммам батареи, показывает 1,7 В. Определить отношение внутренних сопротивлений источников $\frac{r_2}{r_1}$. Током в вольтметре пренебречь.

22. Определить силу тока короткого замыкания $I_{к.з}$ гальванического элемента, если при внешнем сопротивлении $R_1 = 5$ Ом сила тока в цепи $I_1 = 2$ А, а при сопротивлении $R_2 = 11$ Ом сила тока $I_2 = 1$ А.

23. ЭДС источника тока $\varepsilon = 12$ В. При силе тока в цепи $I = 4$ А КПД источника $\eta = 60$ %. Определить внутреннее сопротивление r источника.

24. ЭДС батареи $\varepsilon = 100$ В, внутреннее сопротивление $r = 5$ Ом. Внешняя цепь потребляет мощность $P = 150$ Вт. Определить силу тока в цепи, напряжение на концах внешней цепи и ее сопротивление.

25. Аккумулятор при силе тока 8 А отдает во внешнюю цепь мощность 15 Вт, а при силе тока 5 А – мощность 10 Вт. Найти ЭДС аккумулятора, его внутреннее сопротивление и ток короткого замыкания.

26. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом за время $t = 50$ с равномерно нарастает от $I_1 = 5$ А до $I_2 = 10$ А. Определить количество теплоты Q , выделившееся за это время в проводнике.

27. Батарея состоит из $n = 10$ одинаковых источников тока с $\varepsilon = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,2$ Ом каждый, соединенных параллельно. Какова максимальная мощность тока P_{\max} , потребляемая внешним участком цепи?

28. К источнику тока подключен реостат. При сопротивлении реостата $R_1 = 4$ Ом и $R_2 = 9$ Ом источник тока отдает во внешнюю цепь одинаковую мощность. Определить внутреннее сопротивление источника тока.

29. При двух различных сопротивлениях нагрузки отношение напряжений на зажимах источника тока равно 5, а полезная мощность в обоих случаях равна 25 Вт. Определить силу тока короткого замыкания, если ЭДС источника равно 25 В.

30. Определить количество Q , выделившегося за время $t = 10$ с в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом, если сила тока в нем равномерно уменьшилась от $I_1 = 10$ А до $I_2 = 0$.

31. Найти индукцию магнитного поля в центре контура, имеющего вид квадрата со стороной a , при токе в контуре I .

32. Ток I течет по тонкому замкнутому проводнику (рис. 2.13, а). Радиус изогнутой части проводника R , угол 2φ . Найти магнитную индукцию в точке O .

33. Определить индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током I имеет вид, показанный на (рис. 2.13, б). Радиус закругления R . Прямолинейные участки проводника бесконечно длинные.

34. Определить индукцию магнитного поля в точке, если проводник с током I имеет вид, показанный на (рис. 2.13, в). Радиус изогнутой части проводника R . Прямолинейные участки проводника бесконечно длинные.

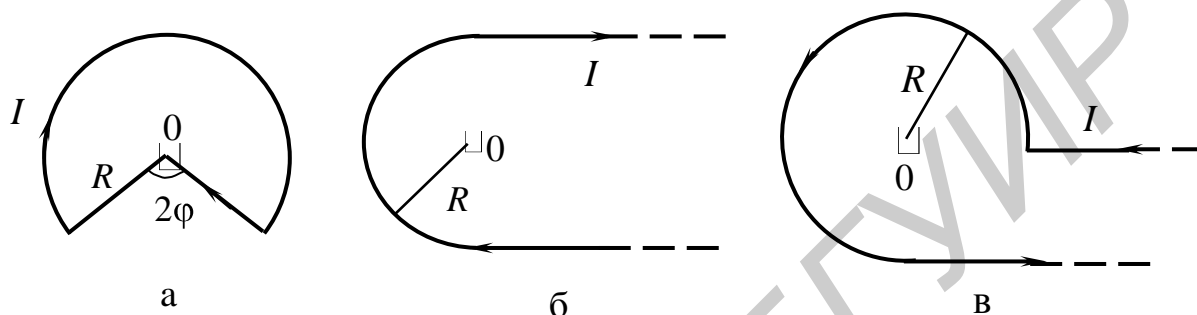


Рис. 2.13

35. Определить индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током I имеет вид, показанный на (рис. 2.14, а). Параметры проводника указаны на рисунке.

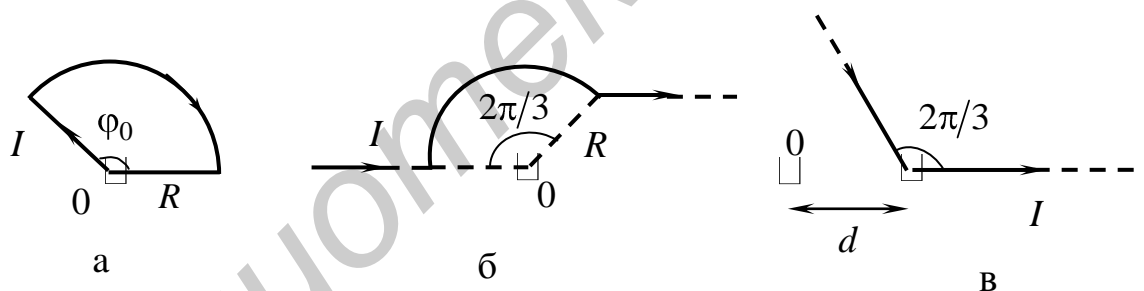


Рис. 2.14

36. Определить индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током I имеет вид, показанный на (рис. 2.14, б). Радиус изогнутой части проводника R . Прямолинейные участки проводника бесконечно длинные.

37. Длинный провод с током I изогнут под углом $2\pi/3$ (рис. 2.14, в). Определить индукцию магнитного поля в точке O , находящейся на расстоянии d от изгиба проводника. Прямолинейные участки проводника бесконечно длинные.

38. Определить индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током I имеет вид, показанный на (рис. 2.15, а). Параметры проводника указаны на рисунке.

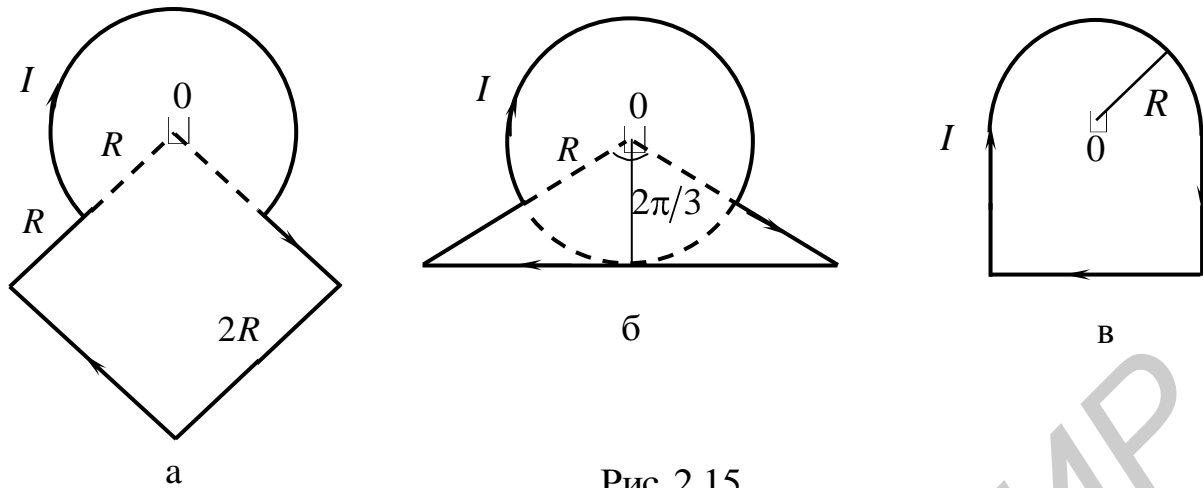


Рис. 2.15

39. Определить индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током I имеет вид, показанный на рис. 2.15, б. Параметры проводника указаны на рисунке.

40. Определить индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током I имеет вид, показанный на рис. 2.15, в. Параметры проводника указаны на рисунке.

41. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 500$ В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ Тл и начал двигаться по окружности. Найти радиус R окружности.

42. Электрон, влетев в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ Тл, стал двигаться по окружности радиусом $R = 10$ см. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

43. Частица с зарядом $q > 0$ прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 100$ В и влетела в область пространства, где действуют взаимно перпендикулярные электрическое $E = 5000$ В/м и магнитное $B = 0,5$ Тл поля. Скорость частицы постоянна и перпендикулярна \vec{E} и \vec{B} . Найти отношение q/m для частицы.

44. Тонкое проводящее кольцо с током $I = 5$ А помещено в однородное магнитное поле с индукцией $B = 80$ мТл. Плоскость кольца перпендикулярна линиям магнитной индукции. Радиус кольца $R = 30$ см. Найти силу F , растягивающую кольцо.

45. Электрон, попав в магнитное поле с индукцией $B = 0,02$ Тл, стал двигаться по окружности радиусом $R = 2$ см. Определить кинетическую энергию электрона.

46. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи $I = 20$ А. Определить силу F , действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии, равном ее стороне.

47. Протон движется по окружности радиусом $R = 10$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ мТл. Найти скорость и период обращения протона.

48. Найти силу, действующую на тонкий проводник в виде полуокружности радиусом $R = 50$ см, по которому течет ток $I = 10$ А, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ Тл. Силовые линии \vec{B} перпендикулярны плоскости проводника.

49. Найти силу, действующую на единицу длины тонкого проводника с током $I = 8$ А в точке 0, если проводник изогнут, как показано на рис. 2.16, а. Радиус закругления $R = 10$ см.

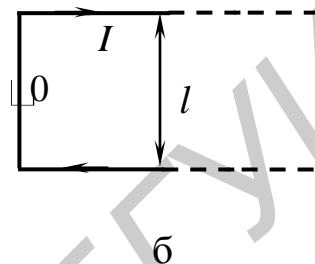
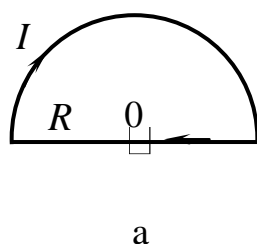


Рис. 2.16

50. Найти силу, действующую на единицу длины тонкого проводника с током $I = 8$ А в точке 0, если проводник изогнут, как показано на рис. 2.16, б. Расстояние между длинными параллельными друг другу участками проводника $l = 20$ см.

51. Найти индукцию магнитного поля на оси бесконечно длинного соленоида, по которому идет ток I . Плотность витков n .

52. По бесконечно длинному проводнику радиусом R идет ток, плотность которого $j = j_0 \frac{r}{R}$, где j_0 – положительная постоянная; r – расстояние до оси проводника. Найти магнитную индукцию как функцию расстояния r от оси проводника.

53. По бесконечно длинному проводнику радиусом R идет ток, плотность которого $j = j_0(1 - \frac{r}{R})$, где j_0 – положительная постоянная; r – расстояние до оси проводника. Найти магнитную индукцию как функцию расстояния r от оси проводника.

54. По длинной трубе, внутренний и внешний радиусы которой R_1 и R_2 , идет ток, плотность которого $j = j_0 r^2$, где j_0 – положительная постоянная; r – расстояние до оси трубы. Найти магнитную индукцию как функцию расстояния r от оси трубы.

55. Тонкое кольцо радиусом $R = 20$ см равномерно заряжено зарядом $Q = 70$ мКл. Кольцо вращается с угловой скоростью $\omega = 50$ рад/с относи-

тельно оси, перпендикулярной плоскости кольца. Найти магнитный момент p_m , обусловленный вращением кольца.

56. Полный магнитный поток, пронизывающий соленоид длиной $l = 50$ см, равен $\Psi = 50$ мкВб. Найти магнитный момент соленоида.

57. Найти магнитный момент тонкого кругового витка с током, если радиус витка $R = 100$ мм и индукция магнитного поля в его центре $B = 6$ мкТл.

58. Квадратный контур со стороной $a = 20$ см расположен в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,6$ Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. По контуру течет ток $I = 20$ А. Определить работу сил поля при повороте контура вокруг оси, лежащей в плоскости контура на угол $\alpha = 60^\circ$.

59. Квадратный контур со стороной $a = 10$ см расположен в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. По контуру течет ток $I = 10$ А. Определить работу сил поля по удалению контура за пределы поля.

60. Плоскость кругового витка с током $I = 3$ А расположена перпендикулярно линиям магнитной индукции. Радиус витка 10 см. Определить работу сил поля при повороте витка на угол $\alpha = 90^\circ$ вокруг оси, совпадающей с диаметром.

61. Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией B (рис. 2.17, а). Верхнюю часть контура – провод в виде полуокружности радиусом a вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OO' . В момент $t = 0$ магнитный поток через контур максимальный. Найти ЭДС индукции в контуре как функцию времени t .

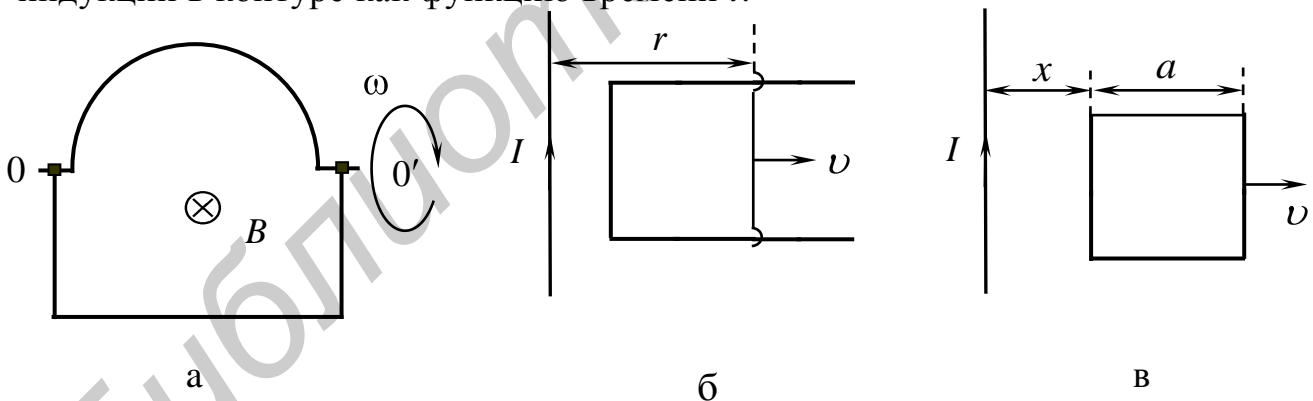


Рис. 2.17

62. Длинный прямой проводник с током I и П-образный проводник с подвижной перемычкой расположены в одной плоскости (рис. 2.17, б). Перемычку, длина которой l , перемещают вправо с постоянной скоростью v . Найти ЭДС индукции в контуре как функцию расстояния r .

63. Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости (рис. 2.17, в). Рамку поступательно перемещают вправо с постоянной скоростью v . Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x .

64. По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m (рис. 2.18, а). Шины замкнуты на сопротивление R . Расстояние между шинами l . Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярном к плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивлением шин и перемычки пренебречь. Найти установившуюся скорость перемычки.

65. Система отличается от рассмотренной в задаче 64 лишь тем, что вместо сопротивления R к концам шин подключен конденсатор емкостью C . Найти ускорение перемычки.

66. Между полюсами электромагнита находится небольшая катушка, ось которой совпадает с направлением магнитного поля. Площадь поперечного сечения катушки $S = 3,0 \text{ мм}^2$, число витков $N = 60$. При повороте катушки на 180° вокруг ее диаметра через подключенный к ней баллистический гальванометр протекает заряд $q = 4,5 \text{ мкКл}$. Найти модуль индукции магнитного поля между полюсами, если сопротивление электрической цепи $R = 40 \text{ Ом}$.

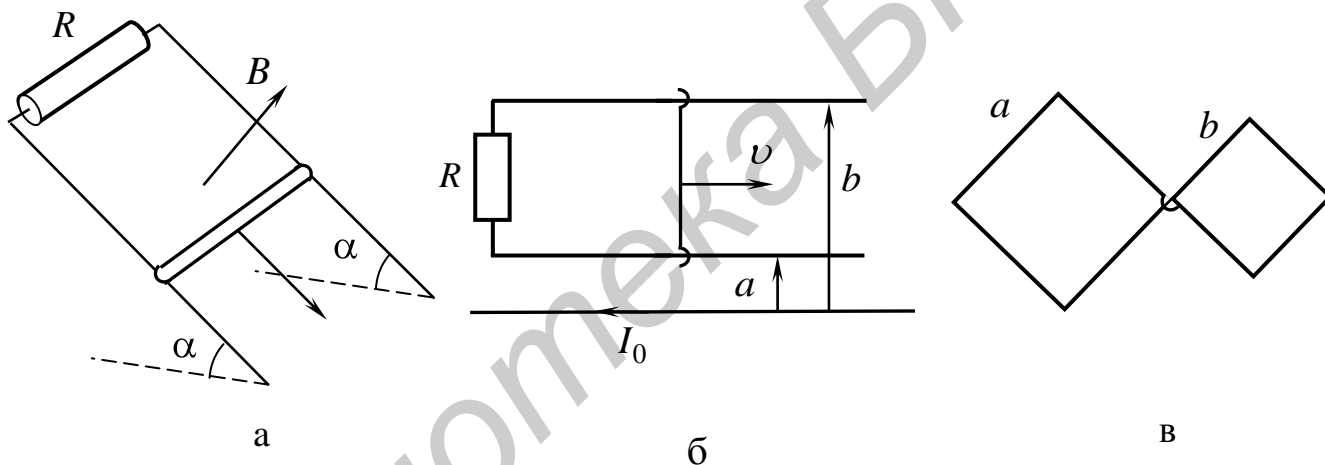


Рис. 2.18

67. На расстояниях a и b от длинного прямого проводника с постоянным током I_0 расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением R (рис. 2.18, б). По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью v перемычку. Пренебрегая сопротивлением проводов, стержня и скользящих контактов, найти значение и направление индукционного тока в контуре.

68. Плоский контур (рис. 2.18, в), имеющий вид двух квадратов со сторонами $a = 20 \text{ см}$ и $b = 10 \text{ см}$, находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к его плоскости. Индукция поля меняется во времени по закону $B = B_0 \sin \omega t$, где $B_0 = 10 \text{ мТл}$ и $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$. Найти амплитуду индукционного тока в контуре, если сопротивление единицы длины его $\rho = 50 \text{ мОм/м}$.

69. Внутри длинного соленоида находится катушка из N витков с площадью поперечного сечения S . Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, совпадающей с ее диаметром и перпендикулярной к оси соленоида. Найти ЭДС индукции в катушке, если индукция магнитного поля в соленоиде меняется по закону $B = B_0 \sin \omega t$ и в момент $t = 0$ ось катушки совпадает с осью соленоида.

70. Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением R изменяется в течение времени τ по закону $\Phi = at(\tau - t)$. Найти количество тепла, выделенное в контуре за это время.

71. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки индуктивности. Катушка содержит $N = 1000$ витков медной проволоки диаметром $d = 0,2$ мм. Диаметр витка катушки $D = 4$ см, индуктивность катушки $L = 2$ Гн. Определить добротность колебательного контура при частоте колебаний $\nu = 1$ МГц (удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м).

72. Резонанс в колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью $C_1 = 1$ мкФ, наступает при частоте $\nu_1 = 500$ Гц. Когда параллельно конденсатору C_1 подключают конденсатор C_2 , резонансная частота становится $\nu_2 = 200$ Гц. Найти емкость конденсатора C_2 .

73. Идеальный колебательный контур состоит из катушки индуктивности и конденсатора в виде двух квадратных пластин со стороной a , расположенных на расстоянии d друг от друга. Диэлектрик между обкладками имеет диэлектрическую проницаемость ϵ . Катушка содержит n витков на единицу длины, диаметр витка D , длина катушки l . Найти период колебаний T в этом контуре.

74. Идеальный колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 100$ пФ и катушки индуктивности. Закон колебаний заряда на его обкладках имеет вид $q = 5 \cdot 10^{-8} \cos 10^5 \pi t$. Записать закон колебаний силы тока $I = I(t)$ и напряжения $U = U(t)$. Найти индуктивность катушки L , а также амплитудные значения заряда, силы тока и напряжения.

75. Идеальный колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0,2$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 5,07 \cdot 10^{-3}$ Гн. Найти логарифмический декремент затухания, при котором напряжение на обкладках конденсатора уменьшится в 2 раза за $t = 10^{-2}$ с.

76. Через какое время t , считая от начала колебаний, заряд на обкладках конденсатора q станет равен половине амплитудного заряда q_m ? Частота колебаний в контуре $\nu = 2$ МГц.

77. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 100$ мГн. Активное сопротивление катушки $R = 10$ Ом. Определить логарифмический декремент затухания контура.

78. Найти промежуток времени τ , за который амплитуда колебаний силы тока в контуре с добротностью $Q = 5000$ уменьшается в 2 раза, если частота свободных колебаний $\nu = 2,2$ МГц.

79. Найти добротность колебательного контура с емкостью $C = 2$ мкФ, индуктивностью $L = 5$ мГн и активным сопротивлением $R = 1$ Ом.

80. Ток в колебательном контуре зависит от времени, как $I = I_m \sin \omega_0 t$, где $I_m = 9$ мА, $\omega_0 = 4,5 \cdot 10^4$ с⁻¹. Емкость конденсатора $C = 0,5$ мкФ. Найти индуктивность контура и напряжение на конденсаторе в момент $t = 0$.

Библиотека БГУИР

3. ОПТИКА. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ И АТОМНОЙ ФИЗИКИ (Основные формулы)

3.1. Оптика

Скорость света в среде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n},$$

где c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления среды; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; μ – магнитная проницаемость среды.

Оптическая длина пути световой волны

$$L = nS,$$

где S – расстояние от источника света до точки наблюдения (геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n).

Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_2 - L_1.$$

Зависимость разности фаз от оптической разности хода световых волн

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta,$$

где λ_0 – длина световой волны в вакууме.

Условие интерференционного максимума

$$\Delta = \pm 2k \frac{\lambda_0}{2} = \pm k\lambda_0,$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ – порядковый номер максимума (порядок интерференции).

Условие интерференционного минимума

$$\Delta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda_0}{2},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ – порядковый номер минимума.

Расстояние между соседними максимумами освещенности на экране в опыте Юнга

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d},$$

где l – расстояние от источников до экрана; d – расстояние между когерентными источниками (щелями); λ – длина волны, испускаемая источниками.

Оптическая разность хода монохроматических световых волн при отражении от тонкой пленки

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}$$

или

$$\Delta = 2dn \cos \gamma - \frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина пленки; n – показатель преломления пленки; i – угол падения света на пленку; γ – угол преломления света в пленке.

Радиусы светлых колец Ньютона в проходящем свете и темных колец в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}.$$

Радиусы темных колец Ньютона в проходящем свете и светлых колец в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{(2k-1) \frac{R\lambda}{2}},$$

где R – радиус кривизны линзы; k – номер кольца, ($k = 1, 2, 3, \dots$); λ – длина волны монохроматического света.

Формула связи между толщиной воздушного зазора и радиусом соответствующего кольца Ньютона:

$$r_k = \sqrt{2Rd_k},$$

d_k – толщина воздушного зазора в том месте, где наблюдается k -е кольцо Ньютона.

Радиус отверстия при дифракции Френеля на круглом отверстии

$$r_0 = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}},$$

где a – расстояние от источника до отверстия; b – расстояние от отверстия до экрана; m – число зон Френеля, укладывающихся в отверстии радиусом r_0 ; λ – длина волны падающего света.

Условие дифракционного максимума при дифракции Фраунгофера от щели (за исключением центрального):

$$b \sin \varphi = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots \left[\frac{b}{\lambda} \right]).$$

Условие дифракционного минимума при дифракции Фраунгофера от щели:

$$b \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, \quad (k = 1, 2, 3, \dots \left[\frac{b}{\lambda} \right]),$$

где b – ширина щели; φ – угол дифракции (угол, под которым наблюдается соответствующий дифракционный максимум или минимум); k – порядковый номер дифракционного максимума или минимума; знак $\left[\frac{b}{\lambda} \right]$ обозначает целую часть числа $\frac{b}{\lambda}$.

Условие дифракционного максимума при дифракции света на дифракционной решетке:

Условие дифракционного минимума при дифракции света на дифракционной решетке:

$$d \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, \quad (k = 0, 1, 2, \dots \left[\frac{d}{\lambda} \right]),$$

где d – период дифракционной решетки; k – порядковый номер главного дифракционного максимума.

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN,$$

где $\Delta\lambda$ – наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и $\lambda + \Delta\lambda$), при которой эти линии могут быть видны отдельно в спектре, полученном с помощью данной решетки; N – полное число щелей решетки.

Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой,

$$m = 2k_{\max} + 1,$$

где $k_{\max} = \left[\left(\frac{d}{\lambda} \right) \right]$ – количество максимумов, расположенных по одну сторону от центрального максимума (наибольший порядок спектра).

Закон Брюстера:

$$\operatorname{tg} \Theta_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

где $\Theta_{\text{Бр}}$ – угол падения света на границу раздела двух диэлектриков, при котором отраженный от диэлектрика свет полностью поляризован; n_{21} – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

Закон Малюса:

$$I = I_0 k \cos^2 \varphi,$$

где I_0 – интенсивность света, прошедшего через первый поляризатор; I – интенсивность света, прошедшего через второй поляризатор; φ – угол между плоскостями пропускания первого и второго поляризаторов; k – коэффициент пропускания поляризатора; ($k = 1 - \tau$; τ – коэффициент поглощения поляризатора).

3.2. Элементы квантовой и атомной физики

Закон Стефана – Больцмана:

$$R^* = \sigma T^4,$$

где R^* – энергетическая светимость абсолютно чёрного тела (АЧТ); T – температура АЧТ по шкале Кельвина; $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) – постоянная Стефана–Больцмана.

Закон смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

где λ_m – длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения АЧТ при температуре T ; $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м · К – постоянная Вина.

Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu \text{ или } \varepsilon = \hbar\omega,$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка; $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж · с;

ν – частота фотона; $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота фотона.

Формула Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + \frac{m\nu_{\max}^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{hc}{\lambda} = A + \frac{m\nu_{\max}^2}{2},$$

где $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ – энергия фотона, падающего на поверхность металла; A – работа выхода электрона из металла; ν_{\max} – максимальная скорость фотоэлектрона.

Максимальная скорость фотоэлектронов находится из условия

$$\frac{m\nu_{\max}^2}{2} = eU_3,$$

где U_3 – задерживающее напряжение между катодом и анодом; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд.

Красная граница фотоэффекта:

$$\nu_0 = \frac{A}{h} \quad \text{или} \quad \lambda_0 = \frac{hc}{A},$$

где ν_0 – минимальная частота, при которой еще возможен фотоэффект; λ_0 – максимальная длина волны света, при которой еще возможен фотоэффект; h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

Внутренняя энергия атома водорода (по боровской модели)

$$E = \frac{m_e\nu^2}{2} - \frac{ke^2}{r},$$

где m_e – масса электрона; e – элементарный заряд; ν – скорость электрона; r – радиус орбиты электрона в атоме.

ν и r связаны уравнениями

$$\begin{aligned} m_e\nu r &= n\hbar, \\ m_e\nu^2 &= \frac{ke^2}{r}, \end{aligned}$$

где n – номер боровской орбиты.

Решая совместно эти уравнения, можно найти r и ν , а также вычислить значения энергии электрона в атоме водорода:

$$E_n = -\frac{R_y}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $R_y = \frac{m_e k^2 e^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ эВ}$ – атомная единица энергии (ридберг);

$k = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

Формула Бальмера:

$$\omega = R_y \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \text{ где } n = 3, 4, 5, 6, \dots,$$

где ω – частота излучения.

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p},$$

где p – импульс частицы.

Импульс частицы и его связь с кинетической энергией T :

а) $p = mv$; $p = \sqrt{2mT}$; $T = \frac{mv^2}{2}$ – нерелятивистский случай;

б) $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$; $p = \frac{1}{c} \sqrt{(2E_0 + T)T}$; $T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$ – релятивистский

случай, где m – масса частицы; v – скорость частицы; c – скорость света в вакууме; E_0 – энергия покоя частицы ($E_0 = mc^2$).

Соотношения неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar,$$

(также при решении задач можно использовать формулу $\Delta p_x \Delta x \approx \hbar$), где Δp_x – неопределенность проекции импульса на ось x ; Δx – неопределенность координаты;

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar,$$

где ΔE – неопределенность энергии; Δt – время жизни квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

Одномерное стационарное уравнение Шредингера:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi(x) = 0,$$

где $\psi(x)$ – волновая функция, описывающая состояние частицы; m – масса частицы; E – полная энергия частицы; $U = U(x)$ – потенциальная энергия частицы в рассматриваемом силовом поле.

Плотность вероятности

$$\frac{dW(x)}{dx} = |\psi(x)|^2,$$

где $dW(x)$ – вероятность того, что частица может быть обнаружена внутри интервала $(x, x + dx)$.

Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx.$$

Решение стационарного уравнения Шредингера для бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной ямы шириной L :

$$\text{а) } \psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x, & 0 \leq x \leq L, \\ 0, & x < 0, x > L \end{cases} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad \text{-- (нормированная волно-}$$

вая функция n -го стационарного состояния);

$$\text{б) } E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2mL^2} \quad \text{-- (энергия } n\text{-го стационарного состояния).}$$

Число нуклонов в ядре

$$A = Z + N,$$

где Z – зарядовое число (число протонов в ядре); N – число нейтронов в ядре.

Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N – число ядер, не распавшихся к моменту времени t ; N_0 – число ядер в начальный момент времени ($t = 0$); λ – постоянная радиоактивного распада.

Число ядер, распавшихся за время t ,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Активность изотопа

$$A = - \frac{dN}{dt} = A_0 e^{-\lambda t},$$

где $A_0 = \lambda N_0$ – начальная активность изотопа при $t = 0$.

N_0 можно найти из формулы

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A,$$

где m – масса изотопа; M – молярная масса изотопа; N_A – постоянная Авогадро.

Период полураспада изотопа

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Среднее время жизни радиоактивного ядра

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

3.3. Примеры решения задач

Пример 3.1. В опыте Юнга два когерентных источника S_1 и S_2 (две параллельных узких щели в непрозрачном экране) испускают свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. На каком расстоянии x от нулевого максимума располагается максимум первого порядка, если расстояние между источниками $d = 0,7$ мм, а расстояние от каждого источника до экрана $l = 1,5$ м.

Дано:

$$\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$|k| = 1$$

$$d = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$l = 1,5 \text{ м}$$

$$x = ?$$

Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники S_1MC и S_2MC (рис. 3.1):

$$r_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad (1)$$

$$r_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Вычтем (1) из (2):

$$r_2^2 - r_1^2 = 2xd \text{ или}$$

$$(r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2xd. \quad (3)$$

Интерференционная картина будет четкой, если расстояние $S_1S_2 = d$ между источниками невелико по сравнению с расстоянием их от экрана $MC = l$, т. е. когда $d \ll l$.

В этом случае $r_1 + r_2 \approx 2l$, и

поэтому $r_2 - r_1 = \frac{2xd}{2l}$ или $\Delta r = \frac{xd}{l}$,

откуда

$$x = \frac{\Delta r l}{d}. \quad (4)$$

Согласно условию интерференционного максимума

$$\Delta r = k\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

Тогда положение k -го интерференционного максимума, т. е. (4) с учетом (5), определяется формулой

$$x = \frac{k\lambda l}{d}.$$

Произведем вычисления для $k = 1$:

$$x_1 = \frac{1 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot 1,5}{0,7 \cdot 10^{-3}} \text{ м} = 1,285 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Ответ: $x_1 = 1,285 \cdot 10^{-3}$ м.

Пример 3.2. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м. Найти разность Δr между радиусами светлых колец с порядковыми номерами $k_1 = 5$ и $k_2 = 6$. Радиус кривизны линзы $R = 5$ м. Наблюдение ведется в отраженном свете.

Дано:

$$\lambda = 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$k_1 = 5$$

$$k_2 = 6$$

$$R = 5 \text{ м}$$

$$\Delta r - ?$$

Решение. Радиусы светлых колец Ньютона с порядковыми номерами k_1 и k_2 в отраженном свете определяются условиями

$$r_5 = \sqrt{(2k_1 - 1)R\lambda/2},$$

$$r_6 = \sqrt{(2k_2 - 1)R\lambda/2}.$$

Тогда разность Δr между 5-м и 6-м светлыми кольцами равна разности радиусов этих колец:

$$\Delta r = r_6 - r_5 = \sqrt{(2k_2 - 1)R\lambda/2} - \sqrt{(2k_1 - 1)R\lambda/2} = \sqrt{R\lambda/2} (\sqrt{(2k_2 - 1)} - \sqrt{(2k_1 - 1)}).$$

Произведем вычисления:

$$\Delta r = \sqrt{\frac{5 \cdot 7 \cdot 10^{-7}}{2}} (\sqrt{2 \cdot 6 - 1} - \sqrt{2 \cdot 5 - 1}) = \sqrt{1,75 \cdot 10^{-8}} (\sqrt{11} - \sqrt{9}) = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta r = 0,42 \cdot 10^{-3}$ м.

Пример 3.3. Точечный источник света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм расположен на расстоянии $a = 100$ см перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом $r_0 = 1$ мм. Найти расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения P , для которой число зон Френеля в отверстии составляет $m = 3$. Светлое или темное пятно будет в точке наблюдения на экране?

Дано:

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$a = 100 \text{ см} = 1 \text{ м}$$

$$r_0 = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$$

$$m = 3$$

$$b - ?$$

Решение.

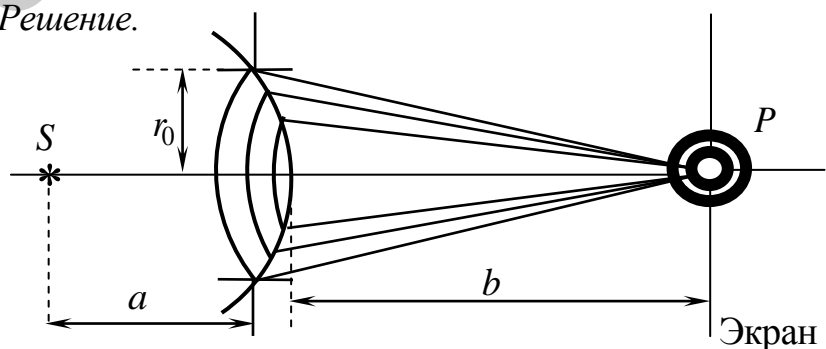


Рис. 3.2

Сферическая волна от источника S доходит до отверстия радиусом r_0 . В задаче сказано, что число зон Френеля, укладывающиеся в отверстие, равно $m = 3$. На экране будет наблюдаться система чередующихся темных и светлых колец с общим центром в точке P , лежащих напротив центра отвер-

стия. Если в отверстие укладывается четное число зон Френеля, то в точке P будет темное пятно, если в отверстие укладывается нечетное число зон Френеля, то в точке будет светлое пятно. В нашей задаче $m = 3$, следовательно, в центре будет светлое пятно.

Формула, связывающая радиус отверстия r_0 с a , b , λ и m :

$$r_0 = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}}. \quad (1)$$

Из (1) найдем b :

$$\begin{aligned} r_0^2(a+b) &= abm\lambda; \\ r_0^2 a &= abm\lambda - r_0^2 b = b(am\lambda - r_0^2), \end{aligned}$$

откуда

$$b = \frac{r_0^2}{am\lambda - r_0^2}.$$

Произведем вычисления:

$$b = \frac{10^{-3} \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10^{-7} - 10^{-6}} \text{ м} = 2 \text{ м}.$$

Ответ: $b = 2$ м, в центре будет светлое пятно.

Пример 3.4. Каков период решетки d , если при нормальном падении на нее света с длиной волны $\lambda = 0,75$ мкм на экране, отстоящем от решетки на расстоянии $L = 1$ м, максимумы первого порядка отстоят друг от друга на $x = 30,3$ см? Каково число штрихов N на $l = 1$ см решетки? Какое количество максимумов дает эта дифракционная решетка? Каков максимальный угол φ_{\max} , определяющий положение последнего дифракционного максимума?

Дано:

$$\lambda = 0,75 \text{ мкм} = 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$L = 1 \text{ м}$$

$$k = 1$$

$$x = 30,3 \text{ см} = 30,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$l = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$$

$$d - ?, N - ?, m - ?,$$

$$\varphi_{\max} - ?$$

Решение. Условие максимума на дифракционной решетке:

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad (1)$$

где $k = 1$, так как в условии говорится о максимумах первого порядка, φ – угол, под которым наблюдается максимум первого порядка.

Так как по условию $\frac{x}{2}$ во много раз меньше L , то $\sin \varphi \approx \text{tg} \varphi$.

Из рис. 3.3 следует, что

$$\text{tg} \varphi = \frac{x}{2L}. \quad (2)$$

Тогда

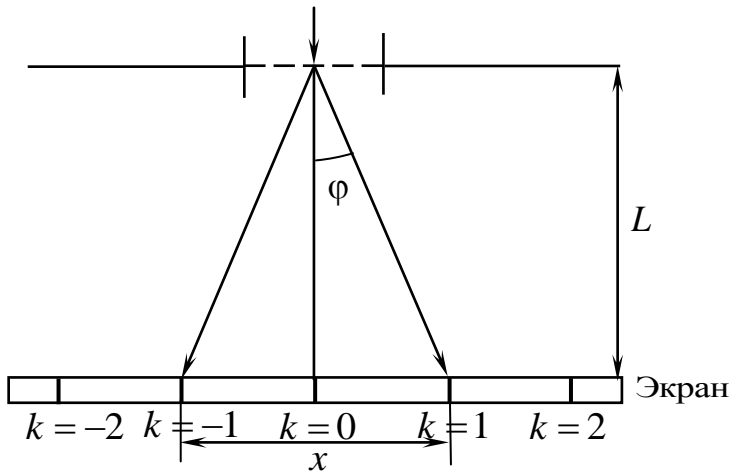


Рис. 3.3

фракционных максимумов

$$d = \frac{\lambda}{\sin\varphi} = \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{2\lambda L}{x}. \quad (3)$$

Зная d , можно найти, сколько периодов (а значит, и сколько штрихов) укладывается на длине l решетки, т. е.

$$N = \frac{l}{d}. \quad (4)$$

Для определения порядка последнего максимума надо учесть, что $|\sin\varphi| \leq 1$. Наибольший порядок ди-

$$k_{\max} = \left[\frac{d}{\lambda} \right], \quad (5)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой,

$$m = 2k_{\max} + 1. \quad (6)$$

Тогда (6) с учетом (5):

$$m = 2 \left[\frac{d}{\lambda} \right] + 1. \quad (7)$$

(Такой результат получается, если учесть центральный максимум и то, что слева и справа от него расположены по k_{\max} максимумов).

Максимальный угол φ_{\max} , соответствующий последнему дифракционному максимуму, определяется из соотношения

$$\sin\varphi_{\max} = \frac{k_{\max}\lambda}{d}, \quad \varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{k_{\max}\lambda}{d}\right). \quad (8)$$

Произведем вычисления:

$$d = \frac{2 \cdot 7,5 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{0,303} \text{ м} = 4,95 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 4,95 \cdot 10^{-4} \text{ см};$$

$$\frac{N}{l} = \frac{1}{4,95 \cdot 10^{-6}} \text{ м}^{-1} = 2,02 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1} = 2,02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}.$$

Из (5)

$$k_{\max} = \left[\frac{4,95 \cdot 10^{-6}}{7,5 \cdot 10^{-7}} \right] = [6,6] = 6.$$

Из (6)

$$m = 2 \cdot 6 + 1 = 13.$$

Произведем вычисления:

$$\varphi_{\max} = \arcsin \left(\frac{6 \cdot 7,5 \cdot 10^{-7}}{4,95 \cdot 10^{-6}} \right) = 65^\circ.$$

Ответ: $d = 4,95 \cdot 10^{-6}$ см; $N = 2,02 \cdot 10^3$ см⁻¹; $m = 13$; $\varphi_{\max} = 65^\circ$.

Пример 3.5. Естественный свет падает на систему из двух последовательно расположенных одинаковых поляризаторов. Плоскость пропускания второго поляризатора составляет угол 30° с плоскостью пропускания первого. Коэффициент поглощения каждого составляет $\tau = 20\%$. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы?

Дано:

$$\varphi = 30^\circ$$

$$\tau = 20\% = 0,2$$

$$\frac{I_e}{I} - ?$$

Решение.

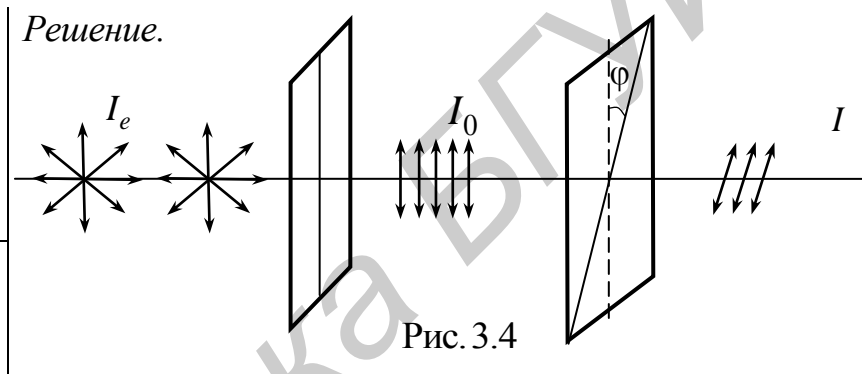


Рис. 3.4

Интенсивность естественного света I_e , прошедшего через первый поляризатор, будет определяться по формуле

$$I_0 = k I_e \langle \cos^2 \varphi \rangle, \quad (1)$$

где φ – угол между колебаниями вектора \vec{E} в естественной световой волне и плоскостью пропускания поляризатора. Для естественного света все значения φ равновероятны, поэтому $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$, тогда

$$I_0 = \frac{I_e}{2} k, \quad (1')$$

где k – коэффициент пропускания поляризатора. Нам задан коэффициент поглощения τ , значит,

$$I_0 = \frac{I_e}{2} (1 - \tau). \quad (2)$$

Из второго поляризатора по закону Малюса выйдет свет интенсивностью

$$I = k I_0 \cos^2 \varphi = (1 - \tau) I_0 \cos^2 \varphi = \frac{I_e}{2} (1 - \tau)^2 \cos^2 \varphi, \quad (3)$$

здесь φ – угол между плоскостями пропускания первого и второго поляризаторов. Отсюда

$$\frac{I_e}{I} = \frac{2}{(1-\tau)^2 \cos^2 \varphi}. \quad (4)$$

Произведем вычисления:

$$\frac{I_e}{I} = \frac{2}{(1-0,2)^2 \cos^2 30^\circ} = \frac{8}{1,92} = 4,2 \text{ раза}.$$

Ответ: в 4,2 раза.

Пример 3.6. Свет переходит из жидкости в стекло с абсолютным показателем преломления $n_2 = 1,5$. Отраженный от стекла луч образует угол 94° с падающим лучом. Определить абсолютный показатель преломления жидкости n_1 , если отраженный свет полностью поляризован.

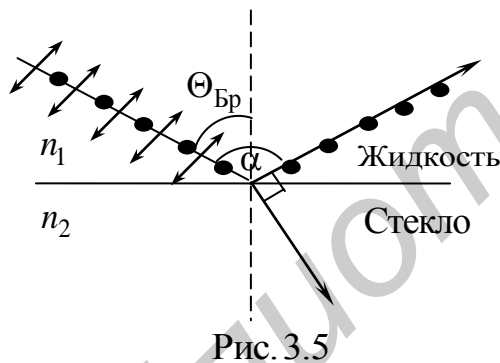
Дано:

$$\alpha = 94^\circ$$

$$n_2 = 1,5$$

$$n_1 = ?$$

Решение. Согласно закону Брюстера свет, отраженный от диэлектрика, максимально поляризован в том случае, если тангенс угла падения численно равен относительному показателю преломления второй среды относительно первой:



$$\operatorname{tg} \Theta_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (1)$$

Так как угол отражения равен углу падения, то $\Theta_{\text{Бр}} = \frac{\alpha}{2}$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ откуда}$$

$$n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \quad (2)$$

Произведем вычисления:

$$n_1 = \frac{1,5}{\operatorname{tg} 47^\circ} = \frac{1,5}{1,0724} = 1,4.$$

Ответ: $n_1 = n_{\text{жид}} = 1,4$.

Пример 3.7. Излучение Солнца по своему спектральному составу близко к излучению абсолютно черного тела, для которого максимум испускательной способности приходится на длину волны $0,48 \text{ мкм}$. Найти массу, теряемую Солнцем каждую секунду за счет этого излучения. Оценить время, за

которое масса Солнца уменьшится на 1 %. Масса Солнца $M_C = 1,97 \cdot 10^{30}$ кг, радиус Солнца $r_C = 6,59 \cdot 10^8$ м.

Дано:

$$\lambda_{\max} = 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$r_C = 6,59 \cdot 10^8 \text{ м}$$

$$M_C = 1,97 \cdot 10^{30} \text{ кг}$$

$$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$$

$$m' - ?, t_{1\%} - ?$$

Решение. Согласно формуле Эйнштейна

$$E = mc^2, \quad (1)$$

где E – энергия, излучаемая Солнцем (для нашего случая) за какое-то время; m – масса, теряемая Солнцем за счет излучения за то же время. Тогда, теряемая масса за время t

$$m' = \frac{m}{t} = \frac{E}{c^2 t}. \quad (2)$$

С другой стороны, энергию излучения АЧТ можно представить, как

$$E = \Phi t, \quad (3)$$

где Φ – поток лучистой энергии, испускаемый АЧТ (в нашем случае Солнцем) во все стороны.

Тогда формула (2) с учетом (3) запишется так:

$$m' = \frac{\Phi}{c^2}. \quad (4)$$

Представим поток лучистой энергии как

$$\Phi = RS = R4\pi r_C^2, \quad (5)$$

где R – энергетическая светимость; S – площадь поверхности излучаемого тела.

Так как излучение Солнца близко по своему составу к излучению АЧТ, то $R = R^*$.

По закону Стефана – Больцмана энергетическая светимость АЧТ равна

$$R^* = \sigma T^4, \quad (6)$$

где σ – постоянная Стефана – Больцмана; T – абсолютная температура тела.

Тогда (4) с учетом (5) и (6):

$$m' = \frac{R^* 4\pi r_C^2}{c^2} = \frac{\sigma T^4 4\pi r_C^2}{c^2}. \quad (7)$$

Температуру T можно найти из закона смещения Вина:

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}}, \quad (8)$$

где b – постоянная Вина; λ_{\max} – длина волны, соответствующая максимуму испускательной способности АЧТ.

Тогда (7) с учетом (8):

$$m' = \frac{\sigma b^4 4\pi r_C^2}{\lambda_{\max}^4 c^2}.$$

Произведем вычисления:

$$m' = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (2,9 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot (6,95 \cdot 10^8)^2}{(4,8 \cdot 10^{-7})^4 \cdot 9 \cdot 10^{16}} \text{ кг/с} = 5 \cdot 10^9 \text{ кг/с}.$$

Найдем массу 1 % от массы Солнца $m_{1\%} = \frac{M}{100} = 1,97 \cdot 10^{28} \text{ кг}$. Тогда

время, за которое Солнце потеряет 1 % своей массы, можно найти, разделив массу 1 % Солнца на массу m' (массу, теряемую Солнцем за 1 с излучения):

$$t_{1\%} = \frac{m_{1\%}}{m'} = \frac{1,97 \cdot 10^{28}}{5 \cdot 10^9} \text{ с} = 4 \cdot 10^{18} \text{ с} \approx 1,27 \cdot 10^{11} \text{ лет}.$$

Ответ: $m' = 5 \cdot 10^9 \text{ кг/с}$; $t_{1\%} = 4 \cdot 10^{18} \text{ с} \approx 1,27 \cdot 10^{11} \text{ лет}$.

Пример 3.8. На цинковую пластину падает монохроматический пучок света. Фототок прекращается при задерживающем напряжении между катодом и анодом $U_3 = 1,5 \text{ В}$. Определить длину волны λ света, падающего на пластину, и максимальную скорость v_{\max} фотоэлектронов.

Дано:

$$U_3 = 1,5 \text{ В}$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$A_{Zn} = 4 \text{ эВ} = 6,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$\lambda - ?, v_{\max} - ?$$

Решение. Из формулы Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{m_e v_{\max}^2}{2}, \quad (1)$$

т. к. $\nu = \frac{c}{\lambda}$, то

$$h \frac{c}{\lambda} = A_{\text{вых}} + \frac{m_e v_{\max}^2}{2}. \quad (2)$$

Электроны вылетают из катода с различными скоростями. Приложив к электродам задерживающее напряжение U_3 , при котором фототок станет равным нулю, можно определить максимальное значение скорости фотоэлектронов по формуле

$$\frac{m_e v_{\max}^2}{2} = eU_3. \quad (3)$$

Из (3)

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2eU_3}{m_e}}. \quad (4)$$

Произведем вычисления:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} = \sqrt{\frac{4,8 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} = \sqrt{\frac{4,8 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} = \\ = \sqrt{0,527 \cdot 10^{12}} \text{ м/с} = 0,726 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

С учетом (3) перепишем (2): $\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{ВЫХ}} + eU_3$, откуда

$$\lambda = \frac{hc}{A_{\text{ВЫХ}} + eU_3}. \quad (5)$$

Произведем вычисления:

$$\lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{6,4 \cdot 10^{-19} + 2,4 \cdot 10^{-19}} \text{ м} = \frac{19,86 \cdot 10^{-26}}{8,8 \cdot 10^{-19}} \text{ м} = 2,25 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $v_{\max} = 7,26 \cdot 10^5 \text{ м/с}$, $\lambda = 2,25 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

Пример 3.9. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимально возможную энергию электрона в атоме водорода и соответствующее эффективное $r_{\text{эф}}$ расстояние его от ядра.

Дано:

m , e , \hbar

$r_{\text{эф}} - ?$, $E_{\text{min}} - ?$

Решение. В модели Бора полная энергия электрона в атоме водорода

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{ke^2}{r}, \quad (1)$$

где $\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия электрона; $-\frac{ke^2}{r}$ —

потенциальная энергия электрона в поле неподвижного ядра, состоящего из протона.

Соотношение неопределенностей для нашего случая

$$\Delta r \Delta p \geq \hbar. \quad (2)$$

Поскольку $\Delta p \sim p$ и $\Delta r \sim r$, подставим Δp и Δr в (2). Получим $rp \geq \hbar$.

Импульс нерелятивистской частицы $p = mv$. Тогда $rmv \geq \hbar$ и, следовательно,

$$v \geq \frac{\hbar}{mr}. \quad (3)$$

Подставим (3) в формулу кинетической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} \geq \frac{m\hbar^2}{2m^2r^2} = \frac{\hbar^2}{2mr^2}. \quad (4)$$

Подставим (4) в (1):

$$E \geq \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r} = f(r). \quad (5)$$

Исследуем функцию $f(r)$ на экстремум. Экстремальное значение аргумента r_3 найдем из условия $\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_3} = 0$.

Поскольку $\left. \frac{d^2 f}{dr^2} \right|_{r=r_3} = \frac{3\hbar^2}{mr_3^4} - \frac{2ke^2}{r_3^3} = \frac{3m^3 k^4 e^8}{\hbar^3} > 0$, то $f(r_3) = f_{\min}$,

$$\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_3} = -\frac{\hbar^2}{mr_3^3} + \frac{ke^2}{r_3^2} = 0, \quad \frac{ke^2}{r_3^2} = \frac{\hbar^2}{mr_3^3},$$

откуда

$$r_3 = \frac{\hbar^2}{mke^2}. \quad (6)$$

Подставим (6) в (5), получим

$$f_{\min} = \frac{\hbar^2}{2mr_3^2} - \frac{ke^2}{r_3} = -\frac{mk^2 e^2}{2\hbar^2}. \quad (7)$$

Поскольку соотношение (5) должно выполняться для всех r , то $E \geq f_{\min}$. Следовательно, $E_{\min} = f_{\min}$, а эффективный радиус $r_{\text{эф}} = r_3$.

Ответ: $r_{\text{эф}} = \frac{\hbar^2}{mke^2}$; $E_{\min} = -\frac{mk^2 e^2}{2\hbar^2}$.

Пример 3.10. Электрон разогнали из состояния покоя в электрическом поле при напряжении $U = 100$ В. Чему равна длина волны де Бройля λ_B этого электрона?

Дано:

$$\nu_0 = 0$$

$$U = 100 \text{ В}$$

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$\lambda_A - ?$$

Решение. Длина волны де Бройля определяется равенством

$$\lambda_B = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e \nu}, \quad (1)$$

где ν – скорость электрона, разогнанного электрическим полем.

Кинетическая энергия такого электрона

$$E_k = \frac{m_e \nu^2}{2}. \quad (2)$$

Поскольку работа сил электростатического поля

$$A = eU \quad (3)$$

равна изменению кинетической энергии электрона $\Delta E_k = E_k - 0$, то, приравняв (2) и (3), найдем скорость электрона v :

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (1), получим

$$\lambda_B = \frac{h}{m_e \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}} \text{ или } \lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}}.$$

Проверим размерность λ_B :

$$\begin{aligned} [\lambda] &= \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{кг} \cdot \text{Кл} \cdot \text{В}}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{кг} \cdot \text{Кл} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}}} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\sqrt{\text{кг} \cdot \text{Дж}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{Дж}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\text{кг} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}} = \sqrt{\text{м}^2} = \text{м}. \end{aligned}$$

Произведем вычисления:

$$\lambda_B = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}} \text{ м} = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda_B = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Пример 3.11. Найти численное значение кинетической, потенциальной и полной энергии электрона на первой боровской орбите.

Дано:

$$m_e = m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$n = 1$$

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$$

$$E - ?, \quad E_k - ?, \quad E_{\Pi} - ?$$

Решение. По теории Бора внутренняя (полная) энергия атома водорода складывается из кинетической энергии электрона и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром:

$$E = E_k + E_{\Pi} = \frac{mv^2}{2} - \frac{ke^2}{r}. \quad (1)$$

Уравнение движения электрона по орбите вокруг ядра имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2}. \quad (2)$$

Из (2) $\frac{mv^2}{2} = \frac{ke^2}{2r}$, тогда

$$E = \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r}. \quad (3)$$

Момент импульса электрона удовлетворяет квантовому постулату Бора:

$$mvr = n\hbar. \quad (4)$$

Из (4) $v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2}$, подставим это выражение в (2), получим $\frac{n^2\hbar^2}{mr} = ke^2$,

откуда

$$\frac{1}{r} = \frac{ke^2m}{n^2\hbar^2}. \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), получим полную энергию электрона

$$E = -\frac{k^2e^4m}{2n^2\hbar^2}. \quad (6)$$

Тогда согласно (2) кинетическая энергия электрона

$$E_{\text{к}} = \frac{ke^2}{2r} = \frac{k^2e^4m}{2n^2\hbar^2} = -E \quad (7)$$

и потенциальная энергия электрона

$$E_{\text{п}} = -\frac{ke^2}{r} = -\frac{k^2e^4m}{n^2\hbar^2} = -2E_{\text{к}}. \quad (8)$$

Произведем вычисления:

$$E = -\frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot (9 \cdot 10^9)^2}{2 \cdot 1 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2} \text{ эВ} = -13,6 \text{ эВ}.$$

Из (7) $E_{\text{к}} = -E = 13,6 \text{ эВ}$.

Из (8) $E_{\text{п}} = -2E_{\text{к}} = -27,2 \text{ эВ}$.

Ответ: $E = -13,6 \text{ эВ}$; $E_{\text{к}} = 13,6 \text{ эВ}$; $E_{\text{п}} = -27,2 \text{ эВ}$.

Пример 3.12. Частица в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L находится на втором энергетическом уровне. Найти вероятность нахождения частицы в интервале $L/2 < x < 2L/3$.

Дано:

L

$n = 2$

$W = ?$

Решение. Вероятность нахождения частицы в любой момент времени t в интервале dx равна

$$dW = |\psi(x)|^2 dx.$$

Для нашей задачи

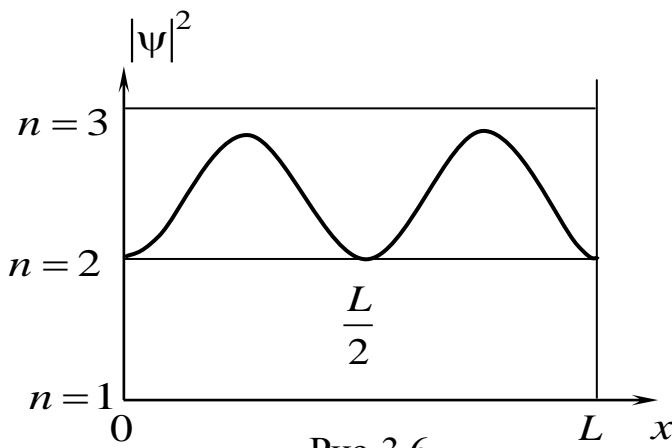


Рис. 3.6

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}.$$

Вероятность нахождения частицы в интервале $\frac{L}{2} < x < \frac{2L}{3}$ равна

$$W = \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{2L}{3}} \left| \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L} \right|^2 dx =$$

$$= \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{2L}{3}} \left(\frac{1 - \cos \frac{2 \cdot 2\pi x}{L}}{2} \right) dx = \frac{2}{L} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{2L}{3}} dx - \frac{1}{L} \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{2L}{3}} \cos \frac{4\pi x}{L} dx =$$

$$= \frac{1}{L} \left(\frac{2L}{3} - \frac{L}{2} \right) - \frac{1}{L} \cdot \frac{L}{4\pi} \sin \frac{4\pi x}{L} \Big|_{\frac{L}{2}}^{\frac{2L}{3}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi} \left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi} (\sin 480^\circ - \sin 360^\circ) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi} (\sin 60^\circ - \sin 0^\circ) =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8\pi} = 0,098 \approx 0,1.$$

Ответ: $W = 0,1$ (10 %).

Пример 3.13. Сколько β -частиц испускает за 1 ч 1 мкг ${}_{11}^{24}\text{Na}$, период полураспада которого $T_{Na} = 1$ ч.

Дано:

$$t = 1 \text{ час} = 3600 \text{ с}$$

$$T_{Na} = 15 \text{ ч} = 54 \cdot 10^3 \text{ с}$$

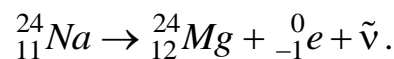
$$m = 10^{-9} \text{ кг}$$

$$M_{Na} = 24 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

$$\Delta N = ?$$

Решение. Нестабильное ядро ${}_{11}^{24}\text{Na}$ распадается с испусканием β -частицы по схеме



Количество испускаемых β -частиц равно числу распавшихся ядер ${}_{11}^{24}\text{Na}$ в результате радиоактивного превращения.

$\Delta N = N_0 - N$ – число распавшихся ядер за время t (или число n испущенных β -частиц); N_0 – первоначальное число ядер; N – число нераспавшихся ядер к моменту времени t .

По закону радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

где λ – постоянная радиоактивного распада.

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}). \quad (2)$$

Чтобы найти N_0 воспользуемся соотношением $N_0 = \frac{m}{M} N_A$, где m – масса вещества; M – молярная масса Na ; N_A – число Авогадро.

Тогда

$$N_0 = \frac{10^{-9} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{24 \cdot 10^{-3}} = 25 \cdot 10^{15}. \quad (3)$$

Постоянная радиоактивного распада λ связана с периодом полураспада T соотношением $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, тогда λt можно представить как

$$\lambda t = \frac{\ln 2}{T} t = \frac{0,693 \cdot 3,6 \cdot 10^3}{54 \cdot 10^3} = 0,046. \quad (4)$$

С учетом (3) и (4) формула (2) примет вид

$$\Delta N = N_0 (1 - e^{-0,046}). \quad (5)$$

Произведем вычисления:

$$\Delta N = 25 \cdot 10^{15} \left(1 - \frac{1}{e^{0,046}} \right) = 25 \cdot 10^{15} \cdot 49 = 1,2 \cdot 10^{18}.$$

Ответ: $\Delta N = 1,2 \cdot 10^{18}$.

3.4. Контрольная работа №3

Таблица 3.1

Варианты	Номера задач							
1	1	11	21	31	41	51	61	71
2	2	12	22	32	42	52	62	72
3	3	13	23	33	43	53	63	73
4	4	14	24	34	44	54	64	74
5	5	15	25	35	45	55	65	75
6	6	16	26	36	46	56	66	76
7	7	17	27	37	47	57	67	77
8	8	18	28	38	48	58	68	78
9	9	19	29	39	49	59	69	79
0	10	20	30	40	50	60	70	80

1. Расстояние от щелей до экрана в опыте Юнга равно $L = 1,5$ м. Определить расстояние между щелями, если на отрезке длиной $l = 1$ см укладывается $N = 10$ темных интерференционных полос. Длина волны $\lambda = 0,68$ мкм.

2. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если фиолетовый светофильтр ($\lambda = 4,2 \cdot 10^{-7}$ м) заменить на красный ($\lambda = 6,5 \cdot 10^{-7}$ м)?

3. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, расстояние между отверстиями 1 мм и расстояние от отверстия до экрана 2,5 м. Найти положение первых трех светлых полос.

4. На мыльную пленку падает белый свет под углом 30° . При какой наименьшей толщине пленки отраженные лучи будут окрашены в зеленый свет ($\lambda = 5,2 \cdot 10^{-7}$ м)? Показатель преломления мыльной пленки $n = 1,33$.

5. На стеклянный клин падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7}$ м. Угол между гранями клина равен $30''$. Какое число темных интерференционных полос наблюдается на отрезке клина длиной $l = 1$ см? Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

6. Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,65$ мкм падает нормально на стеклянный клин. В отраженном свете расстояние между соседними интерференционными максимумами на поверхности клина 0,2 мм. Определить угол α между гранями клина. Показатель преломления стекла $n = 1,5$.

7. В установке для наблюдения колец Ньютона поверхность линзы освещается нормально падающим монохроматическим светом. В проходящем свете радиусы соседних темных колец равны соответственно 3,5 и 4,0 мм. Радиус кривизны линзы равен 7 м. Найти порядковые номера колец и длину волны падающего света.

8. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается нормально падающим белым светом. Найти радиус третьего синего кольца ($\lambda_1 = 4,3 \cdot 10^{-7}$ м) и радиус четвертого красного кольца ($\lambda_2 = 6,5 \cdot 10^{-7}$ м) в проходящем свете. Радиус кривизны линзы равен 5 м.

9. Расстояние между пятым и пятнадцатым светлыми кольцами Ньютона в отраженном свете равно 4 мм. Радиус кривизны линзы 10 м. Найти длину волны монохроматического света, падающего нормально на установку.

10. В установке для наблюдения колец Ньютона поверхность линзы освещается нормально падающим монохроматическим светом. После того как пространство между линзой и стеклянной пластиной заполнили жидкостью, радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,5 раза. Найти показатель преломления жидкости.

11. На диафрагму с круглым отверстием падает сферическая волна ($\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м). Расстояние от источника света до диафрагмы составляет 1,5 м и равно расстоянию от диафрагмы до экрана. При каком минимальном радиусе отверстия в центре дифракционной картины на экране будет наблюдаться темное пятно?

12. Вычислить радиусы первой, третьей и пятой зон Френеля, если расстояние от источника до диафрагмы с круглым отверстием равно 1 м, что составляет 0,75 расстояния от отверстия до экрана. Длина волны падающего света $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7}$ м.

13. Сферическая волна ($\lambda_2 = 6,5 \cdot 10^{-7}$ м) падает на диафрагму с круглым отверстием. Диаметр отверстия 5 мм. Расстояние между источниками света и диафрагмой, диафрагмой и экраном одинаковые и равны 2 м. Сколько зон Френеля укладывается в отверстие диафрагмы? Изменится ли число зон Френеля, если оба расстояния увеличить в 2 раза?

14. На диафрагму с узкой щелью падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ . Ширина щели равна 5λ . Под какими углами будут наблюдаться первых три дифракционных максимума света на экране?

15. На диафрагму с узкой щелью шириной $2 \cdot 10^{-5}$ м падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 680$ нм. Найти угловую ширину главного дифракционного максимума.

16. На дифракционную решетку падает нормально параллельный пучок белого света. Синяя линия ($\lambda = 4,47 \cdot 10^{-7}$ м) видна в спектре четвертого порядка под углом 20° . Какая линия видна в спектре третьего порядка под этим углом?

17. На дифракционную решетку падает нормально параллельный пучок монохроматического света. Постоянная дифракционной решетки в 5 раз больше длины световой волны. Найти число m дифракционных максимумов, которые можно наблюдать с помощью этой решетки.

18. На дифракционную решетку, содержащую $n = 100$ штрихов на 1 мм, падает нормально монохроматический свет. Угловое расстояние между максимумами второго порядка равно 12° . Найти длину волны падающего света.

19. Чему равна постоянная дифракционной решетки, если число m дифракционных максимумов, которые может дать эта решетка, равно 9, а длина волны монохроматического света, падающего на решетку, равна 0,6 мкм.

20. Найти наибольший порядок спектра для красной линии гелия ($\lambda = 680$ нм), если решетка имеет 100 штрихов на 1 мм.

21. Узкий пучок света переходит из жидкости в стекло. Угол падения света на стекло 50° , угол преломления 35° . При каком угле падения пучок света, отраженный от границы раздела этих сред, будет максимально поляризован?

22. Пучок света падает на стеклянную пластину, погруженную в жидкость. Угол между отраженным и падающим пучком составляет 92° . Отраженный пучок света максимально поляризован. Определить показатель преломления жидкости.

23. Пучок света переходит из глицерина в стекло. Определить угол Брюстера для этих сред.

24. Пучок света падает на некоторое вещество из воздуха. Предельный угол полного внутреннего отражения света от этого вещества равен 48° . Чему равен угол Брюстера?

25. Пучок света падает на стеклянную пластину, нижняя поверхность которой находится в воде. При каком угле падения на границу раздела стекло – вода отраженный луч будет максимально поляризован?

26. Естественный свет падает на систему из двух поляризаторов, плоскости пропускания которых образуют между собой угол 50° . Коэффициент поглощения τ каждого поляризатора равен 20 %. Во сколько раз интенсивность света, вышедшего из второго поляризатора, меньше интенсивности падающего на систему света?

27. Естественный свет, проходя через систему из двух одинаковых поляризаторов, ослабляется в 4 раза. Коэффициент пропускания поляризаторов $k = 0,8$. Найти угол между плоскостями пропускания поляризаторов.

28. Естественный свет, проходя через систему из двух одинаковых поляризаторов, ослабляется в 5 раз. Угол между плоскостями пропускания поляризаторов составляет 30° . Определить коэффициент поглощения поляризаторов τ .

29. Естественный свет падает на систему из трех последовательно расположенных одинаковых поляризаторов, причем плоскость пропускания среднего поляризатора составляет угол 60° с плоскостями пропускания двух других поляризаторов. Коэффициент пропускания каждого поляризатора $k = 0,81$. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы?

30. Чему должен быть равен угол между плоскостями пропускания первого и второго поляризаторов, чтобы интенсивность света, вышедшего из второго поляризатора, оказалась в 4 раза меньше интенсивности естественного света? Потерями на поглощение света пренебречь.

31. Мощность электромагнитного излучения абсолютно черного тела равна 50 кВт, площадь его поверхности $S = 5 \text{ см}^2$. Чему равна температура этого тела?

32. Длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности Солнца, $\lambda_m = 0,48 \text{ мкм}$. Диаметр Солнца $D_C = 1,4 \cdot 10^9 \text{ м}$. Какую энергию излучает Солнце за счет теплового излучения за $t = 100 \text{ лет}$? Солнце считать абсолютно черным телом.

33. Длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности Солнца, $\lambda_m = 0,48 \text{ мкм}$. Радиус Солнца $7 \cdot 10^8 \text{ м}$. Найти изменение массы Солнца Δm за счет теплового излучения за $t = 10 \text{ лет}$. Солнце считать абсолютно черным телом.

34. Мощность электромагнитного излучения тела равна 20 кВт. Найти площадь излучающей поверхности тела, если известно, что длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности этого тела, равна $6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$. Тело считать абсолютно черным.

35. С раскаленного металлического тела площадью поверхности 20 см^2 излучается в одну минуту электромагнитная энергия равная $9 \cdot 10^4 \text{ Дж}$. Считая поверхность абсолютно черной, найти температуру этого тела.

36. При нагревании абсолютно черного тела длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности, изменилась от 0,6 до 0,45 мкм. Во сколько раз увеличилась при этом энергетическая светимость тела?

37. Абсолютно черное тело находится при температуре $T_1 = 3000 \text{ К}$. В результате остывания этого тела длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности, изменилась на $\Delta\lambda = 10 \text{ мкм}$. До какой температуры T_2 охладилось тело?

38. Считая Солнце абсолютно черным телом, найти массу, теряемую Солнцем за счет теплового излучения за год. Температуру поверхности Солнца принять равной 5800 К. За какое время масса Солнца уменьшится на 10 % за счет этого излучения?

39. Температура абсолютно черного тела изменилась при нагревании от 500 до 2500 К. Во сколько раз увеличилась при этом его энергетическая светимость. На сколько изменилась при этом длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности этого тела?

40. Считая Солнце абсолютно черным телом, найти количество энергии, которое оно излучает за 1 мин. Температуру поверхности Солнца принять равной 5800 К.

41. Красная граница фотоэффекта для металла $\lambda_0 = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ см}$. Найти величину задерживающего напряжения U_3 для фотоэлектронов при освещении металла светом с длиной волны $\lambda = 330 \text{ нм}$.

42. На вольфрамовый катод фотоэлемента падают ультрафиолетовые лучи с длиной волны $\lambda = 0,1 \text{ мкм}$. При каком задерживающем напряжении между

катодом и анодом фотоэлемента фототок в цепи равен нулю? Работа выхода электронов из вольфрама $A = 4,5$ эВ.

43. Определить постоянную Планка h , если известно, что фотоэлектроны, выбиваемые светом с поверхности некоторого металла, полностью задерживаются задерживающим напряжением $U_{з1} = 0,5$ В при частоте света $\nu_1 = 0,4 \cdot 10^{15}$ Гц, а когда частота света $\nu_2 = 0,76 \cdot 10^{15}$ Гц, то задерживающее напряжение равно $U_{з2} = 2$ В.

44. Какую длину волны λ имеют световые волны, падающие на поверхность цезия, если фотоэлектроны, вылетающие из цезия, имеют скорость $v = 2 \cdot 10^6$ м/с? Красная граница фотоэффекта для цезия $\lambda_0 = 690$ нм.

45. Построить график зависимости скорости фотоэлектронов v от длины волны λ , падающей на металл, если работа выхода электронов из этого металла $A = 2,35$ эВ. Из графика найти красную границу фотоэффекта λ_0 для этого металла.

46. При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длинами волн $\lambda_1 = 0,35$ мкм и $\lambda_2 = 0,54$ мкм обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в 2 раза. Найти работу выхода с поверхности этого металла.

47. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 275 нм. Чему равно минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект?

48. При фотоэффекте с платиновой поверхности величина задерживающего напряжения равна 0,8 В. Найти длину волны падающего света, а также максимальную длину волны, при которой еще возможен фотоэффект. Работа выхода электронов из платины $A = 5,29$ эВ.

49. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 275 нм. Найти: 1) работу выхода электронов из этого металла; 2) максимальную скорость электронов, вырываемых с поверхности этого металла светом с длиной волны 180 нм; 3) максимальную кинетическую энергию этих электронов.

50. Какая доля энергии фотона израсходована на работу выхода фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 330$ нм, максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона равна 2,4 эВ?

51. Вычислить дебройлевские длины волн электрона и протона, имеющих кинетическую энергию 100 эВ.

52. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 до 50 пм?

53. Показать, что для частицы, неопределенность местоположения которой $\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi}$, где λ – ее дебройлевская длина волны, неопределенность скорости равна по порядку величины самой скорости частицы.

54. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером $l = 0,20$ нм.

55. Электрон с кинетической энергией $T \approx 4$ эВ локализован в области размером $l = 1$ мкм. Оценить с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность его скорости.

56. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину L одномерной прямоугольной потенциальной ямы, в которой минимальная энергия электрона $E_{\min} = 10$ эВ.

57. Альфа-частица находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину L ямы, если известно, что минимальная энергия α -частицы $E_{\min} = 8$ МэВ.

58. Найти наименьшую и наибольшую длины волн спектральных линий атома водорода в видимой области спектра (серия Бальмера).

59. Найти период обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода и его угловую скорость.

60. Найти полную энергию E и скорость электрона на первой боровской орбите в атоме водорода.

61. Частица в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Найти вероятность нахождения частицы в области $\frac{2L}{3} < x < L$.

62. Частица в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L находится в основном состоянии. Найти вероятность нахождения частицы в области $\frac{L}{4} < x < \frac{L}{2}$.

63. Частица в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L находится в возбужденном состоянии ($n = 3$). Найти вероятность нахождения частицы в области $0 < x < \frac{L}{2}$.

64. Частица в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L находится в основном состоянии. Во сколько раз отличаются вероятности нахождения частицы в первой трети и в первой четверти ямы?

65. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L . В каких точках ямы плотности вероятности нахождения частицы на первом и втором энергетических уровнях одинаковы? Вычислить плотности вероятности нахождения частицы в этих точках.

66. Частица в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L находится в возбужденном состоянии ($n = 4$). Определить, в каких точках интервала плотность вероятности нахождения частицы имеет максимальное и минимальное значение.

67. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L . В каких точках ямы плотности вероятности нахождения частицы на втором и третьем энергетическом уровнях одинаковы? Вычислить плотности вероятности в этих точках.

68. Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L . Найти число уровней на единичный интервал энергий в зависимости от E . Вычислить $\frac{dn}{dE}$ для энергии $E = 1$ эВ при $L = 1$ см.

69. Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме. Найти ширину ямы, если разность энергий между уровнями электрона $n = 2$ и $n = 3$ составляет $\Delta E = 0,3$ эВ.

70. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной L в возбужденном состоянии ($n = 4$). Найти вероятность нахождения частицы в области $\frac{L}{2} < x < \frac{2L}{3}$.

71. Активность радиоизотопа уменьшается в 2,5 раза за 7 суток. Найти его период полураспада.

72. Найти постоянную распада и среднее время жизни радиоактивного изотопа, если его активность уменьшается на 4 % за час.

73. Сколько процентов радиоактивных ядер кобальта останется через $t = 1$ месяц, если период полураспада кобальта $T = 5,2$ года?

74. На сколько процентов уменьшится активность изотопа иридия за время $t = 20$ суток? Период полураспада иридия $T = 75$ суток.

75. Определить число ядер, распадающихся в течение времени: 1) $t_1 = 2$ мин; 2) $t_2 = 10$ суток в радиоактивном изотопе фосфора массой $m = 1$ мг. Период полураспада фосфора $T = 14,3$ суток.

76. Во сколько раз уменьшится активность изотопа фосфора через $t = 15$ суток? Период полураспада фосфора $T = 14,3$ суток.

77. Активность радиоактивного вещества уменьшается в 4 раза за $t = 8$ суток. Найти период полураспада этого вещества.

78. Какая доля радиоактивных ядер некоторого химического элемента распадается за время t , равное половине периода полураспада этого элемента?

79. Из каждого миллиона изотопов некоторого радиоактивного вещества каждую секунду распадается 200 изотопов. Определить период полураспада этого изотопа.

80. Сколько атомов радиоактивного радона распадается за сутки из 1 миллиона атомов? Период полураспада радона $T = 3,82$ суток.

Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81 м/с ²
Гравитационная постоянная	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ м ³ /(кг·с ²)
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Универсальная газовая постоянная	R	8,3 Дж/(К·моль)
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Элементарный заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	m_e	$9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Стефана – Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)
Постоянная Вина	b	$2,90 \cdot 10^{-3}$ м·К
Постоянная Планка	h	$6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
	\hbar	$1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Скорость света в вакууме	c	$3 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Ридберга	R	$1,10 \cdot 10^7$ м ⁻¹
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2,18 \cdot 10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Масса Солнца	M	$1,99 \cdot 10^{30}$ кг
Масса α -частицы	m_α	$6,64 \cdot 10^{-27}$ кг
Молярная масса фосфора	M_p	$30,1 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Литература

1. Савельев, И. В. Курс физики Т. 1–3 / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989.
2. Курс общей физики Т. 1–3 / А. А. Детлаф [и др.]. – М. : Высш. шк., 1989.
3. Трофимова, Т. Н. Курс физики / Т. Н. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1985.
4. Горячун, Н. В. Курс лекций по физике / Н. В. Горячун. – Минск : БГУИР, 2007.
5. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. – М. : Наука, 1988.
6. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1979.
7. Общая физика в задачах и решениях / В. И. Мурзов [и др.]. – Минск : Высш. шк., 1986.
8. Задания к практическим занятиям / И. И. Рубан [и др.]. – Минск : Высш. шк., 1989.
9. Физика : методические указания и контрольные задания / В. П. Воробьев [и др.]. – М. : Высш. шк., 1987.

Учебное издание

Горячун Наталья Владимировна

ФИЗИКА

Методическое пособие
к выполнению контрольных работ
для студентов специальности
«Экономика и организация производства»
заочной формы обучения

Редактор Н. В. Гриневич
Корректор Е. Н. Батурчик
Компьютерная верстка Ю. Ч. Ключкевич

Подписано в печать 15.09.2011.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Отпечатано на ризографе.	Усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 6,0.	Тираж 100 экз.	Заказ 175.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6