Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра физики

# *РАВНОВЕСНОЕ ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ФОРМУЛА ПЛАНКА. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА «MathCAD»*

Методическое пособие по выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Физика»



Минск БГУИР 2011

УДК 535.233(076)
ББК 22.34я73
Р13

Авторы:
В. В. Аксенов, О. И. Величко, И. Л. Дорошевич, Н. Т. Квасов

Рецензент:
заведующий кафедрой химии учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»,
доктор химических наук И. В. Боднарь

Р13 **Равновесное** тепловое излучение. Формула Планка. Использование пакета «MathCAD» : метод. пособие по выполнению лаб. работы по дисц. «Физика» / В. В. Аксенов [и др.]. – Минск : БГУИР, 2011. – 19 с.
ISBN 978-985-488-737-1.

Предназначено для организации самостоятельной работы студентов всех специальностей и форм обучения БГУИР на лабораторном занятии по теме «Равновесное тепловое излучение». В пособии приводится цель, теоретическое обоснование и порядок выполнения лабораторной работы.

**УДК 535.233(076)**
**ББК 22.34я73**

**ISBN 978-985-488-737-1**

## ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Изучить основные законы равновесного теплового излучения.
2. Исследовать формулу Планка для объемной плотности энергии равновесного теплового излучения, построить графики зависимости $u(\lambda, T)$ и $u(\nu, T)$ для различных температур и проверить справедливость закона смещения Вина с использованием пакета «MathCad».
3. Проверить справедливость закона Стефана – Больцмана и вычислить постоянную Стефана – Больцмана с помощью пакета «MathCad».

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАБОТЫ

### *Основные понятия и величины*

Классическая электромагнитная теория света, объясняющая широкий круг явлений с распространением света, получившая всеобщее признание в конце XIX в. – начале XX в., столкнулась с непреодолимыми трудностями в связи с вопросом об излучении света и, в частности, с вопросом о тепловом излучении.

*Тепловым излучением* называют электромагнитное излучение, испускаемое телами за счет убыли их внутренней энергии. Это излучение занимает особое место среди всех других видов излучения. В отличие от них тепловое излучение – единственный вид излучения, который может быть равновесным.

*Равновесным* называется тепловое излучение тел, находящихся в термодинамическом равновесии со своим излучением, т. е. когда распределение энергии между телом и излучением является постоянным для каждой частоты (длины) электромагнитной волны. Представим себе некоторую замкнутую полость со стенками, не проводящими тепла, температура $T$ которых поддерживается постоянной. Стенки полости будут одновременно и излучать, и поглощать электромагнитные волны. Так как все излучение заключено в замкнутую полость, то через некоторое время в системе установится состояние динамического равновесия: стенки полости в единицу времени будут поглощать столько же энергии электромагнитных волн с частотами от $\nu$ до $\nu + d\nu$, сколько они излучают энергии, приходящейся на тот же самый диапазон частот. В полости установится система электромагнитных стоячих волн.

Тепловое излучение имеет непрерывный (сплошной) спектр, в котором распределение энергии электромагнитного излучения характеризуется непрерывной функцией частоты. Распределение объемной плотности энергии по частотам $\nu$ характеризуется ее *спектральной плотностью* $u_\nu$, определяемой как

$$u_\nu = \frac{dw}{d\nu}, \quad (1)$$

где $dw$ – объемная плотность энергии излучения, приходящейся на диапазон частот от $\nu$ до $\nu + d\nu$. В СИ $[u_\nu]$ = Дж·с/м$^3$.

В экспериментальной физике отдают предпочтение зависимости спектральной плотности не от частоты $\nu$, а от длины волны $\lambda$ электромагнитного излучения, которая определяется аналогично (1):

$$u_\lambda = \frac{dw}{d\lambda}. \qquad (2)$$

В СИ $[u_\lambda]$ = Дж /м$^4$.

Если интервалы $d\nu$ и $d\lambda$ в (1) и (2) представляют один и тот же диапазон электромагнитного излучения, то $u_\nu d\nu = u_\lambda d\lambda$. Учитывая, что $\nu = \frac{c}{\lambda}$ (где $c$ – скорость света в вакууме), тогда $d\nu = \frac{c\,|d\lambda|}{\lambda^2}$. Следовательно, связь между $u_\nu$ и $u_\lambda$ имеет вид

$$u_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} u_\nu. \qquad (3)$$

Основной количественной характеристикой теплового излучения тела является его энергетическая светимость. *Энергетическая светимость R тела* (*интегральная излучательная способность тела*) – это поток энергии электромагнитных волн всех частот, испускаемый единицей поверхности излучающего тела по всем направлениям:

$$R = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dW}{dS\,dt}. \qquad (4)$$

В СИ $[R]$ = Вт/м$^2$.

Энергетическая светимость $dR$, приходящаяся на узкий диапазон частот от $\nu$ до $\nu + d\nu$ или длин волн от $\lambda$ до $\lambda + d\lambda$, прямо пропорциональна ширине этого диапазона:

$$dR = r_{\nu,T} \cdot d\nu \text{ или } dR = r_{\lambda,T} \cdot d\lambda,$$

где коэффициенты $r_{\nu,T}$ и $r_{\lambda,T}$ называются *излучательной способностью тела*. В СИ $[r_{\nu,T}]$ = Дж/м$^2$, $[r_{\lambda,T}]$ = Вт/м$^3$. Излучательная способность тела зависит от частоты (длины волны) излучения, температуры этого тела, его химического состава и состояния излучающей поверхности.

Энергетическая светимость тела (интегральная излучательная способность) может быть представлена как

$$R = \int_0^\infty r_{\nu,T} d\nu = \int_0^\infty r_{\lambda,T} d\lambda. \qquad (5)$$

В общем случае падающее на тело электромагнитное излучение частично поглощается этим телом и частично отражается от него. *Поглощательная способность тела* $a_{\nu,T}$ показывает, какая доля падающей на него энергии электромагнитных волн $dW^{\text{пад}}$ с частотами от $\nu$ до $\nu + d\nu$ поглощается этим телом:

$$a_{\nu,T} = \frac{dW^{\text{погл}}}{dW^{\text{пад}}}, \tag{6}$$

где $dW^{\text{погл}}$ – поглощаемая той же поверхностью тела энергия, приходящаяся на тот же диапазон частот за одинаковый промежуток времени.

Поглощательная способность тела $a_{\nu,T}$ зависит от частоты излучения, температуры этого тела, его химического состава и состояния поверхности.

*Абсолютно черным телом* называется тело, которое полностью поглощает все падающее на него излучение. Его поглощательная способность $a^*_{\nu,T}$ равна

$$a^*_{\nu,T} \equiv 1. \tag{7}$$

Абсолютно черных тел в природе не существует. Однако замкнутая полость с малым отверстием, температура стенок которой поддерживается постоянной, очень близка по своим свойствам к абсолютно черному телу.

***Законы равновесного теплового излучения***

В случае равновесного излучения спектральная плотность $u_\nu$ (или $u_\lambda$) не зависит от природы излучателя, а представляет собой универсальную функцию только частоты $\nu$ (или длины волны $\lambda$) и температуры *T* излучающего тела (излучающих стенок полости), т. е. $u_\nu = u(\nu, T)$ (или $u_\lambda = u(\lambda, T)$). Данный вывод можно сделать из следующего термодинамического анализа.

Рассмотрим две полости, стенки которых нагреты до одинаковой температуры *T*, но сделаны из разных материалов. Предположим, что спектральная плотность энергии излучения зависит от природы излучателя и различна в обеих полостях. Тогда при соединении полостей равновесие нарушится, и излучение будет переходить в ту полость, в которой его спектральная плотность меньше. В результате этого плотность излучения в этой полости вырастет, стенки полости будут поглощать больше энергии, а их температура повысится. Между стенками обеих полостей возникнет разность температур, которая может быть использована для получения полезной работы.

Таким образом, сделанное предположение приводит к выводу о возможности построения вечного двигателя 2-го рода, что, как известно, невозможно. Изучение излучательных и поглощательных свойств тел привело Г. Р. Кирхгофа (1859 г.) к установлению важного закона (теоремы).

*Закон (теорема) Кирхгофа*: отношение излучательной способности $r_{\nu,T}$ тела к его поглощательной способности $a_{\nu,T}$ не зависит от природы тела, формы и свойств его поверхности, а является одинаковой для всех тел (т. е. *универсальной*) функцией частоты $\nu$ и температуры *T*:

$$\frac{r_{\nu,T}}{a_{\nu,T}} = f(\nu, T), \tag{8}$$

где $f(\nu, T)$ – универсальная функция Кирхгофа.

Закон Кирхгофа отражает тот факт, что в случае равновесного излучения, чем сильнее тело поглощает излучение какой-либо частоты, тем интенсивней оно испускает данное излучение.

Универсальные функции Кирхгофа частоты $f(\nu, T)$ и длины волны $\varphi(\lambda, T)$ связаны друг с другом выражением, аналогичным (3):

$$\varphi\,(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} \cdot f(\nu, T)\,. \tag{9}$$

Универсальная функция $f(\nu, T)$ связана со спектральной плотностью $u(\nu, T)$ энергии равновесного излучения соотношением

$$f(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T)\,. \tag{10}$$

Особый случай представляет собой изучение абсолютно черного тела. Так как его поглощательная способность $a^*_{\nu,T} \equiv 1$, то из (8) следует, что излучательная способность $r^*_{\nu,T}$ абсолютно черного тела и есть универсальная функция Кирхгофа:

$$r^*_{\nu,T} = f(\nu, T)\,,$$

а с учетом (10)

$$r^*_{\nu,T} = f(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T)\,. \tag{11}$$

Рассуждая аналогично, можно получить

$$r^*_{\lambda,T} = \varphi\,(\lambda, T) = \frac{c}{4} u(\lambda, T)\,. \tag{12}$$

При данной температуре излучательная способность $r^*_{\nu,T}$ абсолютно черного тела максимальна по сравнению с другими телами. Измеряя ее, можно экспериментально определить вид функции $f(\nu, T)$ или $\varphi\,(\lambda, T)$.

Результаты таких опытов приведены на рис. 1. Разные кривые $\varphi\,(\lambda, T)$ соот-

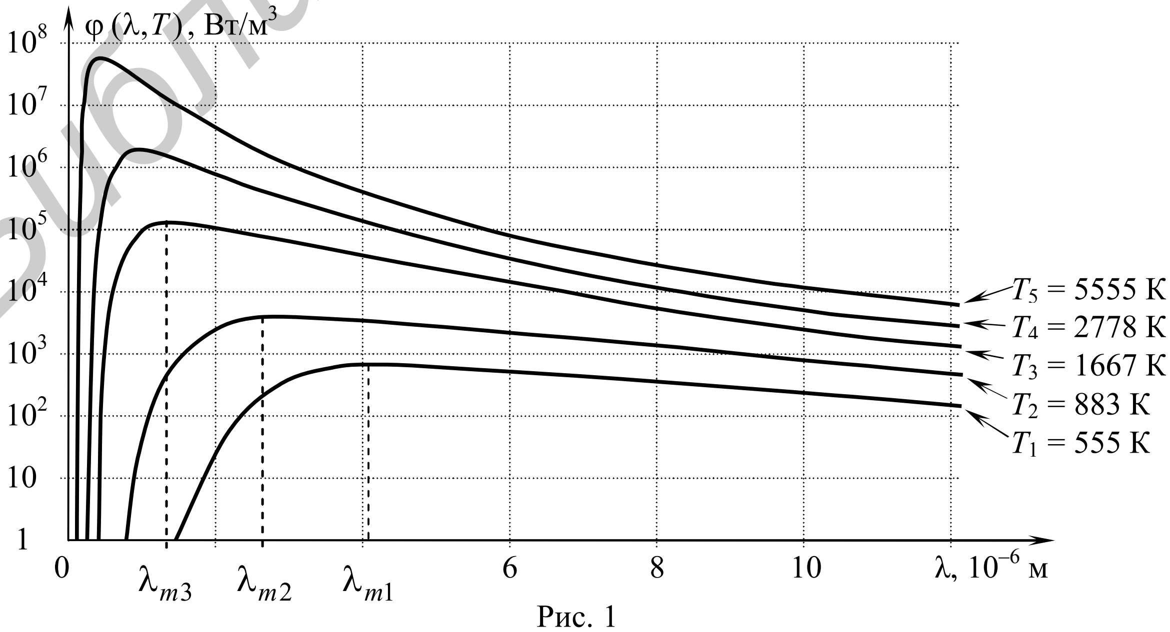


Рис. 1

ветствуют различным фиксированным температурам. Все кривые обнаруживают характерное поведение: при малых длинах волн функция $\varphi(\lambda, T)$ (а также и спектральная плотность энергии излучения $u(\nu,T)$) увеличивается с ростом $\lambda$, затем проходит через максимум (при $\lambda_m$) и после этого стремится к нулю. Положение максимума сдвигается в сторону коротких длин волн по мере повышения температуры *T*.

Нахождение вида функции $u(\nu,T)$ стало основной проблемой теории теплового излучения в конце XIX в. – начале XX в.

На основе классических представлений термодинамики и электромагнитной теории света были получены следующие законы теплового излучения.

*Закон Стефана – Больцмана* (1879 г., 1884 г.): энергетическая светимость $R^*$ абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры:

$$R^* = \sigma T^4, \tag{13}$$

где σ – постоянная Стефана – Больцмана, экспериментальное значение которой равно σ = $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2$К$^4$).

В 1893 г. В. Вин показал, что функция спектральной плотности энергии излучения должна иметь вид

$$u(\nu,T) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right), \tag{14}$$

где $F\left(\frac{\nu}{T}\right)$ – функция, зависящая только от отношения частоты к температуре, конкретный вид которой нельзя установить термодинамическими методами.

Из закона (14) можно получить связь между длиной волны $\lambda_m$, на которую приходится максимум спектральной плотности энергии излучения, и температурой *T* (см. рис. 1), которая носит название закон смещения Вина.

*Закон смещения Вина* (1893 г.): при повышении температуры *T* абсолютно черного тела максимум его излучательной способности (спектральной плотности энергии излучения) смещается в сторону коротких длин волн так, что выполняется соотношение

$$\lambda_m \cdot T = b = \text{const}, \tag{15}$$

где $\lambda_m$ – длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности; *b* – постоянная Вина. Экспериментальное значение постоянной Вина равно $b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}$ м·К.

Отметим, что из закона Вина (14) можно получить закон Стефана – Больцмана. Для этого на основе (5) надо проинтегрировать (14) с учетом (11) по всему спектру:

$$R^* = \int_0^\infty r\ (\nu,T)d\nu = \int_0^\infty \frac{c}{4} \cdot u(\nu,T)d\nu = \int_0^\infty \frac{c}{4} \cdot \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)d\nu.$$

Сделав замену переменных $\nu = xT$, $d\nu = T\,dx$, при постоянной $T$ получим

$$R^* = T^4 \frac{c}{4} \int_0^\infty x^3 F(x) dx = \sigma T^4,$$

где интеграл равен некоторому числу.

В 1896 г. В. Вин на основе некоторых произвольных допущений уточняет вид функции (14) и получает следующую формулу нормального распределения для спектральной плотности энергии излучения

$$u(\nu, T) = B\nu^3 e^{-\frac{a\nu}{T}}, \tag{16}$$

где $B$ и $a$ – некоторые постоянные.

Экспериментальная проверка формулы Вина (16), предпринятая О. Люммером и Э. Прингсхеймом, показала: в области больших частот (символически эту область обозначим $\nu >> 1$) формула (16) прекрасно согласуется с экспериментальными данными; однако в области малых частот ($\nu << 1$) эта формула дает совершенно неверные результаты. Отметим, что несколько позднее аналогичное выражение было получено М. Планком.

Общий метод теоретического определения функции $u(\nu, T)$ в рамках классической физики был указан Дж. В. Рэлеем в 1900 г. и через пять лет более подробно развит Дж. Х. Джинсом. Рассматривая равновесное излучение в замкнутой полости с идеально отражающими стенками как совокупность пространственных стоячих электромагнитных волн и применив закон классической статической физики о равном распределении средней энергии по степеням свободы равновесной системы, Дж. В. Рэлей и Дж. Х. Джинс получили

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\varepsilon} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT, \tag{17}$$

где $\bar{\varepsilon} = kT$ – средняя энергия, приходящаяся на каждую стоячую электромагнитную волну в равновесном состоянии; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Выражение (17) называется *формулой Рэлея – Джинса*.

Формулу Рэлея– Джинса также можно получить на основе термодинамического подхода. Поскольку функция $u(\nu, T)$ не зависит от природы излучателя, то в качестве простейшей модели излучающего тела М. Планк выбрал линейный гармонический осциллятор с собственной частотой $\nu$. Исходя из того что в состоянии термодинамического равновесия энергия, излучаемая за 1 с осциллятором (энергия излучения колеблющегося диполя), должна быть равна поглощаемой энергии падающего излучения (работе, произведенной над осциллятором полем излучения) за то же время, Планк показал (1899 г.), что

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\varepsilon}, \tag{18}$$

где $\bar{\varepsilon}$ – энергия осциллятора, усредненная по некоторому промежутку времени, который велик по сравнению с периодом излучения, но все же настолько мал, что излучением за это время можно пренебречь.

По статистике Больцмана, при равновесии состояние осциллятора, характеризуемое энергией $\varepsilon$, встречается с относительной вероятностью $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$. Тогда средняя энергия $\overline{\varepsilon}$ осциллятора находится в результате усреднения по всем состояниям:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\int\limits_0^\infty \varepsilon \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon}{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)}\left[\ln\left(\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon\right)\right] = -\frac{d}{d\left(\frac{1}{kT}\right)}\left[\ln(kT)\right] = kT.$$

При подстановке полученного выражения в (18) и получается формула Рэлея – Джинса (17).

Формула Рэлея – Джинса в области малых частот ($\nu << 1$) очень хорошо согласуется с экспериментальными данными, но в области больших частот ($\nu >> 1$) эта формула явно неверна. Формула Рэлея – Джинса также противоречит закону смещения Вина и закону Стефана – Больцмана: согласно (17) функция $u(\nu, T)$ монотонно возрастает с ростом частоты, не имея максимума, а энергетическая светимость $R^*$ абсолютно черного тела при любой температуре обращается в бесконечность:

$$R^* = \int\limits_0^\infty r^*(\nu, T) d\nu = \int\limits_0^\infty \frac{c}{4} \cdot u(\nu, T) d\nu = \int\limits_0^\infty \frac{c}{4} \cdot \frac{8\pi\nu^3 kT}{c^3} d\nu \to \infty.$$

Этот вывод, бесспорно противоречащий опыту, получил название «ультрафиолетовой катастрофы». Современник «ультрафиолетовой катастрофы», физик А. Х. Лоренц грустно заметил: «Уравнения классической физики оказались неспособными объяснить, почему угасающая печь не испускает желтых лучей наряду с излучением больших длин волн ...».

Таким образом, в теории равновесного теплового излучения на рубеже XIX – XX вв. сложилась следующая ситуация: при больших частотах ($\nu >> 1$) экспериментально подтверждалась формула Вина (16), а в области малых частот ($\nu << 1$) – формула Рэлея – Джинса (17).

Все попытки теоретического обоснования в рамках классической физики экспериментально определенного вида функции $u(\nu, T)$ во всем интервале частот от 0 до $\infty$ оказались безуспешными.

### ***Формула Планка***

Получить формулу для спектральной плотности энергии равновесного излучения, совершенно точно описывающую весь спектр равновесного теплового излучения черного тела и переходящую в формулу Вина при больших частотах и в формулу Рэлея – Джинса при малых $\nu$, удалось Максу Планку.

Вот как пишет об этом сам М. Планк: «Именно в ту пору все выдающиеся физики обратились как с экспериментальной, так и с теоретической стороны к проблеме распределения энергии в нормальном спектре. Однако ее они искали в направлении представления интенсивности излучения в ее зависимости от температуры, тогда как я подозревал более глубокую связь в зависимости энтропии от энергии. Так как значение энтропии тогда еще не нашло подобающего ему признания, то я нисколько не волновался за используемый мною метод и мог свободно и основательно проводить свои расчеты, не опасаясь вмешательства или опережения с чьей-либо стороны.

Так как для необратимости обмена энергии между осциллятором и возбужденным им излучением имеет особое значение вторая производная его энтропии по его энергии, то я вычислил значение этой величины для случая, стоявшего тогда в центре всех интересов виновского распределения энергии, и нашел замечательный результат, что для этого случая обратная величина такого значения, которую я здесь обозначил $K$, пропорциональна энергии. Эта связь так ошеломляюще проста, что я долгое время признавал ее совершенно общей и трудился над ее теоретическим обоснованием. Однако шаткость такого понимания скоро обнаружилась перед результатами новых измерений. Именно в то время, как для малых значений энергии, или для коротких волн, закон Вина отлично подтвердился, для больших значений энергии, или для больших волн сперва О. Люммер и Э. Прингсхейм, установили заметное отклонение, а проведенные Г. Рубенсом и Ф. Курлбаумом совершенные измерения с плавиковым шпатом и калийной солью обнаружили совершенно иное, однако опять-таки простое отношение, что величина $K$ пропорциональна не энергии, а квадрату энергии при переходе к большим значениям энергии и длин волн.

Так, прямыми опытами были установлены две простые границы: для малых энергий пропорциональность первой степени энергии, для больших – квадрату энергии. Понятно, что так же как любой принцип распределения энергии дает определенное значение $K$, так и всякое выражение приводит к определенному закону распределения энергии, и речь идет теперь о том, чтобы найти такое выражение, которое давало бы установленное измерениями распределение энергии. Но теперь ничего не было естественнее, как составить для общего случая величину в виде суммы двух членов: одного – первой степени, а другого – второй степени энергии, так что для малых энергий будет решающим первый член, для больших – второй; вместе с тем была найдена новая формула излучения, которую я предложил на заседании Берлинского физического общества 19 октября 1900 года и рекомендовал для исследования» [1].

Планк выдвигает гипотезу о «естественном излучении», содержание которой сводится к тому, что отдельные гармонические парциальные колебания, из которых складывается волна теплового излучения, являются совершенно некогерентными. На основе этой гипотезы он получил законы излучения в изолированной полости, содержащей линейные осцилляторы с определенными собственными частотами и слабым затуханием, – сначала для полого шара, в центре которого находится такой осциллятор, т. к. в этом случае дифференциальные уравнения процесса легко интегрируются, а затем и для общего случая произвольной полости с произвольно большим числом осцилляторов.

В результате этого исследования получилось, что на самом деле взаимодействие осциллятора с возбуждающим его излучением всегда является необратимым процессом, который заключается в том, что имеющиеся первоначально пространственные и временные флуктуации интенсивности излучения со временем выравниваются, сглаживаются. И когда наступает, наконец, стационарное состояние, то осциллятор с собственной частотой $\nu$ и с совершенно произвольным малым декрементом затухания обладает энергией

$$\varepsilon = \frac{c^2}{\nu^2} u(\nu, T). \tag{19}$$

Вследствие необратимости этого процесса легко можно указать такую функцию состояния, которая со временем непрерывно возрастает и которую поэтому можно трактовать как энтропию. Энтропия всей рассматриваемой системы складывается из суммы энтропий всех осцилляторов и энтропии излучения внутри полости.

Для энтропии одного осциллятора Планк нашел

$$S = -\frac{\varepsilon}{a\nu} \ln \frac{\varepsilon}{em\nu}, \tag{20}$$

где $a$, $m$ – некоторые постоянные;

$e$ – основание натуральных логарифмов (введено в виде множителя ради удобства).

Выражение для энтропии излучения внутри полости получалось совершенно аналогично из предположения, что каждый луч одновременно со своей энергией несет с собой соответствующую энтропию, вследствие чего затем аналогично объемной плотности энергии определялась объемная плотность энтропии.

На основе этих утверждений Планк показал, что энтропия всей системы при всяком произвольно выбранном начальном состоянии как осцилляторов, так и излучения полости со временем возрастает. Стационарное конечное состояние, т. е. состояние термодинамического равновесия, в котором энтропия достигает своего максимума, определяется посредством соотношения

$$dS = \frac{d\varepsilon}{T} \quad \text{или} \quad \frac{dS}{d\varepsilon} = \frac{1}{T}. \tag{21}$$

Если подставить в это уравнение значение $S$ из (20) и учесть выражение (19), то для спектральной плотности энергии излучения с частотой $\nu$ получается

$$u(\nu, T) = \frac{m\nu^3}{c^2} e^{-\frac{a\nu}{T}}. \tag{22}$$

Но это и есть закон Вина (16). Далее Планк полагает, что если для высоких температур спектральная плотность энергии излучения становится пропорциональной температуре, на что указывали упомянутые опыты О. Люммера и Э. Прингсхейма, то согласно выражению (19) энергия осциллятора тоже ей пропорциональна, т. е.

$$\varepsilon = CT,$$

где $C$ – постоянный коэффициент. Тогда, подставив в выражение (21) $T = \dfrac{\varepsilon}{C}$ и проинтегрировав его, получим

$$S = C \cdot \ln\varepsilon + \text{const}.$$

Продифференцируем это выражение дважды по $\varepsilon$:

$$\frac{d^2S}{d\varepsilon^2} = -\frac{C}{\varepsilon^2}. \qquad (23)$$

Поступим аналогично с выражением (20) для энтропии, приводящим к закону Вина:

$$\frac{d^2S}{d\varepsilon^2} = -\frac{1}{a\nu\varepsilon}. \qquad (24)$$

Простейшим более общим соотношением, которое бы содержало оба случая (23) и (24) в качестве предельных выражений, является следующее:

$$\frac{d^2S}{d\varepsilon^2} = -\frac{1}{a\nu\varepsilon + \dfrac{\varepsilon^2}{C}}.$$

После интегрирования этого выражения получаем

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \frac{1}{a\nu}\ln\left(1 + \frac{aC\nu}{\varepsilon}\right),$$

а с учетом (21)

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{a\nu}\ln\left(1 + \frac{aC\nu}{\varepsilon}\right). \qquad (25)$$

Если теперь в (25) вместо $\varepsilon$ снова ввести $u(\nu, T)$ из выражения (19), то получим знаменитую формулу Планка для спектральной плотности энергии равновесного излучения.

14 декабря 1900 г. М. Планк доложил Берлинскому физическому обществу о своей гипотезе и новой формуле излучения. Введенная Планком гипотеза ознаменовала рождение квантовой теории, совершившей подлинную революцию в физике. Классическая физика в противоположность современной физике ныне именуется «физика до Планка».

Планк отнюдь не был революционером, и ни он сам, ни другие физики не сознавали глубокого значения понятия «квант». Для Планка квант был всего лишь средством, позволившим вывести формулу, дающую удовлетворительное согласие с кривой излучения абсолютно черного тела. Он неоднократно пытался достичь согласия в рамках классической традиции, но безуспешно.

Вот как описывал Планк сомнения, мучившие его: «... или квант действия был фиктивной величиной – тогда весь вывод закона излучения был принципиально иллюзорным и представлял собой просто лишенную содержания игру в формулы, или при выводе этого закона в основу была положена правильная физическая мысль – тогда квант действия должен был играть в физике фундаментальную роль, тогда появление его возвещало нечто совершенно новое, дотоле неслыханное, что, казалось, требовало преобразования самых основ нашего физического мышления ...» [2].

Вместе с тем М. Планк с удовольствием отметил первые успехи квантовой теории, последовавшие почти незамедлительно.

Далее мы покажем, как можно более просто произвести «сшивку» двух формул и более наглядно увидеть идею возникновения гипотезы Планка.

Из формулы Рэлея – Джинса можно сделать вывод, что средняя энергия гармонического осциллятора для малых частот ($\nu << 1$) определяется простым выражением

$$\overline{\varepsilon} = kT. \tag{26}$$

В случае больших частот ($\nu >> 1$) для согласования с феноменологическим выражением Вина мы должны записать среднюю энергию в виде

$$\overline{\varepsilon} = B\nu e^{-\frac{a\nu}{T}}, \tag{27}$$

где $B$ и $a$ – неопределенные постоянные.

Перепишем выражения (26) и (27) в другой форме:

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{\overline{\varepsilon}} \qquad \text{при} \quad \nu << 1, \tag{28}$$

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{a\nu}\ln\frac{\overline{\varepsilon}}{B\nu} \qquad \text{при} \quad \nu >> 1. \tag{29}$$

На основе этих двух выражений попытаемся сконструировать новое соотношение, которое бы подходило для всего спектра частот от 0 до $\infty$. Для этого запишем первое начало термодинамики:

$$\delta Q = d\varepsilon + \delta A.$$

В случае равновесного теплового излучения $\delta A = 0$, тогда $\delta Q = d\varepsilon$. Подставим полученный результат в определение энтропии:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{d\varepsilon}{T},$$

откуда

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{d\varepsilon}. \tag{30}$$

С учетом этого перепишем выражения (28) и (29) в виде:

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \frac{k}{\varepsilon} \qquad \text{при} \quad \nu << 1, \tag{31}$$

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = -\frac{1}{a\nu}\ln\frac{\varepsilon}{B\nu} \qquad \text{при} \quad \nu >> 1. \tag{32}$$

Поскольку ничего общего, связывающего выражения (31) и (32) не видно, вычислим вторые производные энтропии по энергии:

$$\frac{d^2S}{d\varepsilon^2} = -\frac{k}{\varepsilon^2} = -\frac{1}{\frac{\varepsilon^2}{k}} \qquad \text{при} \quad \nu << 1, \tag{33}$$

$$\frac{d^2S}{d\varepsilon^2} = -\frac{1}{a\nu\varepsilon} \qquad \text{при} \quad \nu >> 1. \tag{34}$$

Анализ (33) и (34) показывает, что искомое единое выражение имеет вид

$$\frac{d^2S}{d\varepsilon^2} = -\frac{1}{a\nu\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{k}}. \tag{35}$$

Действительно, если $\nu << 1$, то и $a\nu\varepsilon << \frac{\varepsilon^2}{k}$, тогда из (35) получаем выражение (33), интегрирование которого приводит к средней энергии (26) и формуле Рэлея – Джинса (17). Если $\nu >> 1$, то $a\nu\varepsilon >> \frac{\varepsilon^2}{k}$, тогда из (35) следует выражение (34), проинтегрировав которое, можно получить среднюю энергию в виде (27) и формулу Вина (16).

Введем обозначение $\eta = \frac{1}{a\nu k}$ и перепишем выражение (35):

$$\frac{d^2S}{d\varepsilon^2} = -\frac{1}{a\nu\varepsilon(1 + \frac{\varepsilon}{a\nu k})} = -\frac{1}{a\nu\varepsilon(1 + \eta\varepsilon)}. \tag{36}$$

А теперь начнем «возвращаться», т. е. проинтегрируем выражение (36):

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int \frac{d^2S}{d\varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{1}{a\nu}\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon(1+\eta\varepsilon)} = -\frac{1}{a\nu}\left(\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \int \frac{\eta d\varepsilon}{1+\eta\varepsilon}\right) =$$

$$= -\frac{1}{a\nu}\left[\ln\varepsilon - \ln(1+\eta\varepsilon) + C_1\right] = -\frac{1}{a\nu}\left[\ln\frac{\varepsilon}{1+\eta\varepsilon} + C_1\right],$$

а учитывая (30), получим

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{a\nu}\left[\ln\frac{\varepsilon}{1+\eta\varepsilon} + C_1\right]. \tag{37}$$

Постоянную интегрирования $C_1$ найдем из очевидного условия, что при $T$, стремящимся к бесконечности, энергия должна бесконечно возрастать:

$$\varepsilon \to \infty \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Тогда постоянная интегрирования $C_1$ равна

$$C_1 = \ln\eta.$$

Принимая во внимание найденное значение $C_1$, выражение (37) можем записать как

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{a\nu}\ln\frac{\eta\bar{\varepsilon}}{1+\eta\bar{\varepsilon}}. \tag{38}$$

Из (38) выразим среднюю энергию гармонического осциллятора. При этом вместо постоянной $a$ введем новую постоянную $h = ak$. В результате получим следующее выражение для средней энергии гармонического осциллятора:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{39}$$

Но подобное выражение для средней энергии эквивалентно утверждению, что энергия осциллятора может принимать дискретный ряд значений $\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, ..., n\varepsilon_0, ...$ или $h\nu, 2h\nu, 3h\nu, ..., nh\nu, ...$ (где $n$ = 1, 2, 3, ...). Только в этом случае, находя среднее значение энергии гармонического осциллятора по распределению Больцмана, заменяя вычисление интегралов вычислением сумм, мы получим выражение (39). Действительно,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \nu e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} = \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Если теперь подставим выражение для средней энергии (39) в закон Рэлея – Джинса

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\overline{\varepsilon},$$

то получим знаменитое распределение Планка для спектральной плотности энергии равновесного теплового излучения:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{40}$$

С учетом выражения (3) формула для спектральной плотности энергии равновесного излучения, выраженной через длины волн, имеет вид

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \tag{41}$$

Позиции квантовой теории укрепились в 1905 г., когда Альберт Эйнштейн воспользовался понятием фотона – кванта электромагнитного излучения. Эйнштейн предположил, что свет обладает двойственной природой: он может вести себя и как электромагнитная волна, и как частица. В 1907 г. Эйнштейн еще более упрочил положение квантовой теории, воспользовавшись понятием кванта для объяснения загадочных расхождений между предсказаниями теории и экспериментальными измерениями удельной теплоемкости тел. Еще одно подтверждение потенциальной мощи введенной Планком новации поступило в 1913 г. от Нильса Бора, применившего квантовую теорию к описанию строения атома водорода.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

### Построение графиков зависимости $u(\lambda,T)$ и $u(\nu,T)$ для различных температур и проверка закона смещения Вина

1. Задайте значения температур и необходимых постоянных в формате, требуемом программой «MathCad»:

$$T_1 := 1000K, \quad T_2 := 1200K, \quad T_3 := 1500K.$$

$$k := 1.38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}, \quad h := 6.62 \cdot 10^{-34}\,J \cdot sec, \quad c := 2.998 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{sec}.$$

2. На основании выражения (41) запишите

$$u(\lambda,T) := \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}.$$

3. Задайте диапазон длин волн:

$$\lambda := 0.4 \cdot 10^{-6}m, 0.5 \cdot 10^{-6}m .. 10 \cdot 10^{-6}m.$$

4. Постройте графики функции $u(\lambda,T)$. Для этого сделайте следующее:

– в программе «MathCad» из главного меню «Вставить» («Insert») вызовите подменю графиков и щелкните мышью на первом значке появившегося списка (X-Y график);

– в месте средней метки на горизонтальной оси введите переменную или $\lambda$ (рис. 2);

– на середине вертикальной оси в месте указателя введите обозначение функции, которую надо представить графически ($u(\lambda,T_1)$, $u(\lambda,T_2)$, $u(\lambda,T_3)$). Функции при вводе обязательно разделяйте запятой, тогда все их графики будут изображены на одной координатной плоскости в разных цветах;

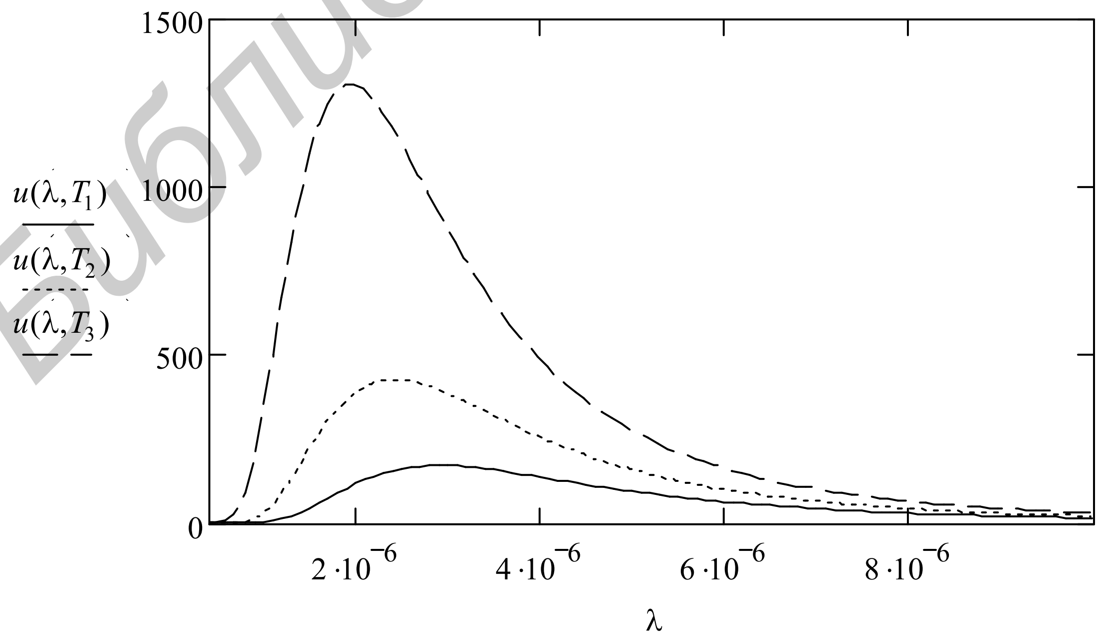


Рис. 2

– щелкните мышью вне области графика. При этом программа построит графики, вид которых показан на рис. 2.

5. По графикам проверить закон смещения Вина (15): для каждого графика определите длину волны $\lambda_m$, при которой значение функции $u(\lambda, T)$ максимально, вычислите произведение $\lambda_m \cdot T$ и сравните полученное значение с постоянной Вина. Сделайте вывод.

6. Изменяя значения температур и диапазон длин волн, проследите за изменениями кривых $u(\lambda, T)$.

7. На основании выражения (40) запишите

$$u(\lambda, T) := \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

8. Задайте диапазон частот излучения:

$$\nu := 0 \cdot 10^{13}\,Hz, 0.1 \cdot 10^{13}\,Hz..3 \cdot 10^{14}\,Hz.$$

9. Постройте графики функции $u(\nu, T)$.

## Проверка закона Стефана – Больцмана и вычисление постоянной Стефана – Больцмана

1. Для проверки закона Стефана – Больцмана запишите выражение для вычисления энергетической светимости абсолютно черного тела, имеющего фиксированную температуру $T$:

$$R(T) := \int_0^{5 \cdot 10^{15}\,Hz} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu.$$

2. Для построения графика зависимости энергетической светимости абсолютно черного тела от его температуры введите диапазон значений температур:

$$T := 300K, 300K + \frac{700K}{50}..1200K.$$

3. Постройте график зависимости $R(T^4)$ (рис. 3), который согласно закону Стефана – Больцмана $R = \sigma T^4$, должен иметь вид прямой.

4. По графику $R(T^4)$ вычислите угловой коэффициент прямой и сравните полученное значение с постоянной Стефана – Больцмана. Сделайте вывод.

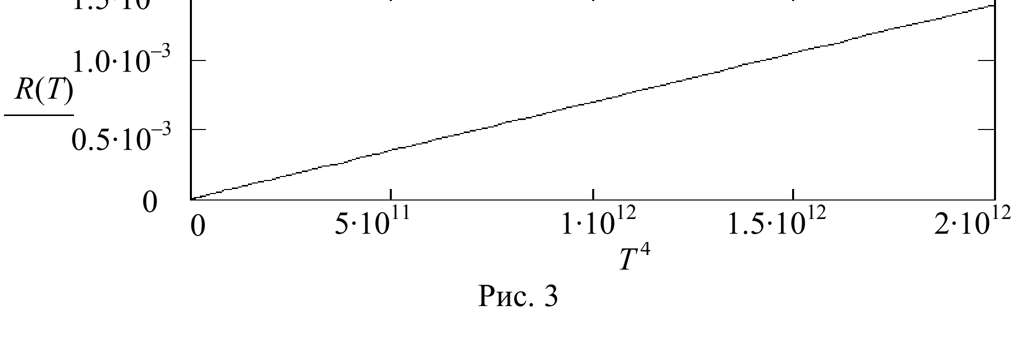


Рис. 3

## ЛИТЕРАТУРА

1. Планк, М. Избранные труды / М. Планк ; отв. ред. и статья-послесловие Л. С. Полака. Сер. «Классики науки». – М. : Наука, 1975. – 788 с.

2. Шёрф, Х. Г. От Кирхгофа до Планка / Х. Г. Шёрф. – М. : Мир, 1981. – 190 с.

Св. план 2011, поз. 68

*Учебное издание*

**Аксенов** Валерий Васильевич
**Величко** Олег Иванович
**Дорошевич** Ирина Леонидовна
**Квасов** Николай Трофимович

***РАВНОВЕСНОЕ ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.***
***ФОРМУЛА ПЛАНКА.***
***ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА «MathCAD»***

Методическое пособие по выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Физика»



Редактор А. В. Тюхай
Корректор Е. Н. Батурчик
Компьютерная верстка Ю. Ч. Клочкевич

| | | |
|---|---|---|
| Подписано в печать 20.06.2011. | Формат 60х84 1/16. | Бумага офсетная. |
| Гарнитура «Таймс». | Отпечатано на ризографе. | Усл. печ. л. 1,28. |
| Уч.-изд. л. 1,0. | Тираж 40 экз. | Заказ 867. |

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6