О теории релятивистских волновых уравнений для частиц с внутренней структурой: уравнения Кокса, Шамали–Капри, Плетюхова–Федорова

О.В. Веко
vekoolga@mail.ru; Гимназия, г. Калинковичи, Беларусь
Я.А. Войнова
voinyuschka@mail.ru; Средняя школа, Ельский район, Беларусь
В.В. Кисель
Белорусский Государственный Университет Информатики и Радиоэлектроники

Аннотация

Отказ от требования минимальности используемых наборов представлений группы Лоренца существенно расширяет возможности метода релятивистских волновых уравнений с точки зрения пространственно-временного описания внутренней структуры частиц. Получение новых уравнений с более богатой структурой для частицы с заданным спином s возможно либо за счет включения представлений с более высокими спинами, либо за счет использования повторяющихся (кратных) представлений группы Лоренца.

Данная работа посвящена изложенного того, как в рамках общего подхода к теории релятивистских волновых уравнений первого порядка с расширенными наборами представлений группы Лоренца возникают уравнения, известные в литературе как уравнения для частиц со спином ноль и единица, обладающих дополнительной электромагнитной структурой; речь идет об уравнении Кокса для частицы со спином 0, уравнении Шамали–Капри для частицы со спином 1, и уравнениях Плетюхова–Федорова для частиц спинов ноль и единица с дополнительной электромагнитной характеристикой (часто называемой поляризуемостью).

1 Введение

Теория релятивистских волновых уравнений первого порядка, записанных в матричной форме, предполагает в своей исходной формулировке возможность описания только одной, спиновой, внутренней степени свободы элементарных частиц. Математическим отражением этого обстоятельства является использование минимального набора неприводимых представлений группы Лоренца, который необходим для описания частицы с заданным значением спина (уравнение Дирака для спина 1/2, уравнения Даффина–Кеммера для спинов 0 и 1, уравнение Фирца–Паули для спина 3/2). Однако в 1955–1957 гг. Петрашем и Улеглой было построено уравнение для частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом, которое возникает за счет привлечения дополнительных по отношению к биспинору неприводимых компонент в пространстве представлений волновой функции частицы. Еще ранее, в 1928 году, английским физиком Дарвином было предложено уравнение (впоследствии получившее название уравнения Дирака–Кэлера), которое содержит двукратные скалярную и векторную компоненты. Данное уравнение допускает трактовку как РВУ для спина 1/2 и дополнительной внутренней степенью свободы. Уравнения Дирака–Кэлера и Петраша–Улеглы можно считать первыми РВУ, которые выходят за рамки стандартных положений теории поля. Они продемонстрировали, что в подходе теории РВУ при отказе от условия минимальности используемого набора представлений группы Лоренца можно описывать внутреннюю структуру частиц, включая дополнительные степени свободы. С конца 1960-х – начала 1970-х годов данное направление начинает активно развиваться в нашей республике с работ академика Ф. И. Федорова и его учеников.

За прошедшие десятилетия был накоплен богатый материал по развитию теории релятивистских волновых уравнений с расширенными наборами неприводимых представлений группы Лоренца. В частности убедительно доказано, что отказ от требования минимальности используемых наборов представлений группы Лоренца существенно расширяет возможности метода релятивистских волновых уравнений с точки зрения пространственно-временного описания как внутренней структуры, так и изоспиновых степеней свободы частиц. Получение новых уравнений с более богатой структурой для частицы с заданным спином s возможно либо за счет включения представлений с более высокими спинами, либо за счет использования повторяющихся (кратных) представлений группы Лоренца. Определенный итог работе, проделанной в этом направлении белорусской школой теоретической физики был подведен в недавней книге [1].

Данная заметка посвящена изложенного того, как в рамках общего подхода к теории релятивистских волновых уравнений первого порядка с расширенными наборами представлений группы Лоренца возникают уравнения, известные в литературе как уравнения частиц спина ноль и единица, обладающих дополнительной электромагнитной структурой; имеются в виду уравнение Кокса для частицы со спином 0 и уравнение Шамали–Капри для частицы со спином 1, уравнения Плетюхова–Федорова для частиц спинов ноль и единица с дополнительной электромагнитной характеристикой (часто называемой поляризуемостью).

2 Обобщенное уравнение для скалярной частицы частицы

Исходим из системы уравнений для набора тензорных полей: вектора, скаляра, симметричного и антисимметричного тензоров. Она отвечает частице со спином ноль. Учитываем присутствие внешнего электромагнитного поля. Фактически эта схема эквивалентна подходу Кокса [2]:

$$\lambda_1 D_\mu \psi_\mu^{(1)} + M\psi_0^{(1)} = 0, \tag{1a}$$

$$\lambda_1^* D_\mu \psi_0^{(1)} - \lambda_2 D_\rho \psi_{[\rho\mu]}^{(1)} + \lambda_3 D_\rho \psi_{(\rho\mu)}^{(1)} + M\psi_\mu^{(1)} = 0, \tag{1b}$$

$$-\lambda_2^*(D_\mu \psi_\nu^{(1)} - D_\nu \psi_\mu^{(1)}) + M\psi_{[\mu\nu]}^{(1)} = 0, \tag{1c}$$

$$-\lambda_3^*(D_\mu \psi_\nu^{(1)} + D_\nu \psi_\mu^{(1)} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} D_\rho \psi_\rho^{(1)}) + M\psi_{(\mu\nu)}^{(1)} = 0. \tag{1d}$$

Здесь λ_k – числовые параметры, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_1\lambda_1^* - \frac{3}{2}\lambda_3\lambda_3^* = 1, \qquad \lambda_2\lambda_2^* - \lambda_3\lambda_3^* = 0\ . \tag{2}$$

Эти условия обеспечивают выполнимость требований: спин частицы равен нулю; частица может находиться лишь в одном спиновом состоянии ($s = 0$).

Выразим из четвертого и третьего уравнений системы (1) тензоры $\psi_{(\mu\nu)}^{(1)}$ и $\psi_{[\mu\nu]}^{(1)}$ и подставим их во второе уравнение системы. В полученном уравнении учтем (1a) и (2). В результате приходим к уравнению

$$\frac{1}{\lambda_1} D_\mu \psi_0^{(1)} + 2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M} F_{[\mu\nu]}\psi_\nu^{(1)} + M\psi_\mu^{(1)} = 0.$$

Полагая

$$\psi_0^{(1)} = \Phi_0, \quad \lambda_1 \psi_\mu^{(1)} = \Phi_\mu,$$

получаем систему из двух тензорных уравнений для 4-вектора и скаляра:

$$D_\mu \Phi_\mu + M\Phi_0 = 0, \tag{3a}$$

$$D_\mu \Phi_0 + 2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M} F_{[\mu\nu]}\Phi_\nu + M\Phi_\mu = 0. \tag{3b}$$

Введенная система уравнений по сравнению со стандартной системой уравнений для скалярной частицы [3] содержит дополнительное слагаемое

$$2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M} F_{[\mu\nu]}\Phi_\nu \ ;$$

оно отвечает некоторой дополнительной электромагнитной характеристике скалярной частицы.

Приведем матричную форму записи системы (3):

$$\left(\beta_\mu D_\mu + \frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[\mu\nu]} J_{[\mu\nu]}^{(0)} + M\right)\Phi = 0,$$

где

$$\Phi = \begin{vmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_\mu \end{vmatrix},$$

β_μ – 5 x 5-матрицы Петьо–Даффина–Кеммера, $J_{[\mu\nu]}^{(0)} = \beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu$.

Получим нерелятивистский аналог системы уравнений (3). Для этого выделим уравнения относительно функций Φ_0, Φ_k, Φ_4, а также произведем (3+1)-расщепление исходных уравнений. Получаем

$$D_4\Phi_4 + D_k\Phi_k + M\Phi_0 = 0,$$

$$D_k\Phi_0 + 2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M} F_{[ka]}\Phi_a + 2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M} F_{[k4]}\Phi_4 + M\Phi_k = 0,$$

$$D_4\Phi_0 + 2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M} F_{[4c]}\Phi_c + M\Phi_4 = 0.$$

В предположении малости параметра $e\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M}$, слабости внешнего поля, малости функции Φ_k имеем

$$\Phi_k = -\frac{1}{M}\left(D_k\Phi_0 + 2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M} F_{[k4]}\Phi_4\right).$$

Следовательно

$$D_4\Phi_4 + M\Phi_0 - \frac{1}{M} D_k \left(D_k\Phi_0 + 2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M} F_{[k4]}\Phi_4\right) = 0,$$

$$D_4\Phi_0 + M\Phi_4 + 2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M^2} F_{[k4]} \left(D_k\Phi_0 + 2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M} F_{[k4]}\Phi_4\right) = 0.$$

Вводим обозначения ($B(S)$ – большая (малая) составляющие функций Φ_0, Φ_4)

$$\Phi_0 = B + S, \quad \Phi_4 = B - S \ ;$$

приходим к уравнениям

$$D_4(B-S)+M(B+S)-\frac{1}{M}D_kD_k(B+S)-2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M}D_kF_{[k4]}(B-S)=0,$$

$$D_4(B+S)+M(B_S)+2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M^2}F_{[k4]}D_k(B-S)-4e^2\frac{(\lambda_3\lambda_3^*)^2}{M^3}F_{[k4]}F_{[k4]}(B-S)=0.$$

Отсюда следует

$$2D_4B+2MB-\frac{1}{M}D_kD_kB-2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M^2}(D_kF_{[k4]}-F_{[k4]}D_k)B+$$

$$2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M^2}(D_kF_{[k4]}+F_{[k4]}D_k)S-4e^2\frac{(\lambda_3\lambda_3^*)^2}{M^3}F_{[k4]}F_{[k4]}(B-S)=0,$$

$$-2D_4S+2MS-\frac{1}{M}D_kD_kB-2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M^2}(D_kF_{[k4]}+F_{[k4]}D_k)B+$$

$$2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M^2}(D_kF_{[k4]}-F_{[k4]}D_k)S-4e^2\frac{(\lambda_3\lambda_3^*)^2}{M^3}F_{[k4]}F_{[k4]}(B-S)=0.$$

В полученных уравнениях совершаем формальную замену $D_4 \Longrightarrow (D_4-M)$, отвечающую выделению энергии покоя; одновременно пренебрегаем малой компонентой S в сравнении с большой B; кроме того, пренебрегаем членом D_4S по сравнению с MS. В результате приходим к более простым уравнениям (пусть $B=\Psi, S=\psi$):

$$D_4\Psi=\left(\frac{1}{2M}D_kD_k+ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M^2}(\partial_kF_{[k4]})+2e^2\frac{(\lambda_3\lambda_3^*)^2}{M^3}F_{[k4]}F_{[k4]}\right)\Psi, \tag{4a}$$

$$\psi=\frac{1}{4M}\left(\frac{1}{M}D_kD_k+2ie\frac{\lambda_3\lambda_3^*}{M^2}(D_kF_{[k4]}+F_{[k4]}D_k)+4e^2\frac{(\lambda_3\lambda_3^*)^2}{M^3}F_{[k4]}F_{[k4]}\right)\Psi. \tag{4b}$$

Первое уравнение содержит только большую компоненту B, оно представляет собой нерелятивистское обобщенное уравнение Шредингера для скалярной частицы. Согласно анализу Швебера [4], такого типа уравнение можно интерпретировать как уравнение для частицы, заряд которой распределен в объеме радиуса порядка $\sqrt{\lambda_3\lambda_3^*}/M$, обладающей вследствие этого электрической поляризуемостью. Соответствующий параметр поляризуемости определяется соотношением

$$2e^2\frac{(\lambda_3\lambda_3^*)^2}{M^3}. \tag{5}$$

3 Обобщенное уравнение для векторной частицы

Рассмотрим еще один вариант расширенных релятивистских уравнений первого порядка для частицы со спином 1, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем (отмечаем, что используемый при этом набор тензорных полей тот же самый, что и в случае скалярной частицы):

$$\lambda_1D_\mu\psi_\mu^{(1)}+M\psi_0^{(1)}=0, \tag{6a}$$

$$\lambda_1^*D_\mu\psi_0^{(1)}-\lambda_2D_\rho\psi_{[\rho\mu]}^{(1)}+\lambda_3D_\rho\psi_{(\rho\mu)}^{(1)}+M\psi_\mu^{(1)}=0, \tag{6b}$$

$$-\lambda_2^*(D_\mu\psi_\nu^{(1)}-D_\nu\psi_\mu^{(1)})+M\psi_{[\mu\nu]}^{(1)}=0, \tag{6c}$$

$$-\lambda_3^*(D_\mu\psi_\nu^{(1)}+D_\nu\psi_\mu^{(1)}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}D_\rho\psi_\rho^{(1)})+M\psi_{(\mu\nu)}^{(1)}=0; \tag{6d}$$

причем параметры λ_i подчинены условиям

$$\lambda_1\lambda_1^* - \frac{3}{2}\lambda_3\lambda_3^* = 0, \qquad \lambda_2\lambda_2^* - \lambda_3\lambda_3^* = 1. \tag{7}$$

Выразим из первого и четвертого уравнений системы (6) величины $\psi_0^{(1)}$ и $\psi_{(\mu\nu)}^{(1)}$ через 4-вектор $\psi_\mu^{(1)}$ и подставим их во второе уравнение системы. В результате приходим к уравнению

$$-\lambda_2 D_\nu \psi_{[\nu\mu]}^{(1)} + \frac{\lambda_3\lambda_3^*}{\lambda_2^*} D_\nu \psi_{[\nu\mu]}^{(1)} + 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[\mu\rho]}\psi_\rho^{(1)} + M\psi_\mu^{(1)} = 0$$

или (см. (7))

$$-\frac{1}{\lambda_2^*} D_\nu \psi_{[\nu\mu]}^{(1)} + 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[\mu\rho]}\psi_\rho^{(1)} + M\psi_\mu^{(1)} = 0. \tag{8}$$

Вводя 4-вектор $\psi_\mu^{(0)}$ и антисимметричный тензор $\psi_{[\mu\nu]}^{(0)}$ согласно соотношениям

$$\psi_\mu^{(0)} = \lambda_2^*\psi_\mu^{(1)}, \qquad \psi_{[\mu\nu]}^{(0)} = \psi_{[\mu\nu]}^{(1)},$$

из (6с), (8) получаем

$$-(D_\mu\psi_\nu^{(0)} - D_\nu\psi_\mu^{(0)}) + M\psi_{[\mu\nu]}^{(0)} = 0, \tag{9a}$$

$$D_\nu\psi_{[\mu\nu]}^{(0)} + 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[\mu\rho]}\psi_\rho^{(0)} + M\psi_\mu^{(0)} = 0. \tag{9b}$$

Таким образом, как и в предыдущем случае исходная расширенная система тензорных уравнений (6) (здесь для частицы со спином 1) сводится к системе тензорных уравнений в подходе Петьо–Даффина–Кеммера (9а), (9b) [3], но содержащих дополнительное слагаемое

$$2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[\mu\rho]}\psi_\rho^{(0)}. \tag{10}$$

Отметим также, что при переходе к матричной форме записи системы (9) получаем

$$\left(\beta_\mu D_\mu + \frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[\mu\nu]} P J_{[\mu\nu]}^{(0)} + M\right)\psi^{(0)} = 0,$$

где

$$\psi^{(0)} = \begin{vmatrix} \psi_\mu^{(0)} \\ \psi_{[\mu\nu]}^{(0)} \end{vmatrix},$$

β_μ – 10x10-матрицы Петьо–Даффина–Кеммера, P – проективный оператор, выделяющий из $\psi^{(0)}$ составляющую $\psi_\mu^{(0)}$, $J_{[\mu\nu]}^{(0)} = \beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu$.

Определим нерелятивистский аналог системы уравнений (9). Проведя (3+1)-расщепление, получаем

$$D_4\psi_{[a4]}^{(0)} + D_k\psi_{[ak]}^{(0)} + 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[ak]}\psi_k^{(0)} + 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[a4]}\psi_4^{(0)} + M\psi_a^{(0)} = 0,$$

$$-D_k\psi_{[k4]}^{(0)} - 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[k4]}\psi_k^{(0)} + M\psi_4^{(0)} = 0,$$

$$D_b\psi_a^{(0)} - D_a\psi_b^{(0)} + M\psi_{[ab]}^{(0)} = 0,$$

$$D_4\psi_a^{(0)} - D_a\psi_4^{(0)} + M\psi_{[a4]}^{(0)} = 0.$$

Отсюда следует

$$\psi_4^{(0)} = \frac{1}{M}D_k\psi_{[k4]}^{(0)} - 2\frac{ie}{M^2}\lambda_3\lambda_3^* F_{[k4]}\psi_k^{(0)},$$

$$\psi_{[ab]}^{(0)} = \frac{1}{M}(D_b\psi_a^{(0)} - D_a\psi_b^{(0)});$$

значит,

$$D_4\psi_a^{(0)} + M\psi_{[a4]}^{(0)} - \frac{1}{M}D_aD_k\psi_{[k4]}^{(0)} - 2\frac{ie}{M^2}\lambda_3\lambda_3^* D_aF_{[k4]}\psi_k^{(0)} = 0,$$

$$D_4\psi_{[a4]}^{(0)} + M\psi_a^{(0)} + \frac{1}{M}D_kD_a\psi_k^{(0)} - \frac{1}{M}D_kD_k\psi_a^{(0)} + 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[ak]}\psi_k^{(0)} -$$

$$2\frac{ie}{M^2}\lambda_3\lambda_3^* F_{[a4]}D_k\psi_{[k4]}^{(0)} - 4\frac{e^2}{M^3}(\lambda_3\lambda_3^*)^2 F_{[a4]}F_{[k4]}\psi_k^{(0)} = 0.$$

Полагаем

$$\psi_a^{(0)} = B_a + M_a, \qquad \psi_{[a4]}^{(0)} = B_a - M_a,$$

где B_a, M_a – большая и малая составляющие функций $\psi_a^{(0)}$, $\psi_{[a4]}^{(0)}$. Тогда

$$D_4(B_a + M_a) + M(B_a - M_a) - \frac{1}{M}D_aD_k(B_k - M_k) -$$

$$2\frac{ie}{M^2}\lambda_3\lambda_3^* D_aF_{[k4]}(B_k + M_k) = 0,$$

$$D_4(B_a - M_a) + M(B_a + M_a) +$$

$$\frac{1}{M}D_kD_a(B_k + M_k) - \frac{1}{M}D_kD_k(B_a + M_a) + 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[ak]}(B_k + M_k) -$$

$$2\frac{ie}{M^2}\lambda_3\lambda_3^* F_{[a4]}D_k(B_k - M_k) - 4\frac{e^2}{M^3}(\lambda_3\lambda_3^*)^2 F_{[a4]}F_{[k4]}(B_k + M_k) = 0.$$

Отсюда следует

$$2D_4B_a + 2MB_a - \frac{1}{M}(D_aD_k - D_kD_{a)})B_k + \frac{1}{M}(D_aD_k + D_kD_{a)})M_k -$$

$$\frac{1}{M}D_kD_k(B_a + M_a) - 2\frac{ie}{M^2}\lambda_3\lambda_3^* D_aF_{[k4]}(B_k + M_k) + 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[ak]}(B_k + M_k) -$$

$$2\frac{ie}{M^2}\lambda_3\lambda_3^* F_{[a4]}D_k(B_k - M_k) - 4\frac{e^2}{M^3}(\lambda_3\lambda_3^*)^2 F_{[a4]}F_{[k4]}(B_k + M_k) = 0,$$

$$2D_4M_a - 2MM_a - \frac{1}{M}(D_aD_k + D_kD_{a)})B_k + \frac{1}{M}(D_aD_k - D_kD_{a)})M_k +$$

$$\frac{1}{M}D_kD_k(B_a + M_a) - 2\frac{ie}{M^2}\lambda_3\lambda_3^* D_aF_{[k4]}(B_k + M_k) - 2\frac{ie}{M}\lambda_3\lambda_3^* F_{[ak]}(B_k + M_k) +$$

$$2\frac{ie}{M^2}\lambda_3\lambda_3^* F_{[a4]}D_k(B_k - M_k) + 4\frac{e^2}{M^3}(\lambda_3\lambda_3^*)^2 F_{[a4]}F_{[k4]}(B_k + M_k) = 0.$$

Из первого уравнения полученной системы при осуществлении замены $D_4 \Longrightarrow (D_4 - M)$ (выделении энергии покоя) и пренебрежении малой компонентой M_a в сравнении с большой B_a находим (пусть $B_k = \Psi_k$)

$$D_4 \Psi_l = \frac{1}{2M} D_k D_k \Psi_l - \frac{ie}{2M} (1 + 2\lambda_3 \lambda_3^*) F_{[lk]} \Psi_k +$$

$$+ \frac{ie}{M^2} \lambda_3 \lambda_3^* \left(D_l F_{[k4]} + F_{[l4]} D_k \right) \Psi_k + 2 \frac{e^2}{M^3} (\lambda_3 \lambda_3^*)^2 F_{[l4]} F_{[k4]} \Psi_k = 0. \tag{11}$$

Отмечаем присутствие дополнительных членов взаимодействия частицы с внешними магнитными и электрическими полями. В отсутствие электрического поля уравнение упрощается

$$D_4 \Psi_l = \frac{1}{2M} D_k D_k B_l - \frac{ie}{2M} (1 + 2\lambda_3 \lambda_3^*) F_{[lk]} \Psi_k \; ; \tag{12}$$

здесь дополнительное слагаемое можно связать с наличием у векторной частицы аномального магнитного момента.

Если исходить из второго уравнения последней системы, выполнить приведенные требования, а также пренебречь на заключительном этапе членом $D_4 M_a$ по сравнению с $M M_a$, то приходим к уравнению по определению малых функций M_a через большие $B_k = \Psi_k$.

4 Дальнейшие обобщения: частицы с поляризуемостью

Аналогичные обобщенные системы уравнений могут быть развиты на основе зацеплении скаляра, двух векторов, антисимметричного тензора. В случае скалярной частицы исходная система имеет вид [6], [7]

$$\lambda_1 D_\mu \psi_\mu^{(1)} + \lambda_2 D_\mu \varphi_\mu^{(1)} + M \psi_0^{(1)} = 0, \tag{13a}$$

$$\lambda_1^* D_\mu \psi_0^{(1)} + \lambda_3 D_\rho \psi_{[\rho\mu]}^{(1)} + M \psi_\mu^{(1)} = 0, \tag{13b}$$

$$-\lambda_2^* D_\mu \psi_0^{(1)} + \lambda_4 D_\rho \psi_{[\rho\mu]}^{(1)} + M \varphi_\mu^{(1)} = 0, \tag{13c}$$

$$\pm \lambda_3^* (D_\rho \psi_\sigma^{(1)} - D_\sigma \psi_\rho^{(1)}) \mp \lambda_4^* (D_\rho \varphi_\sigma^{(1)} - D_\sigma \varphi_\rho^{(1)}) + M \psi_{[\rho\sigma]}^{(1)} = 0, \tag{13d}$$

где постоянные λ_i, удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 \lambda_1^* - \lambda_2 \lambda_2^* = 1, \qquad \lambda_3 \lambda_3^* - \lambda_4 \lambda_4^* = 0 \; ; \tag{14}$$

В случае векторной частицы исходная система уравнений (для того же самого набора тензорных полей, но с другой схемой зацепления) следующая [8], [9]:

$$\lambda_1 D_\mu \psi_\mu^{(1)} + \lambda_2 D_\mu \varphi_\mu^{(1)} + M \psi_0^{(1)} = 0, \tag{15a}$$

$$\mp \lambda_1^* D_\mu \psi_0^{(1)} + \lambda_3 D_\rho \psi_{[\rho\mu]}^{(1)} + M \psi_\mu^{(1)} = 0, \tag{15b}$$

$$\pm \lambda_2^* D_\mu \psi_0^{(1)} + \lambda_4 D_\rho \psi_{[\rho\mu]}^{(1)} + M \varphi_\mu^{(1)} = 0, \tag{15c}$$

$$\lambda_3^* (D_\rho \psi_\sigma^{(1)} - D_\sigma \psi_\rho^{(1)}) - \lambda_4^* (D_\rho \varphi_\sigma^{(1)} - D_\sigma \varphi_\rho^{(1)}) + M \psi_{[\rho\sigma]}^{(1)} = 0, \tag{15d}$$

где для постоянных λ_i имеют место ограничения

$$\lambda_1 \lambda_1^* - \lambda_2 \lambda_2^* = 0, \quad \lambda_3 \lambda_3^* - \lambda_4 \lambda_4^* = 1. \tag{16}$$

Соответствующая система уравнений для основных компонент в случае скалярной частицы имеет вид (см. обозначения в[10])

$$D_\mu \Phi_\mu \mp \frac{e^2 dd^*}{2M^3} F_{[\rho\mu]} F_{[\rho\mu]} \psi_0^{(0)} + M\psi_0^{(0)} = 0,$$

$$D_\mu \psi_0^{(0)} + M\Phi_\mu = 0. \tag{17}$$

в случае векторной частицы уравнения для основных компонент следующие (см. обозначения в [10]):

$$(D_\sigma \Phi_\rho - D_\rho \Phi_\sigma) \pm \frac{e^2}{2M^3} dd^* F_{[\rho\sigma]} F_{[\mu\nu]} \psi_{[\mu\nu]}^{(0)} + M\psi_{[\rho\sigma]}^{(0)} = 0,$$

$$D_\rho \psi_{[\mu\rho]}^{(0)} + M\Phi_\mu = 0. \tag{18}$$

Описываемые этими уравнения частицы спинов ноль и единица обладают дополнительной электромагнитной характеристикой – поляризуемостью [7].

Рассмотренные примеры указывают на то, что базирующаяся на группе Лоренца и лагранжевом формализме теория релятивистских волновых уравнений первого порядка [1] содержит в себе множество еще неизученных и неиспользованных возможностей для описания дополнительных внутренних структур элементарных частиц.

Список литературы

[1] В.А. Плетюхов, В.М. Редьков, В.И. Стражев. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы. – Беларуская навука: Минск, 2015. – 328 с.

[2] W.J. Cox Higher-rank representations for zero-spin filds theories Phys.: Math. and Gen. 1982. Vol.15, No 2. P. 627–635.

[3] А.А. Богуш. Введение в полевую теорию элементарных частиц. – Мн.: Наука и техника, 1981, – 390 с.

[4] С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. – М.: ИЛ, 1963, – 842с.

[5] A. Shamaly, A.Z. Capri. Unified theories for massive spin 1 fields. Can. J. Phys. 1973. Vol. 51, no 14. P. 1467 – 1470.

[6] В.А. Плетюхов, Ф.И. Федоров Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0. Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1970. no 2. С. 79–85.

[7] А.А. Богуш, В.В. Кисель, М.И. Левчук, Л.Г. Мороз. Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теории относительности. - ИФ АН БССР: – Минск, 1981. С. 81–90.

[8] В.А. Плетюхов, Ф.И. Федоров. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1. Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1970. no 3. С. 84–92.

[9] В.В. Кисель. Электрическая поляризуемость частиц со спином 1 втеории релятивистских волновых уравнений. Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1982. no 3. С. 73–78.

[10] Редьков В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Белорусская наука, Минск, 2009. 486 стр.