Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра физики

Методические указания к решению задач

по курсу «Физика»

МЕХАНИКА. КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ

для студентов инженерно-экономического факультета

Минск БГУИР 2010

УДК 531+534(076.1)
ББК 22.2+22.336я73
М55

Составители:
А. В .Березин, З. А. Боброва, Н. Р. Последович

Р е ц е н з е н т :
доцент кафедры физики БГУИР, кандидат физико-математических наук
С. В. Родин

Механика. Колебания. Волны Методические указания к решению задач по курсу «Физика для студентов инженерно-экономического факультета составители: /А.В.Березин, З.А.Боброва, Н.Р.Последович– Минск : БГУИР, 2010. – 57 с.: 29 ил.

ISBN

Предназначены для организации самостоятельной работы студентов инженерно-экономических специальностей БГУИР на практических занятиях по темам: механика, колебания, волны. По каждому разделу приведено подробное описание решения пяти задач и приведены условия пяти задач для самостоятельного решения.

УДК 531+534(076.1)
ББК 22.2+22.336я73

ISBN

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

А, α – альфа; В, β – бета; Г, γ – гамма; Δ, δ – дельта; Е, ε – эпсилон; Z, ζ – дзета; Н, η – эта; Θ, θ – тэта; I, ι – йота; K, k – каппа; Λ, λ – ламбда; М, μ – мю; N, ν – ню; Ξ, ξ – кси; О, o – омикрон; П, π – пи; Р, ρ – ро; Σ, σ – сигма; Т, τ – тау; V, υ – ипсилон; Ф, φ – фи; Х, χ – хи; Ψ, ψ – пси; Ω, ω – омега

ФУНКЦИИ, ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ

Пусть $y = f(x)$ – функция, заданная в окрестности некоторой точки x_0 на числовой оси x и пусть $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – ее приращение в окрестности этой точки, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$.

Предел отношения

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0. Другие обозначения производной в точке $x \to$ $f'(x)$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, y'_x, $\dot{y}$.

Производная есть мера скорости изменения y относительно x. Пусть $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – действительная функция n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Частная производная первого порядка функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по x_1 есть предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta x_1} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv f'_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Эта производная есть мера скорости изменения y относительно x_1 при фиксированных значениях остальных независимых переменных. Аналогично определяются частные производные по $x_2, x_3, ..., x_n$. Каждая частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ может быть найдена посредством взятия производной от функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по x_k, если остальные $n-1$ независимых переменных рассматриваются как постоянные параметры.

СВОЙСТВА ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть заданы две независимые функции $f(x)$ и $g(x)$. Тогда

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

Второй производной функции $y = f(x)$ по x называется производная от первой производной по x $f'(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2} \equiv y'$ и читается d два y по dx дважды.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если ее приращение Δy, соответствующее приращению аргумента Δx в этой точке, может быть представлено в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $A = \text{const}$, $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Главная часть $A\Delta x$ приращения Δy, линейная относительно Δx, называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается dy, $df(x)$ или df. Коэффициент A равен первой производной от функции $f(x) \to A = f'(x)$ и $dy = f'(x)\Delta x$ или $dy = f'(x)dx$, так как $dx = \Delta x$. Применение дифференциала к приближенным вычислениям основано на использовании приближенных равенств: $\Delta y = dy$; $f(x_0 + \Delta x) \approx \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

ПРОИЗВОДНЫЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

1. $(C)'(\text{const}) = 0$. 2. $(x)' = 1$. 3. $(x)^n = nx^{n-1}$. 4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

5. $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$. 6. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. 7. $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$. 8. $(e^x)' = e^x$.

9. $(e^{nx})' = ne^{nx}$. 10. $(a^x)' = a^x \ln x$. 11. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. 12. $(\sin x)' = \cos x$.

13. $\left[(\sin Cx)' = C\cos Cx\right]$. 14. $(\cos x)' = -\sin x$. 15. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

16. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x$. 17. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 18. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

19. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$. 20. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a,\ b)$ и $F'(x)=f(x)$. Аналогичным образом определяется первообразная функции $f(x)$ в любой точке интервала $(a,\ b)$.

Если $F(x)-$ одна из первообразных функции $f(x)$ на интервале $(a,\ b)$, то любая другая первообразная $f(x)$ на этом интервале имеет вид $F(x)+C$, где $C-$ некоторая постоянная.

Множество $F(x)+C$ на интервале $(a,\ b)$ всех первообразных функции $f(x)$ на $(a,\ b)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F(x)-$ какая- либо первообразная для функции $f(x)$ на $(a,\ b)$; $C-$ произвольная постоянная.

Операция нахождения всех первообразных функции $f(x)$ называется интегрированием этой функции.

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. $\int Af(x)dx=A\int f(x)dx$ где $A=\text{const}.\ A\neq 0$.
2. $\int (f(x)\pm\varphi(x))dx=\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx$.

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int 0dx=C$; 2. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$. 3. $\int dx=x+C$. 4. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

5. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$. 6. $\int e^x dx=e^x+C$. 7. $\int\sin xdx=-\cos x+C$.

8. $\int\cos xdx=\sin x+C$. 9. $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$. 10. $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$.

11. $\int\dfrac{dx}{a^2-x^2}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C=-\arccos\dfrac{x}{a}+C$. 12. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$.

13. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$.

14. $\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C=-\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}+C$.

15. $\int\dfrac{dx}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+C$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,\ b]$. Разобьем этот отрезок на n отрезков $[x_{k-1},\ x_k]$, причем $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$ Сопоставим этому разбиению интегральную сумму $\sum\limits_{k-1}^{n} f(o_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $o_k \in [x_{k-1},\ x_k]$. Потребуем, чтобы $\max[x_{k-1},\ x_k] \to 0$ при числе разбиений $n \to \infty$. Соответствующий предел интегральной суммы называется определенным интегралом и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(o_k)\Delta x_k$. Если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx \ \ (A = \text{const})$.

2. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

3. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$, если функция $f(x)$ четна на отрезке $(-a;\ a)$.

4. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, если функция $f(x)$ нечетна на $(-a;\ a)$.

5. $\int\limits_a^b f d\varphi = f\varphi\Big|_a^b - \int\limits_a^b \varphi df$, где $f = f(x)$ и $\varphi = \varphi(x)$ непрерывны и имеют свои производные. Формула (5) называется формулой интегрирования по частям.

КИНЕМАТИКА

Твердое тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь, называется материальной точкой (частицей). Если размеры тела велики, то тело разбивают на систему материальных точек, к каждой из которых применяют физические законы и после этого производят суммирование для получения конечного результата. Положение материальной точки или твердого тела в пространстве можно определить только по отношению к другому, произвольно выбранному телу, называемого телом отсчета. Выбранное таким образом тело условно считается неподвижным и относительно него рассматривается положение или движение исследуемой материальной точки или твердого тела. Тело отсчета и часы образуют систему отсчета. Для количественного описания движения материальной точки с системой отсчета жестко связывают систему координат. Наиболее часто используют декартову (прямоугольную), полярную, сферическую и цилиндрическую системы координат.

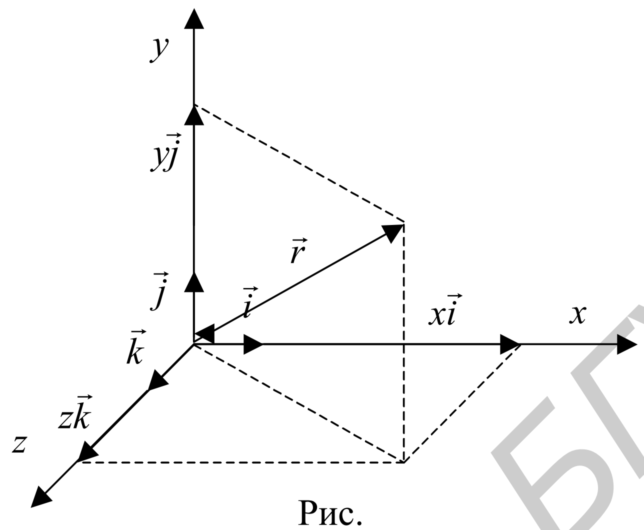


Рис.

Положение материальной точки в пространстве, в декартовой системе координат, определяется радиусом-вектором $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (рис.), проведенным из точки наблюдения в точку нахождения исследуемой материальной точки, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы на соответствующие оси координат x, y, z. Если материальная точка находится в точке A пространства то $\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$, где $\vec{r}_A$ – вектор, начинающийся в начале координат и заканчивающийся в точке A. x_A, y_A, z_A – проекции вектора $\vec{r}_A$ на оси координат x, y, z. Перемещение материальной точки из точки A в точку B характеризуется вектором перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. В проекции на оси декартовой системы координат он равен

$$\Delta r_x = x_B - x_A,\ \Delta r_y = y_B - y_A,\ \Delta r_z = z_B - z_A.$$

Модуль вектора перемещения равен

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Вектор скорости (мгновенной скорости), характеризует быстроту и направление движения частицы в каждый момент времени. Он определяется как первая производная от радиуса - вектора $\vec{r}$ по времени

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Следовательно, проекции вектора скорости на соответствующие оси декартовой системы координат равны

$$V_x = \frac{dx}{dt},\ V_y = \frac{dy}{dt},\ V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Вектор ускорения материальной точки, показывающий быстроту изменения направление и модуля вектора скорости, равен

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}.$$

Проекции вектора ускорения на координатные оси равны

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt},\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV_z}{dt}.$$

Модули векторов скорости и ускорения равны

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},\ \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории. Его можно представить в виде $\vec{V} = V\vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ - единичный вектор, касательный к траектории и направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{V}$.

Зная зависимость модуля скорости V от времени t $(\left|\vec{V}(t)\right|)$, можно вычислить путь, пройденный частицей за промежуток времени от t_1 до t_2 по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt,$$

где $V-$ модуль вектора скорости.

В случае криволинейного движения частицы по плоскости (криволинейная траектория) ускорение частицы представимо как сумма тангенциального ($\vec{a}_\tau$) и нормального ($\vec{a}_n$) ускорений: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}$ характеризует быстроту изменения модуля скорости. Оно направлено по касательной к траектории. Модуль тангенциального ускорения равен $\left|\vec{a}_\tau\right| = \frac{dV}{dt}$.

Нормальное ускорение $\vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{n}$ характеризует быстроту изменения направления скорости ($R-$ радиус кривизны траектории в месте нахождения материальной точки). Единичный вектор $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ и направлен в сторону вогнутости траектории. Модуль $\left|\vec{a}_n\right| = \frac{V^2}{R}$, Модуль вектора ускорения равен

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \left(\frac{V^2}{R}\right)^2}.$$

Углу поворота $\Delta\varphi$ тела, совершающего вращательное движение, можно поставить в соответствие вектор $\Delta\vec{\varphi}$, по модулю равный $\Delta\varphi$ и направленный вдоль оси вращения тела таким образом, чтобы из конца вектора $\Delta\vec{\varphi}$ вращение тела происходило против часовой стрелки. Тогда вектор угловой скорости $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$, а углового ускорения $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Связь между линейным и угловым скоростями осуществляется посредством формулы $\vec{V} = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из произвольной точки, лежащей на оси вращения в место нахождения материальной точки и по модулю равный радиусу кривизны ($\left|\vec{r}\right| = R$). Линейные ускорения связаны с угловым ускорением и угловой скоростью формулами $a_n = \omega^2 R$, $a_\tau = \beta R$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕШИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Вектор скорости материальной точки задается уравнением $\vec{V} = At\vec{i} - Bt^3\vec{j} + Ct^5\vec{k}$. Найти: радиус-вектор, модуль радиуса-вектора, модуль вектора скорости, ускорение и модуль ускорения материальной точки, если в момент времени $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Для решения этой задачи необходимо ознакомиться с физическими понятиями: радиус-вектор, проекции радиуса-вектора на оси декартовой системы координат, модуль радиус-вектора, вектор скорости и модуль вектора скорости в декартовой системе координат, выражение вектора скорости через производную по времени от радиуса-вектора, проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат через производные по времени от проекций радиуса-вектора на соответствующие оси координат, вектор ускорения и выражение его через производные по времени от радиуса-вектора и вектора скорости и выражение ускорения через проекции на оси координат, модуль вектора ускорения.

Анализ формулы для скорости из условия задачи показывает, что проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат равны $V_x = At$, $V_y = Bt^3$, $V_z = Ct^5$. В общем случае вектор скорости определяется как первая производная радиуса-вектора по времени:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dX}{dt}\vec{i} + \frac{dY}{dt}\vec{j} + \frac{dZ}{dt}\vec{k} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы на соответствующие оси координат $(X, У, Z)$. Следовательно, можно записать

$$\frac{dX}{dt} = V_x = At,\ \frac{dY}{dt} = V_y = Bt^3,\ \frac{dZ}{dt} = V_z = Ct^5$$

$dX = V_x dt = Atdt$, $dY = V_y dt = Bt^3 dt$, $dZ = V_z dt = Ct^5 dt$. Таким образом, пришли к дифференциальным уравнениям, в которых переменные разделены. Решение получим, интегрируя левые и правые части уравнений с использованием начальных данных:

$$\int_0^x dX = \int_0^t Atdt \to x = \frac{At^2}{2}\Big|_0^t = \frac{At^2}{2} - \frac{A0^2}{2} \to x = \frac{At^2}{2},$$

$$\int_0^y dY = \int_0^t Bt^3dt \to y = \frac{Bt^4}{4}\Big|_0^t = \frac{Bt^4}{4} - \frac{B0^4}{4} \to y = \frac{Bt^4}{4},$$

$$\int_0^z dZ = \int_0^t Ct^5dt \to z = \frac{Ct^6}{6}\Big|_0^t = \frac{Ct^6}{6} - \frac{C0^6}{6} \to z = \frac{Ct^6}{6}.$$

Радиус-вектор запишется в виде $\vec{r} = \frac{At^2}{2}\vec{i} + \frac{Bt^4}{4}\vec{j} + \frac{Ct^6}{6}\vec{k}$. Модуль радиуса-вектора равен $|\vec{r}| = \sqrt{\left(\frac{At^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{Bt^4}{4}\right)^2 + \left(\frac{Ct^6}{6}\right)^2}$. Модуль вектора скорости есть величина $\left|\vec{V}\right| = \sqrt{(At)^2 + (Bt^3)^2 + (Ct^5)^2}$. Вектор ускорения запишем как вторую производную по времени от радиуса-вектора или первую производную от вектора скорости, а его модуль -- через вторую производную от проекций радиуса-вектора или через первую производную от проекций вектора скорости на оси координат

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2X}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{k} = \frac{d^2(At^2/2)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2(Bt^4/4)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2(Ct^6/6)}{dt^2}\vec{k},$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} = \frac{d(At)}{dt}\vec{i} + \frac{d(Bt^3)}{dt}\vec{j} + \frac{d(Ct^5)}{dt}\vec{k} =$$
$$= A\vec{i} + 3Bt^2\vec{j} + 5Ct^4\vec{k}.$$

Модуль вектора ускорения $|\vec{a}| = \sqrt{(A)^2 + (3Bt^2)^2 + (5Ct^4)^2}$.

Задача 2. Уравнение движения частицы по окружности радиусом R задано через угол ц как функция времени $\varphi = Bt^3$. Найти: вектор угла $\vec{\varphi}$, вектор угловой скорости, модуль вектора угловой скорости, угловое ускорение, вектор углового ускорения, вектор линейной скорости, модуль вектора линейной скорости, векторы тангенциального и нормального ускорений частицы, модули векторов тангенциального и нормального ускорений частицы, вектор полного линейного ускорения частицы, модуль полного линейного ускорения.

Решение. Для решения этой задачи необходимо ознакомиться с физическими понятиями: криволинейное движение частицы (частный случай криволинейного движения – движение по окружности), угол поворота и вектор угла поворота, вектор угловой скорости и его модуль, угловое ускорение и модуль вектора углового ускорения, вектор линейной скорости и модуль вектора линейной скорости, векторы тангенциального и нормального линейных ускорений частицы, вектор полного линейного ускорения и модуль полного линейного ускорения частицы.

Анализ условия задачи и ее решение. В условии задачи задан угол φ в скалярном виде как функция времени. Модуль угловой скорости ω найдем как первую производную по времени от угла φ, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Векторы угловой скорости и угла поворота совпадают по направлению и направлены по оси вращения частицы таким образом, чтобы из конца этих векторов вращение частицы происходило против часовой стрелки. Если в качестве оси вращения выбрать ось Z, то в векторном виде угловая скорость запишется формулой $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, а модули векторов $\vec{\varphi}$ и $\vec{\omega}$ выразятся через проекции этих векторов на ось $Z \to \omega_z = \frac{d\varphi_z}{dt}$. Вектор углового ускорения находится, как первая производная от вектора угловой скорости или вторая производная от угла $\vec{\varphi}$: $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$, а проекция на ось $Z \to \beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi_z}{dt^2}$. Записав $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(Bt^3)}{dt}$ и выполнив дифференцирование, найдем угловую скорость $\omega = 3Bt^2$. Угловая скорость записана в скалярном виде. Чтобы записать ее в векторном виде, мы должны задать единичный вектор (например $\vec{k}$), направленный вдоль оси Z. Тогда вектор

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi_z}{dt}\vec{k} = \frac{d(Bt^3)}{dt}\vec{k} = 3Bt^2\vec{k}.$$

Вектор углового ускорения равен $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3Bt^2\right)\vec{k} = 6Bt\vec{k}$. Модуль вектора углового ускорения $\beta = 6Bt$. Вектор линейного ускорения $\vec{a}$ может быть записан через его проекции на ось τ, совпадающую по направлению с вектором линейной скорости $\vec{V}$ и перпендикулярную ей ось n и единичные векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ направленные вдоль этих осей $\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$. Проекции a_τ и a_n связаны с линейной скоростью соотношениями $a_\tau = \frac{dV}{dt}$, $a_n = \frac{V^2}{R}$. Тогда для вектора линейного ускорения мы можем записать $\vec{a} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$. Вектор линейной скорости связан с угловой скоростью формулой $\vec{V} = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]$. По модулю он равен $V = \omega r \sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$. Этот угол при движении по окружности равен 90^0 и $\sin 90^0 = 1$, т. е. $V = \omega R$, где R – радиус окружности. Из решения задачи мы знаем $\omega = 3Bt^2$. Следовательно, $V = \omega R = 3Bt^2 R$.

Тогда $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d(3Bt^2R)}{dt} = 6BRt$. $a_n = \dfrac{V^2}{R} = \dfrac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$. Из решения задачи следует, что $\omega = \dfrac{d\left(Bt^3\right)}{dt} = 3Bt^3$ и $a_n = (3Bt^2)^2 R$. Вектор полного линейного ускорения будет равен $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \dfrac{dV}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{V^2}{R}\vec{n} = 3BR\vec{\tau} + \left(3Bt^2\right)R\vec{n}$, а модуль его запишется формулой $a = \sqrt{(3BR)^2 + (3Bt^2)^4 R^2}$.

Задача 3. Тело движется по закону $\vec{V} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$. При $t = 0$, $x = y = 0$. Найти: уравнение траектории, модуль скорости, вектор ускорения и модуль вектора ускорения, радиус-вектор и модуль радиуса-вектора.

Решение. При решении задачи необходимо воспользоваться знаниями, полученными из теории и при решении предыдущих задач. Анализируя уравнение, для вектора скорости можно записать

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \to \vec{V} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}.$$

Следовательно, $V_x = \alpha$, $V_y = \beta x$, где V_x и V_y проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат.

Для нахождения траектории движения тела необходимо найти координаты x и y. Используем уравнения кинематики

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \alpha \to dx = V_x dt \to x = \int_0^x dx = \int_0^t \alpha dt = \alpha t\Big|_0^t = \alpha t,\ x = \alpha t, \tag{1}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \beta x \to dy = V_y dt \to y = \int_0^y dy = \int_0^t \beta x dt = \int_0^t \beta\alpha t dt = \alpha\beta\frac{t^2}{2}\Big|_0^t = \alpha\beta\frac{t^2}{2},\ y = \beta\frac{t^2}{2}. \tag{2}$$

Для нахождения траектории найдем выражение для t из уравнения (1) $t = \dfrac{x}{\alpha}$ и подставим в уравнение (2) $y = \alpha\beta\dfrac{x^2}{2\alpha^2} \to y = \dfrac{\beta}{2\alpha}x^2$. Таким образом, траектория является частью параболы. Модуль скорости равен $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta x)^2}$. Проекции вектора ускорения выразим через производные по времени от соответствующих проекций вектора скорости на оси декартовой системы координат. $a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{d(\alpha)}{dt} = 0$, $a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{d(\beta x)}{dt} = \beta\dfrac{dx}{dt} = \beta x$. Для нахождения радиуса-вектора воспользуемся выражениями для его проекций, которые нашли выше $x = \alpha t$, $y = \beta \frac{t^2}{2}$. Следовательно $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \alpha t i + \beta \frac{t^2}{2}\vec{j}$. Модуль радиуса –вектора равен $r = \sqrt{(\alpha t)^2 + \left(\beta \frac{t^2}{2}\right)^2}$

Задача 4. Стальной шарик катится по круговому желобу радиусом R. Его скорость изменяется по закону $V = \alpha\sqrt{S}$, где α – постоянная, S – путь, пройденный телом. Найти полное ускорение шарика и зависимость угла между направлениями полного ускорения и скорости от S.

Решение. По условию задачи скорость является функцией пути и для нахождения тангенциального ускорения необходимо использовать кинематические уравнения

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{dS}\right)\frac{dS}{dt}. \tag{1}$$

Скорость есть функция пути и производная от скорости по пути будет равна $\frac{dV}{dS} = \frac{d(\alpha\sqrt{S})}{dS} = \frac{\alpha}{2\sqrt{S}}$. Производная $\frac{dS}{dt} = V$ равна скорости. Тогда тангенциальное ускорение из (1) будет равно $a_\tau = \frac{\alpha}{2\sqrt{S}}V = \frac{\alpha}{2\sqrt{S}}\alpha\sqrt{S} = \frac{\alpha^2}{2}$.

Нормальное ускорение $a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{\alpha^2 S}{R}$. Угол между направлением полного ускорения и скоростью определяется из $\mathrm{tg}\theta = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{2\alpha^2 S}{\alpha^2 R} = \frac{2S}{R}$.

Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \frac{\beta\alpha^4 S^2}{R^2}}$

Задача 5. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость изменяется со временем по закону $\omega = At^2$. Найти зависимость от времени угла поворота тела и его угловое ускорение.

Решение. Угловая скорость связана с углом поворота формулой $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \to d\varphi = \omega dt$. Откуда находим $\varphi = \int_0^\varphi d\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t At^2 dt = \frac{At^3}{3}\Big|_0^t = \frac{At^3}{3}$.

Угловое ускорение связано с угловой скоростью соотношением

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(At^2)}{dt} = 2At.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Точка движется по закону $\vec{r} = At\vec{i} - Bt^2\vec{j} + C(1-t^3)\vec{k}$. Найти $\vec{V}(t)$, $V(t)$, $\vec{a}(t)$, $a(t)$, угол ц между векторами $\vec{V}$ и $\vec{a}$, $\varphi(t)$.

2. Частица движется по прямой со скоростью $V = \alpha t - \beta t^2$. Найти путь, пройденный телом до остановки и минимальную скорость тела $V_{\min}$.

3. Материальная точка движется по прямой по закону $X = \alpha + \beta t + \gamma t^2$. Найти скорость и ускорение точки как функцию времени.

4. Радиус-вектор материальной точки меняется со временем по закону $\vec{r} = A\vec{i} - Bt\vec{j} + Ct\vec{k}$. Найти вектор скорость ($\vec{V}$), модуль вектора скорости (V), вектор ускорения $(\vec{a})$, модуль вектора ускорения (a).

5. Материальная точка движется по окружности радиусом R так, что $S(t) = At + Bt^2$. В какой момент времени t тангенциальное и нормальное ускорения будут равны?

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

В основе динамики лежат законы Ньютона. Первый закон Ньютона формулируется следующим образом: всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения $(\vec{a} = 0)$, пока воздействие других тел на это тело не заставит его изменить это состояние. Первый закон Ньютона указывает на то, что существуют такие системы отсчета, относительно которых тела сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на тела не действуют силы или силы взаимно компенсируют друг друга. Такие системы отсчета называются инерциальными. Из этого следует, что первый закон Ньютона выполняется только в инерциальных системах отсчета.

Первый закон Ньютона применим к равномерному движению материальной точки. Если на материальную точку действуют другие тела, происходит изменение состояния движения, тело выходит из состояния покоя или равномерного и прямолинейного движения, меняется скорость тела, т. е. тело приобретает ускорение.

Это воздействие характеризуется физической величиной, называемой силой $(\vec{F})$, которая является количественной характеристикой действия на тело другого тела или физического поля. Если действовать одной и той же силой на разные тела то эти тела приобретают различные ускорения, т. е. различие в ускорениях обусловлено также свойством самих тел. Это свойство характеризуется особой величиной, называемой массой тела. Масса характеризует инертность тела, т. е. «сопротивляемость» тела воздействию силы.

Совокупность тел, движение которых рассматривается в данной задаче, называется механической системой. Импульс механической системы определяется как векторная сумма импульсов тел, образующих механическую систему:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i\,,\ \ \vec{p}_i = m\vec{V}_i\,.$$

Силы взаимодействия тел, входящих в механическую систему, называются внутренними силами. Силы, действующие на тела механической системы со стороны тел, не входящих в механическую систему, называются внешними силами.

Второй закон Ньютона позволяют установить закон изменения импульса. Второй закон Ньютона количественно связывает изменение движения механической системы с силами, вызывающими это изменение движения и гласит: скорость изменения импульса механической системы равен результирующей всех внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{рез}}^{\text{внешн}} \quad \text{(в дифференциальной форме)}$$

или

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{рез}}^{\text{внешн}} dt \quad \text{(в интегральной форме).}$$

Если масса постоянная и мы имеем дело с материальной точкой, то

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a}\,,\ \ m\vec{a} = \Sigma\vec{F}_{i,\ \text{внешн}}\,.$$

В таком виде второй закон Ньютона называется основным уравнением динамики материальной точки, или основным уравнением динамики поступательного движения.

Если на механическую систему внешние силы не действуют, то она называется замкнутой (изолированной). Для замкнутой системы $\vec{F}_{\text{рез}}^{\text{внешн}} = 0$ и $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$. Равенство нулю производной говорит о том, что $\vec{p} = \text{const}$, т. е. для замкнутой системы выполняется закон сохранения импульса: импульс замкнутой механической системы остается постоянным. Закон сохранения импульса можно в некотором приближении применять и для незамкнутых систем, если результирующей внешних сил можно пренебречь. Это возможно, если эти внешние силы действуют мгновенно, т. е. промежуток времени действия внешней силы мал (удар, взрыв). Если результирующая внешних сил не равна нулю, но одна из ее проекций на декартову систему координат (например OX) равна нулю, то проекция импульса системы на это направление сохраняется: $\frac{dp_x}{dt} = 0 \rightarrow p_x = \text{const}$.

Если имеется механическая система, состоящая из системы материальных точек, то центром масс (центром инерции) такой системы называется точка C, положение которой задается радиусом-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

Здесь $\vec{r}_n$ – радиус-вектор нахождения материальной точки массой m_n относительно любой фиксированной точки системы.

Импульс системы материальных точек (твердого тела) равен произведению суммарной массы частиц системы m на скорость центра масс V_c системы (твердого тела): $\vec{p} = m\vec{V}_c \to \vec{V}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$, $\vec{a}_c = \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}$. Второй закон Ньютона для системы материальных точек через ускорение: $m\vec{a}_c = \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{рез}}^{\text{внешн}}$.

Третий закон Ньютона гласит: силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки, равны по величине, противоположны по направлению и направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки: $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$. Следует отметить, что второй и третий законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета.

Прежде чем приступить к решению задач, рассмотрим основные силы, действующие на тела.

Сила тяжести

Под воздействием притяжения к Земле все тела в отсутствие других сил, падают на Землю с одинаковым в данной точке Земли ускорением $\vec{g}$, т. е. на тело массой m действует сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$. Сила тяжести приблизительно равна силе гравитационного взаимодействия тела и Земли: $\vec{F} = \vec{G}\frac{Mm}{r^2}$ $(r = R_3 + h)$. Различие между этими силами обусловлено тем, что поверхность Земли не является инерциальной системой отсчета.

Сила сопротивления

Сила сопротивления (вязкого трения) возникает при движении твердого тела в жидкой или газообразной среде. Эта сила пропорциональна первой или второй степени скорости тела в этой среде: $F_c \sim V, V^2$.

Сила трения

Сила трения (сухого трения) возникает между поверхностями твердых тел как в случае попытки вызвать скольжение одного тела по другому (сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр.0}}$), так и при скольжении поверхности одного тела относительно поверхности другого тела (сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$). Сила трения скольжения $F_{\text{тр}} \le \mu N$, где μ – коэффициент трения, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей, $\vec{N}$ – сила реакции опоры. Сила трения скольжения направлена противоположно направлению скорости движущегося тела относительно тела, с которым оно соприкасается. Если сила, приложенная к телу, направлена вдоль поверхности и она $\le \mu N$, тело не будет двигаться. В этом случае возникает сила трения покоя, направленная против силы, действующей на тело и равная ей. Величина силы трения меняется в пределах от 0 до $F_{\text{тр. макс}} = \mu N$. В пределах этих значений $\vec{F}_{\text{тр}}$ компенсирует действие остальных сил, препятствующих относительному движению сопротивляющихся поверхностей.

Сила упругости

$F_{\text{упр}} = -kx$, где k – коэффициент упругости, x – абсолютная деформация ($x = \Delta l = |l - l_0|$). Знак минус говорит о том, что $F_{\text{упр}}$ направлена против деформации, т. е. стремится вернуть тело в недеформированное состояние.

Силы инерции

Силы инерции вводятся для того, чтобы описать движение тела относительно неинерциальной системы отсчета K^{I}, движущейся ускоренно относительно инерциальной системы отсчета K, и являются псевдосилами:

а) неинерциальная система отсчета движется поступательно относительно инерциальной системы отсчета с ускорением $\vec{a}_c$ ($\vec{F}_i = -m\vec{a}_c$ где m – масса тела, $\vec{a}_c$ – ускорение системы отсчета);

б) неинерциальная система отсчета вращается относительно инерциальной системы отсчета с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Сила инерции, действующая на неподвижное тело в такой неинерциальной системе отсчета, называется центробежной ($\vec{F}_{\text{цб}} = -m\omega^2\vec{r}$, где $\vec{r}$ – вектор, направленный от оси вращения до центра масс тела). Если тело движется со скоростью $\vec{V}^{I}$ относительно вращающейся системы отсчета, то на тело действует также сила инерции, называемая силой Кориолиса $\vec{F}_{\text{Кор}} = 2m\left[\vec{V}^{I}\vec{\omega}\right]$.

Если объектом исследования является материальная точка или если тело движется поступательно, то для решения задач используется второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки – динамическое уравнение).

Некоторые физические определения, используемые при решении задач

Абсолютно упругим называется удар, при котором полная механическая энергия не меняется. Механическая энергия не переходит в другие виды энергии. При рассмотрении абсолютно упругого удара следует использовать законы сохранения импульса и полной механической (кинетической) энергии.

При абсолютно неупругом ударе тел после удара тела движутся вместе с одинаковыми скоростями. Механическая (кинетическая) энергия частично или полностью переходит в другие виды энергии. Механическая энергия не сохраняется. Сохраняется импульс системы.

Алгоритм решения задач

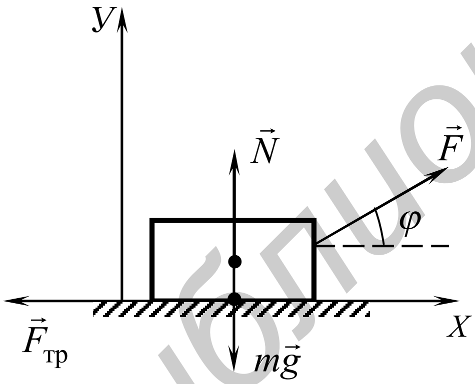
1. Сделать рисунок.
2. Выбрать одно тело и изобразить все силы, действующие на него.
3. Записать основное уравнение динамики в векторном виде

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n, \qquad (1)$$

где $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ все внешние силы, действующие на систему.

4. Выбрать оси координат.
5. Спроектировать уравнение (1) на выбранные оси координат. Пункты 2–5 повторить для всех тел системы.
6. Составить уравнения проекций всех сил на соответствующие оси координат, дополнить эту систему уравнений, исходя из условия задачи, другими уравнениями, чтобы число неизвестных равнялось числу уравнений, и решить эту систему уравнений.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Задача 1. На небольшое тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной поверхности, в момент времени $t = 0$ начала действовать сила, модуль которой зависит от времени по закону $F = kt$, где $k -$ постоянная. Направление этой силы все время составляет угол φ с горизонтом. Найти скорость тела в момент отрыва от плоскости и путь, пройденный телом к этому моменту.

Анализ условия задачи: в соответствии с условием задачи на тело действуют сила тяжести ($m\vec{g}$), сила реакции поверхности ($\vec{N}$) и сила из условия задачи, зависящая только от времени ($F = kt$).

Для решения задачи необходимо: сделать рисунок с обозначением всех действующих сил; составить основное динамическое уравнение; выбрать систему координат и спроецировать эти силы на оси координат.

Решение. Динамическое уравнение запишется в виде векторного уравнения $m\dfrac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$. Ось OX расположим на плоскости, по которой движется тело. Ось OY – перпендикулярна оси OX. Тогда уравнение движения в проекциях на оси координат имеет вид

$$OX \qquad m\frac{dV_x}{dt} = kt\cos\varphi, \tag{1}$$

$$OY \qquad 0 = mg - N - kt\sin\varphi. \tag{2}$$

Момент отрыва находится из условия $N = 0$ и из уравнения (2) находим момент времени, в который происходит отрыв тела от поверхности:

$$t_{\text{отр}} = \frac{mg}{k\sin\varphi} \tag{3}$$

Второе уравнение можно записать в виде $mdV_x = kt\cos\varphi dt$. Проинтегрировав это уравнение, мы узнаем скорость движения тела по поверхности. В соответствии с условием задачи интеграл будет определенным с пределами интегрирования скорости от 0 до V и времени от 0 нуля до t:

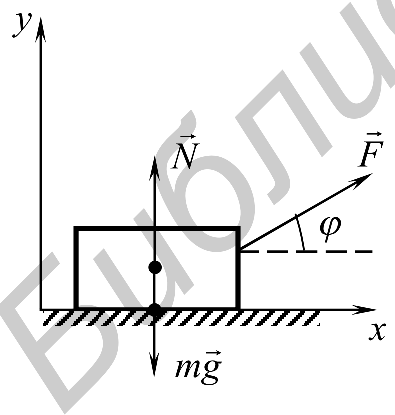
$$m\int_0^V dV = k\cos\varphi\int_0^t tdt \to mV\Big|_0^V = k\cos\varphi\frac{t^2}{2}\Big|_0^t \to V = \frac{kt^2\cos\varphi}{2m}. \tag{4}$$

Скорость тела в момент отрыва определим, подставив в уравнение (4) уравнение (3)

$$V_{\text{отр}} = \frac{mg^2\cos\varphi}{2k\sin^2\varphi}.$$

Пройденный телом путь до момента отрыва найдем, используя формулу для пути через скорость:

$$V = \frac{ds}{dt} \to ds = Vdt \to s = \int_0^{t_{\text{отр.}}} Vdt = \int_0^{t_{\text{отр.}}} \frac{kt^2\cos\varphi}{2m}dt = \frac{kt^3\cos\varphi}{6m}\Big|_0^{t_{\text{отр.}}} = \frac{m^2g^3\cos\varphi}{6k^2\sin^3\varphi}.$$



Задача 2. Тело массой m тянут по гладкой горизонтальной поверхности с силой, равной $\vec{F} = \vec{\alpha}m\chi$, где $\vec{\alpha}$ – постоянный по модулю вектор, совпадающий с направлением вектора силы. Угол, под которым действует сила, изменяется по закону $\varphi = As$, где A – постоянная, s – путь, пройденный телом из начального положения. Определить скорость тела как функцию пути s.

Анализ условия задачи: из условия задачи надо определить, какие силы действуют на тело. Это сила тяжести $(m\vec{g})$, сила реакции поверхности $(\vec{N})$, сила, соответствующая условию задачи $\left(\vec{F} = \vec{\alpha}m\chi\right)$.

Для решения задачи необходимо: записать динамическое уравнение второго закона Ньютона; сделать рисунок с обозначением и направлением всех сил; выбрать систему координат (от выбора направления осей координат зависит простота или сложность решения задачи), спроецировать все силы на оси координат.

Решение. В нашем случае динамическое уравнение запишется в виде $m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{\alpha} m\chi$, поскольку поверхность гладкая, то сила трения отсутствует. Проекции на оси координат:

$$OX \quad m\frac{dV}{dt} = F\cos\varphi, \tag{1}$$

$$OY \quad 0 = -mg + N + F\sin\varphi. \tag{2}$$

Ноль в левой части уравнения (2) указывает на то, что тело движется по поверхности (вдоль оси OX) и не совершает движения по оси OY.

Условие $N = 0$ есть условие отрыва тела, т. е. в точке x, соответствующей условию $mg = F\sin\varphi$, тело не соприкасается с поверхностью и при $F\sin\varphi > mg$ появляется отличное от нуля ускорение a_y, т. е. тело поднимается над поверхностью.

Учитывая условие задачи, уравнение (1) можем записать в виде

$$m\frac{dV}{dt} = \alpha m\chi \cdot \cos As. \tag{3}$$

Для нахождения зависимости скорости от пути необходимо провести интегрирование этого уравнения. Анализ показывает, что в этом уравнении присутствуют три переменные (s, V, t), а интегрирование проводится по двум. Необходимо выразить одну из этих переменных через две другие. Три эти переменные связаны между собой кинематическим уравнением $V = \frac{ds}{dt}$, где ds и dt бесконечно малые приращения s и t. Из кинематического уравнения получим $dt = \frac{ds}{V}$ и подставим это выражение в уравнение (3): $mV\frac{dV}{ds} = \alpha\chi m \cdot \cos As$. Разделим переменные $mVdV = m\alpha\chi \cdot \cos As \;\; ds$ и проинтегрируем это уравнение. По условию задачи тело начинает двигаться из точки $s = 0$. В этой точке $V = 0$. Тогда интеграл будет определенным с пределами интегрирования s от 0 до s и V от 0 до V:

$$\int_0^V VdV = \int_0^s \alpha\chi \cdot \cos As \cdot ds.$$

Подынтегральные выражения являются табличными. Выносим постоянные за знак интеграла и записываем

$$\int_0^V VdV = \alpha\chi\int_0^s \cos As \cdot ds, \quad \frac{V^2}{2} - \frac{V}{0} = \frac{\alpha\chi}{A}\sin As\Big|_0^s.$$

Подставив верхний и нижний пределы, для скорости найдем выражение

$$V = \sqrt{\frac{2\alpha\chi}{A}\sin As}\,.$$

Прежде чем приступить к решению задач на закон сохранения импульса, введем некоторые физические определения.

Абсолютно упругим называется удар, при котором полная механическая энергия не меняется. Механическая энергия не переходит в другие виды энергии. При рассмотрении абсолютно упругого удара следует использовать законы сохранения импульса и полной механической (кинетической) энергии.

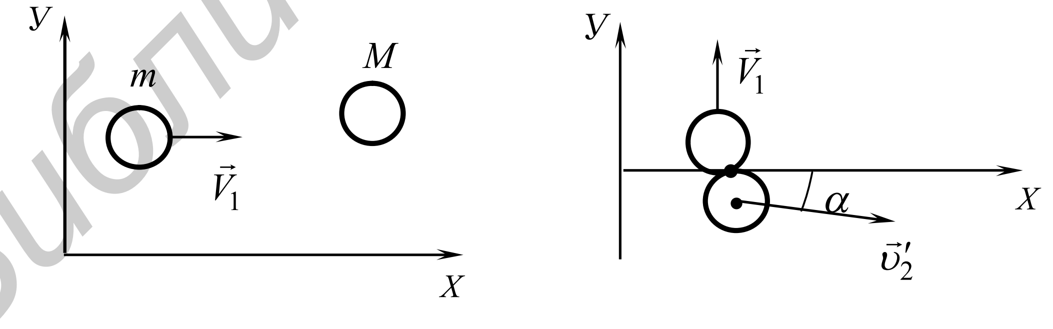
При абсолютно неупругом ударе тел после удара тела движутся вместе с одинаковыми скоростями. Механическая (кинетическая) энергия частично или полностью переходит во внутреннюю энергию (теплоту). Механическая (кинетическая) энергия не сохраняется. Сохраняется импульс системы и полная энергия, т. е.

$$E_{\text{кин.нач}} = E_{\text{кин.кон}} + Q\,.$$

Задача 3. Шар массой m, летящий со скоростью $\vec{V}_1$, совершает абсолютно упругий удар с покоящимся шаром массой m_2 и отскакивает под прямым углом. Найти скорости шаров после столкновения и угол, под которым отскочил второй шар.

Для решения этой задачи необходимо проанализировать физические процессы, происходящие с шарами до и после столкновения, ознакомиться с физическими терминами и законами: импульс, закон сохранения импульса, закон сохранения энергии.

Решение. Сделаем рисунок, соответствующий условию задачи, и обозначим направления векторов импульса до и после удара в выбранной системе координат (ось OX вдоль направления движения первого шара до столкновения, ось



OY – перпендикулярная оси OX). Запишем закон сохранения импульса и кинетической энергии:

$$m\vec{V}_1 = m\,\vec{V}_1^{\mathrm{I}} + M\vec{V}_2^{\mathrm{I}},$$

$$\frac{m(V_1)^2}{2} = \frac{m(V_1^{\mathrm{I}})^2}{2} + \frac{M\,(V_2^{\mathrm{I}})^2}{2}. \qquad (1)$$

Спроецируем векторное уравнение (1) на оси координат:

$$OX \quad mV_1 = MV_2^{\mathrm{I}}\cos\alpha\,, \tag{2}$$

$$OY \quad 0 = mV_1^{\mathrm{I}} - MV_2^{\mathrm{I}}\sin\alpha\,. \tag{3}$$

Угол α неизвестен и, чтобы исключить его из уравнений, возведем уравнения (2) и (3) в квадрат и сложим:

$$\begin{array}{l} (mV_1)^2 = (MV_2'\cos\alpha)^2 \\ + \\ (mV_1')^2 = (MV_2'\sin\alpha)^2 \qquad\qquad , \\ \text{– – – – – – – – – – – – – – – – –} \\ m^2((V_1)^2 + (V_1')^2) = M^2(V_2')^2, \end{array} \tag{4}$$

таким образом,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,.$$

Проведя математические преобразования и перегруппировав уравнение для кинетической энергии, из (1) получим формулу

$$m((V_1)^2 - (V_1')^2) = M(V_2')^2. \tag{5}$$

Разделим результирующее уравнение (4) на уравнение (5), получим

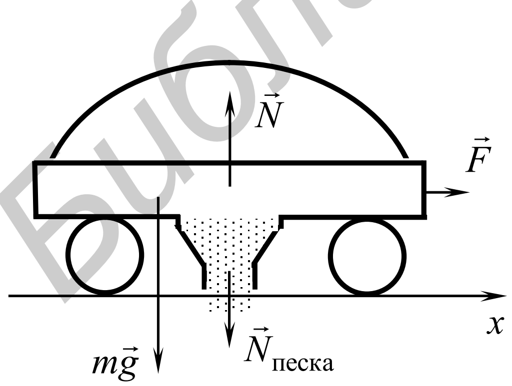
$$m\ \frac{(V_1\ )^2 + (V_1')^2}{(V_1)^2 - (V_1')^2} = M\ \text{, откуда}\ \ V_1' = V_1\sqrt{\frac{M-m}{m+M}}\,. \tag{6}$$

Подставляем (6) в результирующее уравнение (4) и находим V_1':

$$m(V_1)^2(1 + \frac{M-m}{m\ +M}) = M^2(V_2')^2 \to m^2(V_1)^2\frac{2M}{m+M} = M^2(V_2')^2 \to (V_2') = V_1\frac{m}{M}\frac{2m}{m\ +M}.$$

Для нахождения угла α разделим первые два уравнения из (4) друг на друга и найдем

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{V_1'}{V_1} = \sqrt{\frac{M-m}{m\ +M}}\,.$$



Задача 4. Дырявую тележку массой m_0 загрузили песком и начали тянуть с постоянной силой $\vec{F}$. Из отверстия в тележке песок высыпается с постоянной скоростью $\mu\frac{\text{кг}}{\text{с}}$. Найти зависимость скорости и ускорения тележки от времени.

Решение. Из условия задачи следует, что масса тележки с песком изменятся со временем по закону

$$m = m_0 - \mu t\,. \tag{1}$$

Скорость тележки является функцией времени $V(t)$. По направлению движения тележки направим ось OX.

Запишем закон изменения импульса в интегральной форме:

$$\int_{p_{\text{нач}}}^{p_{\text{кон}}} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F}dt,$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\text{кон}} - \vec{p}_{\text{нач}} = \vec{F}t, \tag{2}$$

где под $\vec{F}$ понимается сумма всех внешних сил. Спроецируем уравнение (2) на ось OX:

$$p_{\text{кон}} - p_{\text{нач}} = Ft,$$

$$(m_0 - \mu t)\,\mathrm{V} + \int_{0}^{t} \mu \mathrm{V} dt = Ft,$$

Продифференцировав это уравнение, получим

$$-\mu\mathrm{V} + (\mathrm{m}_0 - \mu t)\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} + \mu\mathrm{V} = \mathrm{F}.$$

Следовательно ускорение телепски $\alpha\dfrac{d\mathrm{V}}{dt} = \dfrac{\mathrm{F}}{m_0 - \mu\, t}$

СкоростьV найдем, проинтегрировав выражение

$$dV = \frac{Fdt}{m_0 - \mu t}$$

$$\int_0^{\mathrm{v}} d\mathrm{v} = \int_0^{\mathrm{t}} \frac{Fd\mathrm{t}}{m_0 - \mu \mathrm{t}}.$$

$$\mathrm{V}\Big|_0^{\mathrm{V}} = -\frac{\mathrm{F}}{\mu}\ln(m_0 - \mu\mathrm{t})\Big|_0^{\mathrm{t}}$$

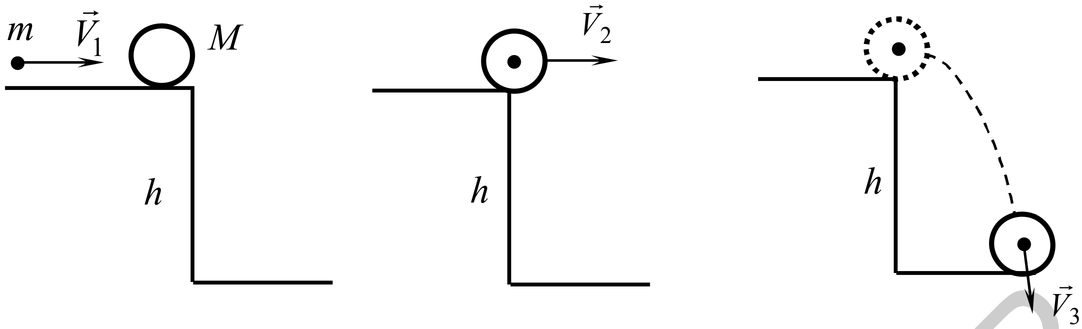
Окончательно получаем

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{F}}{\mu}\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu\mathrm{t}},$$

Задача 5. Пуля массой m летит со скоростью $\vec{V}_1$ и попадает в шар массой M, лежащий на краю стола на высоте h. Найти импульс шара и пули при ударе о пол (удар абсолютно неупругий).

Для решения задачи необходимо ознакомиться с законом сохранения импульса при абсолютно неупругом ударе.

Анализ условия задачи: известны масса и скорость пули и масса неподвижного шара, высота на которой расположен шар.



Решение: Для решения задачи сделаем рисунки, объясняющие три состояния системы. Первое состояние: пуля летит со скоростью $\vec{V}_1$. Запишем закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для этого состояния:

$$\vec{p}_{\text{сист1}} = m\vec{V}_1,$$

$$E_{\text{сист1}} = \frac{mV_1^2}{2} + (m+M)gh.$$

Второе состояние: пуля ударяется в шар и застревает в шаре. Происходит совершенно неупругий удар. Запишем законы сохранения импульса и изменения энергии для этого состояния:

$$\vec{p}_{\text{сист2}} = m\vec{V}_2,$$

$$E_{\text{сист2}} = \frac{(m+M)V_2^2}{2} + (m+M)gh,$$

где $\vec{V}_2$ – скорость пули и шара как одного целого.

Третье состояние: пуля и шар ударяются о пол. Запишем закон сохранения импульса и энергии для этого состояния:

$$\vec{p}_{\text{сист3}} = m\vec{V}_3,$$

$$E = \frac{(m+M)\vec{V}_3^2}{2},$$

где $\vec{V}_3$ – скорость пули и шара в момент удара о пол.

Анализ переходных состояний: при переходе системы из первого состояния во второе происходит абсолютно неупругий удар. При этом выполняется закон сохранения импульса и не выполняется закон сохранения энергии.

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 \to m\vec{V}_1 = (m+M)\vec{V}_2,$$

$$\vec{V}_2 = \frac{m\vec{V}_1}{m+M}.$$

При переходе из второго состояния в третье состояние выполняется закон изменения импульса и закон сохранения энергии:

$$\Delta\vec{p} = (m+M)\vec{V}_3 - (m+M)\vec{V}_2 = (m+M)\vec{g}t,$$

где t – время падения шара и пули с высоты h.

Выбираем оси координат, как показано на рисунке. Проекции импульса на эти оси равны

$$OX \qquad (m+M)V_{3X} - (m+M)V_2 = 0,\; V_{3X} = V_2 = \frac{mV_1}{m+M};$$

$$OY \qquad (m+M)V_{3Y} - 0 = (m+M)gt,\; V_{3Y} = gt.$$

Время падения пули и шара с высоты связаны соотношением $h = \dfrac{gt^2}{2}$ и $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Тогда $V_{3Y} = \sqrt{2gh}$. Скорость $\vec{V}_3$ по модулю равна

$$\left|\vec{V}_3\right| = \sqrt{V_{3X}^2 + V_{3Y}^2} = \sqrt{\frac{m^2V_1^2}{(m+M)^2} + 2gh}.$$

Импульс системы шар–пуля в момент удара о пол будет равен

$$p_3 = (m+M)V_3 = (m+M)\sqrt{\frac{m^2V_1^2}{(m+M)^2} + 2gh}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Тела массами m_1 и m_2 связаны нитью и двигаются под действием постоянной силы $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту. Коэффициент трения между обоими телами и поверхностью одинаков и равен μ. Найти ускорение тел и силу натяжения нити между телами.

2. Шарик подвесили на нити длиной l и раскрутили в горизонтальной плоскости так, что он поднялся на высоту h. Найти скорость вращения шарика.

3. Частица массой m_1 летит со скоростью $\vec{V}_1$ вдоль оси OX. Частица массой m_2 летит со скоростью $\vec{V}_2$ под углом α к оси OX. Частицы совершают совершенно неупругий удар. Найти импульс системы после удара и выделившуюся при этом теплоту.

4. В вагонетку массой m_0, движущуюся под действием постоянной силы $\vec{F}$, насыпают песок со скоростью $\vec{\mu}$. Найти скорость и ускорение вагонетки как функцию времени.

5. В тело массой m_1, висящее на невесомой нерастяжимой нити длиной l, попадает пуля массой m_2 и застревает в нем. Найти ускорение тела в точке максимального подъема.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Энергия – количественная мера всех видов движения и взаимодействия, где под движением понимаются любые изменения в системе с течением времени. Сколько есть видов движения и взаимодействия в природе, столько и видов энергии. Полная энергия есть сумма всех видов энергии.

Если система замкнутая, то закон сохранения энергии формулируется следующим образом – полная энергия замкнутой системы постоянна, т. е. энергия не исчезает в никуда и не возникает из ничего, но она может переходить из одного вида в другой. Процесс превращения одного вида энергии в другой называется работой $A = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F} d\vec{r}) = \int_{r_1}^{r_2} F \cos\alpha dr$, где $d\vec{r}$ – элементарное перемещение тела из положения с радиусом-вектором $\vec{r}_1$ в положение с радиусом-вектором $\vec{r}_2$, α – угол между направлением силы и вектором перемещения.

Механическая энергия есть сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E_{\text{мех}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}.$$

Кинетическая энергия – энергия движения $E_{\text{кин}} = \dfrac{mV^2}{2}$.

Потенциальная энергия – энергия взаимодействия тел друг с другом или отдельных частей одного и того же тела. Например: 1) энергия взаимодействия тела с Землей: $E_{\text{пот}} = mgh + \text{const}$, где const зависит от выбора нулевого уровня; 2) энергия взаимодействия друг с другом витков пружины: $E_{\text{пот}} = \dfrac{kx^2}{2}$, где k – коэффициент упругости пружины, $x = |l - l_0|$ – абсолютное удлинение (сжатие) пружины.

Закон изменения механической энергии при наличии неконсервативных сил записывается выражением

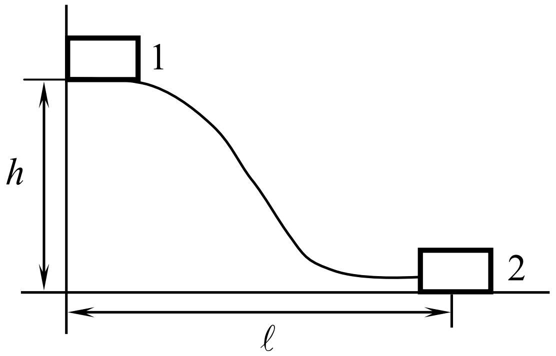
$$\Delta E_{\text{мех}} = E_{\text{мех.кон}} - E_{\text{мех.нач}} = A_{\text{неконсерв.сил}}.$$

Консервативные силы – силы, работа которых не зависит от формы и длины траектории, а зависит только от начального и конечного положений тела. Работа консервативных сил по замкнутой траектории равна нулю.

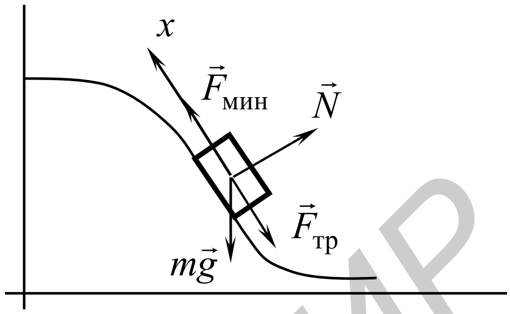
Неконсервативные силы – это силы, работа которых зависит от формы и длины траектории. Неконсервативные силы превращают механическую энергию движения во внутреннюю энергию. К неконсервативным силам относятся силы трения, сопротивления среды, пластические деформации и т. д. Работа этих сил – меньше нуля, т. к. направлены против направления перемещения тела.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Тело массой m соскальзывает с пологой горки высотой h и длиной основания l и останавливается у ее подножия. Найти минимальную работу,



а



б

которую надо затратить, чтобы затянуть тело на горку.

Для решения задачи необходимо ознакомиться с законом сохранения полной механической энергии, неконсервативными силами, динамическим уравнением второго закона Ньютона.

Решение. Для решения задачи используем закон изменения полной механической энергии с учетом неконсервативных сил. Рассмотрим два состояния системы: первое состояние – тело находится в начальном верхнем положении на горке и опустилось на основание горки (рис. а) и запишем закон изменения механической энергии для этого состояния

$$\Delta E = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = A_{\text{тр}}, \;\; E_{\text{нач}} = mgh, E_{\text{кон}} = 0 .$$

Минимальная работа будет выполнена, когда к телу приложена минимальная сила:

$$F_{\text{мин}}\left(A_{\text{мин}} = A_{F_{\text{мин}}}\right).$$

Рассмотрим состояние, когда тело поднимается на горку (рис. б)). Составим динамическое уравнение второго закона Ньютона для этого случая и сделаем рисунок с обозначением направления всех сил (см. рис. б). Выберем систему координат и запишем проекции всех сил на оси этой системы координат. Горка пологая и зададим угол α, который она составляет с основанием. Сила, которая выполняет минимальную работу $(A_{\text{мин}})$, будет минимальной, когда тело понимается с постоянной скоростью, т. е. ускорение тела равно нулю $(\vec{a} = 0)$.

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{мин}} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} \to 0 = \vec{F}_{\text{мин}} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} \to \vec{F}_{\text{мин}} = -(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}) .$$

Для нахождения выполненной элементарной работы мы должны каждую из этих сил умножить скалярно на элементарное перемещение тела $d\vec{r}$:

$$m(\vec{g}d\vec{r}) \to mgdr\cos\alpha = dA_{mg}, \, (\vec{N}d\vec{r}) \to Ndr\cos\alpha = A_N = 0(\cos\alpha = 0),$$

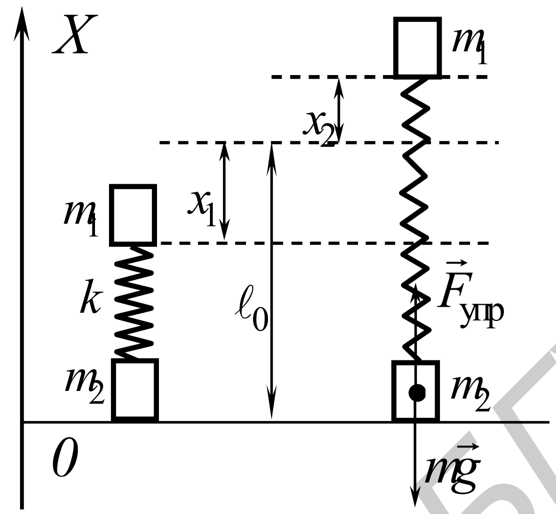
$$(\vec{F}_{\text{тр}}d\vec{r}) \to F_{\text{тр}}dr\cos\alpha = A_{\text{тр}}, \, dr\sin\alpha = dh$$

и интегрирование по dh даст нам минимальную работу:

$$A_{mg} + A_{\text{тр}} = -\int_0^h mgdh - \int_0^h mgdh = -2mgh\,.$$

Минимальная работа, затраченная на поднятие тела на горку, будет равна

$$A_{F_{\text{мин}}} = 2mgh\,.$$



Задача 2. Два кубика массой $m_1 = m_2 = m$ связаны пружиной, имеющей коэффициент жесткости k, и поставлены вертикально. Насколько надо сжать пружину, чтобы при освобождении ее нижний кубик оторвался от подставки?

Решение. Рассмотрим два состояния системы: первое состояние (рис. а): пружина максимально сжата $x_1 = |l - l_0|$. В этом состоянии система обладает энергией

$$E_1 = E_{\Pi_{\text{н.к}}} + E_{\Pi_{\text{в.к}}} + E_{\Pi_{\text{пр}}} = 0 + mg(l_0 - x_1) + \frac{kx_1^2}{2},$$

где $E_{\Pi_{\text{н.к}}}$ – потенциальная энергия нижнего кубика, $E_{\Pi_{\text{в.к}}}$ – потенциальная энергия верхнего кубика, $E_{\Pi_{\text{пр}}}$ – потенциальная энергия сжатой пружины.

Второе состояние (рис б): пружина максимально растянута $x_2 = |l_2 - l_0|$. В этом состоянии система обладает энергией

$$E_2 = E_{\Pi_{\text{н.к}}} + E_{\Pi_{\text{в.к}}} + E_{\text{пр}} = 0 + mg(l_0 + x_2) + \frac{kx_2^2}{2}.$$

Во втором состоянии на нижний кубик действуют силы $m\vec{g}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_{\text{упр}}$. В момент отрыва $\vec{N} = 0$ для второго состояния можно записать динамическое уравнение $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}} = 0$, где $F_{\text{упр}} = kx_2$ и в проекциях на ось OX (см. рис.)

$$-mg + F_{\text{упр}} = 0 \rightarrow kx_2 = mg \rightarrow x_2 = \frac{mg}{k}.$$

Так как на систему не действуют неконсервативные силы, то закон сохранения энергии выполняется и можно записать

$$mg(l_0 - x_1) + \frac{kx_1^2}{2} = mg(l_0 + x_2) + \frac{kx_2^2}{2},$$

$$-mgx_1 + \frac{kx_1^2}{2} = mg\frac{mg}{k} + \frac{k}{2}(\frac{mg}{k})^2,$$

$$kx_1^2 - 2mgx_1 - 3\frac{m^2g^2}{k} = 0,\ \ x_1 = \frac{2mg \pm \sqrt{4m^2g^2 \pm 12m^2g^2}}{2k} = \frac{mg \pm 2mg}{r},$$

$$x_1 = \frac{3mg}{k}.$$

Второе значение $x_2 = -x_1 = -\frac{mg}{k}$ соответствует растяжению (состояние 2) пружины.

Задача 3. Ведром массой m и объемом V зачерпывают воду, плотность которой равна ρ, на глубине h. Ведро висит на цепи, масса одного метра которой равна m_0. Какую работу надо совершить, чтобы вытянуть ведро с водой из колодца?

Реш**ение.** Определим приращение потенциальной энергии системы:

$$E_{\text{п}} = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}}.$$

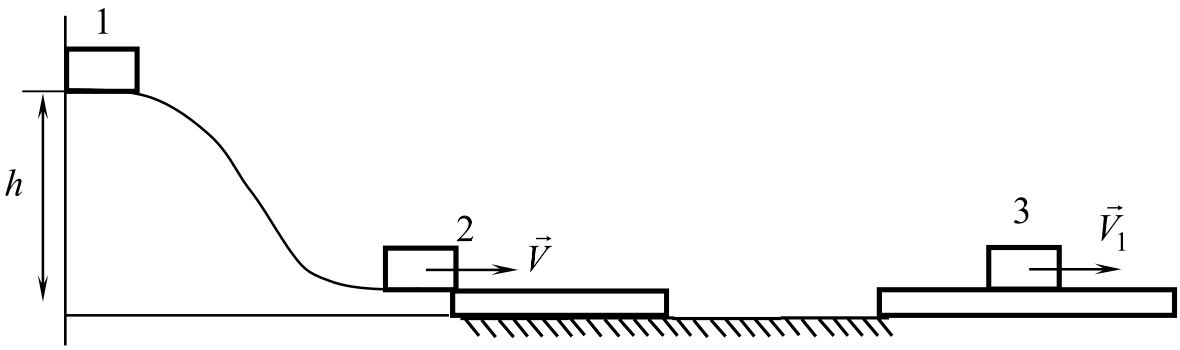
Начальная потенциальная энергия системы будет определяться потенциальной энергией ведра с водой, находящихся на глубине колодца, и потенциальной энергий растянутой цепи:

$$E_{\text{нач}} = -(m + \rho V)gh - m_0 g\frac{\mathrm{h}^2}{2} = 0,$$

где ρV – масса воды, величина $\frac{h}{2}$ задает центр масс цепи $Y_c = -\frac{h}{2}$, а потенциальная энергия цепи определяется положением центра масс цепи и равна $m_0 g\frac{\mathrm{h}}{2}$. Если за нулевой уровень принята поверхность Земли, то $E_{\text{кон}} = 0$ и

$$E_{\text{п}} = A = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = (m + \rho V + \frac{m_0 h}{2})gh.$$

Задача 4. Тело массой m соскальзывает с гладкой горки высотой h и попадает на доску массой M. Доска лежит на гладкой поверхности. Найти работу силы трения между доской и телом, совершенную за все время движения тела по доске. Переход с горки на доску плавный.



Решение. Воспользуемся законами сохранения энергии и импульса. Рассмотрим три состояния системы. Тело находится на вершине горки и покоится. В этом состоянии оно обладает потенциальной энергией

$$E_{\text{п}} = mgh .$$

Тело находится у подножия горки. Потенциальная энергия перешла в кинетическую энергию движения тела:

$$E_{\text{к}} = \frac{mV^2}{2},$$

где $V -$ скорость тела у подножия горки.

Так как горка гладкая, силы трения отсутствуют и выполняется закон сохранения энергии:

$$mgh = \frac{mV^2}{2} \to V = \sqrt{2gh} .$$

Перед попаданием на доску у ее подножия тело приобрело импульс $p = mV$.

Тело находится на доске и они двигаются вместе как единое целое. В этом состоянии система тело $-$ доска обладает импульсом

$$p_1 = (m+M)V_1$$

и кинетической энергией

$$E_{\text{К1}} = \frac{(m+M)V_1^2}{2}.$$

Так как на систему тело – доска не действуют в направлении OX внешние силы, то проекция $p_x = p_{1x} = 0$, т. е. выполняется закон сохранения импульса

$$p = p_1 \to mV = (m+M)V_1,$$

откуда

$$V_1 = \frac{m}{m+M} V = \frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}.$$

Между телом и доской существует сила трения. Следовательно, изменение механической энергии равно работе силы трения и можно записать закон изменения полной механической энергии:

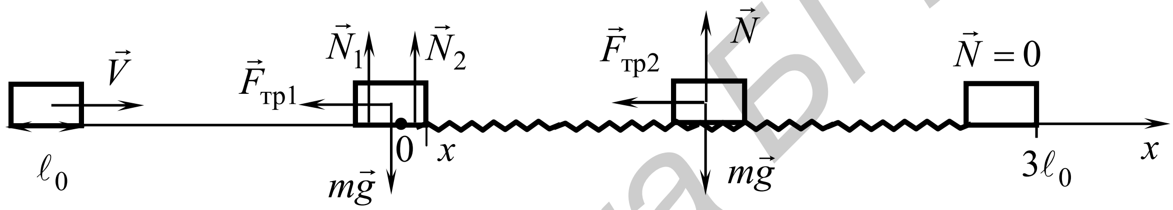
$$E_{\text{к1}} - E_{\text{к}} = A_{\text{тр}} \to \frac{(m+M)V_1^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = A_{\text{тр}}$$

$$A_{\text{тр}} = \frac{(m+M)}{2}\left(\frac{m\sqrt{2gh}}{m+M}\right)^2 - mgh = -\frac{mM}{m+M}gh.$$

Задача 5. Санки длиной l_0 скользят по гладкому льду со скоростью V и выезжают на посыпанную песком дорогу. Продвинувшись по дороге на расстояние $l = 3l_0$, они останавливаются. Найти коэффициент трения μ дороги.

Для решения задачи необходимо проанализировать условия выполнения закона сохранения механической энергии.

Решение. Движение санок от начального до конечного положения можно разбить на четыре состояния (см. рис.). В первом состоянии тело скользит по гладкому льду со скоростью V и оно обладает в этом состоянии кинетической энергией $E_1 = \frac{mV^2}{2}$. В состоянии 4 тело останавливается и $E_4 = 0$. Запишем закон изменения механической энергии: $E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = A_{\text{тр}}$.



состояние 1 *состояние* 2 *состояние* 3 *состояние 4*

В состоянии 3 тело полностью скользит по шероховатой дороге, и сила трения в этом случае равна $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Состояние 2 – это состояние, когда санки длиной l_0 надвигаются на шероховатую дорогу. В этом состоянии на санки действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры со стороны льда $\vec{N}_1$, сила реакции опоры со стороны дороги $\vec{N}_2$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$, зависящая только от силы реакции опоры со стороны дороги $\vec{F}_{\text{тр}2} = \mu\vec{N}_2$. Здесь $N_2 = \frac{mg}{l_0}x$. По условию задачи движение по льду происходит без трения ($\vec{F}_{\text{тр}1} = 0$). Сила трения $F_{\text{тр}2}$ является функцией x. Работа силы трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$ на участке $0 - l_0$ равна

$$A_{\text{тр}2} = -\int_0^{l_0}\mu N_2 dx = -\int_0^{l_0}\mu\frac{mg}{l_0}xdx = -\mu\frac{mg}{l_0}\int_0^{l_0}xdx = -\mu\frac{mg}{l_0}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{l_0} = -\mu\frac{mgl_0}{2}.$$

На участке $l_0 - 3l_0$, равном $2l_0$, сила трения постоянна и равна $\vec{F}_{\text{тр}3} = \mu m\vec{g}$ и работа сил трения на этом участке равна $A_{\text{тр}3} = -\mu mg2l_0$. Запишем закон изменения энергии $E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = A_{\text{тр}}$ с учетом всех сил:

$$0 - \frac{mV^2}{2} = -\frac{\mu mgl_0}{2} - 2\mu mgl_0 \to V^2 = 5\mu gl_0 \to \mu = \frac{V^2}{5gl_0}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Веревку длиной l_0 и массой m, лежащую на гладкой горизонтальной поверхности, затягивают на наклонную плоскость, имеющую коэффициент трения м и расположенную под углом α к горизонту. Найти работу, затраченную на передвижение веревки, если первоначально один конец веревки лежал у основания наклонной плоскости.

2. Однородный кабель длиной l перекинут через блок и находится в равновесии. Легким толчком кабель выводится из положения равновесия. Найти скорость кабеля в момент соскальзывания с блока. Трением пренебречь.

3. Вода выбрасывается из гладкого шланга сечением S под углом α к горизонту на высоту h, выше конца шланга. Резервуар, в который погружен шланг, на h_2 ниже выходного отверстия. Если КПД установки равен η, то какова мощность мотора?

4. Небольшое тело массой m_1 покоится на полусфере радиусом R. В тело стреляют пулей массой m_2, летящей со скоростью V_n. Пуля застревает в теле и оно начинает соскальзывать с полусферы. На какой высоте от стола тело оторвется от полусферы?

5. На чашку пружинных весов массой M падает с высоты h небольшое тело массой m и прилипает к весам. Найти максимальное сжатие пружины весов, если коэффициент упругости пружины k.

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ

Момент инерции I – мера инертности тела при вращательном движении. Момент инерции зависит от массы тела, ее распределения по объему тела и выбора оси, относительно которой вычисляется. Момент инерции материальной точки определяется формулой $I = m_i r_i^2$ где m_i – масса материальной точки, r_i – ее расстояние до выбранной оси.

Для определения момента инерции твердого тела его разбивают на систему материальных точек (элементарных масс), определяют момент инерции каждой материальной точки (элементарной массы) относительно оси и, проведя суммирование полученных данных, определяют момент инерции твердого тела как целого:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2,$$

где Δm_i – элементарная масса; r_i – расстояние этой элементарной массы твердого тела до оси. Элементарную массу можно выразить через плотность твердого тела $\Delta m = \rho \Delta V$, где ρ – объемная плотность, а ΔV – элементарный объем твердого тела, суммирование заменить интегрированием и формулу для определения момента инерции записать в виде

$$I = \int_{(V)} \rho r^2 \Delta V.$$

Если твердое тело однородно с постоянной плотностью по всему объему (ρ = const), то с можно вынести за знак интеграла и записать

$$I = \rho \int_{(V)} r^2 \Delta V .$$

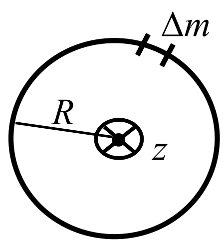
Наиболее просто момент инерции определяется для симметричных тел относительно осей, проходящих через центр инерции (главные оси инерции) или через оси симметрии однородного тела, являющиеся всегда главными осями инерции. Если ось проходит через центр массы тела, то $I = \gamma m R^2_{\text{макс}}$, где $R_{\text{макс}}$ – максимальное расстояние от конца твердого тела до оси вращения, г – постоянная, зависящая от формы тела.

Для определения момента инерции твердого тела относительно любой оси, расположенной на расстоянии a от оси инерции, проходящей через центр инерции твердого тела, используется теорема Штейнера (теорема о переносе осей инерции)

$$I = I_c + ma^2 ,$$

где I_c – момент инерции твердого тела относительно оси, проходящей через центр инерции (центр масс) твердого тела и параллельной исходной оси; a – расстояние от оси инерции, проходящей через центр инерции твердого тела (OO^{I}), до оси, относительно которой мы определяем момент инерции твердого тела и параллельной OO^{I}, m – масса твердого тела.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Задача 1. Найти момент инерции бесконечно тонкого кольца массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через центр кольца и перпендикулярной плоскости кольца.

Решение. Для решения задачи необходимо ознакомиться с физическими понятиями: момент инерции материальной точки, момент инерции системы материальных точек, момент инерции твердого тела, момент инерции симметричных тел, теоремой Штейнера (теорема о переносе осей инерции), вспомнить определение центра масс.

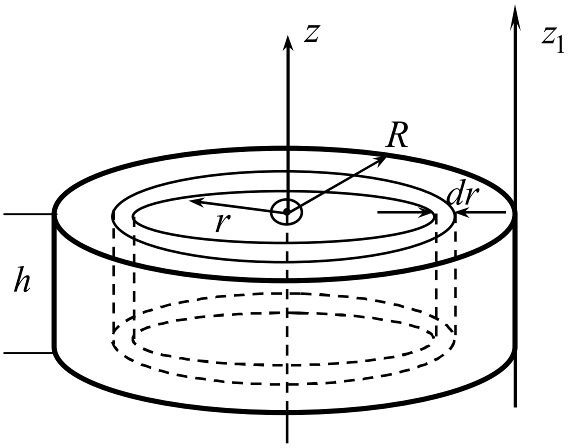
Чтобы применить формулу момента инерции материальной точки

$$I = \sum_i \Delta m_i R_i^2 \qquad (1)$$

для нахождения момента инерции тонкого кольца, разбиваем кольцо на бесконечно малые (элементарные) массы Δm_i (см. рис.). Так как кольцо тонкое, можем считать $R_i = R$, где R_i – радиус i-й бесконечно тонкой кольцевой зоны, R – радиус бесконечно тонкого кольца. Тогда в формуле (1) R^2 можно вынести за знак суммы:

$$I = R^2 \sum_i \Delta m_i .$$

Так как $\sum_i \Delta m_i = m$, то $I = mR^2$. Момент инерции бесконечно тонкого кольца равен $I = mR^2$.



Задача 2. Найти момент инерции однородного диска массой m, радиусом R относительно оси: 1) перпендикулярной диску и проходящей через его центр; 2) перпендикулярной плоскости диска и касательной к образующей.

Решение. Разбиваем диск на бесконечно тонкие кольца высотой h, равной толщине диска (величина постоянная для всех бесконечно тонких колец), шириной dr каждого и радиусом r этого бесконечно тонкого кольца. Момент инерции такого кольца найдем по формуле

$$dI = r^2 dm. \qquad (1)$$

Диск однородный $(\rho = \mathrm{const})$. Выразим массу dm через объемную плотность и элементарный объем бесконечно тонкого кольца:

$$dm = \rho dV, \qquad (2)$$

где ρ – объемная плотность, dV – элементарный объем бесконечно тонкого диска. В нашем случае объем однородного диска равен $V = \mathrm{p}r^2 h$, а дифференциал

$$dV = h\frac{d(\pi r^2)}{dr}dr = 2\pi hrdr. \qquad (3)$$

Подставляем уравнения (2) и (3) в (1)

$$dI = r^2\rho dV = r^2\rho 2\pi hrdr = 2\pi\rho hr^2 rdr = 2\pi\rho hr^3 dr.$$

Из условия задачи ясно, что r изменяется от 0 до R. Эти значения задают нам пределы интегрирования.

Тогда момент инерции диска равен

$$I = \int_0^R 2\pi\rho hr^3 dr = 2\pi\rho h\int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h\frac{R^4}{4}\mathrm{I}_0^R = \frac{\pi\rho hR^4}{2}.$$

В этой формуле нужно перейти от объемной плотности диска к его массе, которая задана в условии задачи:

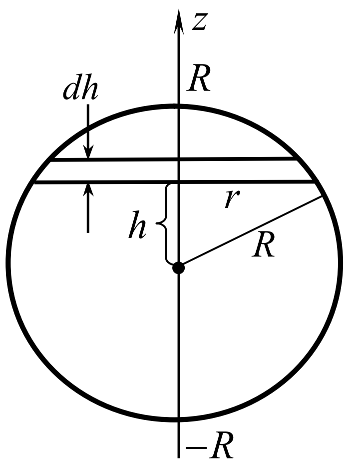
$$\rho = \frac{m}{V},\ \ V = \pi R^2 h \ \text{ и } \ I = \frac{m\pi hR^4}{2V} = \frac{m\pi hR^4}{2\pi R^2 h} = \frac{mR^2}{2}.$$

Для нахождения момента инерции относительно оси, касательной к образующей, применим теорему Штейнера:

$$I = I_c + ma^2,$$

где $a = R$.

Момент инерции диска относительно оси OO', касательной к образующей, будет равен $I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$.



Задача 3. Найти момент инерции однородного шара массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через его центр.

Решение. Очень часто для нахождения момента инерции сложных центрально-симметричных тел используется прием, когда тело разбивается не на элементарные массы, символизирующие материальные точки, а на элементарные более простые тела, моменты инерции которых известны.

В нашем случае разобьем шар на бесконечно тонкие диски толщиной dh, где h – расстояние от центра шара до элементарного диска (см. рис.), r – радиус каждого элементарного диска. Из рисунка ясно, что в нашем случае имеем две переменные h и r. Для элементарного диска момент инерции относительно оси, проходящей через его центр, равен $dI = \frac{dmr^2}{2}$ (см. предыдущую задачу). Поскольку диск однородный, то можно перейти от массы к объемной плотности и записать

$$dI = \frac{r^2 dm}{2} = \frac{\rho r^2 dV}{2}.$$

Элементарный объем элементарного диска равен

$$dV = \pi r^2 dh,$$

где r – радиус элементарного диска; dh – его толщина. Тогда момент инерции такого диска равен

$$dI = \frac{\rho r^2 \pi r^2 dh}{2}. \tag{1}$$

Анализ этой формулы показывает, что она содержит две зависящие друг от друга, переменные r и h, а интегрирование нужно провести по одной переменной. Из рисунка видно, что r и h связаны соотношением

$$R^2 = r^2 + h^2 \rightarrow r^2 = R^2 - h^2.$$

Подставим это значение r в формулу (1) и проинтегрируем ее в пределах от 0 до R:

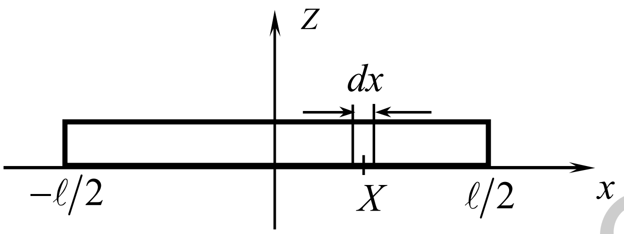
$$I=\int_0^R \frac{\pi\rho r^2 r^2 dh}{2}=\int_0^R \frac{\pi\rho(R^2-h^2)^2}{2}dh=\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R (R^4-2R^2h^2+h^4)dh=$$

$$=\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R R^4dh-\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R 2R^2h^2dh+\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R h^4dh=\frac{\pi\rho}{2}(R^4h-2R^2\frac{h^3}{3}+\frac{h^5}{5})\Big|_0^R=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\rho R^5(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5})=-\frac{1}{2}\pi\rho(-R^5)\frac{8}{15}.$$

Мы вычислили момент инерции половины шара. Поскольку шар–тело симметричное, то момент инерции всего шара получим, умножив результат на два: $I=2\frac{1}{2}\frac{8}{15}\pi\rho R^5=\frac{8}{15}\pi\rho R^5.$

Выразим плотность шара через массу $\rho=\frac{m}{V}$, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. Момент инерции шара равен $I=\frac{2}{5}mR^3$.



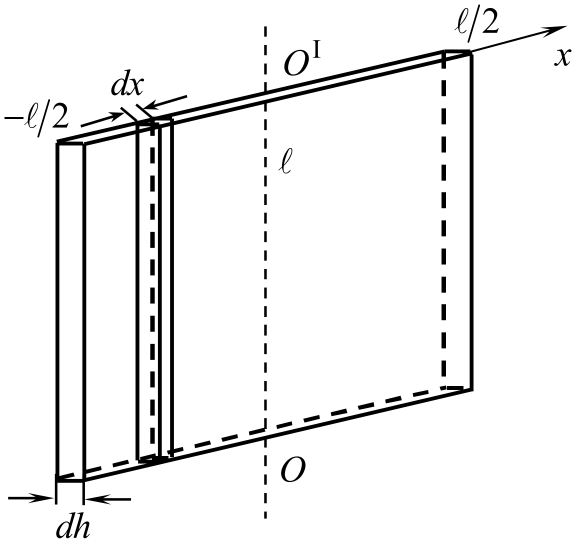
Задача 4. Найти момент инерции тонкого стержня массой m, длиной l относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно стержню.

Решение. Проведем ось OX вдоль стержня и выберем O в центре стержня. Тогда его конец будет иметь координаты $-\frac{l}{2}$ и $\frac{l}{2}$. Разбиваем стержень на бесконечно малые элементарные массы $dm=\rho dV$, где dV – элементарный объем элементарной массы, равный $dV=Sdx$ ($S=\text{const}$ – площадь поперечного сечения стержня, dx – элементарная толщина элементарной массы dm). Момент инерции элементарной массы dm, как материальной точки равен $dI=x^2dm$. Суммирование (интегрирование) всех dI даст момент инерции стержня

$$I=\int_{(V)} dI=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2dm=2\int_0^{\frac{l}{2}} \rho Sx^2dx=2\rho S\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{l}{2}}=\frac{2\rho Sl^3}{24}=\frac{\rho Sl^3}{12}.$$

В этой формуле момент инерции находится через обьемную плотность вещества ρ. Учитывая, что $\rho=\frac{m}{V}$, а $V=Sl$, найдем момент инерции стержня через его массу: $I=\frac{ml^2}{12}$, $\gamma=\frac{1}{12}$.

Задача 5. Найти момент инерции тонкой пластины размером l, H, Δh $(\Delta h << l)$ и $(\Delta h << H)$ относительно оси, лежащей в плоскости пластины перпендикулярно l, параллельно H и проходящей через центр массы пластины.



Решение. Разбиваем пластину на бесконечно тонкие стержни массой $dm = \rho dV$ параллельные оси OO'. Момент инерции такого элементарного стержня равен $dI = \rho H \Delta h x^2 dx$ (см. задачу 4). Проведя интегрирование, получим момент инерции пластины:

$$I = \int_{(V)} dI = \int_{-l/2}^{l/2} \rho H \Delta h x^2 dx =$$

$$= 2\int_{0}^{l/2} \rho H \Delta h x^2 dx = \rho H \Delta h \frac{x^3}{3}\Big|_0^{l/2} = \frac{\rho H \Delta h l^3}{12}.$$

Выразив массу пластины через объемную плотность и объем

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{lH\Delta h},$$

получим момент инерции пластины

$$I = \frac{ml^2}{12}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти момент инерции конуса массой m, радиусом основания R относительно оси, совпадающей с осью симметрии.

2. Найти момент инерции прямоугольного параллелепипеда массой m и размерами l, H, h относительно оси, параллельной H и проходящей через его центр.

3. Найти момент инерции шара массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через центр шара, и имеющего боковую сферическую полость радиусом $R/2$.

4. Найти момент инерции тонкой пластины массой m и имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами a и b относительно оси инерции, совпадающей с катетом a.

5. Найти момент инерции полусферы массой m и радиусом R относительно оси, совпадающей с диаметром основания полусферы.

МОМЕНТ СИЛЫ, МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Векторная величина $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}$ относительно некоторой точки O, называется моментом силы относительно точки O. Момент силы характеризует способность силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он вычисляется. Величина момента силы $M = rF\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Величина $l = r\sin\alpha$ называется плечом силы. Плечо силы есть расстояние от точки O до прямой, вдоль которой действует сила.

Векторная величина $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы относительно некоторой точки O, а $\vec{p} = m\vec{V}$ – импульс частицы, называется моментом импульса частицы относительно точки O.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OZ с угловой скоростью ω. Любая точка этого тела движется по окружности радиусом r. Модуль момента импульса этой точки относительно центра окружности равен

$$L = rp = rmV = mr^2\omega.$$

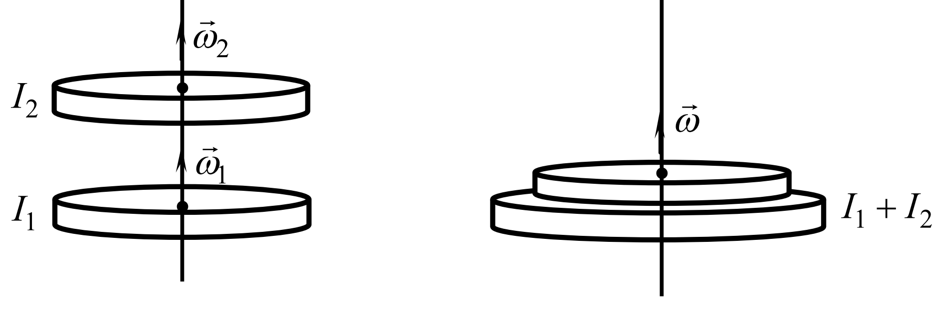
Проекция момента импульса всего тела на OZ, $L_z = I\omega_z$. Основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega_z}{dt} = M_z^{\text{внешн}}.$$

Если проекция суммарного момента внешних сил $M_z^{\text{внешн}} = 0$, то проекция момента импульса на эту ось сохраняется: $\frac{dL_z}{dt} = 0 \rightarrow L_z = \text{const}$. Выполняется закон сохранения момента импульса.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Два диска, имеющих моменты инерции I_1 и I_2, вращаются вокруг одной оси, перпендикулярной плоскости дисков, на разных высотах с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$. Верхний диск падает на нижний и они начинают вращаться вместе. Найти установившуюся угловую скорость дисков и определить, какая часть механической энергии перейдет во внутреннюю.



Решение. Для решения задачи необходимо ознакомиться с физическими величинами: – момент импульса, закон сохранения момента импульса, кинетическая энергия вращательного движения.

В соответствии с законом сохранения момента импульса мы должны записать $\vec{L}_{\text{нач}} = \vec{L}_{\text{кон}}$. В начальный момент времени диски разъединены и вращаются с различными угловыми скоростями. Момент импульса для такой системы равен сумме моментов импульсов каждого из дисков в отдельности: $\vec{L}_{\text{нач}} = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2$ (в соответствии с рисунком). После падения диски вращаются вместе с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и момент импульса их равен $\vec{L}_{\text{кон}} = (I_1 + I_2)\vec{\omega}$. Возьмем проекции вектора момента импульса на ось OZ совпадающую с направлением угловой скорости, и запишем закон сохранения: $L_{Z\text{нач}} = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$, $L_{Z\text{кон}} = (I_1 + I_2)\omega \rightarrow L_{Z\text{нач}} = L_{Z\text{кон}}$. Приравняем значения этих моментов импульсов и найдем установившуюся угловую скорость совместного вращения дисков:

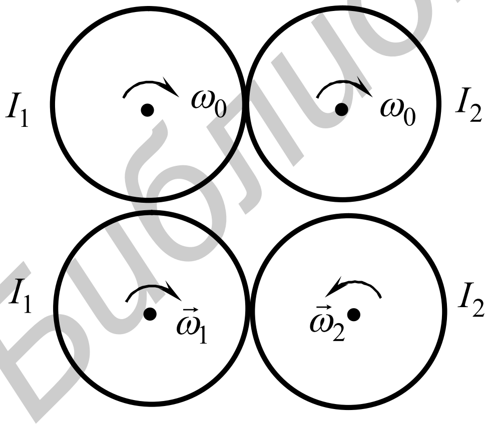
$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega \rightarrow \omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega}{I_1 + I_2}.$$

Кинетическая энергия вращательного движения записывается в виде

$$E = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Отношение разности кинетических энергий начального и конечного состояний к начальной кинетической энергии даст нам ту часть энергии, которая перейдет во внутреннюю энергию:

$$\frac{\Delta E}{E_{\text{нач}}} = \frac{I\omega_1^2 + I\omega_2^2 + (I_1 + I_2)\omega^2}{I\omega_1^2 + I\omega_2^2} = \frac{I_1 I_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2}.$$



Задача 2. Два диска с одинаковыми радиусами и моментами инерции $I_1 > I_2$ раскрутили вокруг осей, проходящих через их центры, перпендикулярно плоскости дисков до одинаковой угловой скорости $\vec{\omega}_0$ и привели в соприкосновение (см. рис.). Через некоторое время из-за силы трения диски приходят в новое положение равновесия. Найти изменение момента импульса и изменение энергии в этом процессе.

Решение. Рассмотрим процессы, протекающие в данном вращательном движении.

Начальный момент. Диски вращаются по отдельности с одинаковыми угловыми скоростями $\vec{L}_{\text{нач}} = I_1\vec{\omega}_0 + I_2\vec{\omega}_0$. В момент соприкосновения дисков между ними возникает сила трения, угловая скорость их не установилась и при этом процессе закон сохранения момента импульса не выполняется.

После некоторого промежутка времени угловая скорость становится установившейся $\vec{\omega}$ и диски вращаются с этой установившейся скоростью навстречу друг другу $\vec{L}_{\text{кон}} = I_1\vec{\omega} - I_2\vec{\omega}$ (знак минус, т. к. направления векторов угловой скорости диска 1 и диска 2 равны по модулю и противоположны по направлению $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega},\ \vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}$. Тогда для изменения момента импульса первого диска можно записать

$$\Delta\vec{L}_1 = I_1\vec{\omega} - I_1\vec{\omega}_0 = \vec{M}_{F_{\text{тр1}}} = \left[\vec{R}_1\vec{F}_{\text{тр1}}\right],\quad \Delta\vec{L}_2 = -I_2\vec{\omega} - I_2\vec{\omega}_0 = \vec{M}_{F_{\text{тр2}}} = \left[\vec{R}_2\vec{F}_{\text{тр2}}\right].$$

Проанализируем формулы изменения момента импульса первого и второго дисков. В этих формулах радиусы $R_1 = R_2 = R$, силы трения в соответствии с третьим законом Ньютона противоположны по направлению и равны по модулю $F_{\text{тр1}} = F_{\text{тр2}}$, моменты сил равны по величине и направлению:

$$\vec{M}_{F\text{тр1}} = \vec{M}_{F\text{тр2}}.$$

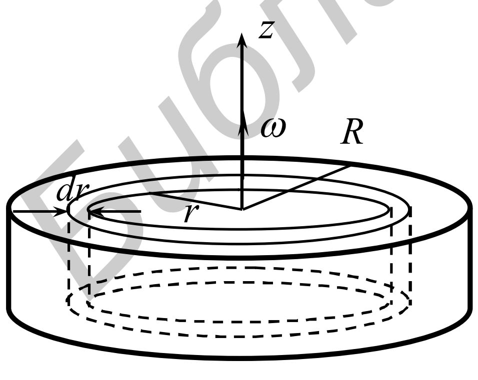
Тогда $\Delta\vec{L}_1 = \Delta\vec{L}_2$, $I_1\vec{\omega} - I_1\vec{\omega}_0 = -I_2\vec{\omega} - I_2\vec{\omega}_0 \rightarrow \vec{\omega} = \dfrac{(I_1 - I_2)}{I_1 + I}\vec{\omega}_0$.

Изменение момента импульса в начальном и конечном состояниях равно

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{\text{кон}} - \vec{L}_{\text{нач}} = (I_1 - I_2)\vec{\omega} - (I_1 - I_2)\vec{\omega}_0 = \frac{(I_1 - I_2)^2}{I_1 + I_2}\vec{\omega}_0 - (I_1 + I_2)\vec{\omega}_0 = \frac{-4I_1I_2\vec{\omega}_0}{I_1 + I_2}.$$

Разность кинетических энергий вращательного движения дисков в конечном и начальном состояниях даст изменение кинетической энергии.

$$\Delta E = \frac{(I_1 + I_2)}{2}\omega^2 - \frac{(I_1 + I_2)}{2}\omega_0^2 = \frac{I_1 + I}{2}\omega_0^2\left[\left(\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\right)^2 - 1\right] = \frac{-2I_1I_2\omega_0^2}{(I_1 + I_2)}.$$



Задача 3. Диск радиусом R, массой m раскрутили до угловой скорости $\vec{\omega}_0$ и положили плашмя на горизонтальную поверхность с коэффициентом трения μ. Найти момент импульса диска через время t.

Решение. Для решения задачи ознакомьтесь с условиями выполнения закона сохранения момента импульса. Изменение импульса системы запишется в виде

$$\Delta\vec{L} = \vec{L} - \vec{L}_0 = \int_0^t \vec{M}_{\text{вн}}dt \rightarrow \vec{L} = \vec{L}_0 + \int_0^t \vec{M}_{\text{вн}}dt, \qquad (1)$$

где $\vec{L}$ – конечный момент импульса, когда диск лежит на поверхности. $\vec{L}_0 = I\vec{\omega}_0 = \frac{mR^2}{2}\vec{\omega}_0$ – начальный момент импульса диска до соприкосновения его с поверхностью, $\vec{M}_{\text{вн}}$ – момент внешних сил. На диск действуют внешние силы: $m\vec{g}$ – сила тяжести диска, $\vec{N}$ – сила реакции опоры, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, возникающая между диском и поверхностью. Момент импульса изменяется под действием внешнего момента сил. Рассмотрим, какие из трех сил $(m\vec{g}, \vec{N}, \vec{F}_{\text{тр}})$ создают момент силы, направленной вдоль оси вращения. При выбранном нами направлении оси Z момент силы создает только сила $\vec{F}_{\text{тр}}$. Проекция момента импульса первого диска на ось Z будет равна $L_z = L_0 - \int_0^t M_{\text{вн}} dt$, (знак минус, т. к. $\vec{M}_{\text{вн}}$ направлен в противоположную оси Z сторону). Для нахождения момента сил $M_{F_{\text{тр}}}$ разобьем диск на кольца с элементарной массой dm и объемом dV. На кольцо радиусом r и шириой dr действует сила трения $dF_{\text{тр}} = \mu g dm$, где $dm = \rho dV \to dV = 2\pi h r dr$ элементарный объем плоского кольца радиусом r и толщиной dr. Момент силы трения, действующей на кольцо, равен

$$dM_{F_{\text{тр}}} = r dF_{\text{тр}} = 2\pi\rho\mu g h r^2 dr \to \rho = \frac{m}{\pi R^2 h}.$$

Момент сил, создаваемый силой трения, равен

$$M_{F_{\text{тр}}} = \int_0^R \frac{2\pi\mu g h m r^2 dr}{\pi h R^2} = \frac{2\mu g m r^3}{3R^2}\Big|_0^R = \frac{2}{3}\mu m g R.$$

Проинтегрируем выражение

$$\int_0^t M_{F_{\text{тр}}} dt = M_{F_{\text{тр}}} t \to L = L_0 - \frac{2}{3}\mu m g R t = \frac{mR^2}{2}\omega_0 - \frac{2}{3}\mu m g R t$$

Задача 4. Цилиндр массой m и радиусом R начинает скатываться без проскальзывания с наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Найти момент импульса цилиндра через время t.

Решение. В начальный момент времени цилиндр покоится и его момент импульса равен нулю $\left(\vec{L}_0 = 0\right)$ и изменение момента импульса есть величина $\Delta\vec{L} = \vec{L} - \vec{L}_0 = \int_0^t \vec{M}_{\text{вн}} dt$. Цилиндр соскальзывает без трения $(\vec{F}_{\text{тр}} = 0)$ и единственной силой, создающей момент сил, является сила тяжести. В проекции на ось Z в выбранной системе координат момент силы равен

$$M_{\text{вн}} = M_{mg} = Rmg\sin\alpha \to \Delta L = L = \int_0^t M_{mg}dt = mgRt\sin\alpha .$$

Задача 5. С высоты h по наклонной плоскости скатывается без проскальзывания цилиндр и шар с одинаковыми массами и радиусами. Во сколько раз линейная скорость цилиндра будет меньше линейной скорости шара? Во сколько раз шар скатится быстрее?

Решение. По условию задачи необходимо найти отношение $\frac{V_{\text{ш}}}{V_{\text{ц}}}$, т. е. необходимо найти скорости скатывания шара и цилиндра. Эти величины найдем из закона сохранения энергии $E_{\text{нач.пот}} = E_{\text{кон.кин}}$, где $E_{\text{нач.пот}}$ – потенциальная энергия тела на высоте h; $E_{\text{кон.кин}}$ – кинетическая энергия тела у основания плоскости. Тела совершают плоское движение и полная кинетическая энергия равна $E_{\text{кин}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \to \omega = \frac{V}{R}$, где $\frac{mV^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения центра масс тела, а $\frac{I\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения тела.

По условию задачи массы тел и моменты инерции шара и цилиндра заданы $\left(I_{\text{ш}} = \frac{2}{5}mR^2,\ I_{\text{ц}} = \frac{1}{2}mR^2\right)$. Кинетическая энергия шара равна

$$E_{\text{кин.ш}} = \frac{mV_{\text{ш}}^2}{2} + \frac{I_{\text{ш}}\left(\frac{V_{\text{ш}}}{R}\right)^2}{2} = \frac{mV^2{}_{\text{ш}}}{2} + \frac{2}{5}\frac{mR^2V_{\text{ш}}{}^2}{2R^2} = \frac{7}{10}mV_{\text{ш}}^2 .$$

Кинетическая энергия цилиндра

$$E_{\text{кин.ц}} = \frac{mV_{\text{ц}}{}^2}{2} + \frac{I_{\text{ц}}\left(\frac{V_{\text{ц}}}{R}\right)^2}{2} = \frac{mV_{\text{ц}}}{2} + \frac{mR^2V_{\text{ц}}{}^2}{4R^2} = \frac{3}{4}mV_{\text{ц}}^2 .$$

Потенциальная энергия шара равна потенциальной энергии цилиндра, т. к. их массы и радиусы одинаковы и они находятся на одной высоте, т. е.

$$E_{\text{пот.ц}} = E_{\text{пот.ш}} = mgh .$$

Запишем закон сохранения механической энергии для шара и цилиндра и, взяв их отношения, найдем отношения скоростей:

$$mgh = E_{\text{кин.ш}} = \frac{mV_{\text{ш}}^2}{2} + \frac{I_{\text{ш}}\left(\frac{V_{\text{ш}}}{R}\right)^2}{2} = \frac{mV_{\text{ш}}^2}{2} + \frac{2}{5}\frac{mR^2V_{\text{ш}}{}^2}{2R^2} = \frac{7}{10}mV_{\text{ш}}^2,$$

$$mgh = E_{\text{кин.ц}} = \frac{mV_{\text{ц}}^{\ 2}}{2} + \frac{I_{\text{ц}}\left(\frac{V_{\text{ц}}}{R}\right)^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + \frac{mR^2V_{\text{ц}}^{\ 2}}{4R^2} = \frac{3}{4}mV_{\text{ц}}^2,\ \frac{V_{\text{ш}}}{V_{\text{ц}}} = \sqrt{\frac{30}{28}}.$$

Для ответа на второй вопрос необходимо найти отношение времени скатывания шара к времени скатывания цилиндра.

Пройденный путь (длина наклонной плоскости) связан со средней скоростью движения и временем движения

$$l = \langle V \rangle t .$$

Движение цилиндра и шара равноускоренные. Поэтому

$$\langle V \rangle = \frac{V_к - V_н}{2} = \frac{V_к}{2}, V_н = 0$$

Так как пройденные пути цилиндра и шара одинаковы, то отношение времен движения

$$\frac{t_{\text{ш}}}{t_{\text{ц}}} = \frac{V_{\text{ц}}}{V_{\text{ш}}} = \sqrt{\frac{28}{30}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Шарик попадает в водоворот на расстоянии R_1 от центра воронки. Во сколько раз увеличится его угловая скорость на расстоянии R_2 от центра?

2. Планета вращается вокруг звезды по эллиптической орбите с полуосями a и b. Найти отношение минимальной и максимальной угловых скоростей планеты.

3. Диск массой m и радиусом R раскрутили до угловой скорости ω и положили на стол. Через время t он остановился. Найти коэффициент трения стола.

4. Шар радиусом R начинает скатываться с наклонной плоскости длиной l и расположенной под углом α к горизонту. Найти конечную угловую скорость шара.

5. Человек массой m находится на краю платформы массой M и радиусом R, вращающейся с угловой скоростью ω_0. Найти угловую скорость платформы с человеком, если человек переместился в центр платформы.

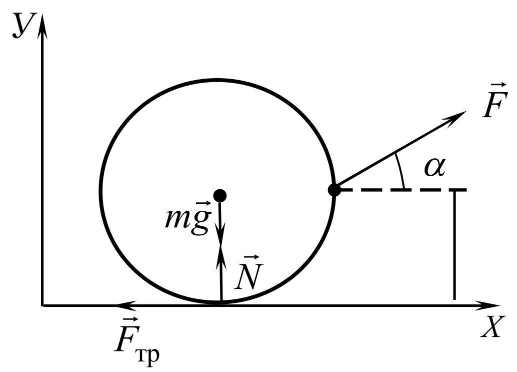
ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Основное уравнение динамики вращательного движения

$$I\beta_z = \sum M_{z,i}^{внеш}, \qquad (1)$$

где I – момент инерции твердого тела, β_z – проекция углового ускорения на ось OZ, $M_{z,i}^{внеш}$ – проекция момента i – внешней силы на ось OZ. Ось OZ выбирается вдоль оси вращения твердого тела. Уравнение (1) является аналогом основного уравнения динамики материальной точки (второй закон Ньютона).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Задача 1. С какой силой $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту, надо тащить кольцо массой m и радиусом R по поверхности, чтобы оно не вращалось. Коэффициент трения между кольцом и поверхностью м.

Решение. Для решения задачи необходимо сделать рисунок с обозначением всех действующих сил, их направлением, точкой приложения и выбрать систему координат. В общем случае кольцо должно совершать как поступательное, так и вращательное движение. Запишем для данного тела основные уравнения динамики поступательного и вращательного движения с учетом всех действующих на тело сил.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}},$$

$$I\beta_z = M_{z,mg} + M_{z,N} + M_{z,F} + M_{z,\text{тр}}.$$

Чтобы кольцо не раскручивалось, угловое ускорение должно быть равно нулю $(\beta = 0)$. Ось OZ выбираем по предполагаемой оси вращения (ось колеса) перпендикулярно его плоскости и направленной за эту плоскость от наблюдателя. Тогда проекции моментов сил на ось OZ будут равны:

$$M_{mg,z} = 0,\ M_{N,z} = 0,\ M_{F_{\text{тр}\,z}} = RF_{\text{тр}},\ M_{F_z} = -RF\sin\alpha.$$

Подставив эти значения проекций моментов сил в динамическое уравнение вращательного движения, получим

$$RF_{\text{тр}} = RF\sin\alpha,\ F_{\text{тр}} = F\sin\alpha \to F = \frac{F_{\text{тр}}}{\sin\alpha}. \qquad (1)$$

Проекции сил на оси OX и OY (поступательное движение кольца)

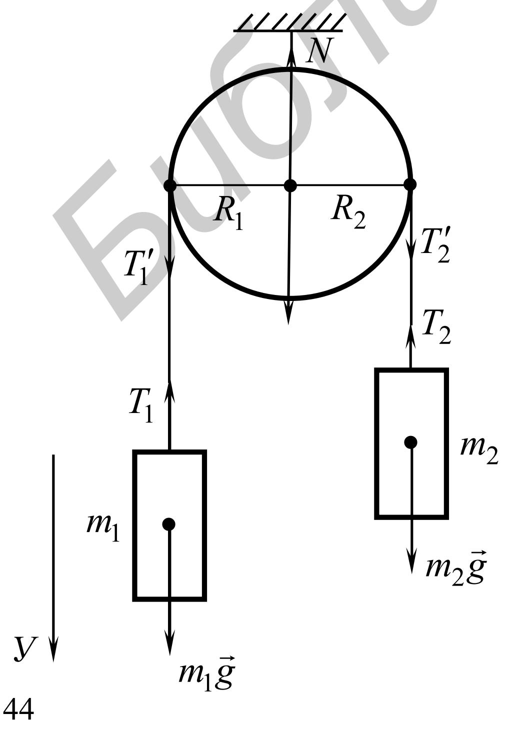
$$OX \quad ma = F\cos\alpha - F_{\text{тр}},$$

$$OY \quad 0 = N + F\sin\alpha - mg,$$

$$N = mg - F\sin\alpha \to F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha) \qquad (2)$$

Объединив уравнения (1) и (2), получим для силы F значение

$$\mu(mg - F\sin\alpha) = F\sin\alpha \to F = \frac{\mu mg}{(1+\mu)\sin\alpha}.$$



Задача 2. Через блок (диск) массой m_0 и радиусом R перекинута нить, на концах которой висят грузы массой $m_1 > m_2$. Найти ускорение грузов.

Решение. Для решения задачи необходимо сделать рисунок с обозначением всех, действующих в системе сил и указать их направления в выбранной системе координат. В нашей системе расположены три тела; блок (диск) и два груза (см. рис.). Грузы совершают поступательное движение, с одинаковыми по модулю ускорениями a, а блок – вращательное, с угловым ускорением β. Для этих трех тел запишем динамические уравнения

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1,$$
$$-m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2,$$
$$\vec{M} = \left[\vec{R}\vec{T}_1^{\,\mathrm{I}}\right] - \left[\vec{R}\vec{T}_2^{\,\mathrm{I}}\right] + \left[\vec{R}m_0\vec{g}\right] + \left[\vec{R}\vec{N}\right].$$

Проекции сил, приведенных в уравнениях, на выбранные оси координат равны

$$OY \qquad m_1a = m_1g - T_1, \tag{1}$$
$$OY \qquad -m_2a = -T_2 + m_2g. \tag{2}$$

Проекции моментов сил $\left[\vec{R}m_0\vec{g}\right]$ и $\left[\vec{R}\vec{N}\right]$ на ось OZ равны нулю, т. к. эти силы приложены к центру масс, расположенном на оси вращения блока $(R = 0)$

$$OZ \qquad I\beta = RT_1^{\mathrm{I}} - RT_2^{\mathrm{I}}. \tag{3}$$

Силы $\vec{T}_1^{\,\mathrm{I}} = -\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2^{\,\mathrm{I}} = -\vec{T}_2$ равны по модулю и противоположны по направлению и уравнение (3) перепишется в виде

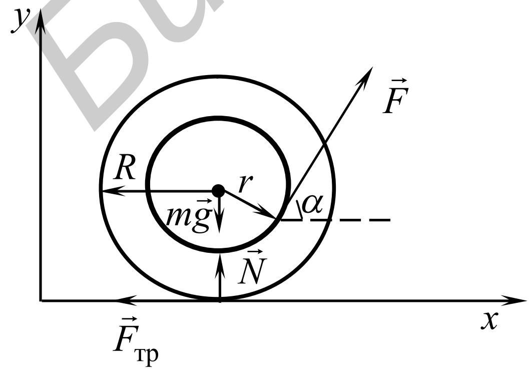
$$I\beta = RT_1 - RT_2. \tag{4}$$

Сложив уравнения (1) и (2), получим

$$a(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)g - (T_1 - T_2).$$

В этом уравнении неизвестно $(T_1 - T_2)$, которое находится из уравнения (4) с учетом, что момент инерции диска равен $I = \dfrac{m_0R^2}{2}$, а подставив эти значения, получим $\beta = \dfrac{a}{R}$.

$$a(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)g - \frac{am_0}{2} \to a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m_0}{2}}.$$



Задача 3. На катушку в виде двухступенчатого блока массой m, радиусами r и R, расположенную на поверхности стола, намотана нить. За нить тянут с силой $\vec{F}$ под углом α к горизонту, как показано на рисунке. Найти ускорение катушки, если ее момент инерции I.

Решение. Под действием силы $\vec{F}$ катушка совершает два типа движения – поступательное и вращательное. Сделаем рисунок с обозначением всех сил и их направлением и запишем динамические уравнения поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}}$.

Вращательное движение $I\text{в} = \vec{M}_{mg} + \vec{M}_N + \vec{M}_F + \vec{M}_{\text{тр}}$.

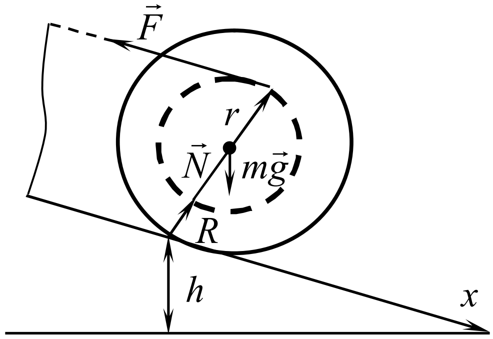
В проекциях на выбранные оси координат получим

$$OX \qquad ma = F\cos\alpha - F_{\text{тр}}, \tag{1}$$

$$OZ \qquad I\beta = rF - RF_{\text{тр}}. \tag{2}$$

Из уравнений (8) находим $F_{\text{тр}} = -ma + F\cos\alpha$, и подставим в уравнение (2)

$$\frac{Ia}{R} = Fr - (F\cos\alpha - am)R \to a = \frac{(Fr - FR\cos\alpha)}{I - mR^2} = \frac{FR(r - R\cos\alpha)}{I - mR^2}.$$



Задача 4. На катушку массой m, радиусами r, R и моментом инерции I, расположенную на высоте h на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту, намотана нить. Конец нити закреплен так, что она расположена параллельно плоскости. За какое время катушка скатится с плоскости?

Решение. Силы, действующие на катушку, постоянны. Это значит, что ускорение ее также постоянно ($a = \text{const}$) и в этом случае нужно применить формулы для равноускоренного движения. Катушка, скатываясь по наклонной плоскости без начальной скорости, пройдет путь $l = \dfrac{at^2}{2}$. Время, за которое она скатится с плоскости, равно $t = \sqrt{\dfrac{2l}{a}}$. (1)

С другой стороны, из рисунка имеем $l = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Для нахождения времени t необходимо найти ускорение a.

По условию задачи сила трения между катушкой и наклонной плоскостью отсутствует и вращающий момент будет создаваться только за счет намотанной на катушку нити. Динамические уравнения для поступательного и вращательного движения с учетом всех действующих сил имеют вид $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$, $\vec{M}_{\text{рез}} = I\vec{\beta} = \vec{M}_{mg} + \vec{M}_N + \vec{M}_F$.

Проекции моментов сил на ось OZ, проходящей через центр катушки, равны

$$M_{mg} = 0,\ \ M_N = 0,\ \ M_F = rF.$$

Тогда проекции сил и моментов сил на выбранные оси координат равны

$$OX \qquad ma = mg\sin\alpha - F, \tag{2}$$

$$OY \qquad 0 = N - mg\cos\alpha, \tag{3}$$

$$OZ \qquad I\beta = rmg\sin\alpha = rF. \tag{4}$$

Для нахождения времени t будем использовать только (2) и (4) уравнения.

Воспользуемся формулой, связывающей линейное и угловое ускорения $\left(a = \beta r \to \beta = \dfrac{a}{r} \right)$, и подставим это значение в уравнение (4). Тогда уравнение (4) принимает вид $I\dfrac{a}{r} = rF \to F = I\dfrac{a}{r^2}$. Подставим значение F в уравнение (1) и получим

$$ma = mg\sin\alpha - I\frac{a}{r^2},\ a\left(m + \frac{I}{r^2}\right) = mg\sin\alpha,\ a = \frac{mg\sin\alpha}{m + \dfrac{I}{r^2}} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \dfrac{I}{mr^2}}. \qquad (5)$$

При равноускоренном движении путь, проходимый катушкой, записывается следующим образом:

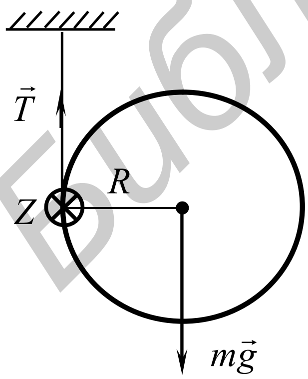
$$S = \frac{at^2}{2},\ \ a = \frac{2S}{t^2},$$

где $S = l$ длина наклонной плоскости и из рисунка $l = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Подставим это значение a в формулу (5) и получим

$$a = \frac{2l}{t^2} = \frac{t^2\sin\alpha}{2h} = \frac{mg\sin\alpha}{m + \dfrac{I}{r^2}} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \dfrac{I}{mr^2}}.$$

Подставим это значение ускорения в уравнение (5) и определим время скатывания катушки с плоскости. Оно равно

$$t = \sqrt{\frac{2h\left(1 + \dfrac{I}{mr^2}\right)}{g\sin\alpha\sin\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}.$$



Задача 5. На цилиндр массой m и радиусом R намотана нить. Свободный конец нити закреплен на потолке, и цилиндр отпускают. Найти ускорение цилиндра.

Решение. Цилиндр совершает поступательное движение центра масс и вращательное движение. Для поступательного движения динамическое уравнение движения имеет вид $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$, где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{T}$ – сила натяжения нити. Выберем систему координат, как показано на рисунке. В этом случае динамическое уравнение вращательного движения принимает вид $I\vec{\beta} = \vec{M}_{mg}$. В проекциях на оси координат запишем

$$OY \qquad ma = mg - T, \tag{1}$$

$$OZ \qquad I\beta = Rmg. \tag{2}$$

Для нахождения момента инерции цилиндра, относительно оси, проходящей, как показано на рисунке, воспользуемся теоремой Штейнера:

$$I = I_0 + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2,\ \beta = \frac{a}{R}.$$

Подставив эти значения в уравнение (2) получим $a = \frac{2}{3}g$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Шар массой m и радиусом R подвешен на нити длиной l, закрепленной на стенке за верхнюю точку. Шар опирается о стенку. Найти коэффициент трения стенки и силу натяжения нити.

2. Диск массой m и радиусом R раскрутили до угловой скорости $\vec{\omega}_0$ и положили плашмя на горизонтальную поверхность с коэффициентом трения μ. Через какое время диск остановится?

3. Стержень, массой m, длиной l и объемом V раскрутили до угловой скорости $\vec{\omega}_0$ вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр. Сила сопротивления единицы объема стержня $\vec{F}_c = -k\vec{v}$, где $\vec{v}$ – линейная скорость стержня. Какая угловая скорость будет у стержня через время t?

4. На двухступенчатый диск массой M, радиусами R и $2R$ и моментом инерции I намотаны нити. Одна нить прикреплена к потолку, а к свободному концу второй привязан груз массой m. Найти ускорение груза.

5. Цилиндр массой m и радиусом R лежит на двух полозьях. На цилиндр намотана нить, свободный конец которой свешивается между полозьями. За нить тянут с силой $\vec{F}$. Найти коэффициент трения между цилиндром и полозьями, при котором еще нет проскальзывания.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Движения материальной точки (материального объекта), периодически повторяющиеся во времени, называются колебательными движениями, или колебаниями, а система, совершающая колебания, называется колебательной системой.

Свободными колебаниями называются колебания, которые происходят, если систему вывести из положения равновесия и отпустить ее, т. е. действие внешних переменных воздействий на колебательную систему отсутствует.

Вынужденные колебания возникают в системе под влиянием переменного внешнего воздействия.

Колебания называются периодическими, если значения всех физических величин, характеризующих колебательную систему и изменяющихся при ее колебаниях, повторяются через равные промежутки времени. Промежуток времени, равный одному полному колебанию системы, называется периодом колебаний (T). Собственной частотой периодических колебаний называется величина $\nu = \frac{1}{T}$, и равная числу полных колебаний, совершаемых за единицу времени. Циклической или круговой частотой периодических колебаний называется величина $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, и равная числу полных колебаний, совершаемых за 2π единиц времени.

Периодические колебания величины $x(t)$ называются гармоническими колебаниями, если величина $x(t)$ меняется по закону синуса или косинуса.

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \alpha_1), \tag{1}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \alpha_2), \tag{2}$$

где $x(t)$ – отклонение материальной точки от положения равновесия в момент времени t; x_0 – максимальное отклонение частицы от положения равновесия и эта величина называется амплитудой колебания; α_1, α_2 – начальные фазы колебания: $\varphi = \omega t + \alpha$ – фаза колебания в любой момент времени.

Динамическое уравнение колебания пружинного маятника (второй закон Ньютона) под действием упругой силы $F_{\text{упр}} = kx$, где k – коэффициент упругости пружины, записывается как

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Знак минус указывает на то, что сила упругости направлена против направления смещения груза маятника массой m.

Динамическое уравнение колебаний физического маятника под действием силы тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$ записывается в виде

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi,$$

где I – момент инерции физического маятника; φ – угол отклонения маятника от положения равновесия; l – расстояние от точки подвеса до центра массы.

При малых значениях величины $x(t)$ пружинного маятника и малых значения угла φ $\left(\sin\varphi \approx \varphi,\ I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi\right)$ колебания пружинного и физического маятников являются гармоническими и совершаются по закону синуса или косинуса (уравнения (1), (2)).

Величины $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \to \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\left(T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right)$ – для пружинного маятника и $\omega_0^2 = \dfrac{mgl}{I} \to \omega_0 = \sqrt{\dfrac{I}{mgl}}$ $\left(T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mgl}{I}}\right)$ – для физического маятника называются циклическими (круговыми) частотами (в скобках периодами) колебаний. Тогда динамическое уравнение колебаний пружинного маятника имеет вид

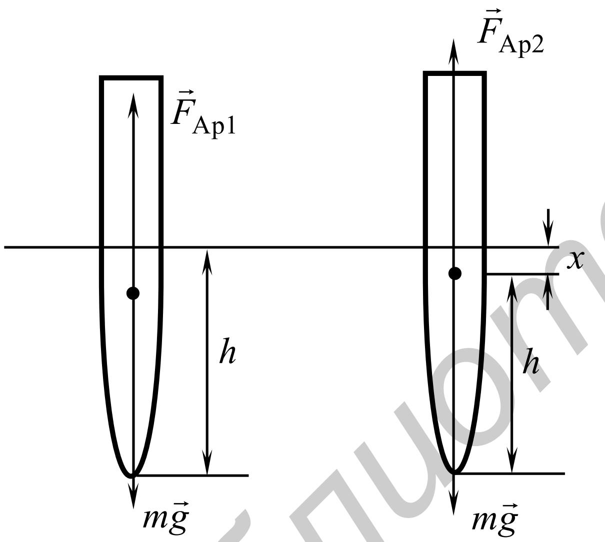
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = x^{\mathrm{II}} + \omega_0^2 x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Динамическое уравнение колебаний физического маятника

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\varphi = \varphi^{\mathrm{II}} + \frac{mgl}{I}\varphi = \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0.$$

Решением этого уравнения являются функции $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ или $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Задача 1. Ареометр, покоящийся в жидкости плотностью ρ, подтолкнули вниз и он начал совершать колебания. Найти период малых колебаний ареометра, если его масса m, а площадь поперечного сечения трубки S.

Решение. В состоянии покоя часть ареометра погружена на глубину h. На него будут действовать сила тяжести и сила Архимеда, равная силе тяжести, вытесненной ареометром жидкости:

$$\vec{F}_{\text{Ар}} = m_{\text{жидк}}\vec{g} = \rho S h \vec{g}$$

$$\vec{F}_{\text{Ар}} = m_{\text{жидк}}\vec{g} = \rho S h \vec{g}$$

где ρ – плотность жидкости; $Sh = V$ – объем вытесненной ареометром жидкости.

Динамическое уравнение для этого состояния имеет вид

$$0 = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{Ар}}. \qquad (1)$$

Когда ареометр толкнули вниз, он погрузился на глубину $h + x$ и динамическое уравнение для этого состояния запишется в виде

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{Ар2}}, \text{ где } \vec{F}_{\text{Ар2}} = \rho S \vec{g}(h + x). \qquad (2)$$

В проекциях на оси координат уравнения (1) и (2) запишутся как

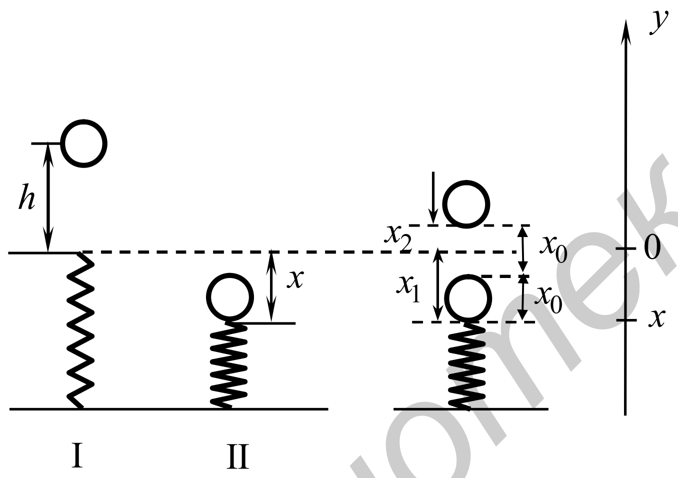
$$OX \qquad 0 = mg - \rho S h g \to mg = \rho S h g, \qquad (3)$$

$$OX \qquad ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \rho Sg(h + x). \tag{4}$$

Подставим в уравнение (4) уравнение (3) и, проведя преобразования, получим формулу

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho gSx \to m\frac{d^2x}{dt^2} + \rho gSx = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) является дифференциальным уравнением колебаний ареометра в жидкости. Отсюда имеем $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho gS}{m}x = 0$. Это динамическое уравнение гармонических колебаний, где $\omega_0^2 = \frac{\rho gS}{m} \to \omega_0 = \sqrt{\frac{\rho gS}{m}}$ и период колебаний ареометра равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$.



Задача 2. Пружина с коэффициентом жесткости k стоит на столе. С высоты h, где h отсчитывается от верхнего положения пружины до точки равновесия колеблющегося шарика, на пружину падает шарик массой m и прилипает к пружине (абсолютно неупругий удар). Найти амплитуду колебаний шарика (h отсчитывается от верхнего края пружины).

Решение. В момент соприкосновения шарика с пружиной образуется система шарик–пружина, где телом, совершающим колебания, является шарик. В начальный момент шарик обладает потенциальной энергий $E_{\text{нач}} = mgh$. Конечная энергия состоит из потенциальной энергии покоящегося шарика, в нижнем его положении и энергии пружины $E_{\text{кон}} = \frac{kx^2}{2} - mgx$, где x – максимальная деформация пружины, при которой скорость шарика равна нулю

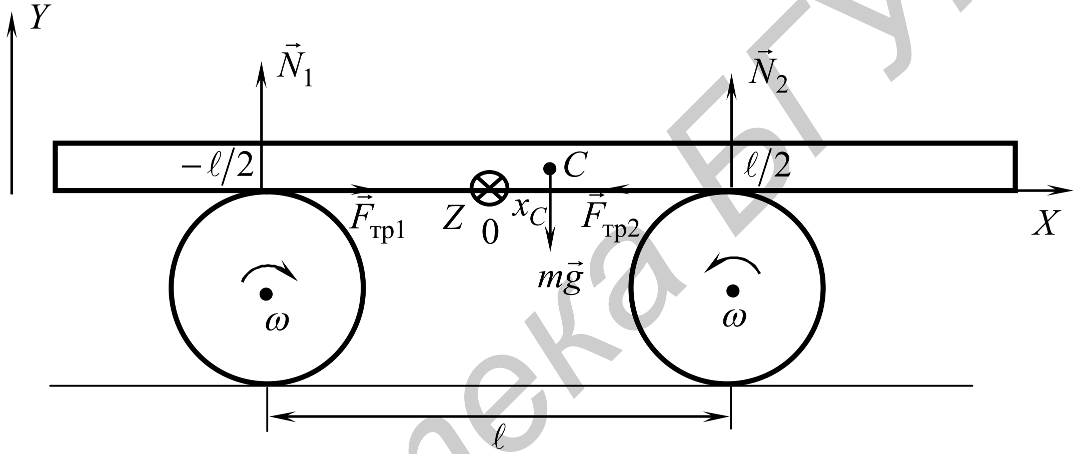
$$E_{\text{кон}} = E_{\text{нач}} \to \frac{kx^2}{2} - mgx = mgh \to \frac{kx^2}{2} - mgx - mgh = 0,$$

$$x = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k}.$$

Шарик будет совершать колебания от $x_1 = \dfrac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k}$ до $x_2 = \dfrac{mg - \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k}$. Амплитуда колебаний шарика равна $x_{\text{макс}} = \dfrac{|x_1 + x_2|}{2}$, $x_{\text{макс}} = \dfrac{\sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k}$.

Шарик будет колебаться с амплитудой x около положения равновесия.

Задача 3. На два одинаковых диска 1 и 2 , расположенных на расстоянии l и вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями навстречу друг друга, кладут длинный стержень. Коэффициент трения между дисками и стержнем μ. Найти период малых колебаний стержня.



Решение. Анализ условия задачи показывает, что на стержень действуют силы: $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{\text{тр}1}$, $\vec{F}_{\text{тр}2}$. Динамическое уравнение имеет вид

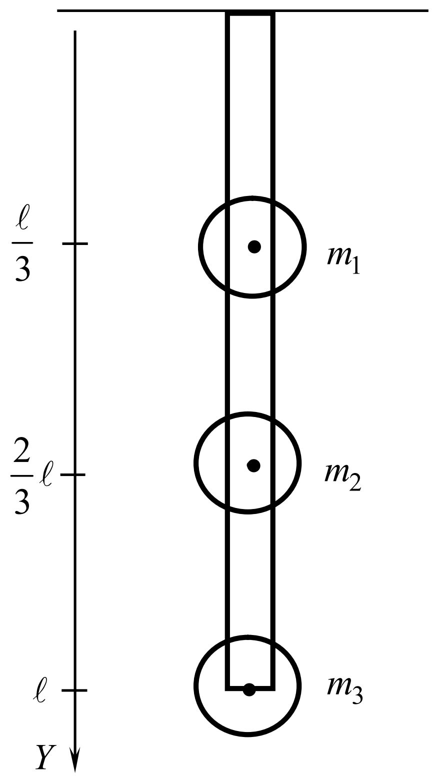
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}1} + \vec{F}_{\text{тр}2}$$

и проекция его на ось OX $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2} = \mu(N_1 - N_2)$. В этом уравнении неизвестна разность $(N_1 - N_2)$. Найдем эту разность, записав уравнение динамики вращательного движения относительно оси, проходящей через середину стержня и перпендикулярной стержню, относительно которой происходят колебания стержня.

Тогда $I\beta = N_1\dfrac{l}{2} + mgx - N_2\dfrac{l}{2}$. Стержень не совершает вращательного движения вокруг этой оси, т. е. $\beta = 0$ и $0 = N_1\dfrac{l}{2} + mgx - N_2\dfrac{l}{2} \to N_1 - N_2 = -\dfrac{2mgx}{l}$.

Дифференциальное уравнение колебаний стержня принимает вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2\mu mg}{l}x \to \omega^2 = \frac{2\mu g}{l} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2\mu g}}.$$



Задача 4. Физический маятник представляет собой стержень массой M, длиной l, на котором расположены три груза одинаковой массы m. Грузы расположены от оси подвеса на расстояниях $\frac{1}{3}l$, $\frac{2}{3}l$ и l. Определить период колебаний стержня относительно оси подвеса.

Решение. Физический маятник представляет собой систему, состоящую из четырех тел: стержень и три груза, подвешенных в различных местах стержня. Период колебаний такой системы запишется в виде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m_c g r_0}},$$

где I – момент инерции физического маятника, представляющий собой сумму моментов инерции тел, входящих в систему.

$$I = I_{\text{стерж}} + I_{\text{гр1}} + I_{\text{гр2}} + I_{\text{гр3}}.$$

Момент инерции стержня равен $I_{\text{стерж}} = \frac{1}{3}Ml^2$ и моменты инерции грузов как материальных точек равны

$$I_{\text{гр1}} = \left(\frac{l}{3}\right)^2, \; I_{\text{гр2}} = m\left(\frac{2}{3}l\right)^2, \; I_{\text{гр3}} = ml^2.$$

Момент инерции физического маятника равен $I = I_{\text{ст}} + I_{m_1} + I_{m_2} + I_{m_3}$.

$$I = \frac{1}{3}Ml^2 + \frac{1}{9}ml^2 + \frac{4}{9}ml^2 + ml^2 \to I = \frac{1}{3}Ml^2 + \frac{ml^2}{3}(1+2+3) = \frac{1}{3}Ml^2 + 2ml^2 =$$

$$= l^2\left(\frac{1}{3}M + 2m\right) \to I = l^2\,\frac{3M + 14m}{9}.$$

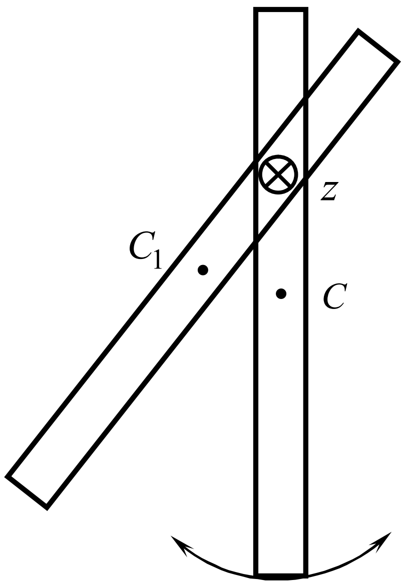
Центр масс маятника находится по формуле

$$r_0 = \frac{M\frac{l}{2} + \frac{1}{3}ml + \frac{2}{3}ml + ml}{M + m + m + m} = \frac{l(3M + 12m)}{6(M - 3m)} = \frac{l(M + 4m)}{2(M + 3m)}.$$

Масса всей системы равна $m_c = M + m + m + m = M + 3m$.

Период колебаний физического маятника будет равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m_0 g r_c}} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{l(3M + 14m)}{g(M + 4m)}}.$$



Задача 5. Однородный стержень длиной l совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через произвольную точку стержня. Найти расстояние между центром стержня и осью подвеса, при котором период колебаний будет наименьшим.

Решение. Стержень будет совершать колебания под действием силы тяжести, и уравнение его движения имеет вид

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgx\varphi \to \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgx}{I}\varphi = 0,$$

где x – расстояние от произвольной оси подвеса стержня до центра масс, I – момент инерции стержня относительно произвольной оси подвеса. Период колебаний такого маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgx}}. \qquad (1)$$

Для нахождения момента инерции воспользуемся теоремой Штейнера

$$I - \frac{1}{12}ml^2 + mx^2, \qquad (2)$$

где $\frac{1}{12}ml^2$ – момент инерции относительно оси, проходящей через центр стержня. Подставим (2) в (1):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{12gx} + \frac{x}{g}}.$$

Для нахождения расстояния x, при котором период будет наименьшим, необходимо исследовать функцию $\frac{l^2}{12gx} + \frac{x}{g}$ на экстремум, т. е. продифференцировать ее по x и приравнять к нулю:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{l^2}{12gx} + \frac{x}{g}\right) = 0 \to x^2 = \frac{l^2}{12} \to x = \frac{l}{\sqrt{12}} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sqrt{3}}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Землю просверлили по диаметру и в образовавшуюся шахту бросили тело массой m. Найти период малых колебаний тела в шахте.

2. Тело массой M подвесили на пружинке жесткостью k и отклонили вниз от положения равновесия на величину x_0, заставив его совершать колебатель-

ные движения. Затем на расстоянии $\frac{x_0}{2}$ от положения равновесия поставили плиту. Найти период новых колебаний тела.

3. На дно сферической чашки с радиусом сферы R положили шайбу массой m. Найти период малых колебаний шайбы.

4. Стержень массой m и длиной l шарнирно закреплен в верхней точке. К нижнему концу стержня, (перпендикулярно к нему) прикрепили пружину, с коэффициентом жесткости k и вывели из положения равновесия. Найти период колебаний и приведенную длину стержня.

5. Шарик массой M лежит на поверхности и прикреплен в верхней точке двумя горизонтальными пружинами, коэффициенты упругости которых k_1 и k_2. Определить период малых колебаний шарика, если проскальзывания между шариком и поверхностью нет.

ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Воздействие на колебательную систему внешних сил (силы трения, сопротивления среды и т. д.) приводит к затуханию колебаний. Рассмотрим наиболее простой случай колебания материальной точки в вязкой среде.

Сила сопротивления среды зависит от скорости движения точки $\frac{dx}{dt}$ и при небольших скоростях пропорциональна ей и направлена в сторону, противоположную скорости $(-r\frac{dx}{dt}$, где r – постоянная величина, называемая коэффициентом сопротивления и характеризующая физические свойства среды). Эта сила добавится к упругой силе $(-kx)$ и дифференциальное уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\frac{dx}{dt}.$$

Введем обозначения $\frac{k}{m} = \omega_0^2, \frac{r}{m} = 2\beta$ и запишем уравнение в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\beta\frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2\beta\frac{dx}{dt} = 0. \quad (1)$$

Величина ω называется собственной частотой незатухающих (свободных) колебаний системы, $\beta = \frac{r}{2m}$ – коэффициентом затухания.

Решением уравнения (1) является функция $x(t) = x_m e^{-\beta t}\cos(\omega t - \alpha)$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний, а $A(t) = x_m e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний.

Отношение значений амплитуды затухающих колебаний, отличающихся друг от друга на период T и равное $\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta t}$, называется декрементом затухания, а ее логарифм − логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

где $\tau = \dfrac{1}{\beta}$ – промежуток времени, в течение которого амплитуда затухания колебания уменьшилась в e раз и называемый временем релаксации; N – число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшилась в e раз.

Добротностью колебательной системы называется безразмерная величина

$$Q = \frac{2\pi}{1-e^{-2\beta T}} = \frac{2\pi}{1-e^{-2\lambda}}.$$

При малых значениях λ колебания, почти не затухающие:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta},$$

где T_0 – период свободных колебаний, $щ_0$ – циклическая частота свободных колебаний.

Вынужденные колебания возникают, если кроме упругой силы и силы сопротивления среды на колеблющуюся систему действует добавочная периодически действующая сила. Уравнение движения (второй закон Ньютона) запишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_x(t) \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_x(t).$$

Если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону $F_x(t) = F_0\cos\Omega t$, то для вынужденных установившихся колебаний амплитуда равна

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}.$$

При резонансе амплитуда, соответствующая резонансной частоте, равна

$A_{рез} = \dfrac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$, а резонансная частота $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$.

ВОЛНЫ

Тело называется упругим, а его деформация, вызываемая внешним воздействием, называется упругой деформацией, если она полностью исчезает после прекращения этого воздействия. Процесс распространения колебаний в упругой среде называется волной. Упругая волна называется продольной, если частицы среды колеблются в направлении распространения волны. Продольные волны связаны с объемными деформациями упругой среды и распространяются в любой среде – твердой, жидкой или газообразной. Упругая волна называется поперечной, если частицы среды колеблются, оставаясь в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны. Поперечные волны связаны с деформациями сдвига упругой среды и распространяются только в кристаллических телах. Волна называется гармонической, если изменение состояния среды происходит по закону синуса или косинуса. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Геометрическое место точек, до которых доходит волна к моменту времени t, называется фронтом волны. По форме волнового фронта синусоидальная (косинусоидальная) волны делятся на плоские и сферические. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся в направлении оси X,

$$S = A\sin(\omega t - kX + \alpha_0),$$

где S – отклонение частицы среды от положения равновесия в момент времени t; A – максимальное отклонение частицы среды от положения равновесия (амплитуда волны); $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – круговая частота волны (T – период волны, $\omega = 2\pi\nu$, ν – собственная частота волны); $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{VT} = \dfrac{\omega}{V}$ – называется волновым числом; $\lambda = VT$ – расстояние, на которое распространяется синусоидальная волна за время равное периоду колебаний, называется длиной волны; α_0 – начальная фаза волны.

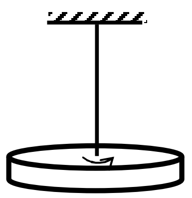
Уравнение сферической синусоидальной волны $S = \dfrac{A}{r}\sin\left(\omega t - kr + \alpha_0\right)$.

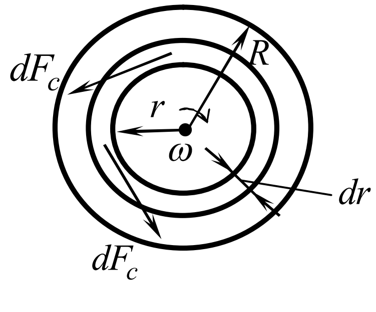
Дифференциальное волновое уравнение упругой волны $\Delta S = \dfrac{1}{V^2}\dfrac{\partial^2 S}{\partial t^2}$, где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в декартовой системе координат.

Фазовая скорость упругих продольных $V_{\parallel} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$ и поперечных $V_{\perp} = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ волн, где ρ – объемная плотность среды, E – модуль Юнга, G – модуль сдвига.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Математический маятник с логарифмическим декрементом затухания λ_0 поместили в среду, в которой коэффициент сопротивления в n раз больше, чем в первой среде. Найти логариф-





мический декремент затухания маятника во второй среде.

Решение. В соответствии с условием задачи коэффициент сопротивления второй среды связан с коэффициентом сопротивления первой среды соотношением $r = nr_0$. Из теории известно, что $2\beta = \dfrac{r}{m} \to r = 2\beta m \to \beta = n\beta_0$.

Декремента затухания в первой среде равен

$$\lambda_0 = \beta_0 T_0 = \frac{\beta_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta_0^2}} \to \lambda_0^2\omega_0^2 - \lambda_0^2\beta_0^2 = \beta_0^2 \to \lambda_0^2\omega_0^2 = \beta_0^2(1+\lambda_0^2). \qquad (1)$$

Используя значение декремента затухания во второй среде, путем математических преобразований получим значение декремента затухания во второй среде:

$$\lambda^2\omega_0^2 = n\beta_0^2(1+\lambda^2). \qquad (2)$$

Разделив (2) на (1), получим

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} = \frac{n^2(1+\lambda^2)}{1+\lambda_0^2} \to \lambda^2 + \lambda^2\lambda_0^2 = n^2\lambda_0^2 + n^2\lambda^2\lambda_0^2 \to \lambda^2(1+\lambda_0^2 - n^2\lambda_0^2) = n^2\lambda_0^2,$$

$$\lambda = \frac{n\lambda_0}{\sqrt{1+\lambda_0^2(1-n^2)}}.$$

Задача 2. Диск массой m и радиусом R подвесили на совершенно упругой нити за центр и привели в колебательное движение в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси. Момент упругих сил нити равен $M_{F_{\text{упр}}} = \alpha\varphi$. Сила сопротивления внешней среды, действующая на единицу площади диска, равна $F_c = \eta\nu$. Найти период малых колебаний диска.

Решение. На диск действуют внешние силы, и колебания его будут затухающими. Для нахождения периода затухающих колебаний диска необходимо записать основное уравнение динамики вращательного движения с учетом всех сил, действующих на диск.

$$I\vec{\beta} = \vec{M}_{F_{\text{упр}}} + \vec{M}_{F_c}.$$

В проекции на ось

$$OZ \quad I\beta = -M_{F_{\text{упр}}} - M_{F_c}, \qquad (1)$$

где $I = \dfrac{mR^2}{2}$ – момент инерции диска. По условию задачи сила сопротивления среды приходится на единицу площади диска, и для нахождения силы сопротивления, действующей на весь диск, необходимо выделить элементарную площадь диска, найти элементарную силу сопротивления с учетом того, что $\nu = \omega r$ и путем интегрирования найти полный момент силы F_{c}.

$$dF_c = \eta\nu dS = \eta\omega r 2\pi r dr\,.$$

Момент силы будет равен

$$dM_{F_c} = r dF_c = r\eta\omega 2\pi r^2 dr = 2\pi\eta\omega r^3 dr \to M_{F_c} = \int_0^R 2\pi\eta\omega r^3 dr =$$

$$= 2\pi\eta\omega\int_0^R r^3 dr = 2\pi\eta\omega\frac{R^4}{4} = \omega\pi\eta\frac{R^4}{2},$$

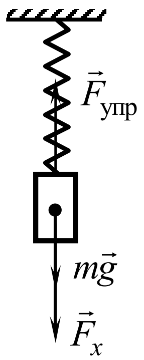
$$\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2},\ \omega = \frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Уравнение (1) запишем в виде

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{\pi\eta R^4}{2}\frac{d\varphi}{dt} - \alpha\varphi \to I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\pi\eta R^4}{2}\frac{d\varphi}{dt} + \alpha\varphi = 0\,,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\pi\eta R^4}{2I}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\alpha}{I}\varphi = 0 \to \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\pi\eta R^4}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{2\alpha}{mR^2}\varphi = 0\,.$$

Откуда $\omega_0^2 = \dfrac{2\alpha}{mR^2}$, $\beta = \dfrac{\pi\eta R^2}{2m}$, $\omega = \sqrt{(\dfrac{2\alpha}{mR^2})^2 - (\dfrac{\pi\eta R^2}{2m})^2}$, $T = \dfrac{2\pi}{\pi}$.



Задача 3. Тело подвешено на пружине и под действием внешней вертикальной силы $F_x = F_0\cos\omega t$ совершает установившиеся движения по закону $x = A\cos(\omega t - \varphi)$. Найти работу силы F_x за период T колебаний.

Решение. Колебания вынужденные и под действием вынуждающей силы F_x тело совершает работу

$$A = \int F_x dx\,. \qquad (1)$$

Уравнение установившегося движения тела задано и, продифференцировав это выражение, получим

$$dx = -a\omega\sin(\omega t - \varphi)\,.$$

Подставим все эти значения в (1) и, используя формулы приведения, найдем работу A:

$$A=-\int\limits_0^T a\omega F_0\cos\omega t\sin(\omega t-\varphi)dt=-a\omega F_0\int\limits_0^T\cos\omega t(\sin\omega t\cos\varphi-\cos\omega t\sin\varphi)dt=$$

$$=-a\omega F_0\int\limits_0^T(\sin\omega t\cos\omega t\cos\varphi-\cos^2\omega t\sin\varphi)dt=$$

$$=-a\omega F_0\int\limits_0^T(\frac{\sin 2\omega t}{2}\cos\varphi-\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\sin\varphi)dt=$$

$$=\left(\frac{a\omega F_0}{4\omega}\cos 2\omega t\cos\varphi+\frac{a\omega F_0}{2}t\sin\varphi+\frac{a\omega F_0}{4\omega}\sin 2\omega t\sin\varphi\right)\Big|_0^T=\frac{a\omega F_0}{2}T\sin\varphi=$$

$$=\frac{2\pi a\omega F_0}{2\omega}\sin\varphi=\pi a F_0\sin\varphi.$$

Задача 4. От источника волн с частотой ν распространяется синусоидальная волна с начальной фазой $\alpha_0=0$, скоростью V и амплитудой A. Определить длину волны, фазу и ускорение точки, находящейся на расстоянии x от источника в момент времени t.

Решение. В общем случае уравнение синусоидальной волны имеет вид

$$S=A\sin(\omega t-kx+\alpha_0),$$

где $\omega=2\pi\nu$ – циклическая (круговая) частота колебаний; $k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{VT}=\frac{\omega}{V}$ – волновое число; α_0 – начальная фаза волны.

Тогда уравнение синусоидальной волны с учетом того, что $\alpha_0=0$, запишется в виде $S=A\sin\left(2\pi\nu t-\frac{2\pi\nu}{V}x\right)$, где $\varphi=\omega t-kx=2\pi\nu t-\frac{2\pi\nu}{V}x=2\pi\nu(t-\frac{x}{V})$ – фаза волны, а $\lambda=VT=\frac{V}{\nu}$.

Ускорение точки найдется как вторая производная от уравнения волны

$$a=\frac{d^2S}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t-kx)=-A4\pi^2\nu^2\sin\left(2\pi\nu\left(t-\frac{x}{V}\right)\right).$$

Задача 5. Плоская волна распространяется со скоростью V. Период колебаний точек среды T. Найти разность фаз колебаний между точками, находящимися на расстоянии Δx друг от друга.

Решение. Поскольку необходимо найти разность фаз одной и той же волны, то начальная фаза и циклическая частота будут одинаковыми для всех точек волны, и разности фаз в точке 1 в точке 2 запишутся как

$$\varphi_1 = \omega t - kx_1 + \alpha_0,$$

$$\varphi_2 = \omega t - kx_2 + \alpha_0 \rightarrow \Delta\varphi = k\Delta x = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi\Delta x}{VT}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Амплитуда затухающих колебаний за время τ уменьшилась в 2 раза. Во сколько раз она уменьшится за время 3τ?

2. Амплитуда вынужденных колебаний при частотах ω_1 и ω_2 равны.Найти резонансную частоту.

3. При частотах ω_1 и ω_2 амплитуда скорости равна половине максимальной амплитуды. Найти частоту, соответствующую резонансу скорости, и коэффициент затухания.

4. Плоская волна с частотой ν распространяется в упругой среде. Длина волны λ, амплитуда колебаний точки A. Определить фазовую скорость волны и максимальную скорость движения частиц среды.

5. Тело совершает колебания по закону $\theta = \theta_0 e^{-\beta t} \cos\omega t$. Найти угловую скорость и угловое ускорение тела в момент времени $t = 0$.

Св. план 2010, поз.66

Учебное издание

МЕХАНИКА. КОЛЕБАНИЯ. ВОЛНЫ

Методические указания к решению задач
по курсу «Физика»
для студентов специальностей 1-26 02 03, 1-40 01 02, 1-27 01 01
инженерно-экономического факультета
дневной формы обучения

Составители:

Березин Александр Васильевич
Боброва Зоя Александровна
Последович Николай Романович

Редактор Е. Н. Батурчик

Подписано в печать	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс».	Отпечатано на ризографе.	Усл. печ. л.
Уч-изд.л. 3,7.	Тираж 300 экз.	Заказ 195.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6