Частица Дирака с аномальным магнитным моментом во внешнем магнитном поле, построение решений методом квадрирования

В.В. Кисель
Белорусский государственный университет радиоэлектроники и информатики
Войнова Я.А.
voinyuschka@mail.ru; Средняя школа, Ельский район, Беларусь
В.М. Редьков
redkov@dragon.bas-net.by; Институт физики им. Б.И. Степанова

Аннотация

Метод квадрирования положен в основу анализа поведения частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом во внешнем однородном магнитном поле. В волновых функциях выделены компоненты, отвечающие фиксированным значениям третьей проекции спина частицы. Эти компоненты подчиняются независимым уравнениям второго порядка; после разделения переменных каждая сводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям второго, которые с использованием специальных линейных преобразований удается разделить на независимые. Найденные уравнений решены точно в гипергеометрических функциях, найдены обобщенные формулы для состояний электроны во внешнем поле. Имеются два класса решений, отвечающие им уровни энергии зависят от параметра $\Gamma = \lambda \frac{2eB}{Mc^2}$, соответственно с противоположными знаками; случай $\lambda = 0$ отвечает нулевому аномальному магнитному моменту.

1 Уравнение Дирака, учет аномального магнитного момента

В работе на основе применения метода квадрирования будет решена задача о построении точных решений для частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным полем во внешнем однородном магнитном поле. Используем известное описание однородного магнитного поля: $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\, c\mathbf{B} \times \mathbf{r}$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. После преобразования к цилиндрическим координатам имеем

$$A_t = 0, \qquad A_r = 0;, \quad A_z = 0, \quad A_\phi = -Br^2/2, \quad F_{\phi r} = Br. \tag{1}$$

Для описания дираковской частицы в магнитном поле будем использовать тетрадный формализм [1] для цилиндрических координат и тетрады $x^\alpha = (t, r, \phi, z)$:

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2 \,, \qquad e^{\beta}_{(a)}(x) = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| . \tag{2}$$

Уравнение Дирака в тетрадном формализме [1] записывается так:

$$\left\{ \gamma^c [\, i\hbar \, (\, e^{\beta}_{(c)} \partial_\beta + \frac{1}{2} \sigma^{ab} \gamma_{abc} \,) \; - \; \frac{e}{c} A_c \,] \; - \; mc \right\} \Psi = 0 \,, \tag{3}$$

где γ_{abc} – коэффициенты вращения Риччи: $\gamma_{bac} = -\gamma_{abc} = -e_{(b)\beta;\alpha} e^{\beta}_{(a)} e^{\alpha}_{(c)}$, $A_a = e^{\beta}_{(a)} A_\beta$ – тетрадные компоненты 4-вектора электромагнитного поля A_β; $\sigma^{ab} = 1/4(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a)$. Ниже будем использовать сокращенные обозначения: $e/c\hbar \Longrightarrow e$, $mc/\hbar \Longrightarrow M$. Уравнение Дирака принимает вид (пусть $\Psi = \psi/\sqrt{r}$):

$$\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \left(\frac{i\partial_\phi}{r} + \frac{eBr}{2}\right) + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M\right] \psi = 0\,. \tag{4}$$

Решения ищем в виде

$$\psi = e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{vmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{vmatrix}, \quad \left[\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2\, \mu(r) - k\gamma^3 - M\right] \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{vmatrix} = 0\,,$$

где $\mu(r) = m/r - eBr/2$; квантовое число третьей проекции полного момента $m = \pm 1/2, \pm 3/2, \ldots$

Уравнение Дирака с учетом описания аномального магнитного момента частицы представимо в подходе Петраша так [2, 3]:

$$\left\{\gamma^c [\, i(e^{\beta}_{(c)} \partial_\beta + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\gamma_{abc}\,) \; - \; \frac{e}{\hbar c} A_c \,] - i\lambda \frac{2e}{Mc^2} \sigma^{\alpha\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x) - \frac{Mc}{\hbar}\right\} \Psi = 0\,. \tag{5}$$

Размерности величин задаются соотношениями

$$[\frac{Mc}{\hbar}] = l^{-1}, \quad [\frac{e}{\hbar c} A] = l^{-1}, \quad [\frac{e}{\hbar c} F] = l^{-2}, \quad [\frac{eF}{Mc^2}] = l^{-1}\;;$$

т. е. свободный параметр λ является безразмерным.

2 Выделение собственных состояний оператора Σ_3

Будем рассматривать это обобщенное уравнение Дирака во внешнем однородном магнитном поле. Ввиду соотношения $\sigma^{\alpha\beta}(x) F_{\alpha\beta}(x) = 2\sigma^{\phi r} F_{\phi r} = -i\gamma^1\gamma^2 B = \Sigma_3 B$ вместо (4) будем иметь

$$\left[\epsilon\gamma^0 + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2 \mu(r) - k\gamma^3 + \Gamma\Sigma_3 - M\right] \psi = 0, \quad \Sigma_3 = -i\gamma^1\gamma^2,\; \Gamma = \lambda \frac{2eB}{Mc^2}. \tag{6}$$

Ниже для сокращения записи используем следующие обозначения: $eB/2 \Longrightarrow B$. Используем спинорный базис матриц Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Sigma_3 = -i\gamma^1\gamma^2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{vmatrix}, \quad (\Sigma_3 - 1)(\Sigma_3 + 1) = \Sigma_3^2 - 1 = 0.$$

Вводим проекционные операторы

$$P_+ = \frac{1}{2}(\Sigma_3 + 1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, P_+^2 = P_+, \quad P_- = \frac{1}{2}(1 - \Sigma_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, P_-^2 = P_-.$$

Эти операторы выделяют компоненты с фиксированным значением третьей проекции оператора Σ_3: $\psi_+ = P_+\psi$, $\psi_- = P_-\psi$. Операторами P_+ и P_- действуем на уравнение (6), в результате получим

$$\Big(+\Gamma + \epsilon\gamma^0 - k\gamma^3 - M\Big)\psi_+ + P_+\left(i\gamma^1\frac{d}{dr} - \gamma^2\mu\right)\psi = 0,$$
$$\Big(-\Gamma + \epsilon\gamma^0 - k\gamma^3 - M\Big)\psi_- + P_-\left(i\gamma^1\frac{d}{dr} - \gamma^2\mu\right)\psi = 0. \tag{7}$$

Учтем равенства

$$\gamma^1 P_+ = P_-\gamma^1, \quad \gamma^2 P_+ = P_-\gamma^2, \quad \gamma^1 P_- = P_+\gamma^1, \quad \gamma^2 P_- = P_+\gamma^2,$$

тогда из (7) приходим к следующему:

$$\Big(\epsilon\gamma^0 - k\gamma^3 - M + \Gamma\Big)\psi_+ + \left(i\gamma^1\frac{d}{dr} - \gamma^2\mu\right)\psi_- = 0,$$
$$\Big(\epsilon\gamma^0 - k\gamma^3 - M - \Gamma\Big)\psi_- + \left(i\gamma^1\frac{d}{dr} - \gamma^2\mu\right)\psi_+ = 0. \tag{8}$$

Так как справедлива цепочка равенств

$$\left(i\gamma^1\frac{d}{dr} - \gamma^2\mu\right)\psi_+ = \left(i\gamma^1\frac{d}{dr} - \gamma^2\mu\right)P_+\psi_+ =$$

$$= \left(i\gamma^1 P_+\frac{\partial}{\partial r} - \gamma^2 P_+\mu\right)\psi_+ = \left(\frac{i}{2}\left(\gamma^1 + i\gamma^2\right)\frac{d}{dr} - \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - i\gamma^1\right)\mu\right)\psi_+ =$$
$$= i\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma^1 + i\gamma^2\right)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{m - Br^2}{r}\right)\right]\psi_+,$$

то получаем

$$\left(i\gamma^1\frac{d}{dr} - \gamma^2\mu\right)\psi_+ = i\gamma_+\,\hat{a}_m\psi_+, \tag{9}$$

где использованы обозначения

$$\gamma_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma^1 + i\gamma^2\right), \quad \hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{m - Br^2}{r}\right). \tag{10}$$

Аналогично, находим

$$\left(i\gamma^1\frac{d}{dr} - \gamma^2\mu\right)\psi_- = -i\gamma_-\,\hat{b}_m\psi_- \tag{11}$$

где

$$\gamma_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma^1 - i\gamma^2\right), \quad \hat{b}_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dr} + \frac{m - Br^2}{r}\right). \tag{12}$$

Таким образом, получены равенства

$$\left(i\gamma^1\frac{d}{dr}-\gamma^2\mu\right)\psi_+=i\gamma_+\hat{a}_m\psi_+,\quad \left(i\gamma^1\frac{d}{dr}-\gamma^2\mu\right)\psi_-=-i\gamma_-\hat{b}_m\psi_-. \tag{13}$$

Следовательно, уравнения (8) можно записать так:

$$\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3-A\right)\psi_+-i\gamma_-\,\hat{b}_m\psi_-=0, \tag{14}$$

$$\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3-D\right)\psi_-+i\gamma_+\,\hat{a}_m\psi_+=0, \tag{15}$$

где использованы обозначения: $M-\Gamma=A,\ M+\Gamma=D.$

Умножим уравнение (14) на выражение $(\epsilon^2-k^2-D^2)$:

$$\left(\epsilon^2-k^2-D^2\right)\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3-A\right)\psi_+-i\gamma_-\hat{b}_m\left(\epsilon^2-k^2-D^2\right)\psi_-=0; \tag{16}$$

уравнение уравнение (15) – на матрицу $(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3+D)$:

$$\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3+D\right)\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3-D\right)\psi_-+i\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3+D\right)\gamma_+\hat{a}_m\psi_+=0.$$

последнее может быть переписано так:

$$\left(\epsilon^2-k^2-D^2\right)\psi_-=-i\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3+D\right)\gamma_+\hat{a}_m\psi_+.$$

Соответственно, уравнение (16) представить иначе:

$$\left(\epsilon^2-k^2-D^2\right)\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3-A\right)\psi_+-\gamma_-\hat{b}_m\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3+D\right)\gamma_+\hat{a}_m\psi_+=0;$$

его можно преобразовать в следующее:

$$\left(\epsilon^2-k^2-D^2\right)\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3-A\right)\psi_+-\hat{b}_m\hat{a}_m\left(-\epsilon\gamma^0+k\gamma^3+D\right)\gamma_-\gamma_+\psi_+=0. \tag{17}$$

Убеждаемся в справедливости равенства $\gamma_-\gamma_+=-2P_+$; следовательно, уравнение (17) принимает вид

$$\left(\epsilon^2-k^2-D^2\right)\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3-A\right)\psi_++2\hat{b}_m\hat{a}_m\left(-\epsilon\gamma^0+k\gamma^3+D\right)\psi_+=0.$$

Подействуем на полученное уравнение оператором $(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3+D)$:

$$\left(\epsilon^2-k^2-D^2\right)\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3+D\right)\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3-A\right)\psi_++$$

$$+2\hat{b}_m\hat{a}_m\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3+D\right)\left(-\epsilon\gamma^0+k\gamma^3+D\right)\psi_+=0$$

или

$$\left(\epsilon^2-k^2-D^2\right)\times$$

$$\left[\epsilon^2\gamma^0\gamma^0-\epsilon k\gamma^0\gamma^3-A\epsilon\gamma^0-\epsilon k\gamma^3\gamma^0+k^2\gamma^3\gamma^3+Ak\gamma^3+D\epsilon\gamma^0-Dk\gamma^3-AD\right]\psi_++$$

$$+2\hat{b}_m\hat{a}_m\times$$

$$\left[-\epsilon^2\gamma^0\gamma^0+\epsilon k\gamma^0\gamma^3+\epsilon D\gamma^0+k\epsilon\gamma^3\gamma^0-k^2\gamma^3\gamma^3-Dk\gamma^3-D\epsilon\gamma^0+Dk\gamma^3+D^2\right]\psi_+=0$$

или

$$\left(\epsilon^2-k^2-D^2\right)\left[\epsilon^2-k^2-AD-\epsilon\left(A-D\right)\gamma^0+k\left(A-D\right)\gamma^3\right]\psi_+$$

$$+2\hat{b}_m\hat{a}_m\left[-\epsilon^2+k^2+D^2\right]\psi_+=0,$$

Таким образом, приходим к уравнению для компоненты ψ_+:

$$\left[-2\hat{b}_m\hat{a}_m+\epsilon^2-k^2-AD-(A-D)\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3\right)\right]\psi_+=0. \tag{18}$$

Аналогично получим уравнение для функции ψ_-:

$$\left[-2\hat{a}_m\hat{b}_m+\epsilon^2-k^2-AD+(A-D)\left(\epsilon\gamma^0-k\gamma^3\right)\right]\psi_-=0. \tag{19}$$

При анализе этих уравнений будем использовать явный вид матриц Дирака в спинорном базисе. Уравнение (18) с учетом равенств

$$\gamma^0\psi_+=\left|\begin{array}{c}0\\ \psi_4\\ 0\\ \psi_2\end{array}\right|,\quad \gamma^3\psi_+=\left|\begin{array}{c}0\\ \psi_4\\ 0\\ -\psi_2\end{array}\right|$$

дает

$$-2\hat{b}_m\hat{a}_m\left|\begin{array}{c}0\\ \psi_2\\ 0\\ \psi_4\end{array}\right|+(\epsilon-k^2-AD)\left|\begin{array}{c}0\\ \psi_2\\ 0\\ \psi_4\end{array}\right|-(A-D)\left\{\epsilon\left|\begin{array}{c}0\\ \psi_4\\ 0\\ \psi_2\end{array}\right|-k\left|\begin{array}{c}0\\ \psi_4\\ 0\\ -\psi_2\end{array}\right|\right\}=0.$$

Это эквивалентно двум уравнениям:

$$\begin{aligned}&-2\hat{b}_m\hat{a}_m\psi_2+\left(\epsilon^2-k^2-AD\right)\psi_2-(A-D)(\epsilon-k)\psi_4=0,\\ &-2\hat{b}_m\hat{a}_m\psi_4+\left(\epsilon^2-k^2-AD\right)\psi_4-(A-D)(\epsilon+k)\psi_2=0.\end{aligned} \tag{20}$$

Введем новые функции R_1 и R_2:

$$R_1=(\epsilon+k)\ \psi_2+\sqrt{\epsilon^2-k^2}\ \psi_4,\quad R_2=-(\epsilon+k)\ \psi_2+\sqrt{\epsilon^2-k^2}\ \psi_4. \tag{21}$$

Система (20) примет вид

$$-2\hat{b}_m\hat{a}_mR_1+\left(\epsilon^2-k^2-AD\right)R_1-$$

$$-(A-D)\left\{\left(\epsilon^2-k^2\right)\psi_4+(\epsilon+k)\sqrt{\epsilon^2-k^2}\psi_2\right\}=0\quad\Longrightarrow$$

$$\left\{-2\hat{b}_m\hat{a}_m+\epsilon^2-k^2-AD-(A-D)\sqrt{\epsilon^2-k^2}\right\}R_1=0 \tag{22}$$

и

$$-2\hat{b}_m\hat{a}_m\psi_2+\left(\epsilon^2-k^2-AD\right)\psi_2-$$

$$(A-D)\left[-\left(\epsilon^2-k^2\right)\psi_4+(\epsilon+k)\sqrt{\epsilon^2-k^2}\psi_2\right]=0\quad\Longrightarrow$$

$$\left[-2\hat{b}_m\hat{a}_m+\epsilon^2-k^2-AD+(A-D)\sqrt{\epsilon^2-k^2}\right]R_2=0. \tag{23}$$

Аналогично с учетом

$$\gamma^0 \psi_- = \left| \begin{matrix} \psi_3 \\ 0 \\ \psi_1 \\ 0 \end{matrix} \right|, \quad \gamma^3 \psi_- = \left| \begin{matrix} -\psi_3 \\ 0 \\ \psi_1 \\ 0 \end{matrix} \right|$$

устанавливаем покомпонентную запись уравнения (19)

$$-2\hat{a}_m \hat{b}_m \left| \begin{matrix} \psi_1 \\ 0 \\ \psi_3 \\ 0 \end{matrix} \right| + (\epsilon^2 - k^2 - AD) \left| \begin{matrix} \psi_1 \\ 0 \\ \psi_3 \\ 0 \end{matrix} \right| + (A - D) \left\{ \epsilon \left| \begin{matrix} \psi_3 \\ 0 \\ \psi_1 \\ 0 \end{matrix} \right| - k \left| \begin{matrix} -\psi_3 \\ 0 \\ \psi_1 \\ 0 \end{matrix} \right| \right\} = 0.$$

Это эквивалентно двум уравнениям:

$$\begin{gathered} -2\hat{a}_m \hat{b}_m \psi_1 + (\epsilon^2 - k^2 - AD)\psi_1 + (A - D)(\epsilon + k\ )\psi_3 = 0, \\ -2\hat{a}_m \hat{b}_m \psi_3 + (\epsilon^2 - k^2 - AD)\psi_3 + (A - D)(\epsilon - k)\psi_1 = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Вводим две новые функции:

$$\Phi_1 = (\epsilon - k)\,\psi_1 + \sqrt{\epsilon^2 - k^2}\psi_3, \quad \Phi_2 = -\,(\epsilon - k)\,\psi_1 + \sqrt{\epsilon^2 - k^2}\psi_3. \tag{25}$$

Систему (24) преобразуем в следующую:

$$-2\widehat{a_m}\hat{b}_m \Phi_1 + \left(\epsilon^2 - k^2 - AD\right)\Phi_1 +$$

$$+\,(A - D)\left\{\left(\epsilon^2 - k^2\right)\Phi_3 + (\epsilon - k)\sqrt{\epsilon^2 - k^2}\psi_1\right\} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\left\{-2\hat{a}_m \hat{b}_m + \epsilon^2 - k^2 - AD + (A - D)\sqrt{\epsilon^2 - k^2}\right\}\Phi_1 = 0 \tag{26}$$

и

$$-2\widehat{a_m}\hat{b}_m \Phi_2 + \left(\epsilon^2 - k^2 - AD\right)\Phi_2 +$$

$$+\,(A - D)\left\{-\left(\epsilon^2 - k^2\right)\Phi_3 + (\epsilon - k)\sqrt{\epsilon^2 - k^2}\psi_1\right\} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\left\{-2\hat{a}_m \widehat{b_m} + \epsilon^2 - k^2 - AB - (A - D)\sqrt{\epsilon^2 - k^2}\right\}\Phi_2 = 0. \tag{27}$$

Учтем равенства:

$$A - D = -2\Gamma, \quad AD = M^2 - \Gamma^2, \quad A = M - \Gamma, \quad D = M + \Gamma,$$

тогда найденные четыре уравнения запишутся так:

$$\begin{gathered} \left[-2\hat{b}_m \hat{a}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2 + \Gamma^2 + 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2}\right] R_1 = 0, \\ \left[-2\hat{b}_m \hat{a}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2 + \Gamma^2 - 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2}\right] R_2 = 0, \\ \left[-2\hat{a}_m \hat{b}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2 + \Gamma^2 - 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2}\right] \Phi_1 = 0, \\ \left[-2\hat{a}_m \hat{b}_m + \epsilon^2 - k^2 - M^2 + \Gamma^2 + 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2}\right] \Phi_2 = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Учтем выражения для дифференциальных операторов второго порядка:

$$-2\hat{a}_m\hat{b}_m = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{m\,(m-1)}{r^2} + (2m+1)\,B - B^2r^2, \tag{29}$$

$$-2\hat{b}_m\hat{a}_m = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{m\,(m+1)}{r^2} + (2m-1)\,B - Br^2. \tag{30}$$

Следовательно, четыре уравнения имеют следующий явный вид:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m\,(m+1)}{r^2} + (2m-1)\,B - Br^2 + C_1\right] R_1 = 0, \tag{31}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m\,(m+1)}{r^2} + (2m-1)\,B - Br^2 + C_2\right] R_2 = 0, \tag{32}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m\,(m-1)}{r^2} + (2m+1)\,B - Br^2 + C_2\right] \Phi_1 = 0, \tag{33}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m\,(m-1)}{r^2} + (2m+1)\,B - Br^2 + C_1\right] \Phi_2 = 0, \tag{34}$$

где использованы обозначения

$$C_1 = \epsilon^2 - k^2 - M^2 + \Gamma^2 + 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2},$$

$$C_2 = \epsilon^2 - k^2 - M^2 + \Gamma^2 - 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2}.$$

Отмечаем, что уравнения для $R_1 - R_2$, равно как и уравнения для $\Phi_1 - \Phi_2$, различаются между собой только знаком при параметре Γ. Это означает, что в пределах каждой пары достаточно исследовать только один случай.

3 Решение радиальных уравнений

Для анализа возникающих дифференциальных уравнений вводим новую переменную

$$x = |B|r^2, \quad r^2 = \frac{x}{|B|}, \ \frac{d}{dr} = 2\sqrt{|B|x}\frac{d}{dx}, \ \frac{d^2}{dr^2} = 4|B|\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx} + x\frac{d^2}{dx^2}\right).$$

Тогда уравнение для R_1 запишется в виде

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx} - \frac{m\,(m+1)}{4x} + \frac{2m-1}{4}\frac{B}{|B|} - \frac{1}{4}x + \frac{C_1}{4|B|}\right] R_1 = 0. \tag{35}$$

Для определенности вектор магнитного поля $\vec{B}$ направим в положительном направлении оси z, учитываем также отрицательность заряда электрона: $e < 0$. Тогда $B = -|B|$, и уравнение для R_1 запишется так:

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx} - \frac{m\,(m+1)}{4x} - \frac{2m-1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{C_1}{4|B|}\right] R_1 = 0. \tag{36}$$

Используем подстановку $R_1 = x^L \epsilon^{-Cx} Q_1(x)$, из уравнения (36) получаем

$$x\frac{d^2Q_1}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} + 2L - 2Cx\right)\frac{dQ_1}{dx} + \frac{1}{x}\left[L\,(L-1) - \frac{m\,(m+1)}{4} + \frac{L}{2}\right]Q_1 +$$
$$+\left(C^2 - \frac{1}{4}\right)xQ_1 - \left[2LC + \frac{1}{2}C + \frac{2m-1}{4} - \frac{C_1}{4|B|}\right]Q_1 = 0.$$

Требуем выполнения равенств:

$$C^2 - \frac{1}{4} = 0, \quad L\,(L-1) - \frac{m\,(m+1)}{4} + \frac{L}{2} = 0\,;$$

отсюда получаем ограничения: $C = \pm 1/2$ (понятно, что необходимо использовать $C = +1/2$, поскольку только такой выбор может обеспечить затухание решений при$x \to$) и

$$L_1 = \frac{m+1}{2} \Longrightarrow m \geq +\frac{1}{2}, \quad L_2 = -\frac{m}{2} \Longrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$$

предполагаем, что волновые функции должны обращаться в ноль также и в начале координат).

Рассматриваем вариант $L_1, m \geq +1/2$:

$$x\frac{d^2Q_1}{dx^2} + \left(m + \frac{3}{2} - x\right)\frac{dQ_1}{dx} - \left(\frac{1}{2} + m - \frac{C_1}{4|B|}\right)Q_1 = 0$$

это уравнение является вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$xF'' + (\gamma - x)\,F' - \alpha F = 0,$$

с параметрами

$$\gamma = m + \frac{3}{2}, \quad \alpha = m + \frac{1}{2} - \frac{C_1}{4|B|}.$$

Известно, что условием обращения гипергеометрического ряда в полином степени n является следующее ограничение на параметр α:

$$\alpha = -n \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} + m - C_1\frac{1}{4|B|} = -n, \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 4|B|\left(n + m + \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда, вспоминая смысл величины C_1, получаем правило квантования

$$m \geq \frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 - k^2 - M^2 + \Gamma^2 + 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2} = 4|B|\left(m + n + \frac{1}{2}\right);$$

его можно представить в более коротком виде

$$\epsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 4|B|(m + n + \frac{1}{2})} - \Gamma\right)^2, \quad m \geq +\frac{1}{2}. \tag{37}$$

Теперь рассматриваем случай $L_2, m \leq -1/2$:

$$x\frac{d^2Q_1}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} - m - x\right)\frac{dQ_1}{dx} - \left(-\frac{C_1}{4|B|}\right)Q_1 = 0.$$

Требование квантования $\gamma = -n$ принимает вид

$$m \leq -\frac{1}{2}, \quad C_1 = 4|B|n,$$

$$\epsilon^2 - k^2 - M^2 + \Gamma^2 + 2\Gamma\sqrt{\epsilon^2 - k^2} - \Big\{M^2 - \Gamma^2\Big\} = 4n|B|,$$

или

$$m \le -\frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 4|B|n} - \Gamma\right)^2. \tag{38}$$

Теперь обращаемся к уравнению для R_2. Поскольку формально оно отличается от уравнения R_1 только заменой $\Gamma \Longrightarrow -\Gamma$, то никаких дополнительных вычислений проводить не нужно. Выражение для спектра можно написать сразу

$$m \ge \frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 4|B|(m + n + \frac{1}{2})} + \Gamma\right)^2; \tag{39}$$

$$m \le -\frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 4|B|(n + \frac{1}{2})} + \Gamma\right)^2. \tag{40}$$

Рассмотрим уравнение для Φ_2

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m\,(m-1)}{r^2} + (2m+1)\,B - Br^2 + C_1\right]\Phi_2 = 0. \tag{41}$$

Для анализа уравнения используем ту же самую переменную x; тогда получаем

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx} - \frac{m\,(m-1)}{4x} - \frac{2m+1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{C_1}{4|B|}\right]\Phi_2 = 0. \tag{42}$$

Используем подстановку $\Phi_2 = x^L \epsilon^{-Cx} P_2(x)$;

$$x\frac{d^2P_2}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} + 2L - 2Cx\right)\frac{dP_2}{dx} + \frac{1}{x}\left[L\,(L-1) - \frac{m\,(m-1)}{4} + \frac{L}{2}\right]P_2 +$$

$$+\left(C^2 - \frac{1}{4}\right)xP_2 - \left[2LC + \frac{1}{2}C + \frac{2m+1}{4} - \frac{C_1}{4|B|}\right]P_2 = 0.$$

Требуем выполнения равенств:

$$C^2 - \frac{1}{4} = 0, \quad L\,(L-1) - \frac{m\,(m-1)}{4} + \frac{L}{2} = 0\,;$$

отсюда получаем ограничения: $C = \pm 1/2$ (используем $C = +1/2$;

$$L_1 = \frac{1-m}{2} \Longrightarrow m \le -\frac{1}{2}, \quad L_2 = \frac{m}{2} \Longrightarrow m \ge \frac{1}{2}.$$

Рассматриваем вариант $L_1, m \le -1/2$:

$$x\frac{d^2P_2}{dx^2} + \left(-m + \frac{3}{2} - x\right)\frac{dP_2}{dx} - \left(1 - \frac{C_1}{4|B|}\right)P_2 = 0$$

это уравнение является вырожденным гипергеометрическим уравнением с параметрами

$$\gamma = -m + \frac{3}{2}, \quad \alpha = 1 - \frac{C_1}{4|B|}\,.$$

Условие квантования $\alpha = -n$ дает

$$m \leq -\frac{1}{2}, \quad C_1 = 4|B|(n+1).$$

Учитывая смысл параметра C_1, получаем правило квантования

$$m \leq -\frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 4|B|(n+1)} - \Gamma \right)^2, \quad m \leq -\frac{1}{2}. \tag{43}$$

Теперь рассматриваем случай $L_2, m \geq +1/2$:

$$x \frac{d^2 P_2}{dx^2} + \left(\frac{1}{2} + m - x \right) \frac{dP_2}{dx} - \left(m + \frac{1}{2} - \frac{C_1}{4|B|} \right) P_2 = 0.$$

Требование квантования $\alpha = -n$ дает

$$m \geq +\frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 4|B|(n + m + \frac{1}{2})} - \Gamma \right)^2, \quad m < 0. \tag{44}$$

Результаты для функции Φ_1 получаются простой заменой параметра: $\Gamma \Longrightarrow -\Gamma$.

4 Заключение

Соберем результаты по найденным спектрам энергии вместе:
$R_1, R_2 \longrightarrow (\mp)$,

$$m \geq +\frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 4|B|(n + m + \frac{1}{2})} \mp \Gamma \right)^2,$$
$$m \leq -\frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 4|B|n} \mp \Gamma \right)^2 .; \tag{45}$$

$\Phi_2, \Phi_1 \longrightarrow (\mp)$,

$$m \geq +\frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 4|B|(n + m + \frac{1}{2})} \mp \Gamma \right)^2, \quad m < 0.$$
$$m \leq -\frac{1}{2}, \quad \epsilon^2 - k^2 = \left(\sqrt{M^2 + 4|B|(n+1)} \mp \Gamma \right)^2, \quad m \leq -\frac{1}{2}. \tag{46}$$

Можно сделать вывод, что существенно разные спектры энергии имеем для двух классов состояний:

$$\{R_1, R_2 = 0, \Phi_1 = 0, \Phi_2\}, \qquad \{R_1 = 0, R_2, \Phi_1, \Phi_2 = 0\};$$

связь между ними достигается с помощью формальной замены $\Gamma \Longrightarrow -\Gamma$.

Список литературы

[1] Редьков В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Белорусская наука, Минск, 2009. 486 стр.

[2] Кисель В.В., Токаревская Н.Г., Редьков В.М. Теория Петраша для частицы со спином 1/2 в искривленном пространстве-времени. / Препринт № 737, Институт физики НАНБ, Минск, 2002, 25 с.

[3] Богуш А.А., Кисель В.В., Токаревская Н.Г., Редьков В.М. Теория Петраша для частицы со спином 1/2 в искривленном пространстве-времени. // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. 2002. № 1. С. 63 – 68.