Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра сетей и устройств телекоммуникаций

ПОТОКИ ВЫЗОВОВ

Методические указания
для практических занятий по курсу
«Основы теории телетрафика, сетей и систем телекоммуникаций»
для студентов специальности I-45 01 03 «Сети телекоммуникаций»
дневной и заочной форм обучения

Минск 2005

УДК 621.391.23 (075.8)
ББК 32.811 я 73
П 64

С о с т а в и т е л и:
В.А. Аксенов, Н.А. Чижевская

П 64 **Потоки** вызовов: Метод. указ. для практ. занятий по курсу «Основы теории телетрафика, сетей и систем телекоммуникаций» для студ. спец. I-45 01 03 «Сети телекоммуникаций» дневной и заочной форм обуч./ Сост. В.А. Аксёнов, Н.А. Чижевская. – Мн.: БГУИР, 2005. – 11 с.
ISBN 985-444-709-X

В методических указаниях приводятся основные характеристики и описание наиболее распространенных в телекоммуникации моделей потоков вызовов, а также типовые задачи по данной теме.

УДК 621.391.23 (075.8)
ББК 32.811 я 73

ISBN 985-444-709-X

1. ПОТОКИ ВЫЗОВОВ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Поток вызовов представляет собой дискретный случайный процесс, то есть последовательность однородных событий, которые наступают через случайные интервалы при непрерывном отсчете времени.

Потоки вызовов классифицируются с точки зрения стационарности, ординарности и последействия.

Стационарность потока означает неизменность его вероятностного режима во времени, то есть вероятность поступления некоторого числа вызовов за любой промежуток времени зависит только от длины этого промежутка и не зависит от момента начала этого промежутка.

Ординарность потока выражает собой условие практической невозможности появления двух и более вызовов на временном отрезке $\tau \to 0$. Если через $P_{i \geq 2}(\tau)$ обозначить вероятность поступления двух и более вызовов на интервале длиной τ, то ординарность потока означает, что при $\tau \to 0$

$$\lim P_{i \geq 2}(\tau) = 0(\tau),$$

где $0(\tau)$ – величина более высокого порядка малости по отношению к τ.

Отсутствие последействия означает, что условная вероятность поступления i вызовов за промежуток времени $[t, t+\tau]$, вычисленная при произвольном предположении о поступлениях вызовов до этого промежутка времени, совпадает с безусловной вероятностью того же события.

Поток вызовов является потоком с последействием, если вероятность поступления того или иного числа вызовов за некоторый промежуток времени зависит от процесса поступления вызовов до начала этого промежутка.

Случайные потоки вызовов могут обладать частичным последействием. Различают ограниченное и простое последействия.

Под потоком с ограниченным последействием понимается поток вызовов, у которого последовательность промежутков времени между вызовами Z_1, Z_2, Z_3, … представляет последовательность взаимно независимых случайных величин, имеющих любые функции распределения. К таким потокам относятся *потоки Пальма, Эрланга и Бернулли*.

Основной характеристикой потока с простым последействием является зависимость параметра потока от состояния R(t) коммутационной системы в любой рассматриваемый момент времени t. Поток с простым последействием – это ординарный поток, для которого в любой момент t существует конечный параметр потока, зависящий только от состояния R(t) коммутационной системы в момент t и не зависящий от процесса обслуживания вызовов до момента t. К потокам с простым последействием относятся *примитивный поток и поток с повторными вызовами.*

2. ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК ВЫЗОВОВ

Простейшим потоком вызовов (потоком Пуассона) называется стационарный, ординарный поток без последействия. Простейший поток полностью определяется распределением Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} ,$$

где $P_k(t)$ – вероятность поступления ровно k вызовов за интервал времени t; λ – параметр простейшего потока [1, с.13]. Интенсивность μ потока Пуассона [1, с.14] численно равна его параметру λ.

Вероятность поступления не менее k вызовов за время [0, t)

$$P_{i \ge k}(t) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} .$$

Данная функция табулирована в литературных источниках [1, с.151]. При ее самостоятельном вычислении можно ограничиваться 4–5 членами ряда.

Пример. На АТС поступает простейший поток вызовов с интенсивностью λ = 0,8 вызовов/мин. Найти вероятность того, что за 2 мин: а) не придёт ни одного вызова; б) придёт ровно один вызов; в) придет хотя бы один вызов.

Решение:

а) $P_0 = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t}$; $P_0 = \frac{(1,6)^0}{1} e^{-1,6} \approx 0,202$;

б) $P_1 = \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t}$; $P_1 = 1,6 \cdot 0,202 \approx 0,323$;

в) $P_{i \ge 1} = 1 - P_0 = 0,798$.

Промежуток времени между двумя последовательными моментами поступления вызовов не зависит от других промежутков и распределен по закону

$$F(t) = P(z_k < t) = 1 - e^{-\lambda t} .$$

Средняя величина промежутка z=1/λ.

3. НЕСТАЦИОНАРНЫЙ И НЕОРДИНАРНЫЙ ПУАССОНОВСКИЕ ПОТОКИ

Нестационарный пуассоновский поток – это случайный ординарный поток без последействия, для которого в любой момент времени t существует конечный параметр $\lambda(t)$, зависящий от момента t.

Вероятность поступления равна k вызовам на интервале τ, отсчитанном от момента t:

$$P_k(t,\tau) = \frac{[\lambda(t,\tau)]^k}{k!} e^{-\lambda(t,\tau)} ,$$

где $\lambda(t,\tau)=\int_t^{t+\tau}\lambda(u)du$ – среднее число вызовов, поступающих на интервале τ, отсчитанном от момента t.

Неординарный пуассоновский поток – это случайный стационарный неординарный поток вызовов без последействия. Для такого потока следует различать поток вызывающих моментов и поток вызовов.

Поток вызывающих моментов описывается вероятностью поступления ровно k вызывающих моментов на интервале t и определяется формулой Пуассона.

В каждый вызывающий момент поступает l ($0 \le l \le r$, $r<\infty$) вызовов. Величина l , называемая характеристикой неординарности потока, может быть постоянной и переменной. Если l постоянная величина, то с вероятностью $P_i(t)$ суммарное число вызовов, поступающих за время t , составляет k=l i .

При переменной характеристике неординарности l можно говорить о вероятности поступления любого произвольного числа вызовов k на временном интервале длиной t :

$$P_k(t)=e^{-\lambda t}\sum_k\frac{(a_1t)^{j_1}}{j_1!}\cdot\frac{(a_2t)^{j_2}}{j_2!}\cdot\ldots\cdot\frac{(a_kt)^{j_k}}{j_k!}\,.$$

Здесь λ – параметр потока вызывающих моментов; $a_l=\lambda p_l$ – среднее число вызывающих моментов в единицу времени, в которые с вероятностью p_l поступают группы вызовов по l в каждый.
Суммирование проводится по всем k , удовлетворяющим условию

$$k=j_1+2j_2+3j_3+\ldots+kj_k\ .$$

Таким образом, неординарный пуассоновский поток с переменной характеристикой неординарности можно представить как суперпозицию независимых неординарных пуассоновских потоков с постоянными характеристиками неоднородности l и параметром $a_l=\lambda p_l$.

4. ПОТОКИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Поток Пальма. Стационарный ординарный поток с ограниченным последействием называется потоком Пальма.

Распределение промежутков времени для потока Пальма задается следующими соотношениями:

$$F_1(t)=P(z_1<t)=\lambda\int_0^t\varphi_0(\tau)d\tau\ ;$$

$$F_k(t)=P(z_k<t)=1-\varphi_0(\tau),$$

где $\varphi_0(t)$ – функция Пальма – Хинчина, определяющая вероятность отсутствия вызовов на интервале длиной t при условии, что в начале интервала имеется вызов; λ – параметр потока Пальма.

Поскольку на интервале $(0,\infty)$ вероятность поступления хотя бы одного вызова равна единице,

$$F_1(\infty) = \lambda \int_0^{\infty} \varphi_0(\tau) d\tau = 1$$

и

$$\lambda^{-1} = \int_0^{\infty} \varphi_0(\tau) d\tau .$$

Потоки Эрланга. Поток Эрланга i -го порядка образуется путем просеивания простейшего потока при сохранении каждого (i +1)-го вызова и отбрасывании всех остальных вызовов. В потоках Эрланга любого порядка промежутки времени между вызовами независимы и распределены по одному и тому же закону, так как эти промежутки представляют собой сумму одинакового числа промежутков простейшего потока.

Плотность распределения промежутков между соседними вызовами для потока Эрланга i-го порядка

$$f(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} ,$$

где λ – параметр исходного простейшего потока.

Поток Бернулли. Случайный ординарный поток, в котором на заданном конечном промежутке [0, T) случайным образом поступает фиксированное число вызовов n, называют потоком Бернулли. Для этого потока моменты поступления вызовов независимы и равномерно распределены в промежутке [0, T).

Для потока Бернулли вероятность поступления k вызовов в любом промежутке $[0,t)$, где $t < T$, определяется выражением

$$P_k(0,t) = C_n^k \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k} .$$

Здесь C_n^k – число сочетаний из n по k.

Распределение промежутков между вызовами потока Бернулли можно представить в виде

$$P(z > t) = \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n ,$$

где $\lambda = \frac{n}{T}$ – параметр потока.

5. ПОТОКИ С ПРОСТЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Примитивный поток. Примитивным потоком называется такой поток с простым последействием, параметр которого λ_i прямо пропорционален числу свободных в данный момент источников:

$$\lambda_i = \alpha(N - i).$$

Здесь N – общее число источников вызовов; i – число занятых источников; α – параметр потока одного источника в свободном состоянии.

Коммутационная система, обслуживающая примитивный поток вызовов, не требует соединительных устройств более N, так как занятый источник не может производить вызовы.

Функция распределения длительности пребывания источника в свободном состоянии, то есть промежутка времени между моментом окончания одного занятия и моментом поступления от источника нового вызова:

$$F(t) = P(t_{св} < t) = 1 - e^{-\alpha t},$$

откуда следует, что поток вызовов от свободного источника является простейшим.

Поток с повторными вызовами. Данный поток состоит из потока первичных вызовов (по своим свойствам простейшего или примитивного) и собственно потока повторных вызовов. Последний возникает как результат потери первичного вызова или предыдущего повторного и является реакцией источника на работу обслуживающей системы.

Параметр потока повторных вызовов

$$\lambda_{повт} = \beta j,$$

где j – число источников повторных вызовов; β – интенсивность одного источника повторных вызовов.

Параметр суммарного потока для случаев, когда первичные вызовы образуют простейший или примитивный потоки, определяется соответственно

$$\lambda_{\Sigma} = \lambda + j\beta,$$

$$\lambda_{\Sigma} = \alpha(N - i - j) + \beta j.$$

6. ЗАДАЧИ

Обозначения в задачах. Для получения разных вариантов исходных данных в задачах используется номер зачетной книжки студента, обозначенный как НЗ. Номера идут от 01 до 30. Если НЗ отсутствует, следует считать его равным 01. Если НЗ больше 30, следует брать вариант (НЗ - 30). Первая цифра НЗ обозначена как ПцНЗ. Вторая цифра НЗ – ВцНЗ.

Задача 1. На коммутационную систему поступает простейший поток с интенсивностью μ=1+ПцНЗ. Определить за время t =1+ВцНЗ вероятности $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$, $P_{i\geq4}(t)$.

Задача 2. Определить вероятности поступления k=3 и k ≥ 3 вызовов за промежуток t = (120 – НЗ) с, если параметр простейшего потока λ = (150 – НЗ) выз./ч.

Задача 3. Для простейшего потока с параметром λ=(299 + НЗ) выз./ч определить значение $k = k_м$, при котором вероятность $P_k(t) = [P_k(t)]_{макс}$ за время t=(89 + НЗ) с. Определить величины вероятностей $P_k(t)$ и построить распределение вероятностей для $k = k_м$; $k = k_м \pm 2$; $k = k_м \pm 4$.

Задача 4. Телефонистка справочного бюро в среднем выдает μ =(9 + НЗ) справок в час. Определить вероятность того, что случайно поступивший вызов получит отказ ввиду занятости телефонистки, если обслуживание каждой заявки занимает (91 – НЗ) с.

Задача 5. На двустороннюю межстанционную линию поступают два простейших потока вызовов с параметрами λ_1=(70 + НЗ) выз./ч и λ_2=(110 + НЗ) выз./ч. При занятии линии на противоположный конец передается сигнал блокировки длительностью τ = 100 мс. Определить вероятность блокировки межстанционной линии и вероятность встречного соединения, то есть одновременного (за время τ) поступления вызовов с обоих концов соединительной линии.

Задача 6. При расчете мощности зуммерного генератора на АТС допускается его перезагрузка не более чем в (5 + ВцНЗ) случаях из 1 000. Определить, на обслуживание какого количества вызовов одновременно должна быть рассчитана мощность зуммерного генератора, если емкость АТС N = (1 500 + + ПцНЗ $\cdot$ 100) номеров, среднее количество вызовов от одного источника c= = 2,4 выз./ч, среднее время слушания зуммерного сигнала t =3 с.

Задача 7. Для потока Пальма задана функция $\varphi_0(t) = e^{-at}$. Доказать, что при этом поток Пальма становится простейшим потоком.

Задача 8. Для потока Пальма функция $\varphi_0(t) = e^{-t}(2 + t)$. Определить функции распределения $P(z_1 < t)$ и $P(z_k < t)$.

Задача 9. При исследовании потока Бернулли оказалось, что на каждом 20-минутном интервале случайным образом поступает по (10 + ВцНЗ) вызовов. Для 10-минутного интервала определить вероятности $P_k(0,t)$, k = 0,1,2,3,4 и $P_{k\geq5}(0,t)$. Для найденных значений $P_k(0,t)$ построить распределение вероятностей.

Задача 10. Концентратор обслуживает (10 + ВцНЗ) источников нагрузки. Для 15-минутного интервала времени t определить вероятность поступления одного и хотя бы одного вызова, если в начале интервала t все источники были свободны. Интенсивность свободного источника α = (20 – ВцНЗ)/10 выз./ч.

Задача 11. Задана характеристика неординарности неординарного пуассоновского потока в виде следующего ряда распределения.

l_i	1	2	3	4	5	6	7
P_i	0,1	0,2	0,35	0,2	0,1	0,05	0

Определить вероятности поступления трех и четырех вызовов на интервале t = (100 + НЗ) с, если параметр потока вызывающих моментов λ=(150 + + НЗ) выз./ч.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнышев Ю.Н., Фань Г.Л. Теория распределения информации.– М.: Радио и связь, 1985.
2. Лившиц В.С. и др. Теория телетрафика.– М.: Связь, I979.
3. Теория телетрафика / Пер. с нем.; Под ред. Г.П. Башарина.– М.: Связь, 1971.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей: Задачи и упражнения.– М.: Наука, 1973.
5. Корнышев Ю.Н., Мамонтова Н.П. Задачник по теории телефонных и телеграфных сообщений.– Одесса: ОЭИС, 1974.

Св. план 2005, поз. 94

Учебное издание

ПОТОКИ ВЫЗОВОВ

Методические указания
для практических занятий по курсу
«Основы теории телетрафика, сетей и систем телекоммуникаций»
для студентов специальности I-45 01 03 «Сети телекоммуникаций»
дневной и заочной форм обучения

Составители:
Аксёнов Вячеслав Анатольевич,
Чижевская Наталья Александровна

Редактор Т.А.Лейко
Корректор Н.В. Гриневич

Подписано в печать 03.03.2005.	Формат 60х84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Печать ризографическая.	Усл. печ. л. 0,81.
Уч.-изд. л. 0,5.	Тираж 100 экз.	Заказ 425.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0133108 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6