Известия вузов. Математика
2013, №12, с. 51–68

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Н.П. МОЖЕЙ

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. I

Аннотация. Цель данной работы — описать инвариантные аффинные связности на псевдоримановых однородных пространствах в размерностях 2 и 3. Приведена локальная классификация римановых однородных пространств, эквивалентная описанию эффективных пар алгебр Ли, допускающих инвариантную невырожденную симметричную билинейную форму на изотропном модуле. Классификация псевдоримановых однородных пространств рассмотрена в отдельной статье (часть 2). Найдены все инвариантные аффинные связности, их тензоры кривизны и кручения, выделены аффинные связности на римановых однородных пространствах и римановы связности.

Ключевые слова: инвариантная аффинная связность, псевдориманово однородное пространство.

УДК: 514.76

1. Введение

Впервые понятие связности возникло в работе Т. Леви-Чивита [1] о параллельном переносе вектора в римановой геометрии, Г. Вейль [2] ввел понятие аффинной связности. Следующий этап в развитии теории связностей открыла работа Э. Картана [3]. Обзор дальнейшего развития теории связностей излагается в работе Ю.Г. Лумисте [4].

С. Ли впервые поставил вопрос о движениях в римановых пространствах. Классификация двух и трехмерных собственно римановых пространств (по группам движений) была дана еще Л. Бианки. В [5] Г.И. Кручкович получил классификацию (собственно римановых и псевдоримановых пространств) по группам движений, трехмерные пространства изучались в многих работах (например, [6], [7] и др.). П.А. Широков определил все двумерные псевдоримановы многообразия с общими геодезическими (например, [8]). Используя и развивая идеи П.А. Широкова, А.З. Петров [9] дал классификацию геодезически соответствующих трехмерных псевдоримановых пространств.

Цель данной работы — описать инвариантные аффинные связности на псевдоримановых однородных пространствах размерности 2 и 3, выделить из них аффинные связности на римановых пространствах и римановы связности. В отдельную работу выделены псевдоримановы однородные пространства, не допускающие риманову метрику (часть 2).

Пусть M — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $(M, \overline{G})$ — однородное пространство, $G = \overline{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \overline{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\overline{G}, G)$, где $G \subset \overline{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\overline{G}/G$ (например, [10]).

Поступила 21.08.2012

При изучении однородных пространств важно рассматривать не саму группу $\overline{G}$, а ее образ в $\mathrm{Diff}(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы $\overline{G}$ на многообразии M.

Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что G — связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. *Изотропное действие* группы G на T_xM — это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g}) = (\mathrm{Ad}\, s)(x) + \mathfrak{g}$, $s \in G$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра Ли $\mathfrak{g}$ действует на касательном пространстве $T_xM = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$x.(y+\mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$$

для всех $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$. С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора $\overline{G}_x$ произвольной точки $x \in M$ на T_xM имеет нулевое ядро.

Псевдориманово однородное пространство задается тройкой $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, где $\overline{G}$ — связанная группа Ли, M является связанным гладким многообразием с транзитивным действием $\overline{G}$, а $\mathbf{g}$ — инвариантная псевдориманова метрика на M. Инвариантные псевдоримановы метрики $\mathbf{g}$ на M находятся во взаимно однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ ([11], [12]). Билинейная форма B также является инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$:

$$B(x.v_1, v_2) + B(v_1, x.v_2) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{g}, \quad v_1, v_2 \in \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}. \tag{1}$$

Каждое псевдориманово однородное пространство $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, $\mathrm{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\, \mathfrak{g} \leq 4$, описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, где $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — эффективная пара алгебр Ли, а B — инвариантная симметричная невырожденная билинейная форма на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Действительно, из [13] следует, что существует единственное (с точностью до эквивалентности) эффективное однородное пространство $(\overline{G}, M)$ такое, что M односвязно и стационарная подгруппа G связна. Покажем, что это однородное пространство допускает единственную инвариантную псевдориманову метрику $\mathbf{g}$, соответствующую билинейной форме B. Пусть $m = eG \in M$, где e — единичный элемент в $\overline{G}$. Для существования $\mathbf{g}$ достаточно, чтобы B было инвариантно относительно изотропного действия G на $T_mM \cong \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Это условие выполняется, так как G связана и B — инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Таким образом, существует единственное (с точностью до эквивалентности) псевдориманово однородное пространство $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, соответствующее $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, такое, что M односвязно и G связна. Будем называть тройку $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *локально псевдоримановым однородным пространством.*

2. Связности на двумерных псевдоримановых однородных пространствах

Теорема 1. *Одномерных псевдоримановых однородных пространств с ненулевым стабилизатором нет.*

Доказательство. Поскольку каждая инвариантная псевдориманова метрика определяет аффинную связность, $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Предположение, что действие $\overline{G}$ на M эффективно, позволяет отождествить $\overline{G}$ с подгруппой группы Ли $\mathrm{Aut}(M, \mathbf{g})$, причем ее размерность не превосходит $\frac{1}{2}\dim M(\dim M + 1)$. Поэтому $\dim \overline{G} \leq 1$, и, так как $\overline{G}$ транзитивна на M, изотропно точных пар с ненулевым стабилизатором нет. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *— локально псевдориманово однородное пространство такое, что* $\mathrm{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\, \mathfrak{g} = 2$ *и* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$. *Оно эквивалентно одной и только одной из следующих троек:*

1. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,1)$,

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & u_1 & u_2 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 \\ u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 \end{array}, \quad B = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$,

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & u_1 & u_2 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 \end{array}, \quad B = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

3. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$:

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & u_1 & u_2 \\ \hline e_1 & 0 & 2u_1 & -2u_2 \\ u_1 & -2u_1 & 0 & e_1 \\ u_2 & 2u_2 & -e_1 & 0 \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, a \neq 0;$$

4. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} ix & 0 \\ 0 & -ix \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$:

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & u_1 & u_2 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1 \\ u_2 & -u_1 & -e_1 & 0 \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0;$$

5. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$:

$$\begin{array}{c|ccc} & e_1 & u_1 & u_2 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1 \\ u_2 & -u_1 & e_1 & 0 \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Здесь e_1 — базис подалгебры $\mathfrak{g}$, а u_1, u_2 – базис подпространства, дополнительного к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$.

Доказательство. Локальная классификация всех двумерных однородных пространств проведена С. Ли [14]. Чтобы получить классификацию локально псевдоримановых однородных пространств, требуется выбрать из классификации Ли пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ допускает инвариантную невырожденную симметрическую билинейную форму B (выполнено в [15]) и описать все такие формы B с точностью до индуцированного действия $\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные псевдоримановы однородные пространства — только двумерные группы Ли с инвариантной метрикой.

Рассмотрим пару 1 $(\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,1))$. Найдем все инвариантные симметрические билинейные формы B. Проверка условия (1) дает

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Найдем группу $\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x\cos y & -x\sin y \\ 0 & x\sin y & x\cos y \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Эта группа индуцирует преобразование на множестве симметрических билинейных форм

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 a & 0 \\ 0 & x^2 a \end{pmatrix}.$$

Видно, что форма B может быть приведена к виду, представленному в теореме.

Для остальных пар рассуждения аналогичны. □

Замечание 1. Выберем из троек, указанных в теореме 2, двумерные римановы однородные пространства: тройка 1 задает евклидово пространство E^2, тройка 4 задает сферу S^2, тройка 5 задает гиперболическое пространство H^2.

Для каждого из указанных в теореме 2 локально псевдоримановых однородных пространств $\operatorname{codim} \mathfrak{g} = 2$ найдем инвариантные аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, а также определим, при каких условиях связность будет являться естественной связностью без кручения, т. е. иметь те же геодезические, что и каноническая связность.

Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Хорошо известно (например, [16]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \overline{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензор кручения $T \in \operatorname{Inv} {T_2}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид

$$T(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m}) = \Lambda(x)y_\mathfrak{m} - \Lambda(y)x_\mathfrak{m} - [x, y]_\mathfrak{m}$$

для всех $x, y \in \overline{\mathfrak{g}}$; тензор кривизны $R \in \operatorname{Inv} {T_3}^1(\mathfrak{m})$ имеет вид

$$R(x_\mathfrak{m}, y_\mathfrak{m}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \ \text{ для всех } \ x, y \in \overline{\mathfrak{g}}.$$

Все указанные выше локально псевдоримановы однородные пространства $\operatorname{codim} \mathfrak{g} = 2$ являются редуктивными (так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ для всех указанных выше пар; это верно для любого пространства, на котором существует инвариантная невырожденная билинейная форма, в частности, любое риманово пространство является редуктивным). Следовательно, геодезические будут совпадать с геодезическими канонической связности при $\Lambda(x)x = 0$ для любого $x \in \mathfrak{m}$ ([11], [12]). Такая связность на редуктивном однородном пространстве всегда существует, причем единственная (так называемая *естественная связность без кручения*), и задается соотношением $\Lambda(x)y_\mathfrak{m} = \frac{1}{2}[x, y]_\mathfrak{m}$ для всех $x, y \in \mathfrak{m}$. *Риманова* (*псевдориманова*) *связность*, соответствующая форме B, находится из соотношения

$$\Lambda(x)y_\mathfrak{m} = \frac{1}{2}[x, y]_\mathfrak{m} + u(x, y), \quad \text{где} \quad 2B(u(x, y), z) = B(x, [z, y]_\mathfrak{m}) + B([z, x]_\mathfrak{m}, y)$$

для всех $x, y, z \in \mathfrak{m}$. Существует единственная риманова связность без кручения, называемая *связностью Леви-Чевита*. При выполнении условия

$$B(x, [z, y]_\mathfrak{m}) + B([z, x]_\mathfrak{m}, y) = 0 \ \text{ для всех } \ x, y, z \in \mathfrak{m}$$

риманова (псевдориманова) связность для B совпадает с естественной связностью без кручения, а соответствующее пространство является *естественно редуктивным*. Все естественно редуктивные пространства являются *геодезически орбитальными пространствами* (все максимальные геодезические являются однородными), более того, в размерности не более 5 верно и обратное утверждение [17].

Поскольку ограничение $\Lambda : \overline{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, связность однозначно определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Найдем аффинные связности, выпишем тензоры кривизны R их значениями на базисе $R(u_1, u_2)$, а кручения T — их значениями $T(u_1, u_2)$. Определим, при каких условиях инвариантная аффинная связность задает естественную связность без кручения, выпишем римановы (псевдоримановы) связности и естественно редуктивные пространства.

Теорема 3. *Пусть $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ — одно из двумерных локально псевдоримановых однородных пространств, выписанных в теореме* 2. *Аффинная связность на таком пространстве, их тензор кривизны и кручения имеют соответственно вид* 1, 4, 5 *в случае, когда пространство допускает метрику сигнатуры* (2, 0), (0, 2), *и вид* 2, 3 *в случае, когда пространство допускает метрику сигнатуры* (1, 1).

1. *Связность, тензор кривизны и кручения нулевые. Это естественная связность без кручения, риманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, пространство геодезически орбитально.*

2. *Связность, тензор кривизны и кручения нулевые. Связность является естественной связностью без кручения, псевдориманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, пространство является естественно редуктивным.*

3. *Связность и тензор кручения нулевые.Связность является естественной связностью без кручения, псевдориманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, пространство является естественно редуктивным. Тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. *Связность и тензор кручения нулевые. Тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это естественная связность без кручения, риманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, пространство геодезически орбитально.

5. *Связность и тензор кручения нулевые. Тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Связность является естественной связностью без кручения, риманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, пространство геодезически орбитально.

Доказательство. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ — двумерное локально однородное пространство 1, выписанное в теореме 2. Пусть

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{1,1}, p_{1,2}, p_{2,1}, p_{2,2}, q_{1,1}, q_{1,2}, q_{2,1}, q_{2,2} \in \mathbb{R}$. Поскольку ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, то

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно,

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = \Lambda([e_1, u_1]) \;\Rightarrow\; [\Lambda(e_1), \Lambda(u_1)] = -\Lambda(u_2),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_{2,1} + p_{1,2} + q_{1,1} & p_{2,2} - p_{1,1} + q_{1,2} \\ p_{2,2} - p_{1,1} + q_{2,1} & -p_{1,2} - p_{2,1} + q_{2,2} \end{pmatrix} = 0.$$

Получаем $q_{1,1} = -p_{1,2} - p_{2,1}$, $q_{1,2} = -p_{2,2} + p_{1,1}$, $q_{2,1} = -p_{2,2} + p_{1,1}$, $q_{2,2} = p_{2,1} + p_{1,2}$. Поскольку

$$[\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda([e_1, u_2]) \;\Rightarrow\; [\Lambda(e_1), \Lambda(u_2)] = \Lambda(u_1),$$

то

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} \\ q_{2,1} & q_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2p_{2,2} + p_{1,1} & 2p_{2,1} + p_{1,2} \\ p_{2,1} + 2p_{1,2} & p_{2,2} - 2p_{1,1} \end{pmatrix} = 0.$$

Следовательно, $p_{2,2} = 0$, $p_{1,1} = 0$, $p_{2,1} = 0$, $p_{1,2} = 0$. Таким образом, $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = 0$. Тензор кривизны

$$R(u_1, u_2) = [\Lambda(u_1), \Lambda(u_2)] - \Lambda([u_1, u_2]) = 0 - 0 = 0.$$

Тензор кручения

$$T(u_1,u_2)=\Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak m}-\Lambda(u_2)(u_1)_{\mathfrak m}-[u_1,u_2]_{\mathfrak m}=0-0-0=0.$$

Полученная связность — естественная связность без кручения, так как

$$0=\Lambda(u_i)(u_j)_{\mathfrak m}=\frac{1}{2}[u_i,u_j]_{\mathfrak m}=0 \ \text{ для всех } \ i,j=1,2,3.$$

Риманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, так как $[u_i,u_j]=0$ и

$$B(u_i,[u_j,u_k]_{\mathfrak m})+B([u_j,u_i]_{\mathfrak m},u_k)=0 \ \text{ для всех } \ i,j,k=1,2,3,$$

таким образом, пространство геодезически орбитально.

Пусть $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g,B)$ — тройка 4, выписанная в теореме 2. Тогда аналогично приведенному выше получаем $\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=0$, тензор кручения нулевой. Тензор кривизны

$$R(u_1,u_2)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_2)]-\Lambda([u_1,u_2])=0-0-\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Для остальных пар рассуждения аналогичны. □

3. Трехмерные римановы однородные пространства

Теорема 4. *Пусть* $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g,B)$ *— локально риманово однородное пространство,* $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak g}}\mathfrak g=3$ *и* $\mathfrak g\neq\{0\}$. *Оно эквивалентно одной и только одной из следующих троек*:

1.3.1 $\lambda=0$ $\bar{\mathfrak g}=(\mathfrak{so}(2)\rightthreetimes\mathbb R^2)\times\mathbb R$, $\mathfrak g=\mathfrak{so}(2)$:

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	0	0
u_2	$-u_1$	0	0	0
u_3	0	0	0	0

$$B=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0\\0&\varepsilon_1&0\\0&0&\varepsilon_2\end{pmatrix},\quad \varepsilon_1,\varepsilon_2=\pm1;$$

1.3.2 $\lambda=0$

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	0	u_1
u_2	$-u_1$	0	0	u_2
u_3	0	$-u_1$	$-u_2$	0

$$B=\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&\varepsilon&0\\0&0&a\end{pmatrix},\quad \varepsilon=\pm1,\quad a\neq0;$$

1.3.3 $\bar{\mathfrak g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb R)\times\mathbb R$

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	e_1+u_3	0
u_2	$-u_1$	$-e_1-u_3$	0	0
u_3	0	0	0	0

$$B=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix},\quad ab\neq0;$$

1.3.4 $\bar{\mathfrak g}=\mathfrak{su}(2)\times\mathbb R$

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$-e_1+u_3$	0
u_2	$-u_1$	e_1-u_3	0	0
u_3	0	0	0	0

$$B=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix},\quad ab\neq0;$$

1.3.5 $\bar{\mathfrak g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb R)\times\mathbb R$, $\mathfrak g=\mathfrak{so}(2)$:

$$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \quad \varepsilon = \pm 1;$$

1.3.6 $\quad \overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R}, \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$

$$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & -e_1 & 0 \\ u_2 & -u_1 & e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \quad \varepsilon = \pm 1;$$

1.3.7

$$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & u_2 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad a \neq 0;$$

3.5.1 $\quad \overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3) \rightthreetimes \mathbb{R}^3, \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3):$

$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \quad B = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3.5.2 $\quad \overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2), \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2):$

$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & -e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0;$$

3.5.3 $\quad \overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3,1), \ \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2):$

$$\begin{array}{c|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & -e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}, B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Здесь e_i $(i = 1, 2, 3)$ — базис $\mathfrak{g}$, u_1, u_2, u_3 — базис подпространства, дополнительного к $\mathfrak{g}$ в $\overline{\mathfrak{g}}$.

Замечание 2. Собственно риманову метрику получаем в случае 1.3.1 при $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$, в случаях 1.3.2, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.7 при $\varepsilon a > 0$, 1.3.3, 1.3.4 при $ab > 0$, а также в случаях 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3. Кроме римановой метрики псевдориманову метрику сигнатуры $(1, 2)$ или $(2, 1)$ допускают следующие однородные пространства из приведенных выше: 1.3.1 при

$\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$, 1.3.2, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.7 при $\varepsilon a < 0$, 1.3.3, 1.3.4 при $ab < 0$. Локально псевдоримановы однородные пространства (допускающие только псевдориманову метрику) рассмотрены в отдельной статье (часть 2).

Замечание 3. Из трехмерных римановых однородных пространств, выписанных в теореме 4, следующие семь соответствуют классификации Терстона:

— если стабилизаторы точек пространства трехмерны ($\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$), то тройка 3.5.1 задает евклидово пространство E^3, 3.5.2 — сферу S^3, а 3.5.3 — гиперболическое пространство H^3;

— если стабилизаторы одномерны ($\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$), то M — $\overline{G}$-инвариантное расслоение над одной из двумерных геометрий. На M есть $\overline{G}$-инвариантная метрика, определяющая связность. При нулевой кривизне связности тройка 1.3.5 задает $S^2 \times E^1$, 1.3.6 задает $H^2 \times E^1$, а при ненулевой кривизне тройка 1.3.3 задает $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, 1.3.7 задает нильгеометрию.

Далее, 1.3.1 — подалгебра в 3.5.1 в базисе (e_2, u_1, u_2, u_3), 1.3.2 — подалгебра в 3.5.2 в базисе $(-e_1, e_2 + u_1, e_3 - u_3, u_2)$, а 1.3.4 — подалгебра в 3.5.3 в базисе $(-e_1, \frac{e_2-u_3}{2}, \frac{e_3-u_1}{2}, \frac{-e_1+u_2}{2})$.

Доказательство. Поскольку каждая инвариантная псевдориманова метрика определяет инвариантную аффинную связность, то $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен. Для нахождения всех изотропно-точных пар нужно классифицировать (с точностью до изоморфизма) все точные трехмерные $\mathfrak{g}$-модули U (это эквивалентно классификации всех подалгебр в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ с точностью до сопряженности), а далее классифицировать (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ такие, что $\mathfrak{g}$-модули $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ и U эквивалентны. Все такие пары $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ найдены в [18], дальнейшая нумерация пар соответствует приведенной в [18]. Ограничимся случаем с ненулевым стабилизатором, так как все остальные псевдоримановы однородные пространства — только трехмерные группы Ли с инвариантной метрикой.

Рассмотрим случай 1.3 при $\lambda = 0$, т. е.

$$\mathfrak{g} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тогда любая пара этого типа эквивалентна одной и только одной из пар 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3, 1.3.4, 1.3.5, 1.3.6, 1.3.7. Действительно, пусть $\{e_1\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $[e_1, u_j]$, $1 \leqslant j \leqslant 3$ (с точностью до $\operatorname{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$), имеют вид

$$[e_1, u_1] = -u_2,\ [e_1, u_2] = u_1,\ [e_1, u_1] = pe_1,\ p \in \mathbb{R}.$$

Положим

$$[u_1, u_2] = a_1e_1 + \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \alpha_3u_3, \quad [u_1, u_3] = b_1e_1 + \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3,$$

$$[u_2, u_3] = c_1e_1 + \gamma_1u_1 + \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3.$$

Проверим тождество Якоби для троек (e_1, u_j, u_k), $1 \leqslant j < k \leqslant 3$, и (u_1, u_2, u_3)

$$[e_1, [u_1, u_2]] + [u_2, [e_1, u_1]] + [u_1, [u_2, e_1]] = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_3p = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = 0;$$

$$[e_1, [u_1, u_3]] + [u_3, [e_1, u_1]] + [u_1, [u_3, e_1]] = 0 \ \Rightarrow\ \beta_3p + c_1 = 0, \quad \beta_2 + \gamma_1, \quad \gamma_2 - \beta_1 - p = 0, \quad \gamma_3 = 0;$$

$$[e_1, [u_2, u_3]] + [u_3, [e_1, u_2]] + [u_2, [u_3, e_1]] = 0 \ \Rightarrow\ \gamma_3p - b_1 = 0, \quad \gamma_2 - \beta_1 + p = 0, \quad \gamma_1 + \beta_2 = 0;$$

$$[u_1, [u_2, u_3]] + [u_3, [u_1, u_2]] + [u_2, [u_3, u_1]] = 0 \ \Rightarrow\ \beta_1a_1 = 0, \quad \beta_1\alpha_3 = 0.$$

Следовательно, пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$a_1e_1+\alpha_3u_3$	$\beta_1u_1+\beta_2u_2$
u_2	$-u_1$	$-a_1e_1-\alpha_3u_3$	0	$-\beta_2u_1+\beta_1u_2$
u_3	0	$-\beta_1u_1-\beta_2u_2$	$-\beta_1u_2+\beta_2u_1$	0

,

где множество коэффициентов удовлетворяет системе линейных уравнений

$$\beta_1 a_1 = 0, \quad \beta_1\alpha_3 = 0.$$

Изоморфизм $\pi : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ такой, что

$$\pi(e_1) = e_1,\ \pi(u_1) = u_1,\ \pi(u_2) = u_2,\ \pi(u_3) = u_3 + \beta_2 e_1,$$

устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$, где последняя имеет вид

	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-u_2$	u_1	0
u_1	u_2	0	$a_1e_1+\alpha_3u_3$	β_1u_1
u_2	$-u_1$	$-a_1e_1-\alpha_3u_3$	0	β_1u_2
u_3	0	$-\beta_1u_1$	$-\beta_1u_2$	0

.

Пусть $a_1\alpha_3 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 1.3.3 или паре 1.3.4:

$$\pi : \bar{\mathfrak{g}}_{3(4)} \to \bar{\mathfrak{g}}, \quad \pi(e_1) = e_1, \quad \pi(u_1) = \sqrt{|a_1|}u_1, \quad \pi(u_2) = \sqrt{|a_1|}u_2, \quad \pi(u_3) = \frac{|a_1|}{\alpha_3}u_3.$$

Пары 1.3.3 и 1.3.4 не эквивалентны, поскольку подалгебра Леви 1.3.4 изоморфна $\mathfrak{su}(2)$, а подалгебра Леви 1.3.3 изоморфна $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

Пусть $\alpha_3 = 0,\ a_1 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 1.3.5 или паре 1.3.6:

$$\pi : \bar{\mathfrak{g}}_{5(6)} \to \bar{\mathfrak{g}}, \quad \pi(e_1) = e_1, \quad \pi(u_1) = \sqrt{|a_1|}u_1, \quad \pi(u_2) = \sqrt{|a_1|}u_2, \quad \pi(u_3) = u_3.$$

Пары 1.3.5 и 1.3.6 не эквивалентны, поскольку подалгебра Леви 1.3.6 изоморфна $\mathfrak{su}(2)$, а подалгебра Леви 1.3.5 изоморфна $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Эти пары не эквивалентны парам 1.3.3 и 1.3.4, так как $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_{5,6} \cap \mathfrak{g} \neq 0$, а $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_{3,4} \cap \mathfrak{g} = 0$.

Пусть $\alpha_3 \neq 0$, $a_1 = 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 1.3.7:

$$\pi : \bar{\mathfrak{g}}_7 \to \bar{\mathfrak{g}}, \quad \pi(e_1) = e_1, \quad \pi(u_1) = u_1, \quad \pi(u_2) = u_2, \quad \pi(u_3) = \alpha_3^{-1}u_3.$$

Пара 1.3.7 не эквивалентна парам 1.3.i, $i = \overline{1,6}$, так как ее нильпотентный радикал имеет нетривиальный подмодуль.

Пусть $\alpha_3 = a_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 1.3.2:

$$\pi : \bar{\mathfrak{g}}_2 \to \bar{\mathfrak{g}}, \quad \pi(e_1) = e_1, \quad \pi(u_1) = u_1, \quad \pi(u_2) = u_2, \quad \pi(u_3) = \beta_1 u_3.$$

Если $\alpha_3 = a_1 = \beta_1 = 0$, то пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ тривиальна (1.3.1). Пара 1.3.1 не эквивалентна парам 1.3.i, $i = \overline{3,6}$, так как 1.3.1 разрешима. Пары 1.3.i, $i = \overline{1,3\text{–}7}$, и 1.3.2 не эквивалентны, поскольку пары 1.3.i имеют нетривиальный центр $Z(\bar{\mathfrak{g}}_i) = \mathbb{R}u_3$.

Для остальных случаев рассуждения аналогичны. Опишем теперь для каждой пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ все инвариантные билинейные формы B на $\mathfrak{g}$-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Проверим выполнение условия (1) для всех пар $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ и выберем из них допускающие псевдориманову метрику. Далее опишем все такие формы с точностью до индуцированного действия $\operatorname{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Рассмотрим пару 1.3.1. Проверка условия (1) дает

$$B([e_1,u_1],u_1) + B(u_1,[e_1,u_1]) = 0 \ \Rightarrow\ B(u_1,u_2) = 0,$$
$$B([e_1,u_1],u_3) + B(u_1,[e_1,u_3]) = 0 \ \Rightarrow\ B(u_2,u_3) = 0,$$

$$B([e_1,u_1],u_2)+B(u_1,[e_1,u_2])=0 \;\Rightarrow\; B(u_2,u_2)=B(u_1,u_1),$$
$$B([e_1,u_2],u_3)+B(u_2,[e_1,u_3])=0 \;\Rightarrow\; B(u_1,u_3)=0$$

(тогда и для остальных базисных векторов условие выполняется). Таким образом,

$$B=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix},\quad ab\neq 0.$$

Найдем группу $\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g)$, учитывая, что $\mathbb{R}u_3$ — центр, $\mathbb{R}u_1\oplus\mathbb{R}u_2$ — коммутант, а $\mathbb{R}e_1$ — подалгебра:

$$\left\{\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x\cos y & -x\sin y & 0\\ 0 & x\sin y & x\cos y & 0\\ 0 & 0 & 0 & z\end{pmatrix}\right| x,z\in\mathbb{R}^*,\; y\in\mathbb{R}\right\}.$$

Эта группа индуцирует преобразование на множестве всех симметрических билинейных форм

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} ax^2 & 0 & 0\\ 0 & ax^2 & 0\\ 0 & 0 & bz^2\end{pmatrix}.$$

Видно, что форма B может быть приведена к виду, представленному в теореме.

Для остальных пар рассуждения аналогичны. □

4. Связности на трехмерных римановых однородных пространствах

Для каждого из указанных выше локально псевдоримановых однородных пространств $\operatorname{codim}\mathfrak g=3$ найдем инвариантные аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, а также определим, при каких условиях связность будет являться естественной связностью без кручения, выпишем также, при каких условиях инвариантная аффинная связность задает риманову (псевдориманову) связность и когда риманова (псевдориманова) связность совпадает с естественной связностью без кручения, а соответствующее пространство является естественно редуктивным (геодезически орбитальным).

Поскольку ограничение $\Lambda:\bar{\mathfrak g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak m)$ на $\mathfrak g$ — изотропное представление подалгебры, то связность однозначно определяется своими значениями на $\mathfrak m$. В нижеследующей теореме эта связность задана образами базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R — его значениями $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а кручения T — его значениями $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$.

Теорема 5. *Пусть* $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g,B)$ *— трехмерное локально риманово однородное пространство, выписанное в теореме 4. Аффинные связности на этих пространствах, их тензоры кривизны и кручения имеют вид* 3.5.i, $i=1,2,3$ *(в случае, когда пространство допускает метрику с сигнатурой* $(3,0)$ *и* $(0,3)$*), и* 1.3.i, $i=\overline{1,7}$ *(в случае, когда пространство допускает метрику любой сигнатуры).*

3.5.1. *Связность*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{2,3}\\ 0 & -p_{2,3} & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\\ p_{2,3} & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0\\ -p_{2,3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}^2 & 0 \\ p_{2,3}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}^2 \\ 0 & p_{2,3}^2 & 0 \end{pmatrix},$$

кручение

$$(0,\, 0,\, -2p_{2,3}), \quad (0,\, 2p_{2,3},\, 0), \quad (-2p_{2,3},\, 0,\, 0).$$

Естественную связность без кручения получим при $p_{2,3} = 0$*, риманова связность совпадает с естественной связностью, пространство является естественно редуктивным.*

3.5.2. *Связность совпадает с выписанной в случае* 3.5.1. *Тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}{}^2 - 1 & 0 \\ p_{2,3}{}^2{+}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}{}^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}{}^2{+}1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}{}^2 - 1 \\ 0 & p_{2,3}{}^2{+}1 & 0 \end{pmatrix},$$

кручение

$$(0,\, 0,\, -2\,p_{2,3})\,, \quad (0,\, 2\,p_{2,3},\, 0)\,, \quad (-2\,p_{2,3},\, 0,\, 0)\,.$$

Естественную связность без кручения получим при $p_{2,3} = 0$*, риманова связность совпадает с естественной связностью, пространство является естественно редуктивным.*

3.5.3. *Связность совпадает с выписанной в случае* 3.5.1. *Тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}{}^2 + 1 & 0 \\ p_{2,3}{}^2{-}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}{}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}{}^2{-}1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}{}^2 + 1 \\ 0 & p_{2,3}{}^2{-}1 & 0 \end{pmatrix},$$

кручение

$$(0,\, 0,\, -2\,p_{2,3})\,, \quad (0,\, 2\,p_{2,3},\, 0)\,, \quad (-2\,p_{2,3},\, 0,\, 0)\,.$$

Естественную связность без кручения получим при $p_{2,3} = 0$*, риманова связность совпадает с естественной связностью, пространство является естественно редуктивным.*

1.3.3. *Связность*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & 0 \\ -r_{1,2} & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1}, & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} - 1 - r_{1,2}, & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} + 1 + r_{1,2}, & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1}, & 0 \\ 0, & 0, & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} - r_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1}, & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2}, & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1}, & 0 \end{pmatrix},$$

кручение

$$(0,\, 0,\, 2\,p_{3,2} - 1)\,, \quad (p_{1,3} - r_{1,1},\ p_{2,3} + r_{1,2},\ 0)\,, \quad (-p_{2,3} - r_{1,2},\ p_{1,3} - r_{1,1},\ 0)\,.$$

Естественную связность без кручения получим при $p_{3,2} = 1/2$ *и равенстве нулю остальных параметров, риманова связность не совпадает с естественной связностью, она получается при* $p_{3,2} = 1/2$, $p_{2,3} = -r_{1,2} = -b/(2a)$ *и равенстве нулю остальных параметров.*

1.3.5. *Связность совпадает с выписанной в случае* 1.3.3. *Естественную связность без кручения получим при равенстве нулю всех параметров, риманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, пространство является естественно редуктивным. Тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}, & p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}-1, & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2}-p_{1,3}p_{3,1}+1, & -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}, & 0 \\ 0, & 0, & -2p_{2,3}p_{3,1}+2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1}, & p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & -p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2}, & p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1}, & 0 \end{pmatrix},$$

кручение

$$(0,\ 0,\ 2\,p_{3,2}),\quad (p_{1,3}-r_{1,1},\ p_{2,3}+r_{1,2},\ 0),\quad (-p_{2,3}-r_{1,2},\ p_{1,3}-r_{1,1},\ 0).$$

1.3.6. *Связность совпадает с выписанной в случае* 1.3.3. *Тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}, & p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}+1, & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2}-p_{1,3}p_{3,1}-1, & -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}, & 0 \\ 0, & 0, & -2p_{2,3}p_{3,1}+2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1}, & p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & -p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2}, & p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1}, & 0 \end{pmatrix},$$

кручение

$$(0,\ 0,\ 2\,p_{3,2}),\quad (p_{1,3}-r_{1,1},\ p_{2,3}+r_{1,2},\ 0),\quad (-p_{2,3}-r_{1,2},\ p_{1,3}-r_{1,1},\ 0).$$

Естественную связность без кручения получим при равенстве нулю всех параметров, риманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, пространство является естественно редуктивным.

1.3.7. *Связность совпадает с выписанной в случае* 1.3.3. *Тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}-r_{1,1}, & p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}-r_{1,2}, & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2}-p_{1,3}p_{3,1}+r_{1,2}, & -p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}-r_{1,1}, & 0 \\ 0, & 0, & -2p_{2,3}p_{3,1}+2p_{1,3}p_{3,2}-r_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1}, & p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & -p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2}, & p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1}, & 0 \end{pmatrix},$$

кручение

$$(0,\ 0,\ 2\,p_{3,2}-1),\quad (p_{1,3}-r_{1,1},\ p_{2,3}+r_{1,2},\ 0),\quad (-p_{2,3}-r_{1,2},\ p_{1,3}-r_{1,1},\ 0).$$

Естественную связность без кручения получим при $p_{3,\,2} = 1/2$ *и равенстве нулю остальных параметров, риманова связность не совпадает с естественной связностью без кручения и получается при* $p_{3,\,2} = 1/2$, $p_{2,\,3} = -r_{1,\,2} = -a/(2\varepsilon)$ *и равенстве нулю остальных параметров.*

1.3.1. *Связность совпадает с выписанной в случае* 1.3.3. *Тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1}, & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2}, & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1}, & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1}, & 0 \\ 0, & 0, & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1}, & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2}, & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1}, & 0 \end{pmatrix},$$

кручение

$$(0,\, 0,\, 2\,p_{3,\,2})\,, \quad (p_{1,\,3} - r_{1,\,1},\, p_{2,\,3} + r_{1,\,2},\; 0)\,, \quad (-p_{2,\,3} - r_{1,\,2},\, p_{1,\,3} - r_{1,\,1},\; 0)\,.$$

Естественную связность без кручения получим при равенстве нулю всех параметров, риманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, пространство является естественно редуктивным.

1.3.2. *Связность совпадает с выписанной в случае* 1.3.3. *Тензор кривизны* (2),

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} - p_{1,3} \\ 0, & 0, & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} - p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}, & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2} - p_{3,2}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} + p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} - p_{1,3} \\ -p_{3,2}r_{1,1} - p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2} + p_{3,2}, & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1} - p_{3,1}, & 0 \end{pmatrix},$$

кручение

$$(0,\, 0,\, 2\,p_{3,\,2})\,, \quad (p_{1,\,3} - r_{1,\,1} - 1,\, p_{2,\,3} + r_{1,\,2},\; 0)\,, \quad (-p_{2,\,3} - r_{1,\,2},\, p_{1,\,3} - r_{1,\,1} - 1,\; 0)\,.$$

Естественную связность без кручения получим при $p_{1,\,3} = 1/2$, $r_{1,\,1} = -1/2$ *и равенстве нулю остальных параметров, риманова связность не совпадает с естественной связностью без кручения и получается при* $p_{1,\,3} = 1$, $p_{3,\,1} = -\varepsilon/a$ *и равенстве нулю остальных параметров.*

1.3.4. *Связность совпадает с выписанной в случае* 1.3.3. *Естественную связность без кручения получим при* $p_{3,\,2} = 1/2$ *и равенстве нулю остальных параметров, риманова связность не совпадает с естественной связностью без кручения и получается при* $p_{3,\,2} = 1/2$, $p_{2,\,3} = -r_{1,\,2} = -b/(2a)$ *и равенстве нулю остальных параметров. Тензор кривизны*

$$\begin{pmatrix} -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1}, & p_{1,3}p_{3,1} + p_{2,3}p_{3,2} + 1 - r_{1,2}, & 0 \\ -p_{2,3}p_{3,2} - p_{1,3}p_{3,1} - 1 + r_{1,2}, & -p_{1,3}p_{3,2} + p_{2,3}p_{3,1} - r_{1,1}, & 0 \\ 0, & 0, & -2p_{2,3}p_{3,1} + 2p_{1,3}p_{3,2} - r_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{2,3}r_{3,3} + r_{1,2}p_{1,3} - r_{1,1}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1}, & p_{3,1}r_{1,2} + p_{3,2}r_{1,1} - r_{3,3}p_{3,2}, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & -p_{2,3}r_{3,3} - r_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1}p_{2,3} \\ 0, & 0, & p_{1,3}r_{3,3} - r_{1,1}p_{1,3} - r_{1,2}p_{2,3} \\ p_{3,1}r_{1,2} + r_{3,3}p_{3,2}, & p_{3,1}r_{1,1} - p_{3,2}r_{1,2} - r_{3,3}p_{3,1}, & 0 \end{pmatrix},$$

кручение

$$(0,\ 0,\ 2\,p_{3,\,2}-1)\,,\quad (p_{1,\,3}-r_{1,\,1},\ p_{2,\,3}+r_{1,\,2},\ 0)\,,\quad (-p_{2,\,3}-r_{1,\,2},\ p_{1,\,3}-r_{1,\,1},\ 0)\,.$$

Доказательство. Пусть

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3}\\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3}\\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3}\end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3}\\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3}\\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3}\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3}\\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3}\\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3}\end{pmatrix}$$

для некоторых $p_{i,j}$, $q_{i,j}$, $r_{i,j}\in\mathbb{R}$ (при $i,j=1,2,3$).

Пусть далее $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},B)$ — локально однородное пространство 3.5.1, выписанное в теореме 4, тогда

$$\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \Lambda(e_2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \Lambda(e_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно,

$$[\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_3,u_1])\ \Rightarrow\ [\Lambda(e_3),\Lambda(u_1)]=0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,3} & -p_{1,2}\\ p_{3,1} & p_{3,2}+p_{2,3} & p_{3,3}-p_{2,2}\\ -p_{2,1} & p_{3,3}-p_{2,2} & -p_{2,3}-p_{3,2}\end{pmatrix}=0.$$

Получаем $p_{1,3}=0$, $p_{1,2}=0$, $p_{3,1}=0$, $p_{3,2}=-p_{2,3}$, $p_{3,3}=p_{2,2}$, $p_{2,1}=0$, $p_{3,3}=p_{2,2}$. Поскольку

$$[\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_2,u_1])\ \Rightarrow\ [\Lambda(e_2),\Lambda(u_1)]=-\Lambda(u_2),$$

то

$$\begin{pmatrix} q_{1,1} & p_{2,2}-p_{1,1}+q_{1,2} & p_{2,3}+q_{1,3}\\ p_{2,2}-p_{1,1}+q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3}\\ -p_{2,3}+q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3}\end{pmatrix}=0.$$

Следовательно, $q_{1,1}=0$, $q_{1,2}=p_{1,1}-p_{2,2}$, $q_{1,3}=-p_{2,3}$, $q_{2,1}=-p_{2,2}+p_{1,1}$, $q_{3,1}=p_{2,3}$, $q_{2,2}=q_{2,3}=q_{3,2}=q_{3,3}=0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_1,u_1])\ \Rightarrow\ [\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=-\Lambda(u_3),$$

то

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & -p_{2,3}+r_{1,2} & p_{2,2}-p_{1,1}+r_{1,3}\\ p_{2,3}+r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3}\\ p_{2,2}-p_{1,1}+r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3}\end{pmatrix}=0.$$

Поэтому $r_{3,1}=-p_{2,2}+p_{1,1}$, $r_{1,2}=p_{2,3}$, $r_{1,3}=-p_{2,2}+p_{1,1}$, $r_{2,1}=-p_{2,3}$, $r_{1,1}=r_{2,2}=r_{2,3}=r_{3,2}=r_{3,3}=0$. Поскольку $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=0$, то $p_{2,2}=p_{1,1}$, поскольку $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_1)$, то получаем $p_{1,1}=0$. Условия $[\Lambda(e_2),\Lambda(u_3)]=0$, $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_2)$, $[\Lambda(e_3),\Lambda(u_2)]=-\Lambda(u_3)$, $[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=\Lambda(u_1)$ выполняются. Таким образом,

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{2,3}\\ 0 & -p_{2,3} & 0\end{pmatrix},\quad \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\\ p_{2,3} & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0\\ -p_{2,3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$R(u_1,u_2)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_2)]-\Lambda([u_1,u_2])=\Lambda(u_1)\Lambda(u_2)-\Lambda(u_2)\Lambda(u_1)-0=\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}^2 & 0\\ p_{2,3}^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_1,u_3])=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-0=\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}^2\\0&0&0\\p_{2,3}^2&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_2,u_3])=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-p_{2,3}^2\\0&p_{2,3}^2&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кручения

$$T(u_1,u_2)=\Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak m}-\Lambda(u_2)(u_1)_{\mathfrak m}-[u_1,u_2]_{\mathfrak m}=\begin{pmatrix}0&0&-2p_{2,3}\end{pmatrix},$$
$$T(u_1,u_3)=\Lambda(u_1)(u_3)_{\mathfrak m}-\Lambda(u_3)(u_1)_{\mathfrak m}-[u_1,u_3]_{\mathfrak m}=\begin{pmatrix}0&2p_{2,3}&0\end{pmatrix},$$
$$T(u_2,u_3)=\Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak m}-\Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak m}-[u_2,u_3]_{\mathfrak m}=\begin{pmatrix}-2p_{2,3}&0&0\end{pmatrix}.$$

Для того чтобы полученная связность являлась естественной связностью без кручения, необходимо, в частности,

$$\Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak m}=\frac{1}{2}[u_1,u_2]_{\mathfrak m},$$

следовательно, $p_{2,3}=0$. Риманова связность совпадает с естественной связностью без кручения, так как $[u_i,u_j]=0$ для всех $i,j=1,2,3$ и

$$B(u_i,[u_j,u_k]_{\mathfrak m})+B([u_j,u_i]_{\mathfrak m},u_k)=0\ \text{ для всех }\ i,j,k=1,2,3.$$

Таким образом, пространство является естественно редуктивным.

Пусть $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g,B)$ — локально однородное пространство 3.5.2, выписанное в теореме 4. Связность совпадает с приведенной в случае 3.5.1. Тензор кривизны

$$R(u_1,u_2)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_2)]-\Lambda([u_1,u_2])=\Lambda(u_1)\Lambda(u_2)-\Lambda(u_2)\Lambda(u_1)-\Lambda(e_2)=$$
$$=\begin{pmatrix}0&-p_{2,3}^2-1&0\\p_{2,3}^2+1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_1,u_3])=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}^2-1\\0&0&0\\p_{2,3}^2+1&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_2,u_3])=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-\Lambda(e_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-p_{2,3}^2-1\\0&p_{2,3}^2+1&0\end{pmatrix}.$$

Остальные рассуждения полностью совпадают с приведенными в 3.5.1.

Пусть $(\bar{\mathfrak g},\mathfrak g,B)$ — локально однородное пространство 3.5.3, выписанное в теореме 4. Связность совпадает с приведенной в случае 3.5.1. Тензор кривизны

$$R(u_1,u_2)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_2)]-\Lambda([u_1,u_2])=\Lambda(u_1)\Lambda(u_2)-\Lambda(u_2)\Lambda(u_1)+\Lambda(e_2)=$$
$$=\begin{pmatrix}0&-p_{2,3}^2+1&0\\p_{2,3}^2-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_1,u_3])=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]+\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}^2+1\\0&0&0\\p_{2,3}^2-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_2,u_3])=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]+\Lambda(e_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-p_{2,3}^2+1\\0&p_{2,3}^2-1&0\end{pmatrix}.$$

Остальные рассуждения полностью совпадают с приведенными в 3.5.1.

Пусть $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},B)$ — локально однородное пространство 1.3.3, выписанное в теореме 4. Тогда

$$\Lambda(e_1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

так как ограничение отображения Λ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры. Отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным, следовательно,

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=\Lambda([e_1,u_1])\ \Rightarrow\ [\Lambda(e_1),\Lambda(u_1)]=-\Lambda(u_2),$$

$$\begin{pmatrix}p_{2,1}+p_{1,2}+q_{1,1}&p_{2,2}-p_{1,1}+q_{1,2}&p_{2,3}+q_{1,3}\\p_{2,2}-p_{1,1}+q_{2,1}&-p_{1,2}-p_{2,1}+q_{2,2}&-p_{1,3}+q_{2,3}\\p_{3,2}+q_{3,1}&-p_{3,1}+q_{3,2}&q_{3,3}\end{pmatrix}=0.$$

Получаем $p_{2,1}=-p_{1,2}$, $q_{1,1}=-p_{1,2}-p_{2,1}$, $q_{1,2}=-p_{2,2}+p_{1,1}$, $q_{1,3}=-p_{2,3}$, $q_{2,1}=-p_{2,2}+p_{1,1}$, $q_{2,2}=p_{1,2}+p_{2,1}$, $q_{2,3}=p_{1,3}$, $q_{3,1}=-p_{3,2}$, $q_{3,2}=p_{3,1}$, $q_{3,3}=0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_2)]=\Lambda(u_1),\quad\text{то}\quad\begin{pmatrix}-2p_{2,2}+p_{1,1}&-p_{1,2}&0\\p_{1,2}&p_{2,2}-2p_{1,1}&0\\0&0&-p_{3,3}\end{pmatrix}=0.$$

Следовательно, $p_{2,2}=0$, $p_{1,1}=0$, $p_{3,3}=0$, $p_{2,1}=0$, $p_{1,2}=0$. Поскольку

$$[\Lambda(e_1),\Lambda(u_3)]=0,\ \text{то}\ \begin{pmatrix}r_{2,1}+r_{1,2}&r_{2,2}-r_{1,1}&r_{2,3}\\r_{2,2}-r_{1,1}&-r_{1,2}-r_{2,1}&-r_{1,3}\\r_{3,2}&-r_{3,1}&0\end{pmatrix}=0.$$

Таким образом, $r_{2,1}=-r_{1,2}$, $r_{2,2}=r_{1,1}$, $r_{2,3}=r_{1,3}=r_{3,2}=r_{3,1}=0$ и

$$\Lambda(u_1)=\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}\\0&0&p_{2,3}\\p_{3,1}&p_{3,2}&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_2)=\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}\\0&0&p_{1,3}\\-p_{3,2}&p_{3,1}&0\end{pmatrix},\ \Lambda(u_3)=\begin{pmatrix}r_{1,1}&r_{1,2}&0\\-r_{1,2}&r_{1,1}&0\\0&0&r_{3,3}\end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны

$$R(u_1,u_2)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_2)]-\Lambda([u_1,u_2])=\Lambda(u_1)\Lambda(u_2)-\Lambda(u_2)\Lambda(u_1)-\Lambda(e_1)-\Lambda(u_3)=$$
$$=\begin{pmatrix}-p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}-r_{1,1}&p_{1,3}p_{3,1}+p_{2,3}p_{3,2}-1-r_{1,2}&0\\-p_{2,3}p_{3,2}-p_{1,3}p_{3,1}+1+r_{1,2}&-p_{1,3}p_{3,2}+p_{2,3}p_{3,1}-r_{1,1}&0\\0&0&-2p_{2,3}p_{3,1}+2p_{1,3}p_{3,2}-r_{3,3}\end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_1,u_3])=[\Lambda(u_1),\Lambda(u_3)]-0=$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3}\\0&0&p_{2,3}r_{3,3}+r_{1,2}p_{1,3}-r_{1,1}p_{2,3}\\p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1}&p_{3,1}r_{1,2}+p_{3,2}r_{1,1}-r_{3,3}p_{3,2}&0\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-\Lambda([u_2,u_3])=[\Lambda(u_2),\Lambda(u_3)]-0=$$
$$=\begin{pmatrix}0&0&-p_{2,3}r_{3,3}-r_{1,2}p_{1,3}+r_{1,1}p_{2,3}\\0&0&p_{1,3}r_{3,3}-r_{1,1}p_{1,3}-r_{1,2}p_{2,3}\\-p_{3,2}r_{1,1}-p_{3,1}r_{1,2}+r_{3,3}p_{3,2}&p_{3,1}r_{1,1}-p_{3,2}r_{1,2}-r_{3,3}p_{3,1}&0\end{pmatrix}.$$

Тензор кручения

$$
\begin{aligned}
T(u_1,u_2) &= \Lambda(u_1)(u_2)_{\mathfrak{m}} - \Lambda(u_2)(u_1)_{\mathfrak{m}} - [u_1,u_2]_{\mathfrak{m}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2p_{3,2}-1 \end{pmatrix},\\
T(u_1,u_3) &= \Lambda(u_1)(u_3)_{\mathfrak{m}} - \Lambda(u_3)(u_1)_{\mathfrak{m}} - [u_1,u_3]_{\mathfrak{m}} = \begin{pmatrix} p_{1,3}-r_{1,1} & p_{2,3}+r_{1,2} & 0 \end{pmatrix},\\
T(u_2,u_3) &= \Lambda(u_2)(u_3)_{\mathfrak{m}} - \Lambda(u_3)(u_2)_{\mathfrak{m}} - [u_2,u_3]_{\mathfrak{m}} = \begin{pmatrix} -p_{2,3}-r_{1,2} & p_{1,3}-r_{1,1} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Пусть

$$F(x,y,z) = 2B(u(x,y),z) - B(x,[z,y]_{\mathfrak{m}}) - B([z,x]_{\mathfrak{m}},y), \quad \text{где} \ \ u(x,y) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[x,y]_{\mathfrak{m}}.$$

Найдем риманову связность из условий

$$
\begin{aligned}
&F(u_1,u_1,u_3)=0 \ \Rightarrow\ 2p_{3,1}b=0, && F(u_1,u_2,u_3)=0 \ \Rightarrow\ (2p_{3,2}-1)b=0,\\
&F(u_1,u_3,u_1)=0 \ \Rightarrow\ 2p_{1,3}a=0, && F(u_1,u_3,u_2)=0 \ \Rightarrow\ 2p_{2,3}a+b=0,\\
&F(u_2,u_1,u_3)=0 \ \Rightarrow\ -(2p_{3,2}-1)b=0, && F(u_2,u_2,u_3)=0 \ \Rightarrow\ 2p_{3,1}b=0,\\
&F(u_2,u_3,u_1)=0 \ \Rightarrow\ -2p_{2,3}a-b=0, && F(u_2,u_3,u_2)=0 \ \Rightarrow\ 2p_{1,3}a=0,\\
&F(u_3,u_1,u_1)=0 \ \Rightarrow\ 2r_{1,1}a=0, && F(u_3,u_1,u_2)=0 \ \Rightarrow\ -2r_{1,2}a+b=0,\\
&F(u_3,u_2,u_1)=0 \ \Rightarrow\ 2r_{1,2}a-b=0, && F(u_3,u_2,u_2)=0 \ \Rightarrow\ 2r_{1,1}a=0,\\
&F(u_3,u_3,u_3)=0 \ \Rightarrow\ 2r_{3,3}b=0.
\end{aligned}
$$

Риманова связность получается при $p_{3,2}=1/2$, $p_{2,3}=-r_{1,2}=-b/(2a)$ и равенстве нулю остальных параметров. Пусть

$$F_2(u_i,u_j) = \Lambda(u_i)(u_j)_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[u_i,u_j]_{\mathfrak{m}} \ \text{ для всех } \ i,j=1,2,3.$$

Естественную связность без кручения находим из условий

$$
\begin{aligned}
&F_2(u_1,u_1)=0 \Rightarrow p_{3,1}=0, && F_2(u_1,u_2)=0 \Rightarrow p_{3,2}=1/2, \ \ F_2(u_3,u_3)=0 \Rightarrow r_{3,3}=0,\\
&F_2(u_1,u_3)=0 \Rightarrow p_{1,3}=0, \ p_{2,3}=0, && F_2(u_3,u_1)=0 \Rightarrow r_{1,1}=0, \ r_{1,2}=0.
\end{aligned}
$$

Естественная связность получается при $p_{3,2}=1/2$ и равенстве нулю остальных параметров, риманова связность не совпадает с естественной связностью.

Для остальных локально однородных пространств рассуждения аналогичны. □

Полученные результаты позволяют провести классификацию всех локально однородных аффинных связностей на трехмерных пространствах. Предложенная методика также может быть использована для других размерностей.

Автор выражает искреннюю благодарность своему учителю Комракову Борису Петровичу за постановку задачи и полезные замечания.

Литература

[1] Levi-Civita T. *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*, Rend. Circ. Mat. Palermo **42**, 173–205 (1917).

[2] Weyl H. *Raum, Zeit, Materie* (6e Aufl., 1923, Springer, 1970).

[3] Cartan É. *Les espaces à connexion conforme*, Ann. Soc. Polon. Math. **2**, 171–211 (1923).

[4] Лумисте Ю.Г. *Теория связностей в расслоенных пространствах*, Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия (ВИНИТИ АН СССР, М., 1971), с. 123–168.

[5] Кручкович Г.И. *Классификация трехмерных римановых пространств по группам движений*, УМН **9** (1), 3-40 (1954).

[6] Thurston W. *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6**, 357–381 (1982).

[7] Scott P. *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15**, part 5 (56), 401–487 (1983).

[8] Широков П.А. *Избранные труды по геометрии* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1966).

[9] Петров А.З. *О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики*, Учен. зап. Казанск. ун-та **109** (3), 7–36 (1949).
[10] Онищик А.Л. *Топология транзитивных групп Ли преобразований* (Изд-во Физматлит, М., 1995).
[11] Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry* (N.-Y.–London, 1963), V. 1.
[12] Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry* (N.-Y.–London, 1969), V. II.
[13] Mostow G.D. *The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces*, Ann. Math. **52** (3), 606–636 (1950).
[14] Lie S. *Theorie der Transformationsgruppen.* Abschn. III (Teubner, Leipzig, 1893).
[15] Komrakov B., Churyumov A., Doubrov. B. *Two-dimensional homogeneous spaces*, Preprint № 17 (Univ. Oslo, 1993).
[16] Nomizu K. *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **76** (1), 33–65 (1954).
[17] Kowalski O. *Riemannian manifolds with homogeneous geodesics*, Boll. Unione Math. Ital. VII. Ser. B **5** (1), 189–246 (1991).
[18] Komrakov B., Tchourioumov A., Mozhey N. et al. *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces*, Preprints № 35–37 (Univ. Oslo, 1993).

Н.П. Можей

доцент, докторант КФУ,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: mozheynatalya@mail.ru

N.P. Mozhei

Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. I

Abstract. The goal of this paper is to describe all invariant affine connections on pseudo-Riemannian homogeneous spaces of dimensions 2 and 3. We present a complete local classification of Riemannian homogeneous spaces which is equivalent to the description of effective pairs of Lie algebras supplied with an invariant nondegenerate symmetric bilinear form on the isotropy module. The classification of pseudo-Riemannian homogeneous spaces is given in a separate paper (Part 2). We describe all invariant affine connections together with their curvature and torsion tensors and indicate affine connections on Riemannian homogeneous spaces and Riemannian connections.

Keywords: invariant affine connection, pseudo-Riemannian homogeneous spaces.

N.P. Mozhei

Associate Professor,
Doctor's Degree Worker of Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: mozheynatalya@mail.ru