

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра физики

**ОПТИКА,  
АТОМНАЯ И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА**

**Учебно-методический комплекс  
по курсу «Физика»**

**ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ БГУИР  
ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ**

Минск 2005

УДК 53(075.8)  
ББК 22.3 я 73  
О 62

Авторы:

В.В. Аксенов, А.В. Березин, В.А. Морозов, Ю.И. Савилова

О 62 **Оптика, атомная и квантовая физика: Учебно-методический комплекс по курсу «Физика» для студ. всех спец. БГУИР заоч. формы обуч. /В.В. Аксенов, А.В. Березин, В.А. Морозов, Ю.И. Савилова. – Мн.: БГУИР, 2005. – 84 с.: ил.**  
ISBN 985-444-767-7

Учебно-методический комплекс является продолжением ранее изданных учебно-методических материалов по разделам механика, механические колебания и упругие волны, молекулярная физика и термодинамика, электричество и магнетизм. Представленная работа включает в себя разделы: оптика, квантовая механика, физика твердого тела, атомная и ядерная физика. Учтены особенности учебных планов заочного факультета БГУИР, даны основные формулы, примеры решения задач по каждой теме и контрольные задания. В приложении приведены численные значения физических величин, необходимых для решения задач.

**УДК 53(075.8)**  
**ББК 22.3 я 73**

ISBN 985-444-767-7

© Коллектив авторов, 2005  
© БГУИР, 2005

## СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ КУРСА

### ОПТИКА

Световая волна. Показатель преломления среды. Законы геометрической оптики. Оптическая длина пути. Принцип Ферма. Интерференция. Принцип суперпозиции волн. Опыт Юнга. Понятие о когерентности. Временная и пространственная когерентность. Длина и радиус когерентности. Способы наблюдения интерференции света. Зеркала (или бипризмы) Френеля. Полосы равного наклона и равной толщины. Просветление оптики.

Дифракция. Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера. Зоны Френеля. Дифракция Френеля от круглого отверстия и от круглого непрозрачного диска. Дифракция Фраунгофера от щели. Дифракционная решетка. Угловая дисперсия и разрешающая способность решетки.

Поляризация. Естественный и поляризованный свет. Степень поляризации. Поляризаторы и анализаторы. Закон Малюса. Поляризация при отражении и преломлении. Закон Брюстера. Эффект Керра. Вращение плоскости поляризации (оптическая активность). Магнитное вращение (эффект Фарадея).

### КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Квантовая природа электромагнитного излучения. Классическая и квантовая теория равновесного теплового излучения. Формула Планка. Фотоэффект. Формула Эйнштейна. Фотоны. Импульс фотона. Эффект Комптона.

Волновые свойства микрочастиц. Гипотеза де Бройля. Опыты Дэвиссона и Джермера. Соотношения неопределенностей. Волновая функция, ее свойства. Уравнение Шредингера и его решение для частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Решение уравнения Шредингера для гармонического осциллятора. Атом водорода. Периодическая система элементов.

Туннельный эффект. Поглощение, спонтанное и вынужденное излучение. Равновесное излучение. Принцип детального равновесия и формула Планка. Лазер (на примере трехуровневой системы).

Физика твердого тела. Физические типы кристаллических решеток. Теплоемкость кристаллов. Закон Дюлонга и Пти. Квантовая теория свободных электронов в металле. Распределение Ферми-Дирака. Энергетические зоны в кристаллах. Металлы, полупроводники, диэлектрики. Электропроводность металлов и полупроводников (собственная и примесная). Эффект Холла.

Термоэлектрические явления. Полупроводниковые диоды и транзисторы. Сверхпроводимость. Магнитные свойства сверхпроводника (эффект Мейснера). Эффект Джозефсона. Высокотемпературная сверхпроводимость.

## СТРОЕНИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

Физика ядра. Ядерные силы. Масса и энергия связи ядра. Радиоактивный распад. Ядерные реакции. Энергетическая схема ядерной реакции. Пути использования ядерной энергии. Элементарные частицы. Виды взаимодействия и классы элементарных частиц. Частицы и античастицы. Кварки.

### 1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Интерференция света – перераспределение энергии в пространстве с образованием максимумов ( $I_{max}$ ), минимумов ( $I_{min}$ ) интенсивности при наложении когерентных волн.

Волны называются когерентными, если они имеют одинаковую частоту, поляризацию и не зависящую от времени разность фаз в произвольной точке их встречи.

Исследование интерференции волн сводится к определению разности фаз в точке их наложения. Рассмотрим две волны частоты  $\omega$ , с одинаковой (для простоты) амплитудой  $E_0$ , распространяющиеся вдоль оси  $X$ :

$$E_{1y} = E_0 \cos(\omega t - k_1 x_1 + \alpha_1),$$

$$E_{2y} = E_0 \cos(\omega t - k_2 x_2 + \alpha_2).$$

Согласно принципу суперпозиции, напряженность результирующего поля в произвольной точке встречи волн равна их сумме:

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 2E_0 \cos\left(\frac{k_2 x_2 - k_1 x_1 + \alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k_2 x_2 - k_1 x_1 + \alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) = E_m \cos(\omega t + \alpha).$$

Учитывая, что волновые числа  $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi n_1}{\lambda}$  и  $k_2 = \frac{2\pi n_2}{\lambda}$ ,

где  $\lambda$  – длина волны в вакууме,  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления сред, в которых распространяются волны, запишем амплитуду суммарной волны в виде

$$E_m = \left| 2E_0 \cos\left(\frac{\pi\Delta}{\lambda} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \right|,$$

где  $\Delta = n_2 x_2 - n_1 x_1$  – оптическая разность хода.

Из-за большой частоты оптических колебаний напряженность  $E$  невозможно измерить непосредственно. Все приемники излучения измеряют

энергетические величины, усредненные за промежуток времени, много больший периода оптических колебаний.

Средняя по времени наблюдения интенсивность волны, пропорциональная квадрату ее амплитуды, равна

$$I \sim \langle E_m^2 \rangle = \left\langle 4E_0^2 \cos^2 \left( \frac{\pi\Delta}{\lambda} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right) \right\rangle.$$

Результат зависит от разности хода  $\Delta$  и разности начальных фаз  $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$ . Рассмотрим два случая:

1. При использовании некогерентных волн от независимых источников  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  являются случайными функциями времени, поэтому  $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$  и  $I \sim \langle E_m^2 \rangle = 2E_0^2 = E_0^2 + E_0^2 \sim I_1 + I_2$  – складываются интенсивности волн.

2. В случае когерентных волн обе волны также имеют хаотически меняющиеся фазы, но закон изменения  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  одинаков, так как они относятся к одному и тому же фронту волны, т.е.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha(t)$  и  $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = 0$  (или  $const$ ).

Таким образом, во втором случае  $I$  определяется только  $\Delta$ , которая не зависит от времени, вследствие чего знак усреднения можно убрать:

$$I \sim E_m^2 = 4E_0^2 \cos^2 \left( \frac{\pi\Delta}{\lambda} \right) = 2E_0^2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \right).$$

Из этого выражения следует условие образования максимумов интенсивности:

$$\Delta = m\lambda, \tag{1.1}$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – порядок интерференции, в этом случае  $I = I_{max} = 4E_0^2$  (вдвое больше суммы интенсивности слагаемых волн). Учитывая связь между разностью хода и разностью фаз  $\Delta\varphi$  интерферирующих волн

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta,$$

получим, что условию (1.1) соответствует

$$\Delta\varphi = 2m\pi -$$

условие образования минимумов интенсивности:

$$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2},$$

или

$$\Delta\varphi = (2m + 1)\pi.$$

Волны приходят в точку встречи в противофазе и «гасят» друг друга. При равенстве амплитуд складываемых волн  $I_{max} = 0$ .

## 1.1. Интерференционная картина

Полученные результаты позволяют рассчитать параметры картины интерферирующих двух когерентных волн от источников  $S_1$  и  $S_2$ , расстояние между которыми  $d$  (рис. 1).

1. Чтобы найти зависимость распределения интенсивности на экране Э от координаты  $y$ , точки наблюдения  $P$ , необходимо выразить через эту координату разность хода  $\Delta$ . Для этого введем угол  $\Theta$ , образуемый направлением на точку  $P$  с перпендикуляром к линии, соединяющей источники (т.е. с «оптической осью» рассматриваемой схемы). Если  $d \ll L$ ,  $\Theta \ll 1$ , то  $\text{tg}\Theta \approx \sin\Theta \approx \Theta$  и разность хода

равна  $\Delta \approx d \cdot \Theta$ . Так как  $\Theta \approx \frac{y}{L}$ , то

$$\Delta \approx \frac{yd}{L}.$$

И для амплитуды получим

$$I(y) = 2I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{kyd}{L}\right) \right].$$

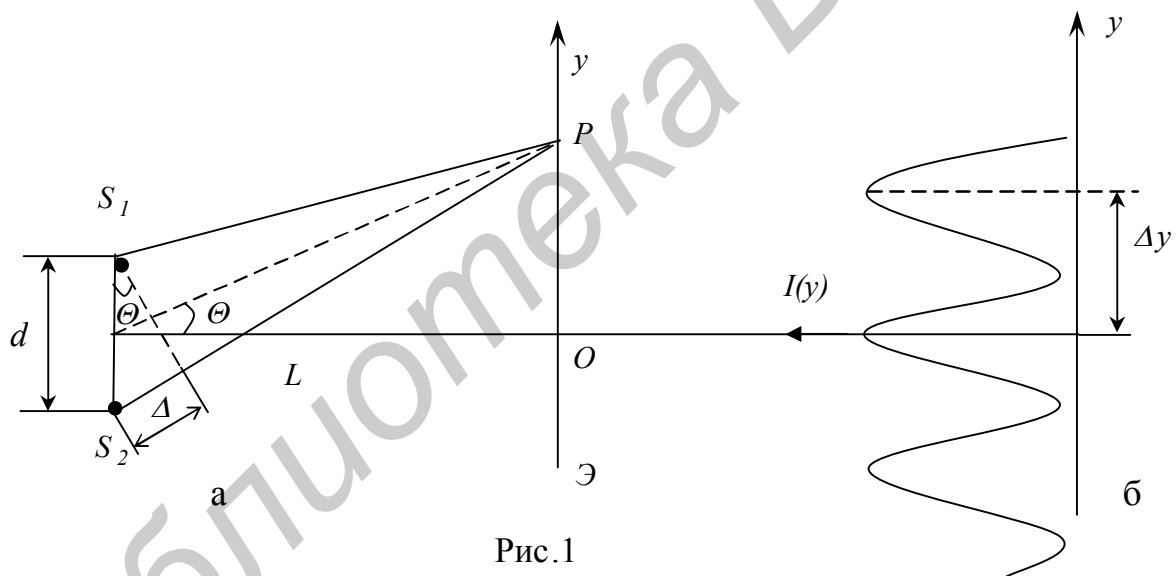


Рис.1

2. *Ширина интерференционных полос*, или пространственный период интерференционной картины – расстояние  $\Delta y$  между соседними максимумами или минимумами. Найдем координату  $m$ -го *max*, учитывая,  $\Delta = m\lambda$ :

$$y_{max} = \frac{Lm\lambda}{d}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta y = \Delta y_{max} = \Delta y_{min} = \frac{L\lambda}{d}.$$

Измеряя  $\Delta y$ , можно найти  $\lambda$ .

## 2. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

*Дифракция света* – нарушение прямолинейности распространения света и сопутствующие этому интерференционные явления, наблюдающиеся в областях с пространственными неоднородностями  $\sim \sqrt{r\lambda}$  ( $r$  – расстояние до точки наблюдения).

Между интерференцией и дифракцией нет принципиального различия. Исторически принято называть интерференцией суперпозицию волн от конечного числа когерентных источников вторичных волн, а дифракцией – от бесконечного числа непрерывно распределенных источников.

Различают два вида дифракции:

1. Дифракция Френеля – источник и точка наблюдения находятся на конечном расстоянии от препятствия (дифракция в расходящихся пучках).
2. Дифракция Фраунгофера – на бесконечном расстоянии (дифракция в параллельных пучках).

### 2.1. Принцип Гюйгенса – Френеля

Строгая теория дифракции основана на решении системы уравнений Максвелла. Приближенный метод решения задач о распространении волн дает принцип Гюйгенса-Френеля, согласно которому каждая точка волновой поверхности является источником вторичных сферических волн, а величина интенсивности в любой точке наблюдения – результат интерференции когерентных вторичных волн.

Запишем математическое выражение принципа Гюйгенса – Френеля. Результирующее возмущение в точке  $P$  является суперпозицией возмущений, исходящих от участков  $dS$  волновой поверхности  $S$  (рис. 2):

$$E = \int_{(S)} \kappa(\varphi) \frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) dS,$$

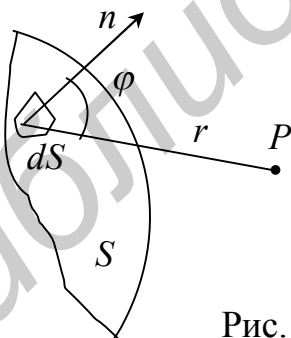


Рис. 2

где  $\kappa(\varphi)$  – коэффициент, обусловленный поперечностью волны;

$$\frac{a_0}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha) - \text{сферическая}$$

волна на расстоянии  $r$  от  $dS$ ;

$$dE_0 = \kappa(\varphi) \frac{a_0}{r} dS - \text{амплитуда}$$

возмущения от  $dS$ .

Вычисления по данной формуле сложны, однако, в случаях, имеющих симметрию, сводятся к простому алгебраическому или геометрическому суммированию.

## 2.2. Дифракция Френеля

Для учета интерференции вторичных волн Френель предложил мысленно разбить волновую поверхность в месте расположения преграды (например круглое отверстие на экране Э) на кольцевые зоны по следующему правилу: расстояния от краев соседних зон до точки  $P$  должны отличаться на  $\frac{\lambda}{2}$

(рис. 3, а).

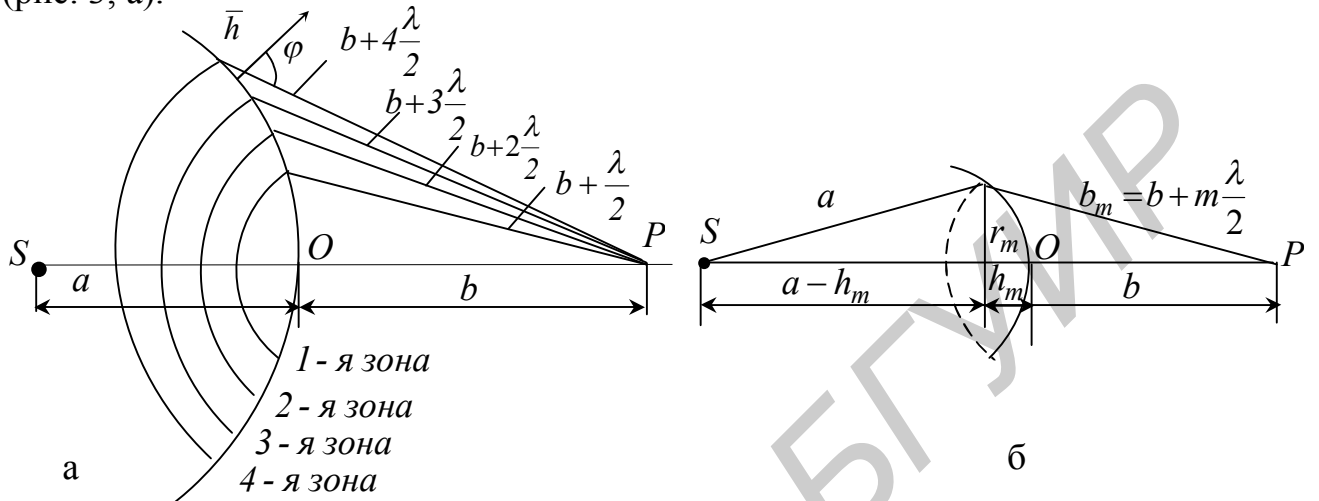


Рис. 3

Радиус внешней границы  $m$ -той зоны:

$$r_m = R^2 - (R - h_m)^2,$$

где  $h_m$  – высота сферического сегмента,

$R$  – радиус сферической волновой поверхности (рис. 3, б).

С другой стороны,  $r_m^2 = (b + m\frac{\lambda}{2})^2 - (b + h_m)^2,$

следовательно,

$$h_m = \frac{bm\lambda + m^2(\frac{\lambda}{2})^2}{2(R + b)}.$$

Площадь  $m$ -той зоны  $\Delta S_m = S_m - S_{m-1},$

тогда  $S_m = 2\pi R h_m.$

При  $\lambda \ll b$

$$h_m \approx \frac{bm\lambda}{2(R + b)},$$

а  $\Delta S$  не зависит от номера зоны  $m$ :

$$\Delta S \approx \frac{\pi R b \lambda}{R + b},$$

т.е. площади всех зон примерно одинаковы.

Поэтому все зоны должны возбуждать в точке  $P$  колебания одинаковой амплитуды. Однако это условие нарушается вследствие того, что у каждой последующей зоны угол  $\varphi$  больше, чем у предыдущей:  $E_{01} > E_{02} > \dots > E_{0n}.$



Разность хода от соседних зон равна  $\frac{\lambda}{2}$ , следовательно, колебания от них приходят в противофазах:

$$E_0 = E_{01} - E_{02} + E_{03} - E_{04} + \dots = \frac{E_{01}}{2} + \left( \frac{E_{01}}{2} - E_{02} + \frac{E_{03}}{2} \right) + \left( \frac{E_{03}}{2} - E_{04} + \frac{E_{05}}{2} \right) + \dots$$

Выражения в скобках равны нулю, т.к. для монотонно убывающей функции

$$E_{0m} = \frac{E_{0(m-1)} + E_{0(m+1)}}{2}.$$

Таким образом,  $I \sim E_0^2$  в точке  $P$  будет меняться не монотонно: пока открывается 1-я зона,  $I$  увеличивается и достигает максимума при полностью открытой первой зоне ( $I$  в точке  $P$  в 4 раза больше, чем в отсутствие экрана); по мере открывания 2-й зоны  $I$  уменьшается почти до 0. При четном числе открытых зон наблюдается минимум, при нечетном – максимум.

Метод зон Френеля – алгебраический. Более полную информацию можно получить, используя метод графического сложения амплитуд колебаний. При этом волновую поверхность также делят на кольцевые зоны, но очень малой ширины:

$$r_m = b + m \frac{\lambda}{N}, \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

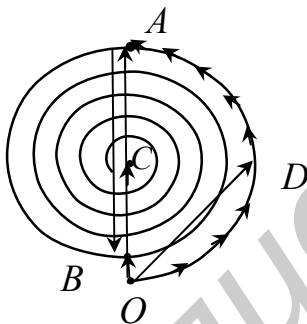


Рис. 4

Тогда векторная диаграмма имеет вид, изображенный на рис. 4.  $\vec{OA}$  – результат действия 1-й зоны;  $\vec{AB}$  – результат действия 2-й зоны;  $\vec{OC}$  – суммарный вектор колебаний. Вектор  $\vec{OD}$  имеет длину в  $\sqrt{2}$  больше, чем  $\vec{OC}$ , т.е. интенсивность света в точке  $P$  при открытой внутренней половине первой зоны в 2 раза больше, чем при числе зон, стремящихся к  $\infty$ .

Если закрыть все четные или все нечетные зоны, то  $I$  в точке  $P$  резко возрастет, таким образом получается *амплитудная зонная пластинка* (например фотографированием колец Ньютона).

Если изменить толщину этих четных или нечетных колец на  $\frac{\lambda}{2}$ , то интенсивность возрастает еще в 4 раза – *фазовая зонная пластинка* действует как линза.

### 2.3. Дифракция Фраунгофера от щели

Описанные в предыдущем разделе построения Френеля позволяют рассчитать  $I$  позади  $\mathcal{E}$  с круглым отверстием в точке, лежащей на оси

симметрии. Найти вид всей дифракционной картины очень сложно. Однако можно осуществить такие условия наблюдения дифракционного спектра, при которых возможен полный расчет  $I$  на экране. Пусть отверстие в экране представляет собой длинную щель шириной  $b$ , на которую падает плоская волна (рис. 5).

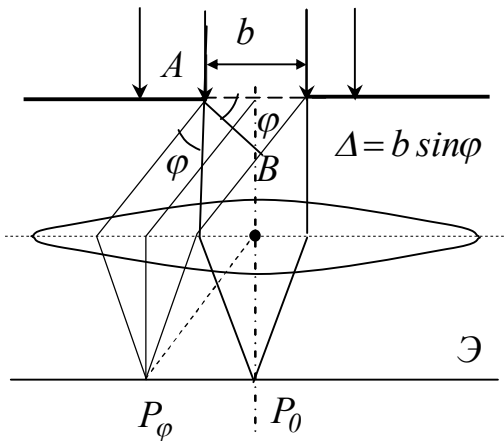


Рис. 5

Согласно принципу Гюйгенса – Френеля, волновую поверхность падающей волны в плоскости щели следует разбить на столь малые участки, чтобы колебания в точке  $P$ , вызываемые вторичными волнами от всех точек одного участка, имели бы почти одинаковую фазу.

Для нахождения результирующей амплитуды колебаний в любой точке экрана  $\mathcal{E}$  необходимо знать распределение фаз всех колебаний, приходящих в эту точку. Так как линза не вносит дополнительной разности хода, то распределение фаз в точке  $P\varphi$  будет таким же, как и в плоскости  $AB$ , образующей с плоскостью щели угол  $\varphi$ . Сумма когерентных

возмущений от всех участков этой поверхности равна

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi}.$$

Распределение интенсивности света (как величины  $\sim E_{\varphi}^2$ ) на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, описывается выражением

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)^2}, \quad (2.1)$$

где  $I_0$  – интенсивность света, идущего от всей щели в направлении  $\varphi = 0$ .

При значении углов дифракции  $\varphi$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = n\pi,$$

т.е. при  $b \sin \varphi = k\lambda$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3$  – порядок дифракции)  $I_{\varphi} = 0$ . Количество

наблюдаемых минимумов  $k \leq \frac{b}{\lambda}$ , так как  $|\sin \varphi| \leq 1$ .

Найдем положения максимума – для этого надо продифференцировать выражение (2.1) и приравнять производную нулю. Введем обозначение  $\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi = z$ .

$$I'(z) = 2I_0 \left( \frac{\sin z}{z} \right) \left( \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} \right).$$

Из условия  $\sin z = 0$  определяются положения минимумов;  $tgz = z$  – максимумов. Решая трансцендентное уравнение  $tgz = z$  графически (рис. 6), получим значения  $z$ , при котором  $I = I_{max}$ .

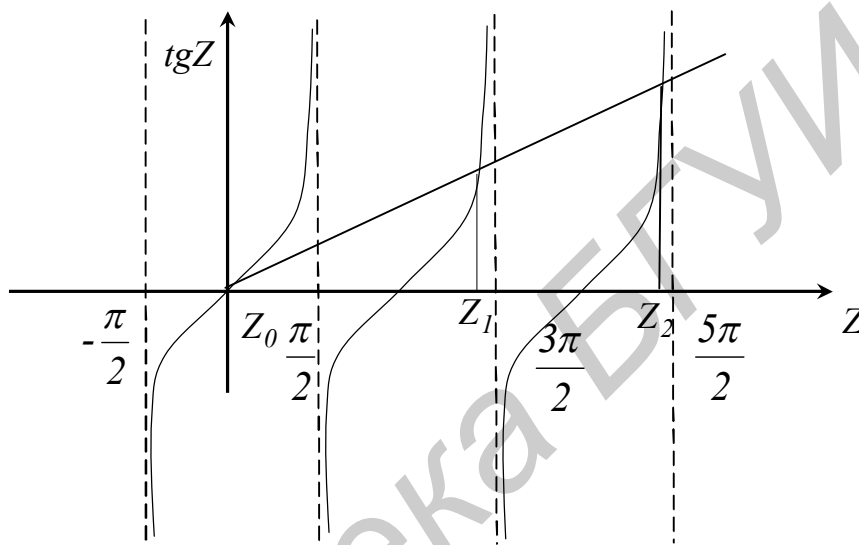


Рис. 6

Данное уравнение имеет бесчисленное множество решений, так как имеется бесчисленное множество точек пересечения графиков функции  $f = z$  и  $f = tgz$ , однако число  $max$  не превышает числа  $min$ .

Таблица 1

$z$	$\left( \frac{\sin z}{z} \right)$
0	1
1,43 $\pi$	0,047
2,46 $\pi$	0,016
.....	.....

На основании проведенного анализа можно построить график  $I_\varphi(\sin \varphi)$  (рис. 7). Угловая ширина центрального максимума  $\delta\varphi = \frac{2\lambda}{b}$ .

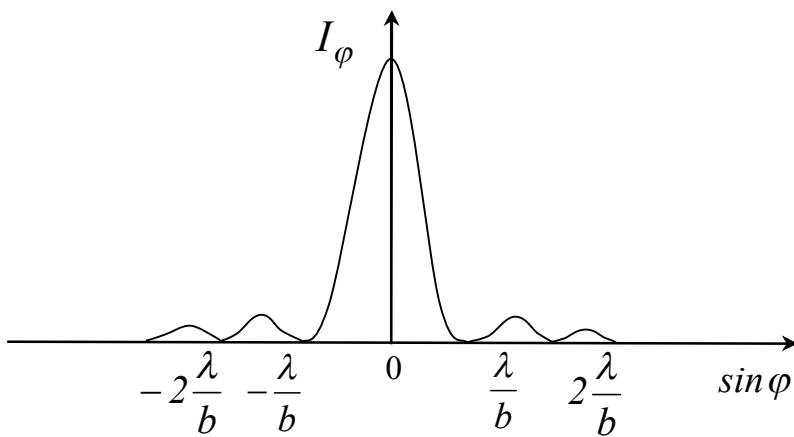


Рис. 7

На максимум первого порядка приходится 5 % падающей энергии, на максимум второго порядка – 2 %. Отметим, что подобная картина будет наблюдаться, если  $b > \lambda$ , но эти параметры соизмеримы. Если  $b \gg \lambda$  или  $b < \lambda$ , то дифракционная картина не наблюдается.

## 2.4. Дифракционная решетка

На практике используют дифракцию не на одной щели, а на дифракционной решетке – спектральном приборе, служащем для разложения света в спектр и измерения  $\lambda$ .

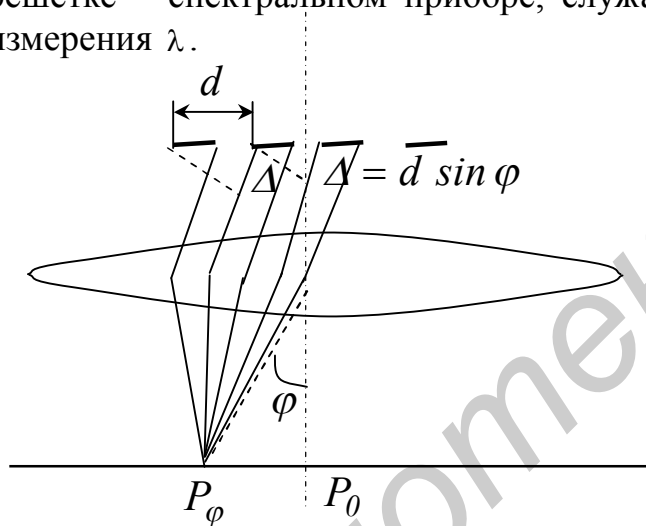


Рис. 8

Дифракционная решетка – совокупность одинаковых равноотстоящих щелей в непрозрачном экране. Сумма ширины прозрачной части  $b$  и непрозрачной называется *периодом* решетки  $d$  (рис. 8). Стеклянные решетки могут иметь 1 200 щелей (штрихов) на 1 мм ( $d = 0,8$  мкм); металлические отражательные – до 2 000 штр./мм. Длина решеток достигает 200 мм.

Как следует из выражения (2.1)  $I = I(\sin \varphi)$ , перемещение щели параллельно самой себе не изменяет дифракционную картину, т.е. если параллельно одной щели поместить другие, то создаваемые каждой щелью картины будут одинаковыми. Это означает, что результирующая дифракционная картина от  $N$  щелей получается путем сложения картин от каждой щели с учетом взаимной интерференции, т.е. результирующее колебание в  $P_\varphi$  представляет суперпозицию колебаний с одинаковыми амплитудами  $E_\varphi$ , но сдвинутыми по фазе на одну и ту же величину:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi.$$

Основанный на этом факте расчет дает следующее выражение для распределения интенсивности на экране Э:

$$I_{\text{реши}} = I_{\varphi} \frac{\sin^2\left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}.$$

Первый множитель обращается в 0 при  $b \sin \varphi = k\lambda$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ). В данных направлениях не идет свет ни от одной щели.

Второй множитель принимает значения  $N^2 I_{\varphi}$  в точках, удовлетворяющих условию

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (2.2)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , которое определяет положение главных максимумов.

Наибольший порядок максимума  $m_{\text{max}} = \left[ \frac{d}{\lambda} \right]$ ; число главных максимумов равно  $(2m_{\text{max}} + 1)$ .

Между соседними главными максимумами имеется  $(N - 1)$  добавочных минимумов – они возникают в направлениях, в которых колебания от отдельных щелей гасят друг друга:

$$d \sin \varphi = m\lambda + m' \frac{\lambda}{N}, \quad (m' = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (N - 1)). \quad (2.3)$$

Между добавочными минимумами возникают слабые вторичные максимумы, число которых равно  $(N - 2)$ . Из (2.2) и (2.3) следует, что если отношение  $\frac{b}{d}$  равно отношению целых чисел (например  $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$ ), то максимум второго порядка накладывается на минимум первого порядка и максимумы 2, 4, 6 ... - порядков будут отсутствовать (рис. 9).

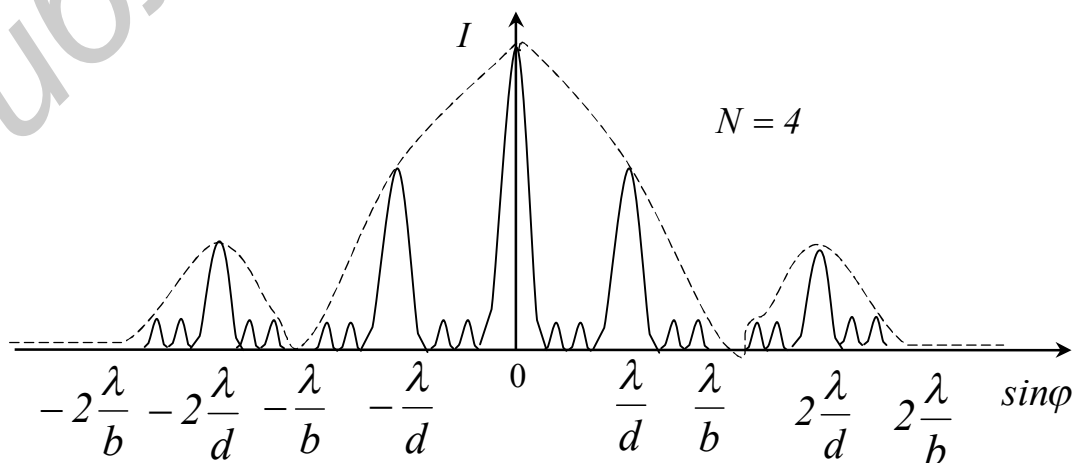


Рис. 9

## 2.5. Параметры решетки как спектрального прибора

Зависимость положения максимума и минимума от  $\lambda$  позволяет использовать дифракционную решетку для спектрального анализа.

Основными характеристиками спектральных приборов являются:

1) угловая дисперсия –

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda};$$

где  $\delta\varphi$  – угловое расстояние между двумя соседними главными максимумами одного порядка для длин волн  $\lambda$  и  $\lambda + \delta\lambda$ .

Значение  $D$  можно найти, продифференцировав выражение  $d \cos \varphi = m\lambda$ .

Следовательно,

$$D = \frac{m}{\delta \cos \varphi};$$

2) разрешающая способность –

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

где  $\delta\lambda$  – минимальная разность между длинами волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются раздельно.

Эта минимальная разность определяется с помощью критерия Рэлея, согласно которому две спектральные линии с равными  $I$  и одинаковой симметрией контура разрешимы, если максимум одной линии совпадает с минимумом другой. При выполнении этого условия  $I$  в промежутке между максимумами составляет 80 % от  $I_{max}$  (рис. 10).

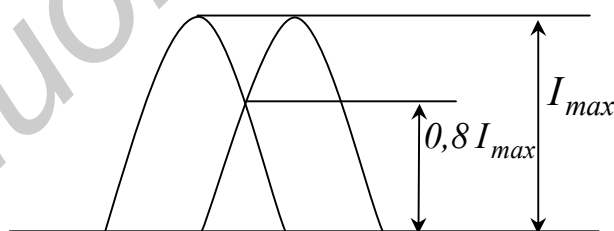


Рис.10

Выразим  $R$  через порядок спектра  $m$  и число штрихов решетки  $N$ :

$$\left. \begin{aligned} d \sin \varphi_{max} &= m(\lambda + \delta\lambda) \\ d \sin \varphi_{min} &= (m + \frac{1}{N})\lambda \end{aligned} \right\} \rightarrow m(\lambda + \delta\lambda) = (m + \frac{1}{N})\lambda,$$
$$R = mN.$$

## 2.6. Дифракция на пространственных структурах

Дифракция на пространственных структурах – важный случай дифракции, позволяющий исследовать периодические структуры, например кристаллы.

Всякий монокристалл состоит из упорядоченно расположенных частиц (атомов, ионов, молекул), образующих трехмерную дифракционную решетку. Расстояние между узлами кристаллической решетки  $d \approx 10^{-10}$  м, поэтому при прохождении видимого света с  $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7}$  м дифракция не наблюдается ( $\lambda$  по порядку не должна превышать  $d$ ). Зато для рентгеновских волн монокристалл является идеальной естественной дифракционной решеткой.

Простой метод расчета дифракционной картины основан на рассмотрении дифракции рентгеновских волн как результата их отражения от системы параллельных кристаллографических плоскостей (плоскостей, в которых лежат узлы кристаллической решетки). Это отражение осуществляется лишь при таких углах падения волн на кристалл, которые соответствуют интерференционным максимумам для волн, отраженных от разных плоскостей (рис. 11).

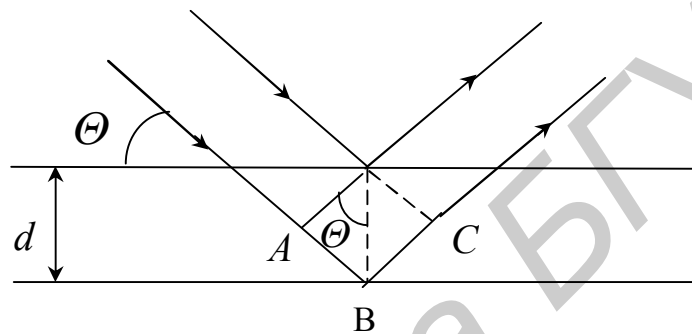


Рис. 11

$$\Delta = AB + BC = 2d \sin \Theta,$$

где  $\Theta$  – угол скольжения,  $n = 1$  для рентгеновских волн.

Условие образования максимумов (формула Вульфа – Брэгга):

$$2d \sin \Theta = k\lambda -$$

при ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Таким образом, с помощью дифракционной картины можно исследовать спектральный состав рентгеновского излучения (рентгеноспектроскопия) и изучать структуру кристаллов (рентгеноструктурный анализ).

### 3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

В отличие от интерференции и дифракции при изучении явления поляризации необходимо учитывать векторные свойства электромагнитной волны.

#### 3.1 Поляризованный и естественный свет

Поляризованной называется электромагнитная волна, в которой направления колебаний векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  упорядочены. В плоской монохроматической волны эти векторы в каждой точке и в каждый момент времени образуют с волновым вектором  $\vec{k}$  правую тройку векторов (рис. 12).

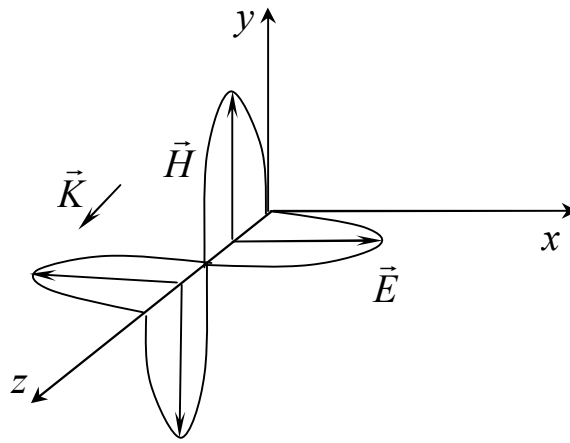


Рис. 12

Плоскость, в которой лежат векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{k}$ , называется *плоскостью колебаний*, а векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{k}$  – *плоскостью поляризации*. Плоская монохроматическая волна имеет линейную или эллиптическую поляризацию. В естественном свете колебания векторов напряженности электрического и магнитного полей беспорядочны – естественный свет не поляризован. Его удобно представить как наложение двух некогерентных волн одинаковой интенсивности, поляризованных в двух ортогональных плоскостях. Такое представление упрощает изучение прохождения естественного света через поляризационные приборы – устройства, выделяющие из естественного света плоскополяризованный.

### 3.2. Типы поляризации

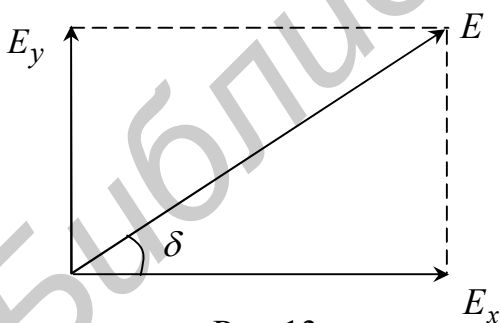


Рис. 13

Пусть наряду с волной, световой вектор в которой колеблется вдоль оси  $X$ :  $E_x = E_{OX} \cos \omega t$ , в том же направлении распространяется волна той же частоты, но с колебаниями вектора  $\vec{E}$  вдоль оси  $Y$ :

$$E_y = E_{OY} \cos(\omega t + \delta),$$

где  $\delta$  – разность фаз этих колебаний (рис. 13).

Вследствие линейности уравнений Максвелла такая суперпозиция волн также является их решением. В зависимости от  $\delta$  результирующая волна будет иметь различную поляризацию. Если складываемые плоскополяризованные волны когерентны и имеют одинаковые или отличающиеся на  $\delta = n\pi$  фазы, то

$$\operatorname{tg} \delta = \pm \frac{E_{OY}}{E_{OX}} = \operatorname{const} -$$



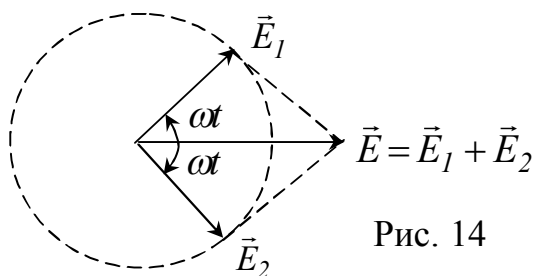
результатирующее колебание совершается в одной и той же плоскости, т.е. результирующая волна остается плоскополяризованной.

В случае, когда  $\delta = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$  и  $E_{OX} = E_{OY}$ ,

$$\operatorname{tg} \delta = \mp \omega t,$$

т.е. вектор  $\vec{E}$  в любой точке  $Z$  будет вращаться в области  $XU$  по (*правая* круговая поляризация) или против (*левая*) часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , оставаясь неизменным по модулю.

Верно и обратное утверждение, т.е. сложение двух волн с правой и левой круговой поляризациями приводит к плоскополяризованной волне (рис. 14).



В общем случае при  $\delta = \text{const}$  свет имеет *эллиптическую поляризацию* – проекция конца вектора  $\vec{E}$  на плоскость  $XU$  описывает эллипс, форма и ориентация которого зависят от разности фаз  $\delta$  (см. тему «Сложение взаимно перпендикулярных колебаний»).

Волну с эллиптической поляризацией всегда можно разложить либо на сумму двух ортогональных плоскополяризованных волн, либо на сумму двух поляризованных по кругу волн с правой и левой поляризациями. В зависимости от характера решаемой задачи может оказаться предпочтительным первое (при изучении распространения света в анизотропных средах) или второе (при изучении естественного и магнитного вращений плоскости поляризации) разложение.

Делая вывод из изложенного, можно уточнить определение поляризованного света, как света, у которого имеется определенное фазовое соотношение между взаимно перпендикулярными компонентами светового вектора.

### 3.3. Степень поляризации

Свет, у которого имеется наиболее вероятное направление колебаний вектора  $\vec{E}$ , называется *частично поляризованным* (его можно рассматривать как смесь естественного света с поляризованным).

Степень поляризации  $p$  частично поляризованного света равна

$$p = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  – максимальное и минимальное значения интенсивности света, прошедшего поляризационный прибор.

Для естественного света  $p = 0$ ; для плоско поляризованного –  $p = 1$ . К эллиптически поляризованному свету это понятие не применимо.

### 3.4. Способы получения поляризованного света

#### 3.4.1. Поляризация света при отражении и преломлении

При отражении света от границы раздела двух диэлектриков отраженный и преломленный свет является частично поляризованным. При угле падения  $\Theta$ , когда отраженный луч образует с преломленным углом  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 15), закон преломления запишется в виде

$$n_1 \sin \Theta = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right),$$

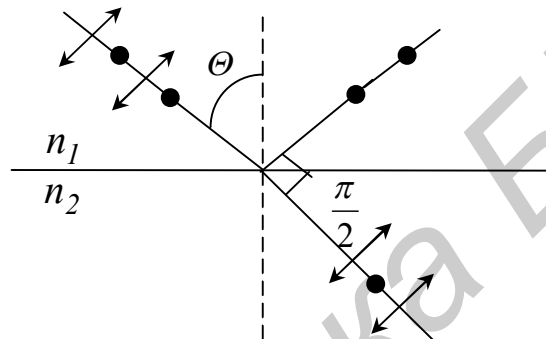


Рис. 15

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \Theta_{BP} = \frac{n_2}{n_1},$$

где  $\Theta_{BP}$  – угол Брюстера.

При падении под углом Брюстера отраженный свет полностью поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, а преломленный – частично, но максимально поляризован в плоскости падения. Это явление возникает вследствие поперечности электромагнитных волн и объясняется механизмом взаимодействия световой волны с излучателями (атомами или молекулами).

#### 3.4.2. Поляризация при двойном лучепреломлении

Свет, падающий на прозрачные кристаллы (за исключением кристаллов кубической системы), расщепляется на два луча, распространяющиеся в общем случае с разными скоростями и в разных направлениях.

Кристаллы, обладающие двулучепреломлением, делятся на *одноосные* и *двухосные*. У одноосных (исландский шпат, турмалин, кварц, ...) имеется одно направление распространения света, для которого не наблюдается двойное лучепреломление. Это направление – *оптическая ось кристалла*. Двухосные кристалла (слюда, гипс, ...) имеют два таких направления. Плоскость,

проходящая через падающий луч и оптическую ось в точке ее падения, – *главное сечение*.

У одноосных кристаллов (рис. 16) один из лучей удовлетворяет обычному закону преломления – он называется *обыкновенным* (*o*). Для другого – *необыкновенного* (*e*) луча – отношение синусов углов падения и преломления зависит от угла падения, и он не лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности.

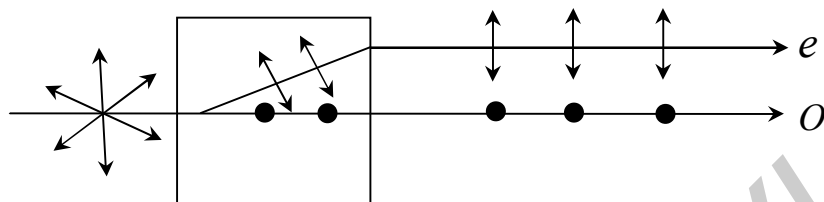


Рис.16

Внутри кристалла указанные лучи характеризуются показателями преломления:

$$n_o = \frac{c}{v_o} \text{ и } n_e = \frac{c}{v_e},$$

где  $v_o, v_e$  – скорости распространения этих лучей.

Вышедшие из кристалла параллельные друг другу обыкновенная и необыкновенная волны поляризованы: плоскость колебаний волны *o* перпендикулярна главному сечению, а волны *e* – параллельна ему.

Двойное лучепреломление является следствием анизотропии диэлектрических свойств кристаллов: значения  $\epsilon$ , а следовательно, и  $n = \sqrt{\epsilon}$  зависят от направления.

Некоторые двулучепреломляющие кристаллы обладают *дихроизмом* – неодинаковым поглощением световых волн, имеющих разную поляризацию. Одним из естественных поляризаторов является турмалин, в котором при толщине кристалла 1 мм обыкновенный луч почти полностью поглощается.

### 3.5. Закон Малюса

Описанные выше явления лежат в основе действия поляризаторов – оптических устройств для получения из естественного света полностью или частично поляризованного. Эти устройства пропускают колебания, параллельные плоскости, называемой *плоскостью поляризатора*, и задерживают (полностью или частично) колебания, перпендикулярные этой плоскости.

Рассмотрим следующий эксперимент. Направим естественный свет интенсивностью  $I_e$  нормально к поверхности пластинки  $\Pi$ , вырезанной из кристалла турмалина таким образом, что ее плоскость параллельна оси, в направлении которой поглощение практически отсутствует (рис. 17).

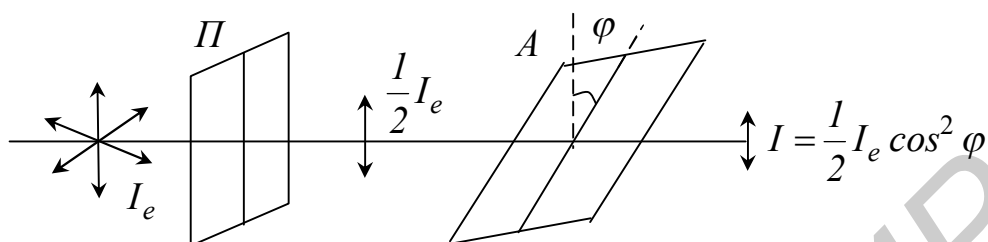


Рис.17

Поляризатор  $\Pi$  пропустит лишь колебания, параллельные его плоскости, которые в общем случае образуют угол  $\varphi$  с осью другой пластинки  $A$ . Разложим эти колебания с амплитудой  $E_0$  на две составляющие с амплитудами  $E_{||} = E_0 \cos \varphi$  и  $E_{\perp} = E_0 \sin \varphi$ . Очевидно, что  $E_{\perp}$  не пройдет через  $A$ , т.е. интенсивность ( $I \sim E_0^2$ ) прошедшего через  $A$  света будет равна

$$I = I_0 \cos^2 \varphi - \quad (3.1)$$

закон Малюса для плоскополяризованного света.

Из формулы (3.1) следует, что при вращении  $A$  вокруг луча  $I$  будет меняться в пределах от нуля, когда  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (плоскость поляризатора перпендикулярна плоскости колебаний  $\vec{E}$ ), до  $I_{max} = I_0$  при  $\varphi = 0$ . Если же на поляризатор падает естественный свет, то угол  $\varphi$  будет хаотически меняться во времени (все значения  $\varphi$  равновероятны), поэтому  $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$  и

$$I = I_e \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{I_e}{2} -$$

закон Малюса для падающего естественного света. Вращение  $\Pi$  в этом случае не приводит к изменению  $I$  прошедшего поляризованного света (впрочем как и для света с круговой поляризацией).

Поляризаторы  $\Pi$  и  $A$  называются *скрещенными*, если угол между их плоскостями равен  $\frac{\pi}{2}$ . Через такую систему свет не проходит.

### 3.6. Интерференция поляризованного света

Интерференция поперечных волн зависит не только от их амплитуд, частот и фаз, но и от состояния поляризации. Действительно, если складываемые волны линейно поляризованы в ортогональных направлениях, результирующее возмущение в точке наблюдения равно  $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ , а интенсивность –

$$I \sim \langle E^2 \rangle = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle + 2\langle (\vec{E}_x, \vec{E}_y) \rangle.$$

Так как третье слагаемое (интерференционный член) равно нулю, суммарная интенсивность  $I$  равна сумме интенсивностей волн и интерференция не возникает (что, кстати, является доказательством поперечности световых волн).

Для наблюдения интерференции необходимо пропустить эти волны через поляризатор, плоскость которого не совпадает с плоскостью колебаний ни одной из волн. Рассмотрим простейший случай нормального падения плоскополяризованной волны на вырезанную параллельно оптической оси одноосную кристаллическую пластинку (КП). Обыкновенная и необыкновенная волны в ней будут распространяться не разделяясь, но с различной скоростью, и за время прохождения пластинки толщиной  $d$  между ними появится разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d,$$

которой соответствует разность фаз

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_o} \Delta. \quad (3.2)$$

Амплитуды прошедших через поляризатор  $\Pi$  волн будут равны проекциям  $o$  и  $e$  волн на плоскость этого поляризатора (рис. 18).

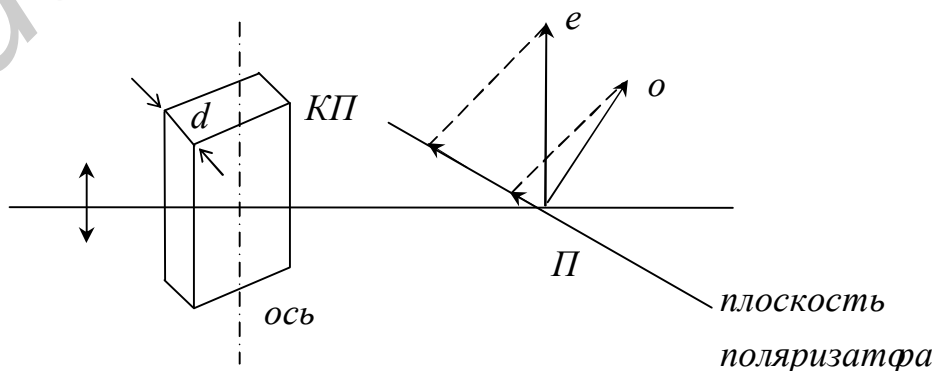


Рис.18

Таким образом, если пропустить естественный свет через вырезанную параллельно оптической оси кристаллическую пластинку (см. рис. 18), из пластинки выйдут два поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях луча, между которыми будет существовать разность фаз, определяемая формулой (3.2).

При падении на *KП* естественного света интерференции не будет, так как в этом случае *o* и *e* волны некогерентны (принадлежат разным цугам).

#### 4. РАВНОВЕСНОЕ ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Классическая электромагнитная теория света, объясняющая широкий круг явлений с распространением света и получившая всеобщее признание в конце XIX-го в начале XX-го веков, столкнулась с непреодолимыми трудностями в связи с вопросом об излучении света и, в частности, с вопросом о тепловом излучении. Под ним понимается вся совокупность излучения, испускаемого нагретым телом. Как известно, характер излучения света, например, его интенсивность и ее зависимость от частоты (т.е. спектральный состав излучения), определяется температурой и природой излучающего тела. Имеется, однако, случай, когда спектральный состав излучения не зависит от природы излучателя и определяется исключительно его температурой. Речь пойдет о так называемом *равновесном излучении*.

Представим себе некоторую замкнутую полость со стенками, не проводящими тепла и находящимися при определенной температуре  $T$ . Стенки полости будут излучать и поглощать электромагнитные волны. Так как все излучение заключено в замкнутую полость, через некоторое время в системе установится состояние статистического равновесия. Стенки полости будут излучать в единицу времени столько же электромагнитной энергии, сколько они поглощают, и в полости установится система электромагнитных стоячих волн. Объемная плотность энергии соответствующего электромагнитного поля будет выражаться формулой

$$\rho = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{\mu\mu_0}{2} B^2,$$

где  $E$  – напряженность электрического поля;

$B$  – индукция магнитного поля.

Тепловое излучение будет содержать разнообразные частоты, т.е.  $\rho = \rho(\nu)$ . Кроме того, эта плотность зависит также от температуры излучающих стенок, т.е.  $\rho = \rho(\nu, T)$ . Простой термодинамический подход показывает, однако, что  $\rho(\nu, T)$  не зависит от природы излучателя, в частности стенок (их излучательной и поглощательной способностей и состояния поверхности).

Рассмотрим две полости, стенки которых нагреты до одинаковой температуры  $T$ , но сделаны из разных материалов. Предположим, что спектральная плотность энергии излучения зависит от природы излучателя и различна в обеих полостях. Тогда, соединив полости, можно нарушить

равновесие. Излучение будет переходить в ту полость, в которой его плотность меньше. В результате этого плотность излучения в этой полости вырастет, стенки полости будут поглощать больше энергии, а их температура повысится. Между стенками обеих полостей возникает разность температур, которая может быть использована для получения полезной работы. Таким образом, сделанное предположение приводит к выводу о возможности построения вечного двигателя 2-го рода, что, как известно, невозможно. Таким образом, доказано, что  $\rho(\nu, T)$  есть универсальная функция частоты и температуры. Изучение излучательных и поглощательных свойств материальных тел привело Кирхгофа к установлению важной теоремы, названной теоремой Кирхгофа.

Назовем излучательной способностью произвольного тела величину  $E(\nu)$ , равную энергии, излучаемой  $1 \text{ м}^2$  поверхности тела за  $1 \text{ с}$  с частотой в интервале от  $\nu$  до  $(\nu + d\nu)$ .

Назовем поглощательной способностью тела долю всей падающей на  $1 \text{ м}^2$  поверхности тела лучистой энергии с частотой в интервале от  $\nu$  до  $(\nu + d\nu)$ , которая поглощается внутри тела (во всем объеме). Теорема Кирхгофа гласит, что отношение излучательной и поглощательной способностей является универсальной функцией частоты и температуры тела, но не зависит ни от природы и свойств тела, ни от их геометрической формы, т.е.

$$E(\nu) / A(\nu) = f(\nu, T).$$

Оказывается, что универсальная функция  $f(\nu, T)$  связана простым соотношением с объемной плотностью энергии равновесного излучения  $\rho(\nu, T)$ :

$$f(\nu, T) = \frac{c}{4} \rho(\nu, T). \quad (4.1)$$

Итак, теорема Кирхгофа приобретает вид

$$\frac{E(\nu)}{A(\nu)} = \frac{c}{4} \rho(\nu, T). \quad (4.2)$$

Нахождение вида функции  $\rho(\nu, T)$  представляет большой интерес. Из выражения (4.1) следует, что особое значение имеет случай тела с поглощательной способностью  $A(\nu)=1$ . Такое тело поглощает всю падающую на него энергию. Оно было названо *абсолютно черным телом*. Для него будем иметь

$$E(\nu) = \frac{c}{4} \rho(\nu, T).$$

Таким образом, абсолютно черное тело имеет максимальную излучательную способность. Измеряя ее, можно на опыте определить вид функции  $\rho(\nu, T)$ .

В природе не существует абсолютно черного тела; часть лучистой энергии всегда отразится, какой бы ни была поверхность тела. Однако замкнутая полость, которая была рассмотрена выше, является абсолютно черным телом. Действительно, все излучение, испускаемое стенками, ими же и поглощается.

Если сделать в полости маленькое отверстие, то, изучая излучение, выходящее через него, можно экспериментально найти функцию  $\rho(\nu, T)$ .

С помощью таких моделей и было экспериментально изучено распределение энергии в зависимости от частоты при различных температурах  $T$  (рис.19).

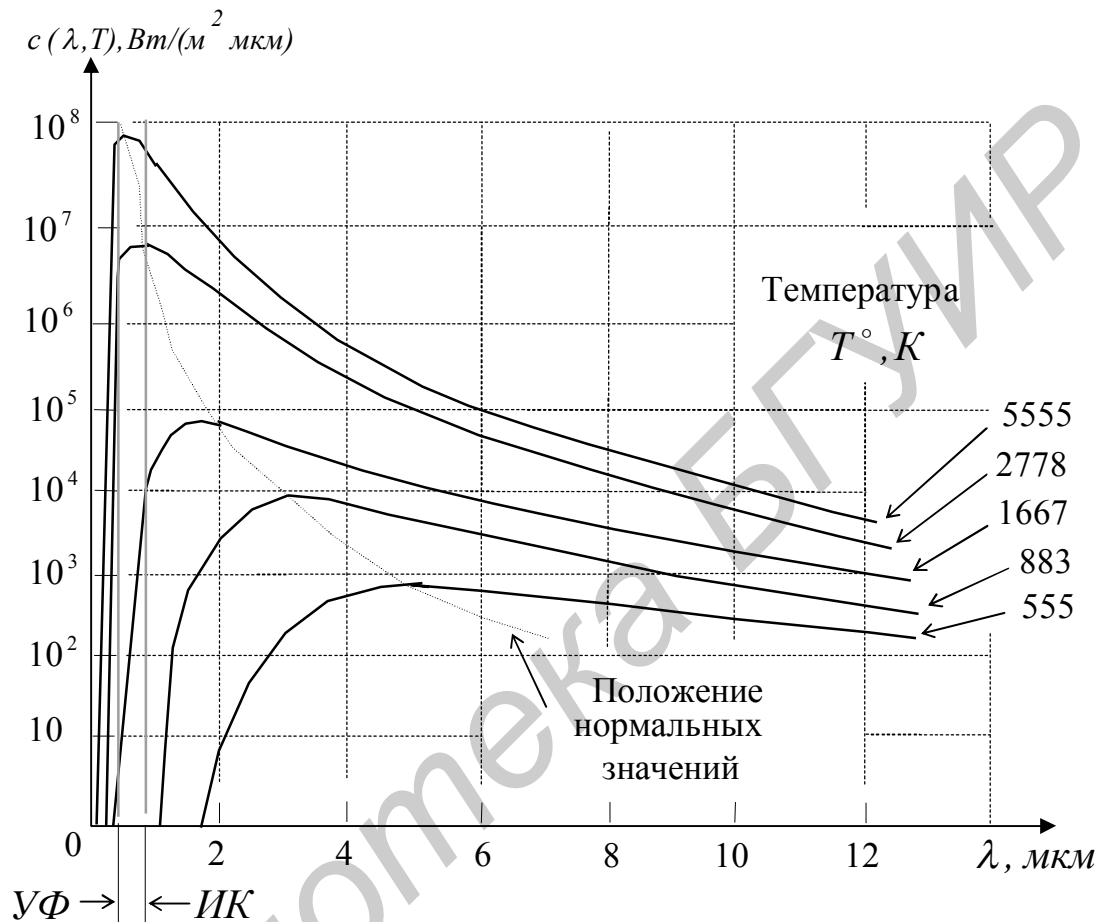


Рис.19

По оси ординат отложена плотность энергии излучения  $\rho(\lambda, T)$ , по другой оси – длина волны в микронах.

Плотность энергии излучения с длиной волны  $\lambda$  связана с функцией  $\rho(\nu, T)$  следующим соотношением:

$$\rho(\nu, T) d\nu = \rho(\lambda, T) d\lambda.$$

Учитывая, что  $\nu = c / \lambda, d\nu = c \left| d\lambda / \lambda^2 \right|$ , будем иметь

$$\rho(\lambda, T) = (c / \lambda^2) \rho(\nu, T).$$

Все кривые (см. рис.19) для различных температур обнаруживают характерное поведение. При больших длинах волн плотность излучения увеличивается с ростом  $\lambda$ , затем проходит через максимум и снова стремится к нулю. Положение максимума сдвигается в сторону коротких волн по мере повышения температуры  $T$ . Это были экспериментальные результаты, а теперь рассмотрим краткую теорию этих вопросов и сравним ее с экспериментом.



#### 4.1. Классическая теория черного излучения

Заметим сначала, что, не выходя за пределы термодинамики и электромагнитной теории света, можно кроме теоремы Кирхгофа вывести еще два закона для черного излучения. Так, закон Стефана (1879 г.) утверждает, что полная энергия излучения пропорциональна четвертой степени температуры  $T$  излучающего тела. Следующий шаг был сделан Вином (1893 г.), сформулировавшим закон смещения, который носит его имя и утверждает следующее.

Спектральное распределение плотности энергии подчиняется уравнению

$$\rho(\nu, T) = \nu^3 F(\nu/T),$$

где  $F$  – функция, зависящая только от отношения частоты к температуре, конкретный вид которой нельзя установить термодинамическими методами.

Отметим, что закон Вина включает и закон Стефана; чтобы получить его, надо проинтегрировать формулу Вина по всему спектру:

$$\int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu = \int_0^{\infty} \nu^3 F(\nu/T) d\nu.$$

Сделав замену переменных  $x = \nu/T$ ,  $d\nu = T dx$ , получим

$$\int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu = T^4 \int_0^{\infty} x^3 F(x) dx.$$

Очевидно, что интеграл даст просто число, т.е. действительно, если верен закон Вина, то полная энергия излучения оказывается пропорциональной четвертой степени температуры. Причина, по какой закон Вина называют «законом смещения», такова: экспериментально было обнаружено, что интенсивность излучения раскаленного тела, температура которого поддерживается постоянной, как функция длины волны ведет себя следующим образом (см. рис. 19). При некоторой  $\lambda_m$  наблюдается максимум, который с изменением температуры смещается, в то время как произведение  $\lambda_m T$  оказывается постоянным:

$$\lambda_m T = const.$$

Это можно легко доказать, используя закон Вина. Запишем его через

$$\lambda = c/\nu: \rho(\lambda, T) = c^4 / \lambda^5 (c / \lambda T).$$

Условие максимума функции:

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = 0,$$

$$c^4 \left[ -\frac{5}{\lambda^6} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) - \frac{1}{\lambda^5} F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \frac{c}{\lambda^2 T} \right] = 0;$$

$$5F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) + \frac{c}{\lambda T} F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = 0;$$

$$5F(x) = xF'(x).$$

Уравнение содержит всего одну неизвестную величину  $c / \lambda T$ , и его решение, если оно существует, должно иметь форму  $\lambda \cdot T = const$ . Значение постоянной нельзя определить, если неизвестна функция  $F$ . Таким образом и получается теорема о смещении максимума. Чтобы найти  $F$ , необходимо обратиться к конкретной модели. Исходя из термодинамики ясно, что форма закона, определенного той или иной функцией  $F$ , не должна зависеть от конкретного механизма излучения. Поэтому в качестве простейшей модели излучающего тела Планк выбрал линейный гармонический осциллятор с собственной частотой  $\nu$ . Для такого осциллятора мы можем, с одной стороны, рассчитать энергию, излучаемую за 1 с; (она будет равна просто энергии излучения колеблющегося диполя), и работу, произведенную над осциллятором полем излучения за то же время. В случае равновесия обе эти величины должны совпадать, и при этом получается

$$\rho(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \bar{\epsilon},$$

где  $\bar{\epsilon}$  — энергия осциллятора, усредненная по некоторому промежутку времени, который велик по сравнению с периодом, но все же настолько мал, что излучением за это время можно пренебречь.

Таким образом, если мы знаем среднюю энергию осциллятора, то мы знаем также и распределение интенсивности черного излучения. Значение  $\bar{\epsilon}$ , определенное методами классической статистики, оказывается равным  $kT$ . Здесь  $k$  — постоянная Больцмана. Это частный случай общего результата статистической механики — закон равнораспределения. В соответствии с этим каждый член в гамильтониане  $H$  (полная энергия), пропорциональный квадрату

координаты или импульса, дает один и тот же вклад в среднюю энергию, а именно  $1/2kT$ , а в гамильтониане осциллятора есть два таких члена и, следовательно, его энергия есть  $kT$ . Это можно легко посчитать. По статистике Больцмана, при равновесии состояние осциллятора, характеризуемое энергией  $\varepsilon$ , встречается с относительной вероятностью  $e^{-\varepsilon/kT}$ , так что  $\bar{\varepsilon}$  получается в результате усреднения по всем состояниям:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \ln \int_0^{\infty} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} = kT \quad (\beta = \frac{1}{kT})$$

Таким образом, получаем

$$\rho(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT.$$

Это выражение представляет собой закон излучения Релея – Джинса (1900, 1909 гг.). Заметим, что этот закон согласуется с законом Вина, чего и следовало ожидать. В длинноволновой области, т.е. при малых частотах, закон Релея – Джинса также очень хорошо согласуется с экспериментальной кривой распределения плотности излучения. В этой области плотность возрастает пропорционально второй степени частоты. Но для больших частот формула уже не верна. Из эксперимента известно, что проходя через максимум, плотность излучения ведет себя так, как на рис.19, чего не следует из полученной формулы. Мало того, что отсутствует максимум, так  $\rho(\nu, T)$  непрерывно возрастает как квадрат частоты, что приводит к расходимости интеграла:

$$I = \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu.$$

В этом случае имеет место «ультрафиолетовая катастрофа».

Предпринимались попытки устранить эту явную несуразицу с помощью следующей гипотезы. Предположим, что для достижения равновесия требуется определенное время (время релаксации). Пусть для черного излучения это время очень велико, т.е. равновесие устанавливается не скоро. Но за это время, как нетрудно представить, свойства системы могут полностью измениться в результате внешних воздействий. Однако эти рассуждения не затрагивают существа дела. Действительно, мы всегда можем, по крайней мере теоретически,

как угодно долго поддерживать внешние условия неизменными. Тогда рано или поздно равновесие все же установится.

В такой ситуации Планк выдвинул смелую гипотезу, что все эти трудности можно обойти, допустив существование конечных дискретных квантов энергии  $\varepsilon_0$ , таких, что энергия осциллятора может оказаться равной (помимо  $\varepsilon = 0$ ) лишь  $\varepsilon_0, 2\varepsilon_0, \dots$  и т.д. Именно таким образом и выводится закон излучения Планка, который получил блестящее экспериментальное подтверждение. Самое важное – суметь найти среднюю энергию  $\bar{\varepsilon}$ . Формально вычисление интегралов заменяется на вычисление сумм. По-прежнему состояние с тем или иным значением энергии встречается с относительной вероятностью, определяемой больцмановским множителем, но теперь в расчетах фигурируют уже не все энергии, как это было раньше, а лишь энергии вида  $n\varepsilon_0$  ( $n=0,1,2, \dots$ ), поэтому среднее значение энергии равно

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 e^{-\beta n\varepsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0}} = -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\varepsilon_0} = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0}}{1 - e^{-\beta\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0} - 1}$$

Подставляя это выражение в формулу, будем иметь

$$\rho(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1}.$$

Чтобы это выражение не противоречило закону Вина, который, будучи прямым следствием термодинамики, справедлив при всех обстоятельствах, необходимо принять, что

$$\varepsilon_0 = h\nu,$$

где  $h$  – постоянная, носящая имя Планка.

Теперь отсюда прямо следует закон излучения Планка:

$$\rho(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Как уже говорилось, эта формула отлично согласуется с опытом.

При малых частотах плотность излучения возрастает приблизительно как квадрат частоты; если  $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ , то экспоненту в знаменателе можно разложить в ряд по степеням, причем первый член разложения в точности соответствует закону Релея – Джинса:

$$\rho(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h\nu}{kT} + \dots\right) - 1} \approx \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT.$$

Таким образом, в области малых частот закон Планка согласуется с классическими выражениями. Иначе обстоит дело в области больших частот. Если  $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ , то экспонента в знаменателе гораздо больше 1. В этом случае единицей в знаменателе можно пренебречь и получим приближенный закон излучения для коротких волн (больших частот):

$$\rho(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu / kT}.$$

Закон излучения в такой форме был предложен ранее Вином (1896 г.), который пытался феноменологически описать результаты своих измерений в этой части спектра. Между областями применимости этих двух предельных законов лежит обширная переходная область, где и находится максимум кривой распределения. При повышении температуры этот максимум в соответствии с законом Вина сдвигается в сторону более коротких длин волн.

Переходя к записи плотности излучения через длину волны  $\lambda$ , будем иметь

$$\rho(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc / \lambda kT} - 1}.$$

Функция  $\rho(\lambda, T)$  имеет максимум при длине волны  $\lambda_m$ , которую можно найти из условия

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = 0$$

или

$$-\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} + \frac{hce \frac{hc}{\lambda kT}}{\lambda^7 kT (e^{hc/\lambda kT} - 1)^2} = 0.$$

Вводя  $x = \frac{hc}{\lambda_m kT}$ , получим

$$\frac{5}{e^x - 1} = \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2}, \quad \frac{xe^x}{e^x - 1} = 5.$$

Решение этого трансцендентного уравнения дает значение  $x = 4,96$ .

Таким образом,

$$\frac{hc}{\lambda_m kT} = 4,96.$$

Это и есть закон смещения Вина.

Постоянная Планка была впервые определена самим Планком с помощью закона Стефана и закона смещения Вина. Согласно первому закону, энергия, излучаемая за 1 с с квадратного метра нагретой до температуры  $T$  поверхности, есть

$$I = \sigma T^4,$$

где  $\sigma$  – постоянная, называемая постоянной Стефана – Больцмана и равная

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} / \text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{град}^4.$$

Эту постоянную можно получить и теоретически, интегрируя по всему спектру функцию распределения Планка. В результате получим выражение для  $\sigma$ :

$$\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15c^2 h^3.$$

С другой стороны, измерения показывают, что постоянная в законе Вина

$$\lambda_m T = c = 0,2014 \frac{hc}{k} = 2\,898 \text{ мкм} \cdot \text{град}.$$
 Чтобы найти порядок этой величины,

достаточно заметить, что максимум интенсивности в излучении Солнца, которое излучает как черное тело, при температуре  $T = 6\,000 \text{ К}$  лежит в

зеленой части спектра, то есть приблизительно при  $\lambda = 4\,500 \text{ \AA}$ . Зная эти две

эмпирические постоянные, можно рассчитать  $h$  и  $k$ . Найденные таким образом значения хорошо согласуются с оценками, полученными другими методами.

Из общего вида кривых распределения следует еще один вывод: – КПД, например, ламп накаливания и других осветительных приборов совершенно ничтожен. Действительно, область видимого света соответствует лишь узкой полосе в спектре теплового излучения, вся остальная энергия излучения пропадает даром для освещения.

Вернемся снова к истории открытия Планка. Его гипотеза встретила сначала яростное сопротивление физиков. Никто не хотел верить, что непременным условием вывода закона излучения является обращение к гипотезе квантов. Считалось, что новые идеи представляют собой просто математический прием и рано или поздно найдут классическую интерпретацию этого явления. Однако все попытки подобного рода потерпели провал.

## 5. ФОТОЭФФЕКТ

В конце XIX в. был открыт электрон. И примерно в это же время обнаружено явление фотоэффекта, заключающееся в вырывании электронов с некоторых металлических поверхностей под действием света. Со времени дифракционных опытов Юнга на двух щелях не было сомнений в том, что свет представляет собой волны. Эти представления позволяли объяснить явление фотоэффекта.

Внешние электроны атомов металлов связаны слабо с атомами и под действием внешнего электромагнитного поля испытывают смещение. Вычислим величину этого смещения. Воспользуемся моделью атома, близкой к той, которая принята в современной квантовой теории. Согласно этой модели, внешний электрон рассматривается в виде шарового облака радиусом  $R$ . При смещении подобного шарового заряда на расстояние  $x$  от центра атома возникает возвращающая сила, пропорциональная  $x$ . Вследствие этого электронное облако совершает гармонические колебания относительно центра атома, который представляет собой атомное ядро, окруженное облаком внутренних электронов, прочно связанных с ядром.

Пусть теперь на внешнее электронное облако действует поле  $E$  падающей волны. Падающую волну на расстоянии  $y$  от источника запишем как обычно:

$$E = E_0 \cos \omega(t - y/c).$$

Уравнение движения внешнего электронного облака (электрона) будет иметь вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - eE$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \frac{eE_0}{m} \cos \omega \left( t - \frac{y}{c} \right),$$

где  $e$  – заряд электрона.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$x = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega \left( t - \frac{y}{c} \right).$$

Таким образом, амплитуду колебаний свободного электрона в переменном электрическом поле можно представить в виде

$$A = \frac{eE_0}{m\omega^2},$$

поэтому можно было ожидать, что электрон, движущийся вблизи поверхности, покинет металл, как только амплитуда его колебаний  $A$  превысит некоторое критическое значение. Из волновой теории света имеем следующие выводы:

- 1) электроны не будут вылетать из металла до тех пор, пока  $E_0$  не превысит определенного критического значения;
- 2) энергия испущенных электронов возрастает пропорционально  $(E_0)^2$ ;
- 3) если величину  $E_0$  (а значит, и интенсивность) поддерживать постоянной, а частоту света  $\omega$  увеличивать, то число испускаемых электронов должно уменьшаться.

Однако экспериментальные наблюдения опровергли все эти предсказания:

1. Пороговой интенсивности обнаружено не было. Число вылетающих электронов оказалось строго пропорционально  $E_0^2$  при любой, сколь угодно малой интенсивности.
2. Энергия электронов оказалась не зависящей от величины  $E_0$ .
3. Обнаружена зависимость энергии электронов от частоты. Оказалось, что существует пороговая частота  $\omega_0$ , причем при частотах, превышающих пороговую, энергия выбитых электронов линейно увеличивается с ростом частоты. На самом деле, кинетическая энергия электронов менялась в интервале от нуля до некоторого значения  $K_m$ , и не было электронов с энергией больше, чем  $K_m$ .

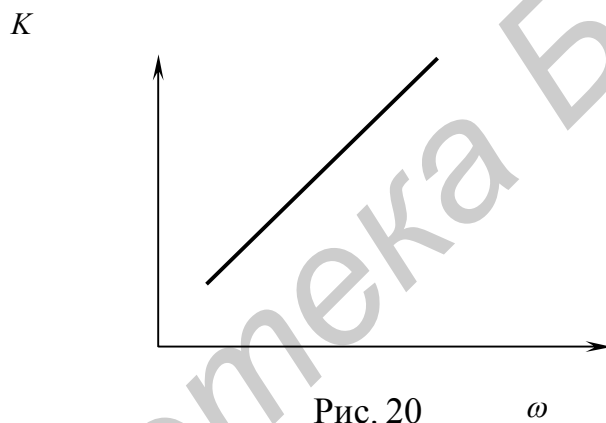
В 1905 г. Эйнштейн дал правильное объяснение фотоэффекта. Он, как бы следуя за Планком, высказал крамольную по тем временам мысль: «Свет представляет собой совокупность частиц (квантов), каждая из которых обладает энергией  $\hbar\omega$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка». Таким образом, при



столкновении кванта света (фотона) с электроном в металле фотон может поглотиться и передать свою энергию электрону. И хотя в то время подобная идея ставила больше вопросов, чем давала ответов, она сумела объяснить все экспериментальные факты в теории фотоэффекта. Предположим, что для удаления электрона из металла необходимо затратить энергию  $W_0$ . Тогда, поглотив фотон с энергией  $\hbar\omega$  и вылетев с поверхности, электрон будет иметь энергию  $\hbar\omega - W_0$ . Это и будет максимально возможная кинетическая энергия:

$$K_m = \hbar\omega - W_0.$$

Данное соотношение согласуется с экспериментальной кривой, изображенной на рис.20. Естественно, что наклон прямой должен быть связан с постоянной Планка ( $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ), равной  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с. Величина  $W_0$  называется *работой выхода* и зависит от свойств данного металла.



Таким образом, формула Эйнштейна  $\hbar\omega = W_0 + K$  решила все проблемы в теории фотоэффекта.

## 6. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

После впечатляющих успехов Планка и Эйнштейна сомнений в том, что свет можно рассматривать как поток частиц, стало меньше. Но они окончательно развеялись после использования идеи квантов света для объяснения процесса рассеяния фотонов на свободных электронах. Этот процесс носит название эффекта Комптона. Впервые он был подтвержден Комптоном в 1923 г. Задача, оказывается, чрезвычайно проста, если рассматривать взаимодействие электрона с фотоном как простое столкновение

двух шариков и использовать при этом законы сохранения механики, конечно, с учетом релятивизма.

Следуя Эйнштейну, припишем фотону импульс:

$$p = \frac{h}{c}.$$

И пусть этот фотон с импульсом  $p$  и энергией  $pc$  сталкивается с неподвижным электроном, энергия покоя которого  $mc^2$ . После удара импульс фотона становится равным  $p'$  и направлен под углом  $\theta$  (рис.21).

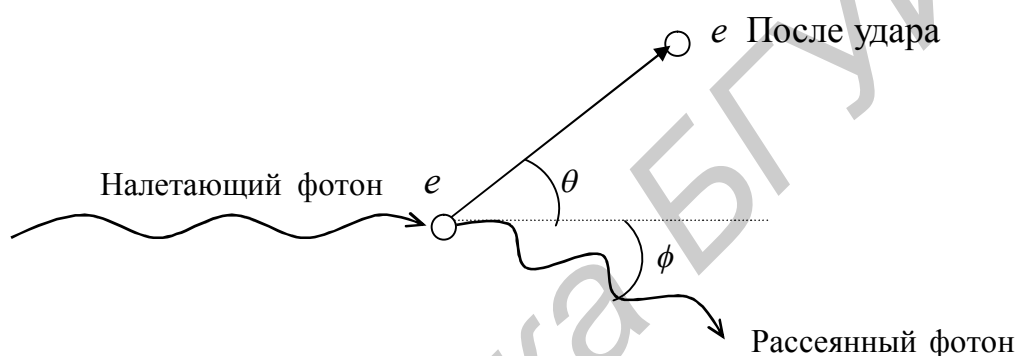


Рис. 21

Импульс электрона после удара будет равен  $\vec{p}'_e$ , а полная релятивистская энергия –  $E'_e$ . Для расчета необходимо использовать релятивистскую механику, поскольку скорость электрона может достигать значений, близких к скорости света.

Согласно закону сохранения энергии, полная начальная энергия равна полной энергии после соударения, т.е.

$$pc + mc^2 = p'c + E'_e,$$

что можно переписать в виде

$$(p - p' + mc)^2 = \left(\frac{E'_e}{c}\right)^2.$$

В соответствии с законом сохранения импульса

$$\vec{p} - \vec{p}' = \vec{p}'_e.$$

Если возведем обе части этого уравнения в квадрат и вычтем из предыдущего, то получим

$$m^2 c^2 - 2 p p' + 2 p m c - 2 p' m c + 2 p p' \cos \theta = \frac{E_e'^2}{c^2} - p_e'^2,$$

откуда

$$p' = \frac{p}{1 + \frac{p}{mc}(1 - \cos \theta)}.$$

Воспользовавшись тем, что  $p = \frac{h}{\lambda}$ , получаем

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)}$$

или

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta).$$

В своем опыте Комптон использовал рентгеновское излучение и обнаружил, что у рассеянных фотонов увеличивается длина волны в соответствии с предсказаниями по последней формуле.

Эффект Комптона, фотоэффект, равновесное тепловое излучение и множество других экспериментов с участием света и атомов подтвердили, что свет действительно ведет себя так, как если бы он состоял из частиц с

энергией  $h\nu$  и импульсом  $\frac{h}{\lambda}$ .

## 7. ВНУТРЕННИЙ ФОТОЭФФЕКТ

Внутренним фотоэффектом называется явление возрастания электропроводимости полупроводников и диэлектриков под действием облучения. Это явление также называют фотопроводимостью. Его можно объяснить с помощью зонной теории кристаллических тел. Для полупроводников характерно наличие не очень широкой ( $\Delta E = 0,5 - 2$  эВ) запрещенной зоны. Валентная зона собственного полупроводника заполнена полностью. В свободную зону электроны могут переходить из валентной, получив извне для такого перехода энергию не менее энергии активации (ширина запрещенной зоны). При этом в зоне проводимости образуются вакантные места, называемые «дырки». Эти пары разноименно заряженных носителей тока способны под действием внешнего электрического поля придать упорядоченное движение, образуя электрический ток. Одним из способов получения дополнительного количества носителей заряда в полупроводнике является поглощение им световой энергии.

Электрон, находящийся в валентной зоне, поглощая фотон, переходит в зону проводимости, а в валентной зоне появляется «дырка». Очевидно, что

концентрация электронов и «дырок», а также зависящая от неё электропроводимость вещества пропорциональны числу фотонов, падающих на единицу поверхности вещества за единицу времени, т.е. интенсивности монохроматического света. Исходя из того, что энергия фотона не должна быть меньше энергии активации, можно определить граничную частоту для данного вещества – «красную границу» фотоэлемента:

$$h\nu_0 = \Delta E.$$

Эта граничная частота определяет переход электрона с самого верхнего уровня валентной зоны на самый нижний уровень зоны проводимости. В примесных полупроводниках с небольшим содержанием примесей вероятность поглощения фотонов электронами примесных атомов мала. Поэтому изменение проводимости под действием света также в основном связано с переходом электронов из валентной зоны и образованием пар электрон-дырка. Однако характер проводимости полупроводников *n*-типа и *p*-типа различен. Фотопроводимость *n*-полупроводника имеет чисто электронный характер, а *p*-типа –

чисто дырочный. Запрещенная зона различных полупроводников имеет ширину от десятых долей до двух электронвольт, поэтому фотопроводимость может обнаруживаться в инфракрасной, видимой ультрафиолетовой области спектра. Некоторая фотопроводимость обнаруживается и при частоте света чуть меньше граничной (т.е. вызываемая квантами с энергией меньше энергии активации). Это объясняется двумя причинами: 1) отдельные электроны могут оказаться под суммарным воздействием энергии фотонов и энергии тепловых колебаний решетки; 2) ширина запрещенной зоны подвержена флуктуациям, так как тепловые колебания решетки приводят к изменению мгновенных расстояний между атомами, от которых она зависит. Величина фототока зависит от частоты, освещенности и температуры. Изменение электрических свойств полупроводников под влиянием электромагнитного излучения носит временный характер. После прекращения облучения проводимость за время от нескольких микросекунд до нескольких часов (для различных веществ) возвращается к тому значению, которое она имела до облучения.

## 8. ПЛАНЕТАРНАЯ МОДЕЛЬ АТОМА И КВАНТОВЫЕ ПОСТУЛАТЫ БОРА

Согласно теории Резерфорда, атом состоит из тяжелого положительного ядра и окружающих его электронов. По классической механике такая система может находиться в равновесии лишь при условии, если электроны будут вращаться вокруг ядра по каким-то орбитам. Однако с точки зрения классической электродинамики такой атом был бы все же неустойчив, так как при движении с ускорением электроны должны были бы излучать энергию в виде электромагнитных волн и, следовательно, постепенно падать на ядро. Вместе с тем и частота обращения при этих условиях должна была бы непрерывно меняться, и мы получили бы сплошной спектр вместо резких спектральных линий. Тот факт, что этого на самом деле не наблюдается и спектр

атома состоит из резких спектральных линий, указывает на их замечательную устойчивость, противоречащую классической электродинамике.

Выход из подобной ситуации был предложен Бором, который развил идею о квантах, высказанную Планком в применении к обмену энергии между полем излучения и линейными осцилляторами (стенками).

В основу развитой им квантовой теории строения атома Бор положил следующие два постулата:

1. Атомы и атомные системы могут длительно пребывать только в определенных состояниях – стационарных, в которых, несмотря на происходящее в них движение заряженных частиц, они не излучают и не поглощают энергию. В этих состояниях атомные системы обладают энергиями, образующими дискретный ряд:  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Эти состояния характеризуются устойчивостью: всякое изменение энергии в результате поглощения или испускания электромагнитного излучения или в результате соударения может происходить только при полном переходе (скачком) из одного из этих состояний в другое.

2. При переходе из одного стационарного состояния в другое атомы испускают или поглощают излучение только строго определенной частоты. Излучение, испускаемое или поглощаемое при переходе из состояния  $E_m$  в  $E_n$ , монохроматично, и его частота  $\nu$  определяется из условия

$$h\nu = E_m - E_n.$$

Оба эти постулата резко противоречат требованиям классической электродинамики. Так, в соответствии с первым постулатом атомы не излучают, несмотря на то, что образующие их электроны совершают ускоренное движение, а в соответствии со вторым – испускаемые частоты не имеют ничего общего с частотами периодических движений электронов.

Сформулированные выше квантовые постулаты Бора были экспериментально подтверждены в опытах Дж. Франка и Густава Герца.

## 9. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

### 9.1. Принцип неопределенностей Гейзенберга

Физические величины никогда не могут быть измерены абсолютно точно. Измеренное значение любой физической величины всегда отличается от ее истинного значения, которое всегда неизвестно, так как при выполнении любого измерения неизбежна ошибка. Источников ошибок много. Они связаны с несовершенством измерительных приборов, изменением условий опыта, неполнотой теоретической модели и приближенным характером используемого метода измерений, округлением при вычислениях и т.д. Поэтому необходимым условием выполнения любого измерения является нахождение некоторого интервала значений, в который с высокой вероятностью должно попасть истинное значение измеряемой величины. Измерение, например, координаты  $x$  материальной точки, должно сопровождаться определением ошибки измерения  $\Delta x$ , измерение компоненты импульса  $p_x$  – ошибки  $\Delta p_x$ .

В классической физике не было принципиальных ограничений на точность измерений. Считалось, что при достаточно совершенной аппаратуре все величины, характеризующие физическую систему, могут быть измерены со сколь угодно высокой точностью. Однако для микроскопических систем неограниченное повышение точности измерений получается не всегда. В некоторых случаях существуют принципиальные ограничения на точность измерений, которые не определяются совершенством измерительной аппаратуры. Каждое из них является фундаментальным свойством материи, проявляющимся только в микромире. Принципиальные ограничения на точность измерения физических величин называются соотношениями неопределенностей. Впервые соотношения неопределенностей были сформулированы Гейзенбергом в 1927 г.

Наиболее важными являются два соотношения неопределенностей. Первое устанавливает ограничения на точность одновременного измерения координат частицы и соответствующих компонент ее импульса. Для  $x$ -координаты это соотношение записывается в виде

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h. \quad (8.1)$$

(при строгом применении формализма квантовой механики получается соотношение  $\overline{(\Delta x)^2} \cdot \overline{(\Delta p_x)^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}$ , однако для качественных оценок используют именно (8.1). Второе соотношение устанавливает предел точности измерения энергии за данный промежуток времени:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h,$$

где  $\Delta t$  – длительность измерения энергии,  $\Delta E$  – неопределенность энергии.

Соотношения неопределенностей обусловлены корпускулярно-волновым дуализмом.

## 9.2. Волновая функция, ее физический смысл

Основная задача классической механики заключается в определении положения макрообъекта в любой момент времени. Для этого составляется система уравнений, решение которой позволяет выяснить зависимость радиус-вектора  $\vec{r}$  от времени  $t$ . В классической механике состояние частицы при ее движении в каждый момент времени задается двумя величинами: радиус-вектором  $\vec{r}$  и импульсом  $\vec{p}$ .

Задать аналогичным образом состояние микрочастицы невозможно. Этому препятствует корпускулярно-волновой дуализм и соотношения неопределенностей Гейзенберга. С учетом наличия у микрочастицы волновых свойств ее состояние в квантовой механике задается с помощью некоторой функции координат и времени  $\Psi(x, y, z, t)$ , называемой волновой или  $\Psi$ -функцией. Эта комплексная функция описывает состояние микрочастицы для любого момента времени. В случае одномерного движения частицы вдоль оси  $Ox$  волновая функция зависит лишь от координаты  $x$  и времени  $t$ , т.е.  $\Psi = \Psi(x, t)$ . Для понимания физического смысла волновой функции обратимся к опытам по дифракции электронов. Оказывается, что четкие дифракционные картины

обнаруживаются даже в том случае, если направлять на мишень одиночные электроны, т.е. когда каждый последующий электрон испускается после того, как предыдущий достигнет экрана. После достаточно продолжительной бомбардировки картина на экране будет в точности соответствовать той, которая получается при одновременном направлении на мишень большого числа электронов. Из этого можно сделать вывод, что движение любой микрочастицы по отдельности, в том числе и место ее обнаружения, подчиняются статистическим (вероятностным) закономерностям. При направлении на мишень одиночного электрона, точку экрана, в которой он будет зафиксирован, заранее со 100%-ной вероятностью предсказать невозможно.

В дифракционных опытах Томсона на фотопластинке образовывалась система темных концентрических колец. Можно с уверенностью сказать, что вероятность обнаружения (попадания) каждого испущенного электрона в различных местах фотопластинки неодинакова. В области темных концентрических колец эта вероятность больше, чем в остальных местах экрана. Распределение электронов по всему экрану оказывается таким же, каким является распределение интенсивности электромагнитной волны в аналогичном дифракционном опыте: там где интенсивность рентгеновской волны велика, частиц в опыте Томсона регистрируется много, а там, где интенсивность мала, – частицы почти не появляются. С волновой точки зрения наличие максимума числа электронов в некоторых направлениях означает, что эти направления соответствуют наибольшей интенсивности волны де Бройля. Это послужило основанием для статистического (вероятностного) истолкования волны де Бройля. Волновая функция как раз и является той величиной, которая позволяет отыскать все квантовые вероятности. Однако из всех этих вероятностей в дальнейшем рассмотрим лишь одну, описывающую вероятность распределения координаты частицы. Для одномерного движения вероятность  $dP$  обнаружения частицы в промежутке между точками  $x$  и  $x + dx$  в момент времени  $t$  равна

$$dP = |\Psi(x, t)|^2 dx,$$

где  $|\Psi(x, t)|^2 = \Psi(x, t) \cdot \Psi^*(x, t)$  – квадрат модуля волновой функции (значок \* обозначает комплексное сопряжение).

В общем случае движения частицы в трехмерном пространстве вероятность  $dP$  обнаружения частицы в точке с координатами  $(x, y, z)$  в пределах бесконечно малого объема  $dV$  задается аналогичным выражением:  $dP = |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV$ . Впервые вероятностную интерпретацию волновой функции дал Борн (1926 г.)

Волновую, или  $\Psi$ -функцию, можно задавать с точностью до постоянного множителя. Если обозначить через  $A$  некоторую константу, то произведение  $A \cdot \Psi$  определяет то же состояние частицы, что и  $\Psi$ .

Вероятность обнаружить частицу во всем бесконечном пространстве (если мы точно уверены, что частица существует) равна 1. Отсюда следует условие нормировки волновой функции:

$$\int_V dP = \int_V |\Psi|^2 dV = 1.$$

Величина  $|\Psi|^2$  является плотностью вероятности, или, что то же самое, плотностью распределения координат частиц. В простейшем случае одномерного движения вдоль оси  $Ox$  среднее значение координаты вычисляется следующим образом:

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot |\Psi(x, t)|^2 dx.$$

Таким образом, точно предсказать в дифракционных опытах, в каком месте экрана будет зафиксирован тот или иной электрон, невозможно, даже заранее зная его волновую функцию. Можно лишь с определенной вероятностью предположить, что электрон будет зафиксирован в конкретном месте. В этом заключается отличие поведения квантовых объектов от классических. В классической механике при описании движения макротел мы со 100 % вероятностью заранее знали, в каком месте пространства будет находиться материальная точка (например космическая станция) в любой момент времени.

### 9.3. Уравнение Шредингера. Стационарные состояния

Для отыскания вида волновой функции необходимо составить уравнение, учитывающее движение микрочастицы и взаимодействие ее с другими частицами вещества. Решением этого уравнения и должна являться волновая функция. Вероятностное истолкование волн де Бройля и соотношений неопределенностей указывают, что уравнение движения в квантовой механике должно быть таким, чтобы оно позволяло объяснять наблюдаемые на опыте волновые свойства частиц. Поскольку состояние частицы в пространстве в данный момент времени как раз и определяется заданием волновой функции  $\Psi(x, y, z, t)$ , то основное уравнение квантовой механики должно быть волновым уравнением относительно функции  $\Psi(x, y, z, t)$ .

Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики было найдено Шредингером (1926 г.). Как и уравнения движения Ньютона, лежащие в основе классической механики и поэтому не выводимые, уравнение Шредингера постулируется. Справедливость уравнения Шредингера доказывается тем, что все выводы, полученные с помощью этого уравнения в атомной и ядерной физике, находятся в хорошем согласии с опытом. Для случая движения частицы в потенциальных силовых полях, характеризуемых потенциальной функцией  $U$ , где  $U$  – потенциальная энергия ( $\Pi = -U$ ), уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

где  $i$  – мнимая единица ( $i^2 = -1$ ),

$\Delta \Psi$  – оператор Лапласа («лапласиан»); в прямоугольной декартовой системе координат записывается в виде



$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}. \quad (9.1)$$

Вид  $\Psi$ -функции для конкретной микрочастицы определяется потенциальной энергией  $U$ . Если она не зависит от времени, то  $\Psi$ -функцию можно представить в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит только от координат, а другой – только от времени:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \exp(-i \frac{E}{\hbar} t), \quad (9.2)$$

где  $E$  – полная энергия частицы.

Подставим полученное выражение для  $\Psi$ -функции в уравнение (9.1):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi \exp(-i \frac{E}{\hbar} t) + U\psi \cdot \exp(-i \frac{E}{\hbar} t) = i\hbar\psi(-i \frac{E}{\hbar}) \exp(-i \frac{E}{\hbar} t).$$

После деления уравнения на множитель  $\exp(-i \frac{E}{\hbar} t)$ , имеем

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi = i\hbar\psi(-i \frac{E}{\hbar}), \text{ или}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi = E\psi.$$

Полученное соотношение называется уравнением Шредингера для стационарных состояний (поле стационарно, когда его характеристики не зависят от времени). Это уравнение чаще записывают в виде

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0.$$

В стационарных состояниях ни одна из квантово-механических вероятностей не изменяется с течением времени. Средние значения всех физических величин также не зависят от времени. В частности, постоянным по времени оказывается среднее значение координаты  $\langle x \rangle$ . Стационарность состояния не исключает зависимость волновой функции от времени, а только ограничивает ее гармоническим законом  $\exp(-i \frac{E}{\hbar} t)$ . Состояние стационарно, так как равен единице модуль множителя  $\exp(-i \frac{E}{\hbar} t)$ , т.е.

$$\left| \exp(-i \frac{E}{\hbar} t) \right| = \sqrt{\exp(-i \frac{E}{\hbar} t) \exp(i \frac{E}{\hbar} t)} = 1.$$

Поэтому плотность распределения координат частиц  $|\Psi|^2 = \Psi \Psi^* = \Psi \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \cdot \Psi^* \cdot e^{i \frac{E}{\hbar} t} = \Psi \Psi^* = |\Psi|^2$  от времени не зависит. В стационарном состоянии плотность вероятности выражается только через  $\Psi(x, y, z)$ . Поэтому  $\psi(x, y, z)$  также называется волновой функцией, хотя, строго говоря, она является только координатной частью всей волновой функции  $\Psi(x,$

$y, z, t$ ) стационарного состояния.

Рассмотрим движение частицы вдоль оси  $x$  в отсутствие поля. В этом случае потенциальная энергия свободно движущейся частицы  $U = 0$ . Согласно гипотезе де Бройля движение такого микрообъекта моделируется монохроматической волной, занимающей все пространство. Поэтому можно предположить, что  $\Psi$ -функция будет иметь следующий вид:

$$\Psi = \Psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (9.3)$$

где  $\Psi_0$  – амплитуда волны.

Круговая частота  $\omega$  и волновое число  $k$  связаны с полной энергией  $E$  и импульсом  $p$  соотношениями  $\omega = \frac{E}{\hbar}$  и  $k = \frac{p}{\hbar}$ . Волновая функция (9.3) при этом приобретает вид  $\Psi = \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$ . Покажем, что данный вид  $\Psi$ -функции не противоречит уравнению Шредингера. Для этого сделаем следующее:

1. Найдем  $\Delta\Psi$  и выразим  $p^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{i}{\hbar} p e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} = \frac{i}{\hbar} p \Psi, \\ \Delta \Psi &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar} p\right)^2 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi. \\ p^2 &= -\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \Delta \Psi. \end{aligned}$$

2. Найдем  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  и из полученного соотношения выразим полную энергию  $E$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} E e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} = -\frac{i}{\hbar} E \Psi. \\ E &= -\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

3. Воспользуемся соотношением между энергией частицы  $E$  и ее импульсом  $p$ :

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left(-\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \Delta \Psi\right) \\ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi \quad \text{или} \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi &= i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Полученное соотношение совпадает с уравнением Шредингера для случая  $U = 0$ .

#### 9.4. Частица в потенциальной яме. Квантование энергии

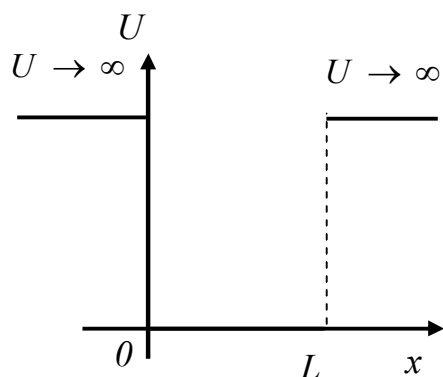


Рис. 22

Простейшим примером пространственно-ограниченного движения является одномерное движение квантовой частицы в силовом поле, имеющем вид очень глубокой потенциальной ямы с вертикальными стенками (рис. 22). В этом силовом поле график потенциальной энергии частицы  $U(x)$  имеет вид, показанный на том же рисунке. Непроницаемость стенок выражается в неограниченном возрастании  $U(x)$  в точках  $x = 0$  и  $x = L$ .

Частица может находиться лишь на участке  $0 < x < L$ . Значение потенциальной энергии частицы в пределах этого участка  $U(x) = 0$ . Так как частица не выходит из промежутка  $0 < x < L$ , то вероятность ее обнаружения вне этого промежутка равна нулю, что возможно лишь в случае равенства нулю ее волновой функции вне этого участка. Следовательно, уравнение Шредингера должно быть дополнено граничными условиями:  $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$ .

Решение уравнения Шредингера позволяет найти волновую функцию частицы в области  $0 < x < L$ . Пусть силовое поле не меняется с течением времени, поэтому воспользуемся уравнением для стационарных состояний, которое в случае  $U = 0$  принимает вид

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0. \quad (9.2)$$

Для упрощения записи в дальнейшем введем в уравнение волновое число

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (9.3)$$

тогда уравнение (9.2) для одномерного случая приобретет вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k^2 \Psi = 0.$$

Общим решением данного однородного дифференциального уравнения второго порядка является функция

$$\Psi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx),$$

где  $A$  и  $B$  – некоторые комплексные коэффициенты, не зависящие от  $x$ . Воспользуемся граничными условиями. Так как  $\Psi(0) = 0$ , то  $A + B = 0$  и, следовательно,  $B = -A$  и будем иметь

$$\begin{aligned} \omega(x) &= A[\exp(ikx) - \exp(-ikx)] = A[\cos(kx) + i \sin(kx) - \cos(kx) + i \sin(kx)] = \\ &= 2Ai \sin(kx). \end{aligned}$$

С учетом того, что  $\Psi(L) = 0$ , получим  $\sin(kL) = 0$ . Откуда  $k = \frac{\pi n}{L}$ , где  $n$

$= 0, 1, 2, 3, \dots$ . Случай  $n = 0$  должен быть отброшен, так как при  $\psi(x) = 0$ , т.е. вероятность обнаружения частицы внутри ямы равна нулю. Однако с самого начала мы полагали, что частица локализована именно в области  $0 < x < L$ . Чтобы показать, что волновое число  $k$  частицы принимает не непрерывный, а дискретный набор значений, волновому числу дописывают индекс  $n$ , т.е., записывают  $k_n$ . Так как волновая функция определяется волновым числом  $k_n$ , то и для нее используют тот же индекс  $n$ :  $\psi_n$ . Вместо  $A$  удобно ввести новую комплексную постоянную  $C = 2iA$ , тогда

$$\psi_n(x) = C \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

Для нахождения амплитуды  $C$  волновой функции воспользуемся условием нормировки:

$$\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = |C|^2 \int_0^L \sin^2 \frac{\pi n x}{L} dx = 1.$$

Так как

$$\int_0^L \sin^2 \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left( 1 - \cos 2 \frac{\pi n x}{L} \right) dx = \frac{1}{2} L - \frac{L}{2\pi n} \int_0^L \cos \left( \frac{2\pi n x}{L} \right) d \left( \frac{2\pi n x}{L} \right) = \frac{L}{2},$$

то  $C = \sqrt{\frac{2}{L}}$ .

Таким образом,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

Из (9.3), выразив полную энергию частицы через волновое число  $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ , находим энергетический спектр частицы в бесконечно глубокой

потенциальной яме:  $E_n = \frac{1}{2m} \left( \frac{\pi \hbar n}{L} \right)^2$ .

Этот энергетический спектр дискретен. Во всем дискретном диапазоне значений энергии есть уровень, на котором энергия частицы минимальна. Этот уровень соответствует  $n = 1$  и называется основным уровнем энергии. На этом

уровне энергия частицы  $E_1 = \frac{1}{2m} \left( \frac{\pi \hbar}{L} \right)^2 > 0$ . Отсюда следует, что микрочастица не может обладать энергией, равной нулю, что означает невозможность остановки микрочастицы в классическом смысле.

## 10. РАДИОАКТИВНОСТЬ

Самопроизвольное (спонтанное) превращение нестабильных ядер в другие, сопровождающееся испусканием элементарных частиц и жесткого электромагнитного излучения, называется *радиоактивностью*.

К радиоактивным превращениям относятся альфа-распад ядер с массовым числом  $A$  в ядра с массовым числом  $A - 4$  при одновременном испускании альфа-частиц, являющихся ядрами гелия  ${}^4_2\text{He}$  (рис. 23).

Все виды бета-распада ядер с порядковым номером  $Z$  в ядре  $Z + I$  (или  $Z - I$ ) сопровождаются испусканием электрона, позитрона или захватом орбитального электрона (рис. 23, а).

При радиоактивном распаде существует вероятность образования ядра в возбужденном состоянии с последующим переходом в основное. При переходе ядра с верхнего энергетического уровня на нижний излучается гамма-квант с энергией, равной разности энергий уровней, между которыми происходит переход (рис. 23, в). Радиоактивный распад атомных ядер как явление, происходящее в микромире, имеет случайную природу и может быть понято только на основе вероятностной интерпретации экспериментальных данных.

Естественной статистической величиной, описывающей радиоактивный распад, является вероятность распада ядра в единицу времени  $\lambda$ . Эта величина называется также постоянной распада и является важнейшей характеристикой нестабильных (радиоактивных) ядер. Известно, что  $\lambda$  в широких пределах не зависит от внешних факторов (температуры, давления и т.д.), в частности от начала отсчета времени.

Поэтому число распавшихся ядер  $dN$  в наблюдаемом временном интервале  $dt$  определяется только величиной этого интервала и числом ядер  $N$  в момент времени  $t$ . Экспериментальное соотношение, связывающее убыль радиоактивных ядер, имеет вид  $-dN = \lambda N dt$ .

Отсюда при условии, что  $\lambda = \text{const}$  в результате интегрирования и учета, что в момент времени  $t=0$  число ядер было  $N_0$ , получим закон радиоактивного распада:  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ .

Закон радиоактивного распада справедлив только для средних значений входящих в него величин. Интенсивность процесса радиоактивного распада характеризуют две величины: период полураспада  $T$  и среднее время жизни  $\tau$  радионуклида (нуклид – общее название атомных ядер, отличающихся числом протонов  $Z$  и нейтронов  $N$ ).

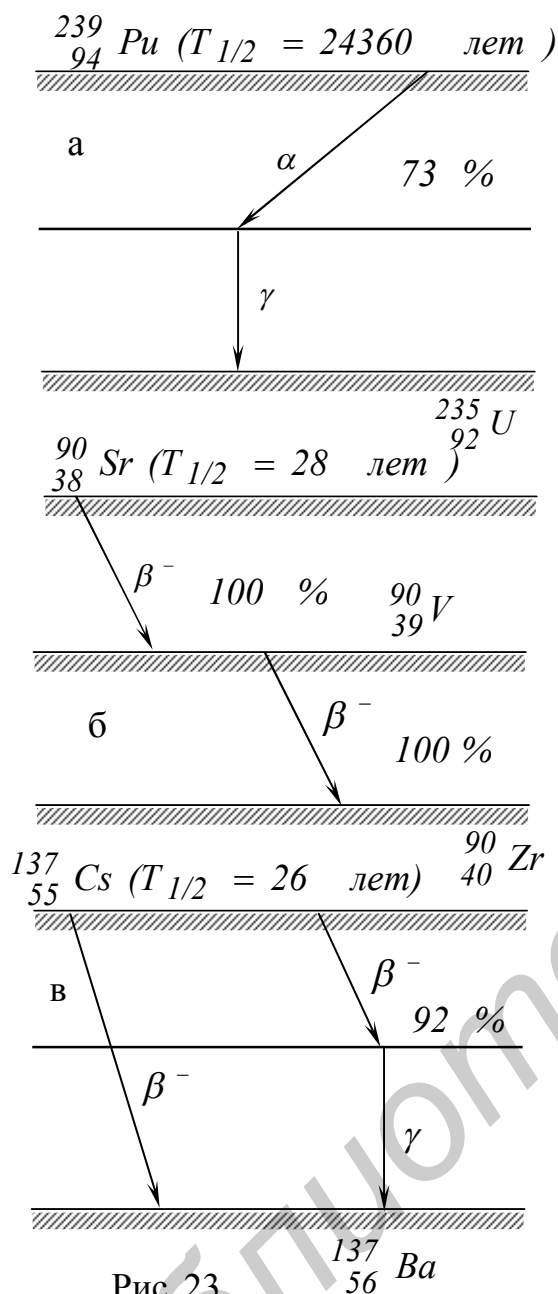


Рис. 23

Период полураспада  $T$  – время, в течение которого распадается в среднем половина ядер. Эта величина определяется условием

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T},$$

откуда период полураспада

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda};$$

$$\tau = 1 / \lambda,$$

которое совпадает со временем, в течение которого число радиоактивных ядер в системе убывает в  $\tau$  раз. Это время не зависит ни от способа получения ядер, ни от внешних условий, в которых ядра находятся.

Интенсивность излучения большей совокупности радиоактивных ядер в целом характеризуется средним числом распадов в единицу времени. Эта величина называется *активностью*.

В СИ единицей активности является беккерель:  $1 \text{ Бк} = 1 \text{ расп./с.}$  Однако наиболее употребительной является внесистемная единица Кюри:  $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ расп./с.}$

Среднее число распадов в единицу времени, отнесенное к единице массы или объема вещества, называется *удельной активностью*.

Удельная активность может быть выражена различными единицами измерений: Бк/мл, Бк/г, Бк/см<sup>3</sup>, Бк/л, Ки/кг и т.д. Именно активность образца является той величиной, которая непосредственно может быть измерена экспериментально. Очевидно, что активность  $A$  убывает со временем также по экспоненциальному закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}.$$

## 11. ТЕПЛОЕМКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В 1907 г. Эйнштейн показал, что формула Планка для средней энергии осциллятора

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

непосредственно подтверждается тепловыми свойствами твердых тел. Из опыта известно, что при высоких температурах справедлив закон, называемый законом Дюлонга и Пти, который утверждает, что теплоемкость одного моля любого твердого вещества составляет примерно 6 кал/град. С классической точки зрения этот закон вполне понятен. В твердом теле каждый атом можно рассматривать как трехмерный гармонический осциллятор, поскольку, согласно нашим представлениям, атом удерживается в определенном положении равновесия некоторой квазиупругой силой. Поэтому по правилам классической статистики ему следует приписать в среднем полную энергию  $3kT$ , так что моль вещества будет обладать энергией  $U=3N_A kT=3RT$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная, равная приблизительно 2 кал/град. Отсюда легко найти теплоемкость как приращение энергии, соответствующее повышению температуры на 1 градус. Итак,

$$c_v = \frac{dU}{dT} = 3R \approx 6 \text{ кал/град.}$$

Однако на опыте наблюдаются отклонения от этого правила: чем тверже тело, т.е. чем крепче «привязаны» атомы к положению равновесия, тем заметнее эти отклонения. Так, например, для алмаза теплоемкость одного моля составляет при комнатной температуре всего лишь около 1 кал/град.

Эйнштейн объяснил эти отклонения тем обстоятельством, что в этом случае нельзя пользоваться классическим выражением для средней энергии: необходимо обратиться к формуле Планка для средней энергии квантового осциллятора. Тогда энергия одного моля вещества будет равна

$$U = \frac{3N_A h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = 3RT \frac{h\nu/kT}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

В этой формуле  $h\nu$  есть элементарный квант колебательной энергии осциллятора; он тем больше, чем прочнее удерживается атом в положении равновесия, так что слабая связь эквивалентна малой колебательной энергии, а стало быть, малой частоте. Важный вопрос состоит в том, какая из величин больше:  $h\nu$  или  $kT$ . Обычно при комнатных температурах  $h\nu/kT \ll 1$ , так что формулу для средней энергии можно упростить разложением в ряд. В этом случае она переходит в классическую формулу

$$U = 3RT \frac{h\nu/kT}{(1 + h\nu/kT + \dots) - 1} = 3RT + \dots$$

и, таким образом, приводит к закону Дюлонга и Пти.

При больших значениях температуры теплоемкость приближается к классическому пределу 6 кал/град, а при малых температурах убывает, обращаясь в нуль при  $T=0$ . Экспериментальные исследования, имеющие целью проверку предсказаний теории и проведенные в основном Нерстом и его сотрудниками, показали, что имеет место приблизительное согласие между экспериментом и теорией, особенно в связи с тем фактом, что теплоемкость

стремится к нулю по мере приближения к нулю температуры. Тем не менее были обнаружены и расхождения, свидетельствующие о том, что теория в той форме, в какой она тогда существовала, нуждалась еще в некоторых уточнениях.

Эти уточнения были сделаны Дебаем и независимо Борном и Карманом (1912 г.). Они основываются на следующих соображениях. До сих пор мы считали, что каждый отдельно взятый атом в твердом теле совершает гармонические колебания совершенно независимо от других атомов. Однако на самом деле это вовсе не так, поскольку атомы кристаллической решетки, вне сомнения, очень сильно связаны друг с другом. Поэтому не следует думать, что  $N_A$  атомов кристалла колеблются с одинаковой частотой. Скорее необходимо рассматривать связанную систему  $3N_A$  различных колебаний (соответственно  $3N_A$  степеням свободы  $N_A$  атомов, находящихся в одном моле). Энергия системы поэтому будет иметь вид

$$U = \sum_{r=1}^{3N_A} \frac{h\nu_r}{e^{h\nu_r/kT} - 1},$$

где  $\nu_r$  – частота  $r$ -го колебания.

Непосредственное вычисление этой суммы на основе какой-либо конкретной модели задача довольно не простая. Дебаем была получена приближенная формула для атомов одного сорта. Он рассматривал нормальные колебания атомов кристаллической решетки как колебания кристалла в целом и получил для энергии выражение

$$U = 3RT \frac{x_m}{x_m^3} \int_0^{x_m} \frac{x^3 dx}{e^x - 1},$$

где  $x_m = h\nu_m / kT = \theta / T$ , причем  $\theta = h\nu_m / k$  называется дебаевской характеристической температурой.  $\nu_m$  – это максимально возможная частота. Эта формула дает более точное приближение к действительности, чем эйнштейновская модель.

## 12. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ

Распределение свободных электронов в металле по энергиям при  $T=0$ :

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon,$$

где  $dn(\varepsilon)$  – концентрация электронов, энергия которых заключена в пределах от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ ;  $m$ -масса электрона.

Это выражение справедливо при  $\varepsilon < \varepsilon_F$  (где  $\varepsilon_F$  – энергия или уровень Ферми).

Энергия Ферми в металле при  $T = 0$ :

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3n\pi^2)^{2/3},$$

где  $n$  – концентрация электронов в металле.



## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

### Примеры решения задач

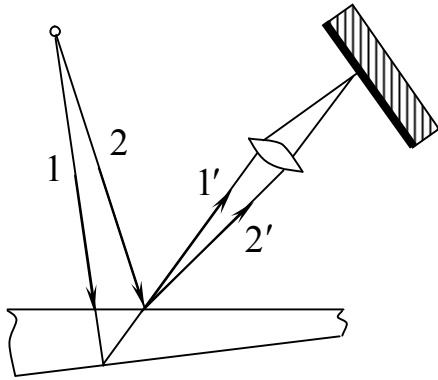


Рис. 24

ПРИМЕР 1. На стеклянный клин с малым углом нормально к его грани падает параллельный пучок лучей монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 0,6$  мкм (Рис. 24). Число  $m$  возникающих при этом интерференционных полос, проходящих на отрезок клина длиной  $l$ , равно 10. Определить угол  $\alpha$  клина.

РЕШЕНИЕ. Параллельный пучок света, падая нормально на грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти отраженные пучки света когерентны. Поэтому на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы. Так как угол клина мал, то отраженные пучки 1 и 2 света (рис. 25) будут практически параллельны.

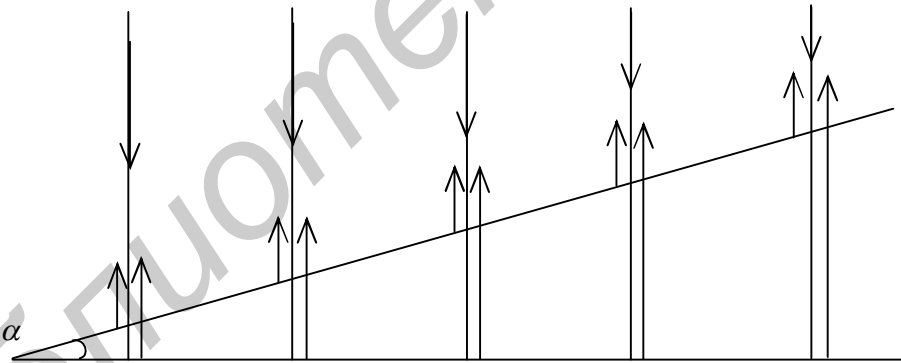


Рис.25

Темные полосы видны на тех участках клина, для которых разность хода лучей кратна нечетному числу половин длин волн:

$$\Delta = (2k + 1)\lambda / 2 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots) \quad (5.1)$$

Разность хода двух волн ( $2dn \cos \varepsilon_2'$ ) и половины длины волны ( $\lambda / 2$ ). Величина  $\lambda / 2$  представляет собой разность хода, возникающую при отражении световой волны 1 от оптически более плотной среды. Подставляя в формулу (5.1) разность хода  $\Delta$  световых волн, получаем

$$2dn \cos \varepsilon_2' + \lambda / 2 = (2k + 1)\lambda / 2,$$

где  $n$  – показатель преломления стекла ( $n = 1,5$ );

$d_k$  – толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру  $k$ ;

$\varepsilon_2'$  – угол преломления.

Согласно условию, угол падения равен нулю; следовательно, и угол преломления  $\varepsilon_2'$  равен нулю, а  $\cos \varepsilon_2' = 1$ . Раскрыв скобки в последнем равенстве, после упрощения получим

$$2d_k n = k\lambda.$$

Пусть произвольной темной полосе  $k$ -го номера соответствует толщина  $d_k$  клина, а темной полосе  $k+m$ -го номера – толщина  $d_{k+m}$  клина. Тогда, учитывая, что  $m$  полос укладывается на расстоянии  $l$  найдем:

$$\sin \alpha = (d_{k+m} - d_k) / l \quad (5.2)$$

Выразим из (5.2)  $d_k$  и  $d_{k+m}$  и подставим их в формулу. Затем, учитывая, что  $\sin \alpha = \alpha$  (из-за малости угла  $\alpha$ ), получим

$$\alpha = \frac{(k+m)\lambda - k\lambda}{2nl} = \frac{m\lambda}{2nl}.$$

Подставляя значения физических величин, найдем

$$\alpha = \frac{10 \cdot 0,6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1,5 \cdot 1} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 41,2''$$

**ПРИМЕР 2.** Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга = 1 мм; расстояние от щелей до экрана  $l = 2,5$  м. Щели освещаются монохроматическим источником света ( $\lambda = 500$  нм). Чему равно расстояние между темными интерференционными полосами на экране?

**РЕШЕНИЕ.** Как видно из рис. 26, разность хода двух лучей, сходящихся в точке на экране, можно определить из следующих соотношений;

$$\frac{h}{l} = \frac{\Delta}{d \cos \alpha}; \quad \Delta = \frac{hd}{l} \cos \alpha.$$

Так как угол мал, то  $\cos \alpha = 1$ . Тогда приближенно, для разности хода интерферирующих лучей можно записать

$$\Delta = (h/l)d.$$

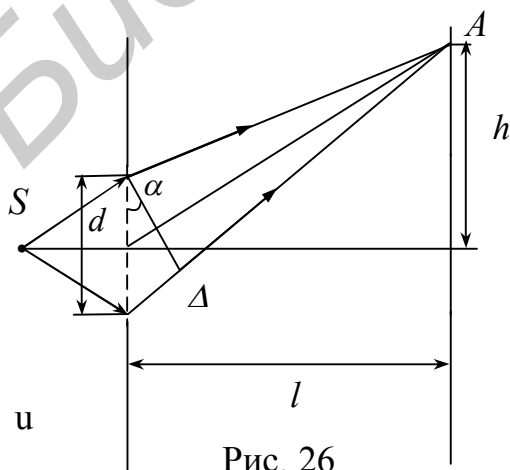


Рис. 26

Темные интерференционные полосы возникнут на экране, если разность хода  $\Delta = (2K + 1)\lambda / 2$ . Тогда

$$(h/l) \cdot d = (2K + 1)\lambda / 2$$

или

$$h = \frac{l}{d} (2K + 1)\lambda / 2. \quad (5.3)$$

Расстояние между двумя прямыми интерференционными полосами на экране:

$$\Delta h = \frac{l}{d} \{ [2(k+1) + 1 - (2K+1)] \} \frac{\lambda}{2} = \frac{l}{d} \lambda \quad (5.4)$$

Подставляя числовые данные, получим

$$\Delta h \approx \frac{2,5}{10^{-3}} 5000 \cdot 10^{-10} = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,25 \text{ мм}.$$

ПРИМЕР 3. На мыльную пленку ( $n = 1,33$ ) под углом  $\alpha = 35^\circ$  падает пучок лучей белого цвета. Толщина пленки  $d = 0,104 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . Какой цвет имеет пленка в отраженном свете?

РЕШЕНИЕ. Пленку можно представить как плоскопараллельную пластинку. Разность хода между лучами, отраженными от плоскопараллельной пластинки толщиной  $d$ , равна

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.$$

Эффективная разность хода:

$$\Delta_I = \Delta - \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}$$

Цвет пленки будет определяться отраженными лучами. Максимальную интенсивность имеет луч, для которого  $\Delta_I = 2K \cdot \frac{\lambda}{2}$ . Тогда условие усиления света примет вид

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = 2K \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

При  $K = 0$  будем иметь

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \frac{\lambda}{2}$$

или

$$\lambda = 4d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (5.5)$$

Подставим числовые значения в формулу

$$\lambda = 4 \cdot 0,104 \cdot 10^{-6} \sqrt{(1,33)^2 - 10,537^2} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 500 \text{ Нм}.$$

В отраженном свете пленка будет иметь зеленый цвет, так как вследствие интерференции в отраженном свете будет преобладать длина волна  $\lambda = 546 \text{ Нм}$ .

ПРИМЕР 4. На ирисовую диафрагму с переменным радиусом отверстия  $R$ , расположенную на расстоянии  $L$  от экрана, падает свет с длиной волны  $\lambda$ . Диафрагму постепенно открывают, начиная с  $R = 0$ . При каком радиусе  $R$  интенсивность света в центре экрана впервые обратится в нуль?

РЕШЕНИЕ. Интенсивность света в центре экрана станет равной нулю, когда радиус диафрагмы совпадает с радиусом второй зоны Френеля. Известно, что число открытых зон Френеля определяется выражением

$$m = \frac{R^2}{\lambda} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (5.6)$$

где  $a$  – расстояние от источника света до диафрагмы;

$b$  – расстояние от диафрагмы до экрана.

Так как фронт падающей волны плоский, то  $a \rightarrow \infty$ , тогда формулу (5.6) можно записать в виде

$$m = R^2 / (\lambda b),$$

Откуда

$$R = \sqrt{m\lambda b}. \quad (5.7)$$

Так как  $m = 2$ , то окончательно получаем, что интенсивность света в центре экрана впервые обратится в нуль при

$$R = \sqrt{2\lambda b}. \quad (5.8)$$

ПРИМЕР 5. Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом  $d = 2,20$  мкм, если угол между максимумами первого и второго порядков спектра  $\Delta\varphi = 15^\circ$ .

РЕШЕНИЕ: Пусть  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы дифракции, соответствующие максимумам первого  $K = 1$  и второго  $K = 2$  порядков. По условию

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (5.9)$$

Из формулы, определяющей условие максимумов для дифракционной решетки, следует, что

$$d \sin \varphi_2 = 2\lambda, \quad (5.10)$$

$$d \sin \varphi_1 = \lambda. \quad (5.11)$$

Система уравнений содержит три неизвестных:  $\varphi_1, \varphi_2, \lambda$ . Разделив почленно (5.10) на (5.11), получим  $\sin \varphi_2 = 2 \sin \varphi_1$  или, учитывая (5.9), найдем

$$\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) = 2 \sin \varphi_1 \quad (5.12)$$

Решив это тригонометрическое уравнение относительно  $\sin \varphi_1$ , найдем

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}} \quad (5.13)$$

Теперь из (5.12) с учетом (5.13) определим искомую величину:

$$\lambda = \frac{d \sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}}$$

Подставив в формулу числовые значения величин  $\sin \Delta\varphi = 0,259$ ,  $\cos \Delta\varphi = 0,966$ , получим  $\lambda = 0,54$  мкм.

ПРИМЕР 6. При каком минимальном числе штрихов дифракционной решетки с периодом  $d = 2,9$  мкм можно разрешить компоненты дублета желтой линии натрия ( $\lambda_1 = 589$  нм и  $\lambda_2 = 589,6$  нм)?

РЕШЕНИЕ. Число штрихов  $N$  решетки связано с ее разрешающей силой  $R$  и порядком спектра  $K$  соотношением, откуда следует  $N = R / K$ . Минимальному значению  $N_{min}$  соответствует минимальное значение  $R_{min}$  и максимальное число  $K_{max}$ , т.е.

$$N_{min} = R_{min} / K_{max} \quad (5.14)$$

Минимальная разрешающая сила решетки  $R_{min}$ , необходимая для разрешения дублета (двух составляющих) желтой линии натрия, выражается через величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  по формуле

$$R_{min} = \lambda_1 / (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Число  $K_{max}$  найдем из формулы для дифракционной решетки, если положим в ней  $\sin \varphi = 1$  и  $\lambda_1 = \lambda_2$  (последнее соотношение гарантирует, что обе компоненты дублета с порядковым номером  $K_{max}$  будут видны). Учитывая при этом, что  $K$  - целое число, и введя функцию  $E(x)$  - целую часть числа  $x^*$  получим

$$K_{max} = E\left(\frac{d}{\lambda_2}\right) = E\left(\frac{2,9 \cdot 10^4 \overset{o}{A}}{5896 \overset{o}{A}}\right) = E(4,9) = 4.$$

Подставив значения  $R_{min}$  и  $K_{max}$  в соотношение (5.14), найдем

$$N_{min} = \frac{\lambda_1}{4(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{5890}{4 \cdot 6} = 250 \text{ штрихов.}$$

ПРИМЕР 7. На пути частично поляризованного пучка света поместили никель. При повороте николя на угол  $\varphi = 60^\circ$  из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в  $\beta = 3,0$  раза. Найти степень поляризации падающего света.

РЕШЕНИЕ. Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь плоскополяризованного и естественного света. Николь всегда пропускает половину падающего на него естественного света (превращая его в плоскополяризованный). Степень поляризации света, падающего на николь, зависит, согласно закону Малюса  $I = I_0 \cos^2 \varphi$ , от взаимной ориентации главных плоскостей поляризатора и анализатора. Поэтому полная интенсивность света, прошедшего через николь,

$$\lambda_1 \quad I = 0,5I_n + I_p \cos^2 \varphi$$

где  $I_n, I_p$  - интенсивности естественной и поляризованной составляющих света, падающего на николь.

Чтобы воспользоваться формулой Малюса, заметим, что входящие в нее

величины согласно формуле равны:

$$I_{max} = 0,5I_n + I_p,$$

$$I_{min} = 0,5I_n.$$

По условию  $I_{max} = b \cdot I$  или согласно формулам

$$I_{max} = b \cdot [I_{min} + (I_{max} - I_{min}) \cos^2 \varphi].$$

Уравнение содержит два неизвестных:  $I_{max}, I_{min}$ . Достаточно найти их отношение  $\alpha = I_{max} / I_{min}$ , чтобы определить степень поляризации:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (5.15)$$

которую можно выразить также через величину  $\alpha$  :

$$P = (1 - \alpha) / (1 + \alpha) \quad (5.16)$$

Разделив обе части уравнения (5.15) на  $I_{max}$ , получим

$$1 = b [\alpha + (1 - \alpha) \cos^2 \varphi].$$

Выразив отсюда  $\alpha$  и подставив в (5.16), получим ответ:

$$P = \frac{b - 1}{1 + b(1 - 2 \cos^2 \varphi)} = 0,8.$$

**ПРИМЕР 8.** Два николя  $N_1$  и  $N_2$  расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет  $\alpha = 60^\circ$ . Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность  $I_0$  естественного света: 1) при прохождении через один николю  $N_1$ ; 2) при прохождении через оба николя. Коэффициент поглощения света в николе  $k = 0,05$ .

**РЕШЕНИЕ 1.** Естественный свет, падая на грань призмы Николя (рис.27), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок света ( $o$ ) вследствие полного отражения от границы  $AB$  отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок ( $e$ ) проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через первую призму,

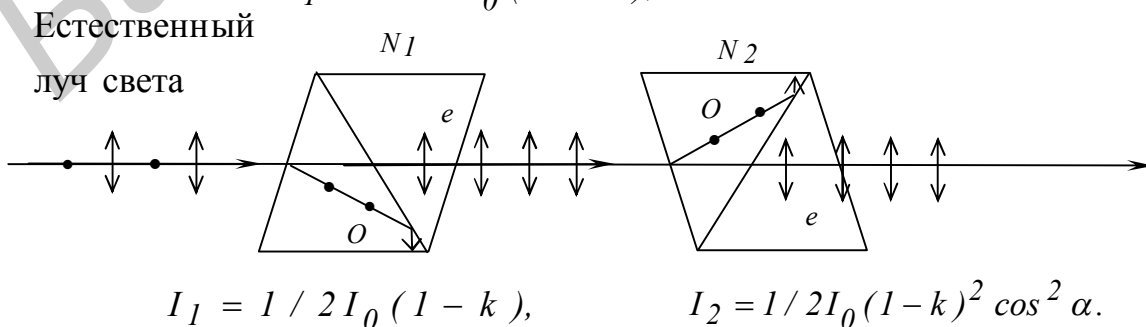


Рис. 27

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность  $I_0$  естественного света, падающего на первый николю, на интенсивность  $I_1$  поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_i} = \frac{2I_0}{I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k}. \quad (5.17)$$

Произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_i} = \frac{2}{1-0,05} = 2,1$$

Таким образом, интенсивность уменьшается в 2,1 раза.

2. Плоскополяризованный пучок света интенсивности  $I_1$  падает на второй николю  $N_2$  и также расщепляется на два пучка различной интенсивности: обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный пучок полностью поглощается призмой, поэтому его интенсивность нас не интересует. Интенсивность  $I_2$  необыкновенного пучка, вышедшего из призмы  $N_2$ , определяется законом Малюса (без учета поглощения света во втором николе):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке и плоскостью пропускания николя  $N_2$ .

Учитывая потери интенсивности на поглощение во втором николе, получаем

$$I_2 = I_1(1-k) \cos^2 \alpha.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность  $I_0$  естественного света на интенсивность  $I_2$  света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k) \cos^2 \alpha}.$$

Заменяя отношение  $I_0/I_1$  его выражением по формуле (5.17), получаем

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2 \cos^2 \alpha}. \quad (5.18)$$

Произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-0,05)^2 \cos^2 60^\circ} = 8,86.$$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

**ПРИМЕР 9.** Плоскополяризованный монохроматический пучок света падает на поляририд и полностью им гасится. Когда на пути пучка поместили кварцевую

пластину, интенсивность  $I$  пучка света после поляроида стала равна половине интенсивности пучка, падающего на поляризатор. Определить минимальную толщину кварцевой пластины. Поглощением и отражением света поляризатором пренебречь, постоянную вращения  $\alpha$  кварца принять равной  $48,9$  град/мм.

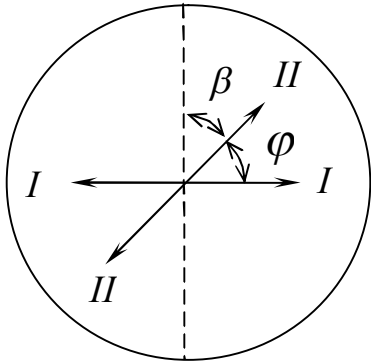


Рис.28

**РЕШЕНИЕ.** Полное гашение света поляризатором означает, что плоскость пропускания поляризатора (штриховая линия на рис.28) перпендикулярна плоскости колебаний (I—I) плоскополяризованного света, падающего на него. Введение кварцевой пластины приводит к повороту плоскости колебаний света на угол

$$\varphi = \alpha l, \quad (5.19)$$

где  $l$  – толщина пластины.

Зная, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении его через поляризатор, определим угол  $\beta$ , который установится между плоскостью пропускания поляризатора и новым направлением (II — II) плоскости колебаний падающего на поляризатор плоскополяризованного света. Для этого воспользуемся законом Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \beta.$$

Заметив, что  $\beta = \pi/2 - \varphi$ , можно написать

$$I = I_0 \cos^2 (\pi/2 - \varphi), \text{ или } I = I_0 \sin^2 \varphi. \quad (5.20)$$

Из равенства (5.20) с учетом (5.19) получим:

$$al = \arcsin \sqrt{I/I_0},$$

откуда искомая толщина пластины

$$l = (1/\alpha) \arcsin \sqrt{I/I_0}. \quad (5.21)$$

Произведем вычисления во внесистемных единицах:

$$l = \frac{1}{48,9} \arcsin \sqrt{1/2} \text{ мм} = \frac{0,785}{48,9} = 16 \text{ мкм}.$$

**ПРИМЕР 10.** На металлическую пластинку падает монохроматический свет ( $\lambda = 0,413$  мкм). Поток фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, полностью задерживается, когда разность потенциалов тормозящего электрического поля достигает  $u = 1,00$  В. Определить работу выхода в электронвольтах и красную границу фотоэффекта.

**РЕШЕНИЕ.** Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = hc/\lambda = A + T,$$

где  $A$  – работа выхода;

$T$  – кинетическая энергия электрона.



Так как даже самые быстрые электроны задерживаются электрическим полем, пролетев в нем расстояние, соответствующее разности потенциалов  $U$ , то их начальная кинетическая энергия  $T$  связана с величиной  $U$  соотношением

$$T = eU.$$

Следовательно,

$$hc/\lambda = A + eU.$$

Отсюда найдем работу выхода:

$$A = hc/\lambda - eU = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,0 \text{ эВ}.$$

Красной (длинноволновой) границей фотоэффекта  $\lambda_{кр}$  в уравнении Эйнштейна соответствует  $T = 0$ . Поэтому, полагая,  $\lambda = \lambda_{кр}$  получим

$$\lambda_{кр} = hc/A = 0,62 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,62 \text{ мкм}.$$

**ПРИМЕР 11.** Солнечная постоянная  $C$   $1,4$  кДж/м<sup>2</sup>с. Принимая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, вычислить температуру его поверхности, а также длину волны, на которую приходится максимум солнечного излучения. Расстояние от Земли до центра Солнца равно  $l = 1,49 \cdot 10^{11}$  м, радиус Солнца  $R = 6,95 \cdot 10^8$  м.

**РЕШЕНИЕ.** Световой поток, излучаемый Солнцем,

$$\Phi = C \cdot 4\pi l^2.$$

Излучательная способность единицы поверхности Солнца:

$$R = \frac{\Phi}{4\pi R^2} = C \left(\frac{l}{R}\right)^2. \quad (5.22)$$

По закону Стефана-Больцмана

$$K = \sigma T^4. \quad (5.23)$$

Тогда

$$\sigma T^4 = C \left(\frac{l}{R}\right)^2. \quad (5.24)$$

Откуда

$$T = \sqrt[4]{\frac{C}{\sigma} \left(\frac{l}{R}\right)^2}. \quad (5.25)$$

Произведем вычисления:

$$T = \sqrt[4]{\frac{1,4 \cdot 10^3}{5,67 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{1,49 \cdot 10^{11}}{6,95 \cdot 10^8}\right)^2} \approx 5760 \text{ К}.$$

Длину волны, на которую приходится максимум солнечного излучения, найдем на основе закона смещения Вина:

$$\lambda_{max} = \frac{0,2884}{5760} = 4,94 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 4940 \text{ \AA}.$$

**ПРИМЕР 12.** Длина волны, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения черного тела,  $\lambda_0 = 0,58$  мкм. Определить энергетическую светимость (излучательность)  $R_e$  поверхности тела.

РЕШЕНИЕ. Энергетическая светимость  $R_e$  абсолютно черного тела в соответствии с законом Стефана – Больцмана пропорциональна четвертой степени термодинамической температуры и выражается формулой

$$R_e = \sigma T^4 \quad (5.26)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана — Больцмана;  
 $T$  – термодинамическая температура.

Температуру  $T$  можно вычислить с помощью закона смещения Вина:

$$\lambda_0 = b | T \quad (5.27)$$

где  $b$  — постоянная закона смещения Вина.

Используя формулы (5.27) и (5.26), получаем

$$R_e = \sigma (b / \lambda_0)^4. \quad (5.28)$$

Произведем вычисления:

$$R_e = 5,67 \cdot 10^{-8} \left( \frac{2,90 \cdot 10^{-3}}{5,8 \cdot 10^{-7}} \right) \text{Вт/м}^2 = 3,54 \cdot 10^7 \text{Вт/м}^2 = 35,4 \text{ МВт/м}^2.$$

ПРИМЕР 13. Определить максимальную скорость  $v_{max}$  фотоэлектронов, вырывааемых с поверхности серебра:

1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны  $\lambda_1 = 0,155$  мкм; 2)  $\gamma$ -излучением с длиной волны  $\lambda_2 = 1$  пм.

РЕШЕНИЕ. Максимальную скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + T_{max},$$

где  $\varepsilon$  – энергия фотонов, падающих на поверхность металла;

$A$  – работа выхода;

$T_{max}$  – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Энергия фотона вычисляется также по формуле

$$\varepsilon = hc / \lambda,$$

где  $h$  - постоянная Планка;

$c$  - скорость света в вакууме;

$\lambda$  - длина волны.

Кинетическая энергия электрона может быть выражена или по классической формуле

$$T = m_0 v^2 / 2, \quad (5.29)$$

или по релятивистской формуле

$$T = E_0 (1 / \sqrt{1 - \beta^2} - 1) \quad (5.30)$$

в зависимости от того, какая скорость сообщается фотоэлектрону. Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия  $e$  фотона много меньше энергии покоя  $E_0$  электрона, то может быть применена формула (5.29), если же  $e$  сравнима по величине с  $E_0$ , то вычисление по этой формуле приводит к ошибке, поэтому нужно пользоваться формулой (5.29).

1. Вычислим энергию фотона ультрафиолетового излучения:

$$\varepsilon_1 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,55 \cdot 10^{-7}} \text{ Дж} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

или

$$\varepsilon_1 = \frac{1,28 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} = 8 \text{ эВ.}$$

Полученная энергия фотона (8 эВ) много меньше энергии покоя электрона (0,51 МэВ). Следовательно, для данного случая кинетическая энергия фотоэлектрона в формуле ( ) может быть выражена по классической формуле ( ):

$$\varepsilon_1 = A + m_0 v_{max}^2 / 2,$$

откуда

$$U_{max} = \sqrt{2(\varepsilon_1 - A) / m_0} \quad (5.31)$$

Найденная единица является единицей скорости.

Подставив значения величин в формулу (5.30), найдем

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2(1,28 \cdot 10^{-18} - 0,75 \cdot 10^{-18})}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

2. Вычислим энергию фотона –  $\gamma$ -излучения:

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-12}} \text{ Дж} = 1,99 \cdot 10^{-13} \text{ Дж,}$$

или во внесистемных единицах

$$\varepsilon_2 = \frac{1,99 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} = 1,24 \cdot 10^6 \text{ эВ} = 1,24 \text{ МэВ.}$$

Работа выхода электрона ( $A = 4,7 \text{ эВ}$ ) пренебрежимо мала по сравнению с энергией фотона ( $\varepsilon_2 = 1,24 \text{ МэВ}$ ), поэтому можно принять, что максимальная кинетическая энергия электрона равна энергии фотона:  $T_{max} = \varepsilon_2 = 1,24 \text{ МэВ}$ . Так как в данном случае кинетическая энергия электрона больше его энергии покоя, то для вычисления скорости электрона следует взять релятивистскую формулу кинетической энергии (5.30). Из этой формулы найдем

$$\beta = \sqrt{(2E_0 + T)T} / (E_0 + T).$$

Заметив, что  $v = c \beta$  и  $T_{max} = \varepsilon_2$ , получим

$$v_{max} = c \sqrt{(2E_0 + \varepsilon_2)\varepsilon_2} / (E_0 + \varepsilon_2).$$

Произведем вычисления\*:

$$v_{max} = 3 \cdot 10^8 \frac{\sqrt{(2 \cdot 0,51 + 1,24) \cdot 1,24}}{0,51 + 1,24} \text{ м/с} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

ПРИМЕР 14. Определить импульс  $p$  и кинетическую энергию  $T$  электрона, движущегося со скоростью  $v = 0,9c$ , где  $c$  – скорость света в вакууме.

РЕШЕНИЕ. Импульсом частицы называется произведение массы частицы на ее скорость:

$$p = mv$$

Так как скорость электрона близка к скорости света, то необходимо учесть зависимость массы от скорости, определяемую по формуле

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2},$$

где  $m$  - масса движущейся частицы;

$m_0$  — масса покоящейся частицы;

$\beta = v/c$  - скорость частицы, выраженная в долях скорости света.

Выражение для релятивистского импульса:

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \beta c = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \beta c$$

Произведем вычисления:  $p = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{\sqrt{1 - 0,81}} 0,9 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг м/с}.$

В релятивистской механике кинетическая энергия  $T$  частицы определяется как разность между полной энергией  $E$  и энергией покоя  $E_0$  этой частицы, т. е.  $T = E - E_0$ .

Так как  $E = mc^2$  и  $E_0 = m_0c^2$ , то, учитывая зависимость массы от скорости, получаем

$$T = m_0c^2 / \sqrt{1 - \beta^2} - m_0c^2,$$

или

$$T = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (5.32)$$

Произведем вычисления:

$$\begin{aligned} T &= 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 0,81}} - 1 \right) \text{ Дж} = \\ &= 8,8 \cdot 10^{-14} \cdot (2,291 - 1) \text{ Дж} = 1,06 \cdot 10^{-13} \end{aligned}$$

Так как во внесистемных единицах  $m_0c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$ , то вычисления упрощаются:

$$T = 0,51 - 1,29 \text{ МэВ} = 0,66 \text{ МэВ}.$$

Таблица вариантов задач к контрольной работе № 5

Вариант	Номера задач							
	501	511	521	531	541	551	561	571
0	501	511	521	531	541	551	561	571
1	502	512	522	532	542	552	562	572
2	503	513	523	533	543	553	563	573
3	504	514	524	534	544	554	564	574
4	505	515	525	535	545	555	565	575
5	506	516	526	536	546	556	566	576
6	507	517	527	537	547	557	567	577
7	508	518	528	538	548	558	568	578
8	509	519	529	539	549	559	569	579
9	510	520	530	540	550	560	570	580

501. Найти все длины волн видимого света (от 800 до 400  $\text{Нм}$ ), которые будут: 1) максимально усилены; 2) максимально ослаблены, если разность хода интерферирующих лучей равна 2,0 мкм.

502. Расстояние между двумя когерентными источниками света с длиной волны 600  $\text{Нм}$  составляет 0,12 мм. В средней части экрана расстояние между светлыми полосами равно 1 см. Определить расстояние от источника до экрана. Каким станет это расстояние, если расстояние между светлыми полосами уменьшится на 0,2 см.

503. Щели в опыте Юнга расположены на расстоянии 1 мм, а экран находится на расстоянии 3 м, при этом смежные максимумы интерференционной картины разделены расстоянием в 1,5 мм. Найти длину волны источника света.

504. В опыте Юнга расстояние между щелями 0,8 мм, а экран от щелей находится на расстоянии 2,5 м. Найти ширину интерференционной полосы. Как изменится ее ширина, если экран приблизить на 1 м?

505. Расстояние от щелей до экрана в опыте Юнга равно 2,1 м. На экране 10 темных интерференционных полос укладываются на отрезке 1,4 см. Найти расстояние между щелями при длине волн  $\lambda_1 = 700 \text{ Нм}$  и  $\lambda_2 = 550 \text{ Нм}$ . Начертить оптическую схему.

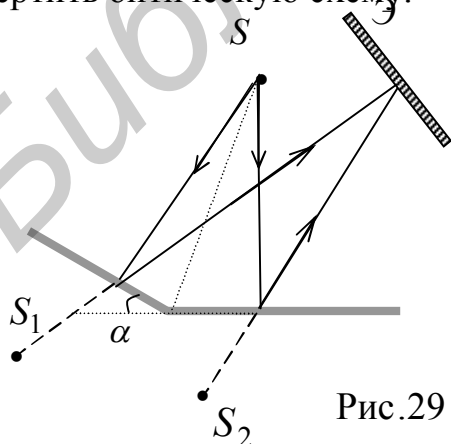


Рис.29

506. В опыте с зеркалами Френеля (рис. 29) расстояние между мнимыми изображениями источника света 0,5 мм, расстояние от них до экрана 3 м. Найти расстояние между двумя смежными интерференционными максимумами при длине волны 600  $\text{Нм}$ .

507. Угол между зеркалами Френеля (см. рис. 29)  $\alpha = 12'$ , расстояние от источника  $S$  до зеркала  $r = 10$  см, а от линии пересечения зеркала до экрана  $1,3$  м. Найти ширину интерференционной полосы и число возможных максимумов при длине волны света  $550$  Нм.

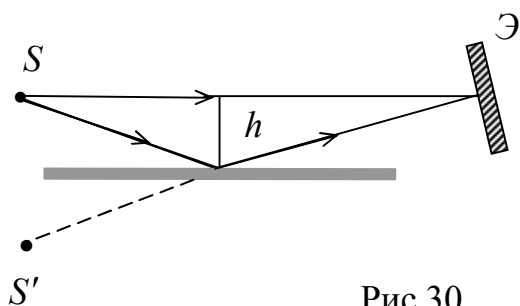


Рис.30

508. В опыте Ллойда (рис. 30) расстояние от источника до экрана  $l = 1$  м. При некотором положении источника относительно экрана ширина интерференционной полосы на экране  $\Delta x_1 = 0,3$  мм. После того, как источник отодвинули от зеркала на  $\Delta h = 0,6$  мм, ширина полос стала  $\Delta x_2 = 0,2$  мм. Найти длину волны света. Начертить оптическую схему.

509. В опыте Ллойда (рис. 30) источник света с длиной волны  $\lambda = 600$  Нм находится от зеркала на расстоянии  $h = 0,5$  мм, расстояние до экрана  $l = 2$  м (см. рис.30). Расстояния  $r_1$  и  $r_2$  одинаковы. Найти ширину интерференционной полосы. Начертить оптическую схему.

510. Расстояние от источника света до бипризмы Френеля с показателем преломления  $n = 1,5$  равно  $a = 25$  см, а от бипризмы до экрана –  $1$  м. Преломляющий угол призмы  $\alpha = 20'$ , ширина интерференционной полосы  $\Delta x = 0,4$  Нм. Найти длину волны света.

511. На мыльную пленку ( $n = 1,3$ ) падает нормально пучок белого света. При какой толщине пленки она будет казаться в отраженном свете зеленой ( $\lambda = 550$  Нм)? Начертить оптическую схему.

512. На тонкую глицериновую пленку толщиной  $1,2$  мкм падает нормально белый свет. Определить длины волн видимого спектра ( $400 \leq \lambda \leq 800$  Нм), которые будут ослаблены в результате интерференции.

513. На тонкую пленку ( $n = 1,4$ ) нормально падает свет с длиной волны  $\lambda = 560$  Нм. Отраженный от нее свет максимально усилен вследствие интерференции. Найти минимальную толщину пленки.

514. Между пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой линзой с радиусом кривизны  $R = 0,5$  м находится жидкость. Найти показатель преломления жидкости, если радиус третьего темного кольца Ньютона в отраженном свете с длиной волны  $\lambda = 700$  Нм равен  $0,82$  мм.

515. На стеклянной пластинке лежит плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием  $F = 1$  м. Радиус пятого темного кольца Ньютона в отраженном свете  $r_5 = 1,1$  мм. Найти длину волны. Как изменится длина волны, если фокусное расстояние  $F$  уменьшится вдвое?

516. Для наблюдения колец Ньютона используется нормально падающий свет с длиной волны  $650$  Нм. Радиус кривизны линзы  $R = 10$  мм. Определить толщину воздушного промежутка в том месте, где наблюдается четвертое светлое кольцо в отраженном свете.

517. На тонкую пленку ( $n = 1,33$ ) падает белый свет под углом падения  $\alpha = 52^\circ$ . При какой толщине пленки отраженный свет будет окрашен в желтый цвет ( $\lambda = 600 \text{ Нм}$ )?

518. Между двумя плоскопараллельными пластинами находится проволока толщиной  $0,01 \text{ мм}$  на расстоянии  $10 \text{ см}$  от точки их соприкосновения, образуя воздушный клин. Найти ширину интерференционных полос в отраженном свете.

519. На стеклянный клин ( $n = 1,55$ ) с углом  $3 \cdot 10^{-4}$  радиан падает нормально пучок света с длиной волны  $\lambda$ . Число интерференционных полос, наблюдаемых в отраженном свете на отрезке клина длиной  $1 \text{ см}$ , равно  $15$ . Определить длину волны  $\lambda$ .

520. Параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda = 640 \text{ Нм}$  падает на стеклянный клин ( $n = 1,6$ ). На участке клина расстояние между двумя соседними темными интерференционными полосами в отраженном свете равно  $0,5 \text{ мм}$ . Найти угол  $\alpha$  между поверхностями клина.

521. На дифракционную решетку с периодом  $d = 5 \text{ мкм}$  под углом  $\alpha = 45^\circ$  падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 500 \text{ Нм}$ . Найти угол дифракции  $\varphi$ , соответствующий третьему главному максимуму. Начертить оптическую схему.

522. На экран со щелью, ширина которой  $0,06 \text{ мм}$ , падает нормально монохроматический свет с длиной волны  $700 \text{ Нм}$ . Найти угол отклонения лучей, соответствующий первому дифракционному максимуму. Каково будет угловое расстояние между максимумами второго порядка?

523. На щель шириной  $a = 0,15 \text{ мм}$  падает нормально монохроматический свет длиной волны  $\lambda = 550 \text{ Нм}$ . Линза, находящаяся прямо за щелью, проецирует на экран дифракционную картину. Определить ширину центрального максимума, угловое расстояние между максимумами третьего и четвертого порядка, если расстояние от линзы до экрана  $1,5 \text{ м}$ .

524. Какое наименьшее число штрихов должна иметь дифракционная решетка с периодом  $d = 5 \text{ мкм}$ , чтобы в спектре второго порядка были видны отдельно две линии натрия  $\lambda_1 = 589 \text{ Нм}$  и  $\lambda_2 = 589,6 \text{ Нм}$ ? Какова длина такой решетки?

525. Дифракционная решетка с периодом  $d = 5 \text{ мкм}$  имеет  $500$  штрихов. Найти разрешение спектральных линий в желтой области  $600 \text{ Нм}$ . Как изменится разрешение, если уменьшить период на  $\Delta d = 0,5 \text{ мкм}$ ?

526. На дифракционную решетку, содержащую  $100$  штрихов на  $1 \text{ мм}$ , падает нормально монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимумы второго порядка, угловое расстояние между которыми  $16^\circ$ . Найти длину волны падающего света. Как изменится угловое расстояние, если перейти на третий порядок?

527. На дифракционную решетку, имеющую  $600$  штрихов на  $1 \text{ мм}$ , падает белый свет ( $\lambda = 800 \dots 400 \text{ Нм}$ ). Спектр проецируется линзой, помещенной вблизи решетки, на экран. Расстояние от линзы до экрана  $1 \text{ м}$ . Найти длину спектра второго порядка.

528. На дифракционную решетку с постоянной  $d = 4$  мкм падает нормально свет с длиной волны  $500$  Нм. Линза, помещенная вблизи решетки, проецирует дифракционную картинку на экран. Найти расстояние между линзой и экраном, если максимумы первого порядка расположены на расстоянии  $\Delta x = 12$  см.

529. На дифракционную решетку нормально падает свет с длиной волны  $600$  Нм. Линза проецирует дифракционную картинку на экран, удаленный от линзы на  $1$  м. Расстояние между максимумами первого порядка на экране  $\Delta x = 20,2$  см. Определить постоянную решетки; сколько максимумов дает дифракционная решетка.

530. Постоянная дифракционной решетки  $d = 4$  мкм. На решетку нормально падает свет с длиной волны  $\lambda = 680$  Нм. Сколько максимумов дает эта решетка? Каков максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему максимуму?

531. Пластинку кварца толщиной  $d = 2,6$  мм поместили между двумя николями, в результате чего плоскость поляризации повернулась на угол  $\varphi = 50^\circ$ . Какой наименьшей толщины следует изготовить пластинки, чтобы поле зрения стало а) совершенно темным; б) максимально светлым.

532. Предельный угол полного внутреннего отражения на границе жидкость – воздух равен  $52^\circ$ . Найти угол падения луча на жидкость, при котором отраженный луч максимально поляризован.

533. Найти угол поворота  $\varphi$  плоскости поляризации при прохождении света длиной волны  $628$  Нм через слой толщиной в  $2,5$  см, если различие в показателях преломления для правого и левого лучей  $\Delta n = 10^{-6}$ .

534. В пластинке толщиной  $1$  мм, плоскость поляризации для света длиной волны  $471$  Нм поворачивается на угол  $21,72^\circ$ . Найти разность показателей преломления  $\Delta n$  кварца для лево- и правополяризованного света.

535. Частично поляризованный свет (степень поляризации составляет  $0,8$ ) падает на николю. Во сколько раз уменьшилась интенсивность прошедшего света при повороте николя на угол  $\alpha = 60^\circ$  из положения, соответствующего максимуму пропускания света?

536. Световой пучок проходит через два николя, плоскости пропускания которых образуют между собой угол  $40^\circ$ . Коэффициент поглощения каждого николя равен  $0,15$ . Найти, во сколько раз уменьшается интенсивность света после прохождения двух николей.

537. Естественный свет, проходя через систему двух николей с углом пропускания равным  $45^\circ$ , ослабляется в  $8$  раз. Пренебрегая потерей света при отражениях, определить коэффициент поглощения и пропускания николей.

538. Два поляроида расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет  $30^\circ$ . Найти, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении: а) через один поляроид; б) через два поляроида. При прохождении через каждый поляроид потери составляют  $10\%$  ( $K = 0,1$ ).

539. В сахариметре монохроматический свет линейной поляризации, проходя через кювету с  $30\%$  раствором сахара, поворачивается на угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ . Если на пути света поставить кювету вдвое короче с неизвестной концентрацией



сахара, то угол поворота составит  $\varphi_2 = 45^\circ$ . Найти концентрацию раствора сахара.

540. При прохождении света через сахариметр с длиной трубки  $l_1 = 26$  см и концентрацией сахара 40 % плоскость поляризации повернулась на  $\varphi_1 = 26$ . В растворе концентрацией 26 % с длиной кюветы  $l_2 = 13$  см поворот плоскости поляризации составил  $\varphi_2$ . Найти  $\varphi_2$ .

541. При прохождении света через трубку длиной 25 см с раствором сахара концентрации 15 % плоскость поляризации повернулась на угол  $10^\circ$ , в другой трубке длиной 15 см с раствором сахара плоскость поляризации повернулась на угол  $12,5^\circ$ . Определить концентрацию сахара во второй трубке.

542. Свет проходит через трубку длиной 20 см с раствором сахара концентрации 12 %, и плоскость поляризации при этом поворачивается на угол  $30^\circ$ . Найти угол поворота плоскости поляризации в трубке длиной 15 см с раствором сахара, концентрация которого составляет 8 %.

543. Пластинку кварца толщиной 0,15 поместили между двумя параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол  $53^\circ$ . Какой наименьшей толщины надо взять пластинку кварца, чтобы поле зрения поляриметра стало а) темным; б) светлым?

544. Пластинка кварца толщиной 1,2 мм вращает плоскость поляризации красного света ( $\lambda = 700$  Нм) на угол  $11^\circ$ . На какой угол повернет плоскость поляризации пластинка с толщиной 3,6 мм для света той же длины волны?

545. Пучок света падает на плоскопараллельную алмазную пластинку ( $n=1,55$ ), нижняя поверхность которой находится в воде. При каком угле падения свет отраженный от границы алмаз – вода, будет максимально поляризован? Как изменится этот угол на границе алмаз – глицерин?

546. Пучок света переходит из некоторой жидкости в стекло ( $n = 1,55$ ). Угол падения пучка равен  $\alpha = 60^\circ$ , угол преломления  $44^\circ$ . При каком угле падения пучок света, отраженный от границы раздела этих сред, будет максимально поляризован?

547. Два николя, плоскости пропускания которых образуют между собой угол  $50^\circ$ , а коэффициент поглощения каждого николя составляет 0,15. Определить, во сколько раз пучок света, последовательно проходя через эти николи, будет ослаблен, по сравнению с пучком, падающим на первый николю.

548. Естественный свет интенсивностью  $I_0$  падает на два николя, которые расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет  $45^\circ$ . Коэффициент поглощения в первом николе  $k_1 = 0,08$ , а во втором –  $k_2 = 0,1$  определить, во сколько раз уменьшится интенсивность  $I_0$  а) при прохождении через первый николю; б) при прохождении через оба николя. Потерями на отражение пренебречь.

549. Два поляроида имеют угол  $40^\circ$  между плоскостями пропускания. Естественный свет, проходя через такую систему, ослабляется в 6 раз. Пренебрегая потерями света при отражении, определить коэффициент поглощения света, который одинаков для обоих поляроидов.

550. Пучок света последовательно проходит через два николя, плоскости пропускания которых образуют между собой угол  $25^\circ$ . Коэффициент поглощения каждого николя равен 0,18. Найти, во сколько раз пучок, выходящий из первого и второго Николя, ослаблен по сравнению с пучком, падающим на первый николю.

551. На какую длину волны приходится максимум плотности энергии излучения абсолютно черного тела, имеющего температуру, равную температуре человеческого тела, т.е.  $t = 36^\circ \text{C}$ ? На сколько процентов изменится максимальная длина волны и плотность излучения, если температура больного человека будет  $41^\circ \text{C}$ ?

552. Из отверстия печи размером  $8 \text{ см}^2$  излучается за 1 секунду энергия в 24 Дж. Определить температуру печи, частоту и длину волны излучения, соответствующие максимальной температуре.

553. Мощность излучения абсолютно черного тела равна 10 кВт. Найти величину излучающей поверхности тела, если известно, что длина волны, на которую приходится максимум плотности энергии, равна  $7 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ .

554. Абсолютно черное тело находится при температуре  $T = 3900^\circ \text{K}$ . При остывании длина волны, на которую приходится максимум плотности энергии, изменилась на  $\Delta \lambda = 0,3 \text{ мкм}$ . До какой температуры  $T_2$  охладилось тело?

555. Мощность излучения абсолютно черного тела равна 34 кВт. Найти температуру этого тела, если известно, что его поверхность равна  $0,6 \text{ м}^2$ . Определить длину волны излучения  $\lambda_{\text{max}}$ .

556. Температура абсолютно черного тела равна  $2900 \text{ K}$ . При нагревании тела длина волны, на которую приходится максимум плотности излучения, изменилась на  $\Delta \lambda = 400 \text{ Нм}$ . До какой температуры нагрелось тело?

557. В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму плотности энергии, если источником света служит: 1) спираль электрической лампочки ( $T = 3000 \text{ K}$ ), 2) поверхность Солнца ( $T = 6000 \text{ K}$ ) и 3) атомная бомба, в которой в момент взрыва развивается температура около 10 млн град.

558. Найти, какое количество энергии с  $1 \text{ см}^2$  поверхности излучает абсолютно черное тело в 1 с, если известно, что максимальная плотность энергии приходится на длину волны в  $4840 \text{ \AA}$ . ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ ).

559. Плотность потока энергии излучения составляет  $4 \text{ Вт/см}^2$ . Найти температуру абсолютно черного тела, длину волны, на которую приходится максимум излучения.

560. Максимум излучения абсолютно черного тела соответствует  $\lambda_{\text{max}} = 580 \text{ Нм}$ . Найти температуру этого тела и плотность потока энергии излучения.

561. Металл с работой выхода  $A = 1,9$  эВ последовательно освещается светом с длиной волны  $\lambda_1 = 0,35$  мкм и  $\lambda_2 = 0,54$  мкм. Во сколько раз отличаются соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов?

562. Фототок, возникший в цепи при освещении вольфрамового катода светом с длиной волны  $\lambda = 2862$  Å, прекращается при включении разности потенциалов  $U = 2,1$  В. Найти работу выхода для вольфрама.

563. На фотоэлемент с катодом из лития падает свет с длиной волны  $\lambda = 200$  нм. Найти наименьшее значение задерживающей разности потенциалов  $U_{min}$ , которую нужно приложить к фотоэлементу, чтобы прекратить фототок.

564. На металлическую пластину направлен пучок ультрафиолетового излучения  $\lambda = 0,25$  мкм. Фототок прекращается при минимальной задерживающей разности потенциалов  $U = 96$  В. Определить работу выхода  $A$  электронов из металла и красную границу фотоэффекта.

565. На поверхность металла падает монохроматический свет с длиной волны,  $\lambda = 0,1$  мкм. Красная граница фотоэффекта  $\lambda_0 = 0,3$  мкм. Какая доля энергии фотона расходуется на сообщение электрону кинетической энергии?

566. На цинковую пластину направлен монохроматический пучок света. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов  $U = 1,5$  В. Определить длину волны  $\lambda$ -света, падающего на пластину, красную границу цинка.

567. Определить красную границу фотоэффекта для калия и серебра, работы выхода которых равны соответственно  $A_K = 2,2$  эВ и  $A_G = 4,7$  эВ. Пригодны ли эти металлы для использования их в фотоэлементе при облучении видимым светом?

568. На поверхность металла падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 0,1$  мкм. Красная граница фотоэффекта  $\lambda = 0,3$  мкм. Какая доля энергии фотона расходуется на сообщение электрону кинетической энергии?

569. На металлическую пластину направлен монохроматический пучок света с частотой  $\nu = 7,3 \cdot 10^{14}$  Гц. Красная граница  $\lambda_0$  фотоэффекта для данного материала равна 560 нм. Определить максимальную скорость  $V_{max}$  фотоэлектронов и работу выхода.

570. Какова должна быть длина волны  $\gamma$ -излучения, падающего на платиновую пластину, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была  $v_{max} = 2,9 \cdot 10^8$  м/с?

571. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов, вырванных с поверхности калия  $\gamma$ -квантами, равна 1,53 МэВ. Определить частоту  $\gamma$ -квантов.

572. Скорость фотоэлектронов при фотоэффекте составляет 0,98 скорости света. Найти длину волны падающего излучения.

573. Найти скорость фотоэлектронов, вырывающихся с поверхности металла излучением 1,65 пм.

574. Фотон с энергией 1,27 МэВ падает на металл Cu и вызывает фотоэффект. Найти скорость фотоэлектронов и  $\beta = V/C$ .

575. Фотон с энергией  $E=1,5$  МэВ рассеялся на свободном электро-не. Определить угол рассеяния  $\Theta$ , если энергия рассеянного фотона  $E'=0,9$  МэВ.

576. Наблюдаемое изменение длины волны фотона при рассеянии его на электронах в графите равно  $\Delta\lambda=1,72$  пм. Под каким углом произошло рассеяние?

577. Определить дополнительную энергию, которую надо сообщить электрону, чтобы дебройлевская длина волны уменьшилась от 0,2 до 0,1 мм.

578. Электрон имеет энергию  $T=1,02$  МэВ. Во сколько раз изменится дебройлевская длина волны, если кинетическую энергию уменьшить в 2 раза.

579. Протон обладает кинетической энергией 1 КэВ. Найти дополнительную энергию  $\Delta E$ , которую надо сообщить, чтобы длина волны де Бройля уменьшилась в 2 раза.

580. Электрон обладает энергией 1,02 МэВ. Во сколько раз и как уменьшится дебройлевская длина волны, если кинетическую энергию электрона увеличить в 2 раза?

Библиотека БГУИР

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6

### Примеры решения задач

**ПРИМЕР 1.** Электрон в атоме водорода перешел с четвертого энергетического уровня на второй. Определить энергию испущенного при этом фотона.

**РЕШЕНИЕ.** Для определения энергии фотона воспользуемся сериальной формулой для водородоподобных ионов:

$$1/\lambda = RZ^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2), \quad (6.1)$$

где  $\lambda$  - длина волны фотона;  $R$  - постоянная Ридберга;  $Z$  - заряд ядра в относительных единицах (при  $Z = 1$  формула переходит в сериальную формулу для водорода);

$n_1$  - номер орбиты, на которую перешел электрон;

$n_2$  - номер орбиты, с которой перешел электрон ( $n_1$  и  $n_2$  - главные квантовые числа).

Энергия фотона  $\varepsilon$  выражается формулой

$$\varepsilon = hc/\lambda.$$

Поэтому, умножив обе части равенства (1) на  $hc$ , получим выражение для энергии фотона:

$$\varepsilon = RhcZ^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2).$$

Так как  $Rhc$  есть энергия ионизации  $E_i$  атома водорода, то

$$\varepsilon = E_i Z^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2).$$

Вычисления выполним во внесистемных единицах:  $E_i = 13,6$  эВ;  $Z = 1$ ;  $n_1 = 2$ ;  $n_2 = 4$ :

$$\varepsilon = 13,6 \cdot 1^2 \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \text{ эВ} = 13,6 \cdot 3/16 \text{ эВ} = 2,55 \text{ эВ}.$$

**ПРИМЕР 2.** Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов  $0$ . Найти длину волны де Бройля электрона для двух случаев: 1)  $U_1 = 51$  В; 2)  $U_2 = 510$  кВ.

**РЕШЕНИЕ.** Длина волны де Бройля для частицы зависит от ее импульса  $p$  и определяется формулой

$$\lambda = h/p, \quad (6.2)$$

где  $h$  - постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия  $T$ . Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частицы).

В нерелятивистском случае

$$p = \sqrt{2m_0T}, \quad (6.3)$$

где  $m_0$  - масса покоя частицы. В релятивистском случае

$$p = \sqrt{(2E_0 + T)T}/c, \quad (6.4)$$

где  $E_0 = m_0c^2$  - энергия покоя частицы.

Формула (6.1) с учетом соотношений (6.2) и (6.3) запишется:  
в нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0T}}, \quad (6.5)$$

в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{(2E_0 + T)T} / c}. \quad (6.6)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов  $U_1 = 51$  В и  $U_2 = 510$  кВ, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим, какую из формул (6.4) или (6.5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U$ ,

$$T = eU.$$

В первом случае  $T_1 = eU = 51$  эВ =  $0,51 \cdot 10^{-4}$  МэВ, что много меньше энергии покоя электрона  $E_0 = m_0c^2 = 0,51$  МэВ. Следовательно, в этом случае можно применить формулу (4). Для упрощения расчетов заметим, что  $T_1 = 10^{-4} m_0c^2$ . Подставив это выражение в формулу (6.4), перепишем ее в виде

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 \cdot 10^{-4} \cdot m_0c^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \frac{h}{m_0c}.$$

Учитывая, что  $h/m_0c$  есть комptonовская длина волны  $\Lambda$ , получаем

$$\lambda_1 = 10^2 \cdot 2,43 / \sqrt{2} \text{ пм} = 171 \text{ пм}.$$

Так как  $\Lambda = 2,43$  пм, то  $\lambda_1 = 10^2 \cdot 2,43 / \sqrt{2} \text{ пм} = 171 \text{ пм}$ .

Во втором случае кинетическая энергия  $T_2 = eU_2 = 510$  кэВ =  $0,51$  МэВ, т.е. равна энергии покоя электрона. В этом случае необходимо применить релятивистскую формулу (6.5). Учитывая, что  $T_2 = 0,51 \text{ МэВ} = m_0c^2$ , по формуле (6.5) находим

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{(2m_0c^2 + m_0c^2)m_0c^2} / c} = \frac{h}{\sqrt{3}m_0c}$$

или

$$\lambda_2 = \Lambda / \sqrt{3}.$$

Подставим значение  $\Lambda$  и произведем вычисления:

$$\lambda_2 = 2,43 / \sqrt{3} \text{ пм} = 1,40 \text{ пм}.$$

**ПРИМЕР 3.** Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка  $T=10$  эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

РЕШЕНИЕ. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad (6.7)$$

где  $\Delta x$  – неопределенность координаты частицы (в данном случае электрона);

$\Delta p_x$  – неопределенность импульса частицы (электрона);

$\hbar$  – постоянная Планка.

Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры  $l$ , тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью

$$\Delta x = l / 2$$

Соотношение неопределенностей (6.7) можно записать в этом случае в виде

$$(l / 2) \Delta p_x \geq \hbar$$

откуда

$$l \geq 2\hbar / \Delta p_x \quad (6.8)$$

Физически разумная неопределенность импульса  $\Delta p_x$  о всяком случае не должна превышать значения самого импульса  $p_x$ , т. е.  $\Delta p_x \leq p_x$ . Импульс  $p_x$  связан с кинетической энергией  $T$  соотношением  $p_x = \sqrt{2mT}$ . Заменим  $\Delta p_x$  значением  $\sqrt{2mT}$  (такая замена не увеличит  $l$ ). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$l_{min} = 2\hbar / \sqrt{2mT} \quad (6.9)$$

Произведем вычисления:

$$l_{min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10} m = 1,24 \cdot 10^{-10} m = 124 \text{ нм.}$$

ПРИМЕР 4. Найти массу, импульс и энергию фотона с длиной волны 440 нм.

РЕШЕНИЕ. Масса фотона определяется по формуле  $m = \frac{h}{c\lambda}$ .

$$m = \frac{6,61 \cdot 10^{-34}}{3 \cdot 10^8 \cdot 440 \cdot 10^{-9}} = 5 \cdot 10^{-32} \text{ кг.}$$

Импульс фотона можно рассчитать по формуле  $p = \frac{h}{\lambda}$ :

$$p = \frac{6,61 \cdot 10^{-34}}{440 \cdot 10^{-9}} = 1,5 \cdot 10^{-27} \text{ н.с.}$$

Энергия фотона равна  $\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

$$\varepsilon = \frac{6,61 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{440 \cdot 10^{-9}} = 4,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,7 \text{ эВ}.$$

ПРИМЕР 5. Волновая функция  $\Psi(x) = \sqrt{2/l} \sin \frac{\pi}{l} x$  описывает основное состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном ящике шириной  $l$ . Вычислить вероятность нахождения частицы в малом интервале  $\Delta l = 0,01l$  в двух случаях: 1) (вблизи стенки) ( $0 \leq x \leq \Delta l$ ); 2) в средней части ящика ( $\frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2}$ ).

РЕШЕНИЕ. Вероятность того, что частица будет обнаружена в интервале  $dx$  (от  $x$  до  $x + dx$ ), пропорциональна этому интервалу и квадрату модуля волновой функции, описывающей данное состояние, и равна

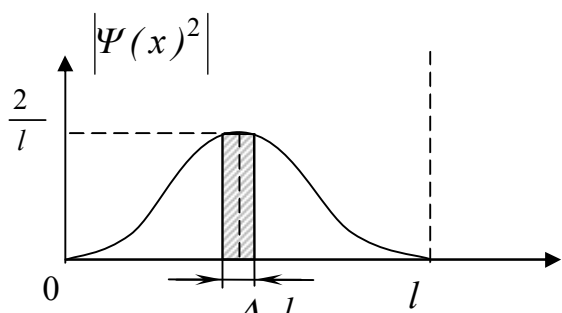


Рис.31

$$dw = |\Psi(x)|^2 dx.$$

В первом случае искомая вероятность найдется интегрированием в пределах от 0 до  $0,01 l$  (рис.31):

$$w = \frac{2}{l} \int_0^{0,01l} \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx.$$

Знак модуля опущен, так как  $\Psi$  – функция в данном случае не является комплексной.

Так как  $x$  изменяется в интервале  $0 \leq x \leq 0,01 l$ , следовательно,  $\pi x / l \leq 1$ , и справедливо приближенное равенство

$$\sin^2 \frac{\pi}{l} x \approx \left( \frac{\pi}{l} x \right)^2.$$

С учетом предыдущего выражения функция примет вид

$$w = \frac{2}{l} \int_0^{0,01l} \left( \frac{\pi}{l} x \right)^2 dx = \frac{2\pi^2}{l^3} \int_0^{0,01l} x^2 dx.$$

После интегрирования получим

$$w = \frac{2}{3} \pi^2 \cdot 10^{-6} = 6,6 \cdot 10^{-6}.$$

Во втором случае можно обойтись без интегрирования, так как квадрат модуля волновой функции вблизи ее максимума в заданном малом интервале ( $\Delta l = 0,01l$ ) практически не изменяется. Искомая вероятность во втором случае определяется выражением

$$w = \left| \Psi(l/2) \right|^2 \Delta l$$

или



$$w = \frac{2}{l} \left( \sin \frac{\pi l}{2} \right)^2 \Delta l = \frac{2}{l} \cdot 0,01l = 0,02.$$

ПРИМЕР 6. Какова максимальная энергия фононов в кристалле свинца, если характеристическая температура его  $\Theta = 94 \text{ K}$ .

РЕШЕНИЕ. По теории Дебая характеристическая температура  $\Theta = h\nu/k$ . Тогда энергия фонона  $h\nu = \Theta K$ ,

где  $K$  – постоянная Больцмана

$$h\nu = 94 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} = 127,7 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}$$

Так как  $1\text{эВ} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ , то  $h\nu = 8,1 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$ .

ПРИМЕР 7 Определить теплоту  $\Delta Q$ , необходимую для нагревания кристалла NaCl массой  $m = 20\text{г}$  от температуры  $T_1 = 2 \text{ K}$  до температуры  $T_2 = 4\text{K}$ . Характеристическую температуру Дебая  $\Theta_D$  для NaCl принять равной  $320 \text{ K}$  и условие  $T \ll \Theta_D$  считать выполненным.

РЕШЕНИЕ. Теплота  $\Delta Q$ , подводимая для нагревания тела от температуры  $T_1$  до  $T_2$ , может быть вычислена по формуле

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C_T dT, \quad (6.7)$$

где  $C_T$  – теплоемкость тела.

Теплоемкость тела связана с молярной теплоемкостью соотношением

$$C_T = m C_m / M, \quad (6.8)$$

где  $m$  – масса тела;

$M$  – молярная масса.

Подставив выражение  $C_T$  в формулу (1), получим

$$\Delta Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_m dT. \quad (6.9)$$

В общем случае теплоемкость  $C_m$  есть сложная функция температуры, поэтому выносить ее за знак интеграла нельзя. Однако если выполнено условие  $T \ll \Theta_D$ , то нахождение  $\Delta Q$  облегчается тем, что можно воспользоваться предельным законом Дебая, в согласии с которым теплоемкость пропорциональна кубу термодинамической температуры:

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left( \frac{T}{\Theta_D} \right)^3. \quad (6.10)$$

Подставляя молярную теплоемкость (6.10) в формулу (6.9), получим

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \int_{T_1}^{T_2} T^3 dT.$$

Выполним интегрирование:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \left( \frac{T_2^1}{4} - \frac{T_1^4}{4} \right).$$

Перепишав полученную формулу в виде

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \left( \frac{T_2^1}{4} - \frac{T_1^4}{4} \right),$$

произведем вычисления:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \frac{3 \cdot (3,14)}{5} \frac{2 \cdot 10^{-2}}{58,5 \cdot 10^{-3}} \frac{8,31}{(320)^2} (4^4 - 2^4) \text{ Дж} = \\ &= 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,22 \text{ мДж}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 8. Определить удельную энергию связи ядра  ${}^{17}_8\text{O}$

РЕШЕНИЕ. Удельную энергию связи ядра, разную отношению энергии связи  $\Delta W$  к массовому числу (числу нуклонов в ядре)  $A$ , найдем с помощью следующей формулы:

$$\frac{\Delta W}{A} = \frac{C^2 [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]}{A}$$

где  $Z$  – заряд ядра,

$m_p$  – масса протона,

$m_n$  – масса нейтрона,

$m_{\text{я}}$  – масса ядра.

Взяв из таблиц массу протона, нейтрона и ядра кислорода в атомных единицах массы и учитывая, что  $C^2 = 931 \text{ МэВ}$ , получим

$$\frac{\Delta W}{A} = \frac{931 [8 \cdot 1,00783 + (17 - 8)1,00867 - 16,99913]}{17} = 7,76 \text{ МэВ}$$

ПРИМЕР 9. 1 г радия за секунду излучает  $3,7 \cdot 10^{10}$   $\alpha$ -частиц. Чему равны постоянная радиоактивного распада и период полураспада?

РЕШЕНИЕ. В одном грамме радия находится

$$n = \frac{N_A}{A} = \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{226} = 2,67 \cdot 10^{21} \text{ (атомов)},$$

где  $N_A$  – число Авогадро,

$A$  – массовое число атома.

Запишем уравнение радиоактивного распада в дифференциальной форме:

$$dn = -\lambda n dt,$$

из которого непосредственно следует, что

$$\lambda = -\frac{dn}{n dt}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$\lambda = \frac{3,7 \cdot 10^{10}}{2,67 \cdot 10^{21} \cdot 1} = 1,38 \cdot 10^{-11} \text{ c}^{-1}.$$

Период полураспада радиоактивного вещества получим из формулы:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Подставляя численные значения, получим

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{1,38 \cdot 10^{-11}} = 5,02 \cdot 10^{10} \text{ c} = 1600 \text{ лет.}$$

ПРИМЕР 10. Определить, сколько ядер в  $m_0 = 1$  мг радиоактивного изотопа йода  ${}_{53}\text{I}^{131}$  распадается в течение часа, если период полураспада  $T_{1/2} = 8$  сут.  $\approx 6,9 \cdot 10^5$  с.

РЕШЕНИЕ. Будем считать, что в течение всего наблюдаемого промежутка времени  $\Delta t$  исходное количество радиоактивных ядер остается постоянным  $N_0 = \text{const}$ . Это допущение оправдано, так как период полураспада  $T_{1/2} > \Delta t$ .

Закон радиоактивного распада в этом случае можно записать в виде

$$\Delta N = \lambda N_0 \Delta t$$

где  $\lambda$  - постоянная радиоактивного распада,

$N_0$  - начальное количество радиоактивных ядер.

Так как постоянная радиоактивного распада

$$\lambda = \ln 2 / T_{1/2}, \text{ то}$$

$$\Delta N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 \Delta t. \quad (6.11)$$

Концентрация атомов в исходном препарате

$$N_0 = N_A Z = N_0 \frac{m_0}{M}, \quad (6.12)$$

где  $N_A$  - число Авогадро,

$Z$  - число молей, содержащихся в данном препарате,

$M$  - молярная масса изотопа, численно равная его массовому числу.

С учетом (6.12) соотношение (6.11) можно записать в виде

$$\Delta N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A \frac{m_0}{M} \Delta T.$$

Проведем вычисления:

$$\Delta N = \frac{0,693}{6,9 \cdot 10^5} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \frac{0,001}{127} \cdot 3600 \approx 1,7 \cdot 10^{16}$$

ПРИМЕР 11. Определить начальную активность  $A_0$  радиоактивного препарата магния  $Mg$  массой  $m = 0,2$  мкг, а также его активность  $A$  через время  $t = 6$  ч. Период полураспада  $T_{1/2}$  магния считать известным.

РЕШЕНИЕ. Активность  $A$  изотопа характеризует скорость радиоактивного распада и определяется отношением числа  $dN$  ядер, распавшихся за интервал времени  $dt$ , к этому интервалу:

$$A = - dN/dt. \quad (6.13)$$

Знак «—» показывает, что число  $N$  радиоактивных ядер с течением времени убывает.

Для того чтобы найти  $dN/dt$ , воспользуемся законом радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (6.14)$$

где  $N$  – число радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, в момент времени  $t$ ;  $N_0$  – число радиоактивных ядер в момент времени, принятый за начальный ( $t = 0$ );

$\lambda$  – постоянная радиоактивного распада.

Продифференцируем выражение (6.14) по времени:

$$dN / dt = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (6.15)$$

Исключив из формул (6.13) и (6.15)  $dN/dt$ , находим активность препарата в момент времени  $t$ :

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (6.16)$$

Начальную активность  $A_0$  препарата получим при  $t=0$ :

$$A_0 = \lambda N_0. \quad (6.17)$$

Постоянная радиоактивного распада  $\lambda$  связана с периодом полураспада  $T_{1/2}$  соотношением

$$\lambda = (\ln 2) / T_{1/2}. \quad (6.18)$$

Число  $N_0$  радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, равно произведению постоянной Авогадро  $N_A$  на количество вещества  $\nu$  данного изотопа:

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A \quad (6.19)$$

где  $m$  – масса изотопа;

$M$  – молярная масса.

С учетом выражений (6.18) и (6.19) формулы (6.17) и (6.16) принимают вид:

$$A_0 = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A, \quad (6.20)$$

$$A = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}. \quad (6.21)$$

Произведем вычисления, учитывая, что  $T_{1/2} = 10$  мин = 600 с,  $\ln 2 = 0,693$ ,  $I = 6$  ч =  $6 \cdot 3,6 \cdot 10^3$  с =  $2,16 \cdot 10^4$  с.

$$A_0 = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0,693}{600} 6,02 \cdot 10^{23} \text{ Бк} = 5,13 \cdot 10^{12} \text{ Бк} = 5,13 \text{ ТБк};$$

$$A = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0,693}{600} 6,02 \cdot 10^{23} e^{-\frac{0,693}{600} \cdot 2,16 \cdot 10^4} \text{ Бк} = 81,3 \text{ Бк}.$$

Таблица вариантов задач к контрольной работе № 6

Вариант	Номера задач							
	601	611	621	631	641	651	661	671
0	601	611	621	631	641	651	661	671
1	602	612	622	632	642	652	662	672
2	603	613	623	633	643	653	663	673
3	604	614	624	634	644	654	664	674
4	605	615	625	635	645	655	665	675
5	606	616	626	636	646	656	666	676
6	607	617	627	637	647	657	667	677
7	608	618	628	638	648	658	668	678
8	609	619	629	639	649	659	669	679
9	610	620	630	640	650	660	670	680

601. Определить энергию, импульс и массу фотона с длиной волны видимого излучения  $\lambda_1 = 600$  Нм и рентгеновского излучения  $\lambda_2 = 0,2$  Å.

602. При изучении космического излучения были обнаружены фотоны с длиной волны  $\lambda_1 = 400$  Нм  $\lambda_2 = 200$  Å.. Найти энергию этих фотонов.

603. Импульс фотона составляет  $9 \cdot 10^{-28}$  Н·с. Найти длину волны, энергию и массу этого фотона. Как изменится длина волны, энергия и масса, если импульс уменьшится в 3 раза?

604. Какую энергию и импульс должен иметь фотон, когда его масса равна массе покоя электрона?

605. В электроннолучевой трубке импульс электрона составляет  $10^{-24}$  Н·с. Определить длину волны и энергию фотона, который имеет импульс равный импульсу электрона.

606. Длина волны фотона  $\lambda_2 = 560$  Нм. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его энергия была равна энергии фотона с этой длиной волны?

607. Найти массу, импульс и энергию фотона для красных лучей света  $\lambda_1 = 700$  Нм, рентгеновских лучей  $\lambda_2 = 0,3$  Å и гамма лучей  $\lambda_3 = 10^{-2}$  Å.

608. Определить энергию и импульс фотона, если известно, что его масса равна массе покоя протона.

609. Масса фотона составляет  $5 \cdot 10^{-28}$  мг. Найти длину волны, энергию и импульс фотона.

610. Определить скорость, с которой должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона с длиной волны  $\lambda = 480$  Нм.

611. Определить энергию  $\Delta T$ , которую необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от  $\lambda_1 = 0,24$  мкм до  $\lambda_2 = 0,18$  мкм.

612. Параллельный пучок моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму в виде узкой прямоугольной щели, ширина которой  $d = 0,06$  Нм. Определить скорость этих электронов, если известно, что на экране,

отстоящем от щели на расстоянии 4 см, ширина центрального дифракционного максимума составит 10 мкм.

613. Из рентгеновской трубки поток моноэнергетических электронов направлен нормально на диафрагму с прямоугольной щелью шириной 0,9 Нм. Найти ускоряющее напряжение трубки, если известно, что на экране, отстоящем на щели на расстоянии  $l = 0,5$  м, образуется центральный максимум шириной 15 мкм.

614. Протон обладает кинетической энергией 1,5 КэВ. Определить дополнительную энергию  $\Delta T$ , которую необходимо сообщить протону для того, чтобы длина волны де Бройля уменьшилась в два раза.

615. Движущемуся электрону соответствует длина волны де Бройля  $\lambda = 12$  Нм. Какую дополнительную энергию нужно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась на  $\Delta\lambda = 4$  Нм.

616. Определить длины волн де Бройля для электрона, протона,  $\alpha$  – частицы и ядра урана 235, если известно, что их кинетические энергии одинаковы и равны 200 эВ.

617. Электрон обладает кинетической энергией 1,53 МэВ. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля, если электрон получит дополнительную энергию  $\Delta T = 0,51$  МэВ.

618. Кинетическая энергия движущегося электрона составляет 1,02 МэВ. Если кинетическая энергия его возрастает в полтора раза, как и во сколько раз изменится дебройлевская длина волны электрона?

619. Электрон без начальной скорости прошел ускоряющую разность потенциалов 51 кВ, затем при получении некоторой дополнительной энергии  $\Delta T$  его дебройлевская длина волны изменилась на 5 Нм. Найти величину дополнительной энергии для электрона.

620. Пучок электронов, имеющих скорость  $4 \cdot 10^6$  м/с, направлен на узкую щель. В результате дифракции на экране, отстоящем на расстоянии 10 см от щели, возникает чередование максимумов и минимумов. Расстояние между двумя максимумами первого порядка составило 45 мкм. Найти ширину щели.

621. В атоме водорода определить радиусы трех первых боровских орбит и скорости электрона на этих орбитах.

622. Определить, исходя из постулатов Бора, радиусы орбит, скорость электрона на орбите, период вращения электрона по орбите. Рассчитать значения этих величин для случая  $n = 1$ .

623. Найти потенциальную, кинетическую и полную энергию электрона, находящегося в основном состоянии для атома водорода.

624. Для атома водорода определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения.

625. Найти энергию ионизации и ионизационный потенциал для ионов гелия и лития.

626. Для водородоподобного иона гелия  $\text{He}^+$  определить радиус первой боровской орбиты, скорость движения электрона на ней и первый потенциал возбуждения.

627. Для иона гелия  $\text{He}^+$  вычислить радиус орбиты, скорость электрона, период вращения на второй боровской орбите.

628. Вычислить энергии фотонов, испускаемых при переходе электрона в атоме водорода с пятого энергетического уровня на первый, второй и третий.

629. Фотон, поглощенный атомом водорода, находящегося в основном состоянии, выбивает электрон с кинетической энергией 8 эВ. Определить энергию (эВ) этого фотона и скорость электрона.

630. Фотон, энергия которого составляет 17,5 эВ, выбивает электрон из атома водорода, находящегося в основном состоянии. Найти скорость электрона вдали от атома.

631. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить линейные размеры атома.

632. Оценить неточность  $\Delta x$  в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью  $V=1,5 \cdot 10^6$  м/с, если точность определения скорости 10 %. Сравнить эту неточность с размерами атома водорода ( $D_H = 10,6$  пм).

633. Оценить наименьшие ошибки  $\Delta p$  в определении импульса электрона и протона, если координаты центра масс этих частиц могут быть установлены с неопределенностью  $\Delta x = 5$  мкм.

634. Пучок электронов с энергией 12 эВ падает на щель шириной  $a$ . Считая неточность координаты  $\Delta x \cong a$ , оценить неточность импульса при  $a_1 = 10^{-8}$  м,  $a_2 = 10^{-10}$  м.

635.  $\alpha$ -частица находится в «потенциальной яме» с энергией 8 МэВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить размеры «ямы».

636. Принять минимальную энергию нуклонов в ядре атома  $W \cong 10$  МэВ. Оценить размеры ядра.

637. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии 10 Нс. При переходе излучается длина волны  $\lambda = 400$  Нм. Оценить относительную ширину спектральной линии  $\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ .

638. При переходе атома в нормальное состояние излучается фотон с длиной волны 600 Нм. Продолжительность излучения 10 Нс. Оценить ширину спектральной линии.

639. Время жизни возбужденного атома 1 Нс, длина волны излучения 5 Нм. С какой наибольшей точностью  $\Delta E$  может быть установлена энергия излучения.

640. Считая, что электрон можно локализовать в области 10 Нм, найти, чему равна неопределенность его импульса.

641. Частица находится в бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике в основном состоянии. Определить вероятность обнаружения частицы в первой четверти ящика.

642. Электрон в бесконечно глубокой потенциальной яме находится в состоянии  $n = 2$ . Найти вероятность нахождения электрона в первой трети ямы.

643. Частица находится в бесконечно глубоком, одномерном потенциальном ящике шириной  $L$  в состоянии  $n = 3$ . Найти нахождения частицы в интервале от  $\frac{1}{4} L$  до  $\frac{1}{2} L$ .

644. В прямоугольной потенциальной яме шириной  $L$  с непроницаемыми стенками находится электрон в состоянии  $n = 2$ . Определить вероятность нахождения его области от  $\frac{1}{3} L$  до  $\frac{1}{2} L$ .

645. В бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике шириной  $L$  находится частица в состоянии  $n = 4$ . Найти вероятность нахождения ее в интервале от  $\frac{1}{5} L$  до  $\frac{1}{3} L$ .

646. Электрон находится в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной  $L$  в состоянии  $n = 3$ . Определить вероятность обнаружения его в области от  $\frac{1}{6} L$  до  $\frac{1}{3} L$ .

647. Частица находится в бесконечно глубоком потенциальном ящике шириной  $L$ . В каких точках ящика плотности вероятности нахождения частицы одинаковы для  $n = 2$  и  $n = 3$ ?

648. В прямоугольной потенциальной яме шириной  $L$  с непроницаемыми стенками находится электрон. В каких точках ямы плотности вероятности нахождения электрона одинаковы для  $n = 2$  и  $n = 4$ ?

649. Электрон находится в бесконечно глубоком, одномерном потенциальном ящике шириной  $L$ . В каких точках ящика плотности вероятности нахождения одинаковы для  $n = 1$  и  $n = 3$ ?

650. Волновая функция, описывающая движение электрона в основном состоянии атома водорода, имеет вид  $\Psi(r) = Ae^{-r/a}$ , где  $A$  - положительная постоянная,  $a$  - первый Боровский радиус. Найти для этого состояния наиболее вероятное расстояние электрона от ядра.

651. При  $T = 15 \text{ K}$  молярная теплоемкость железа  $C = 0,25 \text{ Дж/К}\cdot\text{моль}$ . Найти характеристическую температуру  $\Theta$  Дебая для железа, считая условие  $T \ll \Theta$  выполненным.

652. Кристалл калия массой  $m = 0,1 \text{ кг}$  нагревают от температуры  $T_1 = 4 \text{ K}$  на один градус. Определить теплоту, необходимую для нагревания. Принять характеристическую температуру  $\Theta$  Дебая для калия, равной  $100 \text{ K}$  и условие  $T \ll \Theta$  выполненным.

653. Медь массой  $m = 200 \text{ г}$  нагревают от температуры  $T_1 = 12 \text{ K}$  до  $T_2 = 18 \text{ K}$ . Определить теплоту, необходимую для нагревания меди, считая характеристическую температуру  $\Theta$  Дебая для меди, равной  $300 \text{ K}$ , условие  $T \ll \Theta$  выполненным.

654. Вычислить по теории Дебая теплоемкость цинка  $M = 300 \text{ г}$  при температуре  $T = 15 \text{ K}$ . Характеристическая температура  $\Theta$  Дебая для цинка  $320^0 \text{ K}$  и условие  $T \ll \Theta$  выполнено.



655. По теории Дебая характеристическая температура алмаза  $\Theta = 2000$  К. Найти его удельную теплоемкость при температуре  $T = 50$  К.

656. При температуре  $T = 20$  К молярная теплоемкость серебра составила  $1,7$  Дж/К · моль. Определить по значению теплоемкости характеристическую температуру Дебая, считая, что условие  $T \ll \Theta$  выполнено.

657. Молярная теплоемкость железа составляет  $0,28$  Дж/к · моль при температуре  $29$  К. определить характеристическую температуру Дебая для железа, считая условие  $T \ll \Theta$  выполненным.

658. Определить по теории Дебая теплоемкость серебра массой  $m = 400$  г при температуре  $8$  К. Характеристическая температура серебра  $\Theta = 170$  К и условие  $T \ll \Theta$  выполнено.

659. Найти удельную теплоемкость кристалла золота при температуре  $T = 6$  К. Характеристическая температура Дебая золота  $\Theta = 180$  К.

660. Образец цинка массой  $50$  г нагревается от температуры  $4$  К на  $2$  градуса. Определить теплоту для нагревания цинка, приняв его характеристическую температуру по Дебаю  $\Theta = 320$  К.

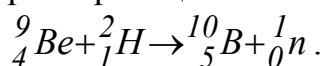
661. При делении ядра урана с массовым числом  $M = 235$  под действием нейтрона образовались осколки с массовыми числами  $M_1 = 90$  и  $M_2 = 143$ . Найти число нейтронов, вылетевших из ядра в этом акте деления. Определить энергию и скорость осколков, если они разлетаются в противоположные стороны, а их суммарная кинетическая энергия равна  $160$  МэВ.

662. При делении ядра урана с массовым числом  $M = 235$  освобождается энергия  $200$  МэВ. Найти энергию, выделяющуюся при делении ядер урана массой  $m = 1$  кг. Какую массу угля нужно сжечь, чтобы получить такую энергию? Удельная теплота сгорания угля  $291$  мДж/кг.

663. У атомного ледокола мощность двигателя составляет  $15$  МВт, а его КПД равен  $30$  %. Определить месячный расход ядерного горючего этого двигателя.

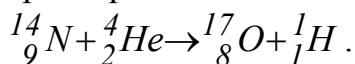
664. Найти энергию, необходимую для разделения ядра  $^{20}\text{Ne}$  на две  $\alpha$  – частицы и ядро  $^{12}\text{C}$ . Энергия связи на один нуклон в ядре неона составляет  $8,03$  МэВ, в ядре углерода –  $7,07$  МэВ, а в ядре гелия –  $7,68$  МэВ.

665. Вычислить энергию ядерной реакции



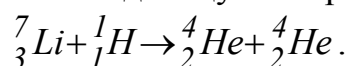
Освобождается или поглощается энергия?

666. Вычислить энергию ядерной реакции

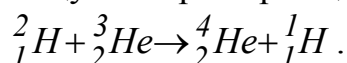


Освобождается или поглощается энергия?

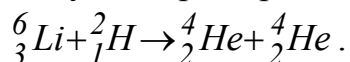
667. Определить энергию, освобождающуюся при ядерной реакции



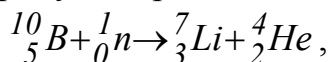
668. Найти энергию, выделяющуюся при термоядерной реакции



669. Найти энергию, выделяющуюся при термоядерной реакции



670. Определить скорости продуктов реакции



протекающей при бомбардировке тепловыми нейтронами, покоящихся ядер бора.

671. Активность радиоактивного протона за 12 суток уменьшилась на 25 % по сравнению с первоначальной. Определить период полураспада изотопа.

672. Период полураспада изотопа актиния составляет 10 суток. Определить, какая доля этого изотопа распадается в течение 5 суток.

673. Счетчик  $\alpha$ -частиц при измерении регистрировал  $N_1 = 1400$  частиц в минуту, а через время  $\tau = 4$  часа регистрировал  $N_2 = 400$  частиц в минуту. Найти период полураспада этого изотопа.

674. Период полураспада изотопа фосфора составляет 14,3 суток. Во сколько раз уменьшится активность этого образца за 18 суток?

675. Определить число ядер, распадающихся в течение времени: а)  $t_1 = 2$  мин; б)  $t_1 = 2$  суток для изотопа фосфора массой 2 мг. Период полураспада изотопа  $P$  14,3 суток.

676. Изотоп йода имеет период полураспада 8 суток. Определить массу изотопа, если его активность составляет 28 ГБК.

677. Во сколько раз уменьшится активность изотопа радона за 38 часов, если период полураспада радона 3,8 суток.

678. Определить период полураспада радиоактивного элемента, если его активность уменьшилась на 40 % по сравнению с первоначальной за двое суток.

679. На сколько процентов уменьшится активность изотопа магния за 6 мин, если период полураспада изотопа равен 10 мин.

680. Определить число ядер, распавшихся за 10 мин в радиоактивном изотопе йода массой 5 мг. Период полураспада изотопа 196 часов.

## Приложение

### 1. Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	<b>g</b>	9,81 м/с <sup>2</sup>
Гравитационная постоянная	<i>G</i>	6,67 10 <sup>-11</sup> м <sup>3</sup> /(кг с <sup>2</sup> )
Постоянная Авогадро	<i>N<sub>A</sub></i>	6,02 10 <sup>23</sup> моль <sup>-1</sup>
Универсальная газовая постоянная	<i>R</i>	8,31 Дж/(моль К)
Стандартный объем *	<i>V<sub>m</sub></i>	22,4 10 <sup>-3</sup> м <sup>3</sup> /моль
Постоянная Больцмана	<i>k</i>	1,38 10 <sup>-23</sup> Дж/К
Элементарный заряд	<i>e</i>	1,60 10 <sup>-19</sup> Кл
Скорость света в вакууме	<i>c</i>	3 10 <sup>8</sup> м/с
Молярная масса водорода	<i>μ(H<sub>2</sub>)</i>	2 10 <sup>-3</sup> кг/моль
Молярная масса гелия	<i>μ(He)</i>	4 10 <sup>-3</sup> кг/моль
Молярная масса неона	<i>μ(Ne)</i>	20 10 <sup>-3</sup> кг/моль
Молярная масса воздуха	<i>μ</i>	29 10 <sup>-3</sup> кг/моль
Масса электрона	<i>m<sub>e</sub></i>	9,1 10 <sup>-31</sup> кг
Электрическая постоянная	<i>ε<sub>0</sub></i>	8,85·10 <sup>-12</sup> Ф/м
Магнитная постоянная	<i>μ<sub>0</sub></i>	4π 10 <sup>-7</sup> Гн/м

\* Молярный объем идеального газа при нормальных условиях.

### 2. Энергия ионизации

Вещество	<i>E<sub>i</sub></i> , Дж	<i>E<sub>i</sub></i> , эВ
Водород	2,18·10 <sup>-18</sup>	13,6
Гелий	3,94·10 <sup>-18</sup>	24,6
Литий	1,21·10 <sup>-18</sup>	75,6
Ртуть	1,66·10 <sup>-18</sup>	10,4

### 3. Показатель преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Глицерин	1,47
Вода	1,33	Стекло	1,50

**4. Работа выхода электронов**

<b>Металл</b>	<b><math>A</math>, Дж</b>	<b><math>A</math>, эВ</b>
Калий	$3,5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Литий	$3,7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Платина	$10 \cdot 10^{-19}$	6,3
Рубидий	$3,4 \cdot 10^{-19}$	2,1
Серебро	$7,5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цезий	$3,2 \cdot 10^{-19}$	2,0
Цинк	$6,4 \cdot 10^{-19}$	4,0

Библиотека БГУИР

## ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова Т.И. Курс физики. – М. Высш. шк., 1985.
2. Детлаф А.А., Яврский Б.М., Милковская Л.Б. Курс физики. – М.: Высш. шк., 1973–1979. Т.1, 2.
3. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. – М.: Наука, 1972–1974. Т. 1, 2.
4. Савельев И.В. Курс физики. – М.: Наука, 1989. Т.1,2.
5. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – Высш. шк., 1981.
6. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – Наука, 1988.
7. Рубан И.И., Жаврид С.М., Великевич Н.Е., Лагутина Ж. П. Задания к практическим занятиям. – Мн. Высш. шк., 1989.
8. Сергеева–Некрасова М.С., Морозов В.А., Смирнова Г.Ф. Фундаментальные законы механики и электромагнетизма в решении задач. – М., БГУИР, 2000.

Учебное издание

Авторы:

**Аксенов** Валерий Васильевич,  
**Березин** Александр Васильевич,  
**Морозов** Владимир Алексеевич,  
**Савилова** Юлия Ивановна

**ОПТИКА,  
АТОМНАЯ И КВАНТОВАЯ ФИЗИКА**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
ПО КУРСУ «ФИЗИКА»**

**ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВСЕХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ БГУИР  
ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ**

Редактор Н.В. Гриневич

---

Подписано в печать 23.03.2005.

Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная.

Гарнитура «Таймс».

Печать ризографическая.

Усл.

печ. л. 5,0.

Уч.-изд. л. 4,3.

Тираж 450 экз.

Заказ 7.

---

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»  
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от  
01.04.2004.

Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0133108 от  
30.04.2004.

220013, Минск, П. Бровки, 6