

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

В. И. Кириллов

***ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ***

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь
по образованию в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия
по дисциплине «Квалиметрия и системный анализ»
для студентов учреждений, обеспечивающих получение
высшего образования по специальности 1-54 01 04
«Метрологическое обеспечение информационных систем и сетей»*

Минск БГУИР 2012

УДК [004.42+519.24]–027.45(076)
ББК 32.973.26–018.2я7+22.172я73
К43

Рецензенты:

кафедра связи учреждения образования
«Военная академия Республики Беларусь»
(начальник кафедры – полковник С. А. Манько);

доцент кафедры ядерной физики
Белорусского государственного университета,
кандидат технических наук М. В. Комар

Кириллов, В. И.
К43 Прогнозирование показателей надежности технических систем по результатам испытаний: учеб.-метод. пособие / В. И. Кириллов. – Минск : БГУИР, 2012. – 54 с.
ISBN 978-985-488-870-5.

Приводятся теоретические основы и практические методы решения задачи прогнозирования показателей надежности технической системы по совместным результатам ускоренных (форсированных) испытаний и укороченных испытаний в режиме нормальной эксплуатации. Процедура расчетов выполняется с использованием компьютерной поддержки, позволяет провести исследования для шести различных вероятностных законов и для найденного оптимального закона определить прогнозное значение гарантированного времени безотказной работы, которое будет обеспечено при нормальной эксплуатации систем.

УДК [004.42+519.24]–027.45(076)
ББК 32.973.26–018.2я7+22.172я73

ISBN 978-985-488-870-5

© Кириллов В. И., 2012
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Цель работы	6
2 Основные теоретические положения	6
2.1 Общие сведения.....	6
2.2 Основные количественные характеристики надежности.....	10
2.3 Основные теоретические модели безотказной работы и их свойства	13
2.3.1 Экспоненциальный закон	14
2.3.2 Закон Эрланга второго порядка	14
2.3.3 Закон Рэлея.....	15
2.3.4 Закон Вейбулла	16
2.3.5 Нормальный (Гаусса) закон.....	17
2.3.6 Усеченный нормальный закон	18
2.4 Исследование функций надежности по результатам испытаний.....	19
2.5 Определение оптимальных параметров выбранного теоретического закона распределения.....	24
2.5.1 Параметрическая оптимизация экспоненциального закона	24
2.5.2 Параметрическая оптимизация закона Эрланга.....	26
2.5.3 Параметрическая оптимизация закона Рэлея.	28
2.5.4 Параметрическая оптимизация закона Вейбулла	29
2.5.5 Параметрическая оптимизация нормального закона	31
2.5.6 Параметрическая оптимизация усеченного нормального закона	33
2.5.7 Выбор и обоснование оптимального теоретического закона распределения.	34
2.6 Определение показателей надежности по результатам укороченных испытаний.....	35
3 Содержание лабораторной работы и порядок ее выполнения	41
4 Содержание отчета.	46
5 Контрольные вопросы	46
Литература	48
ПРИЛОЖЕНИЕ А	50
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	51
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	52
ПРИЛОЖЕНИЕ Г	54

ВВЕДЕНИЕ

Учебная дисциплина «Квалиметрия и системный анализ» относится к числу дисциплин, составляющих фундамент инженерной подготовки по специальности «Метрологическое обеспечение информационных систем и сетей». Целью изучения дисциплины является освоение новой методологии моделирования и оптимизации в области измерения и управления качеством различных объектов (продукции, систем, технических процессов и т. п.).

Данное учебно-методическое пособие является развитием предыдущих работ автора [14, 23, 24] и позволяет студентам ознакомиться с основными видами квалиметрической деятельности, встречающимися на практике. В дополнении к теоретическому материалу приводится описание лабораторной работы, которая проводится как игра, где студенты решают учебную задачу (или задачи), подобные реальным производственным задачам. Для ускорения различного рода вычислительных и оформительских процедур в лабораторной работе широко использованы средства компьютерной поддержки принятия решений.

С их помощью, в частности, быстро рассчитываются по громоздким формулам оптимизируемые параметры и функции, легко и удобно сравниваются различные варианты решения задач, которые реализуются в виде таблиц и графиков, эффективно решаются задачи, которые требуют перебора нескольких вариантов решений и выбора лучшего из них (квазиоптимального по определенному критерию).

Подобного рода задачи как раз и встречаются при нахождении и оптимизации **специфических показателей качества** любого вида изделий, например, технических систем, которые называются **показателями надежности**. Эти показатели относятся к **основным** показателям качества и всегда указываются в техническом паспорте любого изделия. Например, такой показатель надежности, как гарантированное время безотказной работы изделия, во многих случаях является важнейшим при выборе изделий радиоэлектроники, космической техники и т.п.

Известные методы теоретического расчета показателей надежности в большинстве случаев являются недостаточно точными, поэтому приходится прибегать к опытным (экспериментальным) испытаниям технической системы на надежность. Учитывая, что в нормальных условиях эксплуатации средний срок безотказной работы техники может быть в пределах от нескольких лет до нескольких десятков лет и более, приходится прибегать к двум видам опытных испытаний. Первый называется **форсированным** (или ускоренным), когда изделия работают в тяжелых, нетиповых условиях и поэтому выходят из строя сравнительно быстро (в течение нескольких недель или месяцев). На основании обработки результатов ускоренных испытаний определяется примерный закон отказов изделий во времени.

Затем проводятся испытания таких же изделий в режиме нормальной (типовой) эксплуатации. Хотя срок испытаний в этом случае обычно продлевается от нескольких месяцев до года, отказы изделий сравнительно малочисленны, объем статистического материала мал, поэтому такие испытания называют **укороченными**. Тем не менее они позволяют дать достаточно точный прогноз параметров вероятностного закона надежности изделия в условиях реальной эксплуатации, поскольку ранее, на стадии ускоренных испытаний, был решен вопрос о характере и типе закона надежности.

В лабораторной работе, которая завершает учебно-методическое пособие, как раз и проводится компьютерное моделирование подобных задач надежности. Для индивидуализации лабораторной работы каждому студенту предлагается свой набор исходных данных результатов ускоренных и укороченных испытаний техники на надежность.

В постановке компьютеризированной лабораторной работы по дисциплине «Квалиметрия и системный анализ», в ходе ее отладки, совершенствовании и модернизации большую помощь автору оказали курсанты военного факультета А. В. Ключко (гр. 630801) и Д. В. Парханович (гр. 730801), магистрант кафедры метрологии и стандартизации БГУИР А. А. Сайков, студенты факультета компьютерных систем и сетей А. А. Сушков (гр. 851005) и А. А. Воробьев (гр. 852004), которым автор выражает глубокую благодарность.

Автор благодарен рецензентам пособия: кафедре связи Военной академии Республики Беларусь, в частности, полковнику, кандидату технических наук А. А. Пилюшко и доценту БГУ, кандидату технических наук М. В. Комару за полезные замечания, сделанные ими при рецензировании работы.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

1 Цель работы

– изучить основные законы, характеризующие процесс безотказной работы технической системы, и методы их параметрической оптимизации по результатам опытных испытаний;

– по конкретным результатам опытных испытаний системы на надежность для форсированных режимов работы определить, используя компьютерную поддержку, тип вероятностного закона и его параметры, которые наилучшим образом соответствуют этим испытаниям;

– используя конкретные результаты укороченных испытаний этой же системы в реальных условиях эксплуатации, определить гарантированное и среднее время безотказной работы системы.

2 Основные теоретические положения

2.1 Общие сведения

Важнейшей технической характеристикой качества является **надежность**. Слово «надежность» в русском языке связано с понятием надежды – надежды на длительную и безотказную пригодность к эксплуатации или, в широком смысле, к потреблению. В самом понятии надежности заключается элемент некоторой неуверенности и неопределенности. И, по-видимому, не случайно надежность как свойство изделий оценивается вероятностными характеристиками, основанными на статистической обработке экспериментальных данных. Однако вероятностные методы определения показателей надежности позволяют вполне определенно и достаточно хорошо оценивать надежность работы различных технических изделий и систем.

По мере технического прогресса наблюдается усложнение технических изделий. Основное противоречие в развитии современной техники заключается в том, что если не предпринимать необходимые меры по повышению надежности, то чем сложнее, быстрее и точнее работа техники, тем менее она надежна. Отсюда следует, что решение проблемы надежности является не только **важной технической**, но и **серьезной экономической** задачей.

Надежностью называют свойство изделия сохранять в установленных пределах времени значения всех параметров, характеризующих его способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения (эксплуатации), технического обслуживания, ремонтов, хранения, транспортировки и других действий. Эта способность должна сохраняться даже

при наличии внешних климатических и механических воздействий на само изделие и различных физико-химических процессов в его элементах. Надежность – неотъемлемый показатель качества любого промышленного изделия и любой радиоэлектронной аппаратуры, в том числе, конечно, средств измерений, средств телекоммуникаций, компьютеров и других устройств.

Качество изделия определяется совокупностью многих свойств, таких, например, как чувствительность, дальность действия, точность, а для средств электронно-вычислительной техники – также и таких, как объем памяти, быстродействие и т.д. В число свойств, определяющих качество, входит и надежность, однако этот показатель качества существенным образом отличается от остальных. Надежность, взятая отдельно, еще не означает технического совершенства изделия. Ведь изделие может быть очень надежным в работе, но обладать низкими техническими характеристиками. Однако если совершенное по техническим характеристикам изделие не обладает необходимой надежностью, то все остальные показатели качества теряют свое практическое значение, поскольку они не могут быть полностью использованы в работе.

Если какое-то устройство неисправно, то оно не выполняет свои функции. Но для сложного устройства, работа которого определяется многими показателями, иногда довольно трудно установить, выполняет ли оно свои функции. В связи с этим вводится понятие **работоспособности**, которое определяется как такое состояние технической системы, при котором она выполняет свои функции, сохраняя все значения параметров в пределах, заданных техническими условиями на данное изделие.

Характеристики надежности основываются на учете событий, называемых **отказами** и характеризующих одно из двух возможных состояний элементов и изделий: работоспособное – неработоспособное. **Отказ** – это такое событие, после которого отдельный элемент или все устройство перестают выполнять свои функции, либо нарушается работоспособность аппаратуры. Отсутствие отказов в процессе эксплуатации является признаком высокой надежности. Отказ трактуется как случайное событие, и потому все количественные характеристики надежности основаны на учете **времени до возникновения отказа**.

Разнообразная природа возникновения отказов заставляет **классифицировать** их по ряду факторов.

К **первому фактору относятся причины возникновения отказов**, которые разделяются на:

1.1 **Конструктивные ошибки и недостатки**, например: недостаточная прочность отдельных элементов или конструкции; неудачная компоновка

узлов; недостаточная защищенность конструкции от попадания влаги, пыли, от разогрева; неудобство обслуживания и др.;

1.2 Производственные недостатки в изготовлении – скрытые дефекты; некондиционные материалы; нарушения технологии изготовления и сборки и др.;

1.3 Неправильная эксплуатация и техническое обслуживание – невыполнение эксплуатационных инструкций, несоблюдение правил технического обслуживания из-за низкой квалификации обслуживающего персонала; неисправности вспомогательных механизмов и т. д.;

1.4 Внешние факторы – повышенная или низкая температура, повышенная влажность, повышенное или пониженное атмосферное давление, загрязненность воздуха и др.;

1.5 Некачественный ремонт – несоответствие материала, технологии изготовления (методов, режимов, точности и качества обработки) и сборки первоначальным условиям изготовления, плохой контроль за проведением ремонта.

По **второму фактору – характеру возникновения** отказы классифицируют на:

2.1 Внезапные, которые нельзя заранее предусмотреть;

2.2 Постепенные, когда условия, приводящие к отказу, накапливаются постепенно (износ, перегрев, усталостные явления, старение, деформации);

2.3 Периодические, повторяющиеся через некоторые промежутки времени, по мере накопления условий, приводящих к отказу; после восстановления нормальных условий (температура, давление и др.) система как бы самовосстанавливается и продолжает функционировать.

По **третьему фактору – характеру проявления отказа** различают четыре вида отказов:

3.1 – явные; 3.2 – скрытые; 3.3 – независимые; 3.4 – зависимые.

Независимым отказом является такой, который не вызван отказом других элементов системы. Отказ какого-либо элемента системы, получившийся в результате отказа других ее элементов, является зависимым.

По **четвертому фактору – закономерности возникновения отказа** различают два противоположных вида:

4.1 – случайные; 4.2 – явно закономерные.

В теории надежности отказ обычно рассматривается как событие независимое и случайное.

Восстановление – процесс обнаружения и устранения отказа (повреждения) изделия с целью восстановления его работоспособности (устранение неисправности).

По **способности к восстановлению** изделия подразделяются на восстанавливаемые и невосстанавливаемые.

Восстанавливаемое изделие – изделие, работоспособность которого в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемой ситуации.

Невосстанавливаемое изделие – изделие, работоспособность которого в случае возникновения отказа не подлежит восстановлению в рассматриваемой ситуации.

Основным **способом восстановления работоспособности** является **ремонт**. В зависимости от того, предусмотрены или нет операции ремонта, изделия подразделяются на ремонтируемые и неремонтируемые (восстанавливаемые и невосстанавливаемые).

Информационно-измерительные системы, средства измерений и их элементы (блоки, узлы и т. п.), системы телекоммуникаций и др. относят к классу **восстанавливаемых систем**, в которых после возникновения отказа за некоторое время восстановления T_v происходит поиск и замена (или ремонт) отказавшего элемента. Далее система вновь функционирует нормально. После нескольких отказов и восстановлений система (элемент) подвергается среднему или капитальному ремонту; после нескольких ремонтов система снимается с эксплуатации по техническому состоянию, как неподлежащая восстановлению, и утилизируется.

В зависимости от **сложности устранения** различают отказы: а) устраняемые в порядке технического обслуживания; б) устраняемые при среднем или капитальном ремонте.

В зависимости от **места устранения** различают: а) отказы, устраняемые в эксплуатационных условиях; б) отказы, устраняемые только в стационарных условиях ремонтной мастерской.

Ненадежная работа, например, средств измерений (СИ) является причиной потери точности измерений и наносит ущерб народному хозяйству. Поэтому при разработке аппаратуры СИ стараются использовать высоконадежные электрорадиоэлементы, предусматривают резервирование отдельных блоков или узлов, разрабатывают аппаратуру встроенного автоматического контроля для обнаружения внезапных отказов и предупреждения постепенных отказов, совершенствуют конструкции блоков для обеспечения быстрого восстановления и ремонта отказавших узлов и т. д.

Однако все эти меры ведут к удорожанию аппаратуры, увеличению сроков разработки, изготовления и ввода ее в эксплуатацию. Поэтому оптимальное построение СИ (как и всех других технических устройств) должно выполняться по критерию **минимума экономических и временных затрат** при условии, что **реальная надежность** работы СИ обеспечивается **не хуже некоторой заданной величины**. Этот вывод справедлив и для других видов аппаратуры.

2.2 Основные количественные характеристики надежности

Характеристики надежности основаны на **вероятностно-статистических** испытаниях. На испытание ставится какое-то (обычно большое) число изделий N_0 и наблюдаются моменты, когда возникают отказы. В принципе испытания должны продолжаться до тех пор, пока не откажут все N_0 изделий, но практически это делается раньше, как только будут выяснены статистические закономерности.

Основными количественными характеристиками надежности являются **функции**: вероятность безотказной работы $P(t)$, частота отказов $f(t)$, опасность (интенсивность) отказов $\lambda(t)$, а также **ряд показателей**, связанных с вышеуказанными функциями, например, среднее время безотказной работы T_0 , гарантированное время безотказной работы T_r и др.

Вероятностью безотказной работы называют вероятность того, что при заданных условиях эксплуатации в течение определенного заданного интервала времени не произойдет отказа:

$$P(t) = P(t_0 \geq t) = \frac{N(t)}{N_0}, \quad (1)$$

где t_0 – время работы изделия от его включения до первого отказа (время наработки на отказ);

t – заданное время работы;

$N(t)$ – число работоспособных изделий в момент t .

Вероятность безотказной работы всегда является **убывающей функцией времени** и обладает свойствами: в начальный момент времени (при $t = 0$) $P(0) = 1$, а при $t \rightarrow \infty$ функция $P(t)$ стремится к нулю (так как $N(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$).

На практике иногда более удобной характеристикой является **вероятность отказа** $Q(t)$. Безотказная работа аппаратуры и появление отказа являются событиями **несовместимыми** и **противоположными**, поэтому сумма их вероятностей подчиняется условию: $P(t) + Q(t) = 1$. Следовательно,

$$Q(t) = 1 - P(t). \quad (2)$$

Частотой отказов называется отношение числа образцов, отказавших за единицу времени, к числу изделий, первоначально поставленных на испытания:

$$f(t) = \frac{n(t)}{\Delta t N_0}. \quad (3)$$

Число $n(t)$ получается как разность количества образцов, исправно работавших в начале интервала Δt и оставшихся работоспособными в конце этого интервала, т. е.

$$n(t) = N(t) - N(t + \Delta t).$$

Количество работоспособных изделий в начале и конце интервала Δt можно выразить через вероятность того, что в соответствующие моменты времени не произойдет отказа:

$$N(t) = N_0 P(t); \quad N(t + \Delta t) = N_0 P(t + \Delta t).$$

Подставляя эти значения в формулу (3), будем иметь

$$f(t) = \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Устремив Δt к нулю и перейдя к пределу, получим

$$f(t) = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right] = - \frac{dP(t)}{dt} = \frac{dQ(t)}{d(t)}. \quad (4)$$

Таким образом, **частота отказов** есть **плотность вероятности распределения времени** работы изделия до первого отказа. Соответственно вероятность появления отказа за время t будет равна

$$Q(t) = \int_0^t f(t) dt, \quad (5)$$

а вероятность безотказной работы получится в виде

$$P(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt = \int_t^{\infty} f(t) dt. \quad (6)$$

Функция $f(t)$ характеризует скорость изменения функции $P(t)$ (или $Q(t)$) во времени и в отличие от $P(t)$ может быть как убывающей, так и возрастающей или еще более сложной функцией времени.

Интенсивность отказов (ранее использовался синоним – **опасность**) может быть выражена как отношение числа изделий, отказавших за единицу времени, к среднему числу исправно работавших изделий в **тот же промежуток времени**:

$$\lambda(t) = \frac{n(t)}{\Delta t N_{cp}}. \quad (7)$$

Подставим в это выражение значение $n(t)$

$$\lambda(t) = \frac{N_0 [P(t) - P(t + \Delta t)]}{N_{cp} \Delta t}.$$

Так как N_{cp}/N_0 при большом N_0 есть вероятность безотказной работы $P(t)$, то, устремив Δt к нулю и переходя к пределу, получим

$$\lambda(t) = - \frac{1}{P(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right] = - \frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP(t)}{dt}, \quad (8)$$

или с учетом (4)

$$\lambda(t) = f(t) / P(t). \quad (8, a)$$

Учитывая приведенные выше соображения о возможности поведения функции $f(t)$, из (8, а) следует, что и функция $\lambda(t)$ может по-разному изменяться

во времени.

Интегрируя выражение (8), окончательно будем иметь

$$\int_0^t \lambda(t) dt = -\int_0^t \frac{dP(t)}{P(t)} = -\ln P(t). \quad (9)$$

Отсюда следует **основная формула теории надежности:**

$$P(t) = \exp \left[-\int_0^t \lambda(t) dt \right]. \quad (10)$$

Среднее время безотказной работы характеризует усредненное для большой группы изделий время работы до возникновения первого отказа и определяется как математическое ожидание непрерывной случайной величины – времени работы изделия до отказа:

$$T_0 = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \left[-\frac{dP(t)}{dt} \right] dt. \quad (11)$$

Интегрируя по частям, получим

$$T_0 = -tP(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P(t) dt.$$

Учитывая, что $P(0) = 1$, $P(\infty) = 0$, получим

$$T_0 = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (12)$$

На основании опытов (статистических испытаний) среднее время безотказной работы равно

$$T_{0, \text{cp}} \cong \sum_{i=1}^{N_0} \frac{T_{0i}}{N_0}, \quad (12, a)$$

где T_{0i} – время работы до отказа i -го изделия, $i \in [1, N_0]$.

При большом числе изделий $N_0 \rightarrow \infty$, $T_{0, \text{cp}} \rightarrow T_0$, как следует из (11).

Физический смысл среднего времени безотказной работы T_0 – это время, в течение которого произойдет отказ половины (50 %) всех изделий, поставленных на испытание.

Поскольку T_0 является средним значением случайной величины – времени работы до отказа, полезно знать, в каких пределах оно (это время) может меняться на практике. Таким показателем может служить величина **среднего квадратического отклонения** времени безотказной работы ΔT_0 от его среднего значения T_0 , которое рассчитывается из выражения

$$\Delta T_0^2 = \sigma_T^2 = \int_0^{\infty} (t - T_0)^2 f(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - T_0^2. \quad (13)$$

Другим, часто используемым на практике, показателем является **гарантированное время безотказной работы** T_{Γ} , которое определяется как время, в течение которого не произойдет отказ с заданной гарантированной вероятностью P_{Γ} . Аналитически величина T_{Γ} определяется как результат решения уравнения

$$P_{\Gamma} = 1 - \int_0^{T_{\Gamma}} f(t) dt, \quad (14)$$

которое следует из (6).

Как показывает практика, типичная зависимость интенсивности отказов от времени $\lambda(t)$ имеет три характерных участка (рисунок 2.1). На начальном участке ($0 - t_1$), называемом **периодом приработки**, наблюдается повышенная частота отказов, что объясняется быстрым выходом из строя всех элементов **со скрытыми дефектами**. Затем начинается **период нормальной работы** ($t_1 - t_2$), когда интенсивность отказов остается более или менее постоянной. После этого начинается **период старения**, при котором количество отказов начинает быстро увеличиваться из-за старения и износа элементов.

Возможны и другие, более сложные зависимости интенсивности отказов $\lambda(t)$ и, соответственно, функций $P(t)$ и $f(t)$, которые будут рассмотрены ниже.

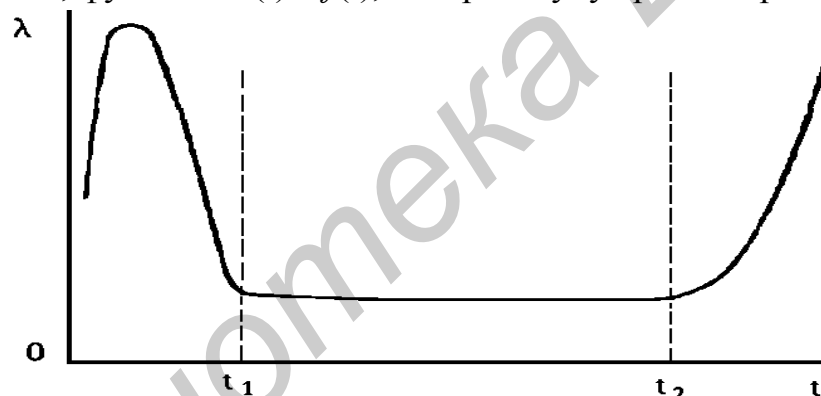


Рисунок 2.1 – Зависимость интенсивности отказов от продолжительности работы оборудования

2.3 Основные теоретические модели безотказной работы и их свойства

Многолетняя практика обработки результатов испытаний на надежность разнообразных изделий и устройств доказала **возможность и успешность обобщения** этих результатов с помощью различных теоретических моделей. Наличие «подходящих» теоретических моделей, описывающих зависимости $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$, определенные выше, позволяет во многих случаях существенно уменьшить число испытываемых изделий, сократить время испытаний, экстраполировать результаты испытаний, которые проведены в одних условиях, на другие условия, и т.п. В настоящее время использовано большое число различных вероятностных законов, из которых далее будем использовать некоторые наиболее известные с учетом соотношений (1) – (14) [1 – 18].

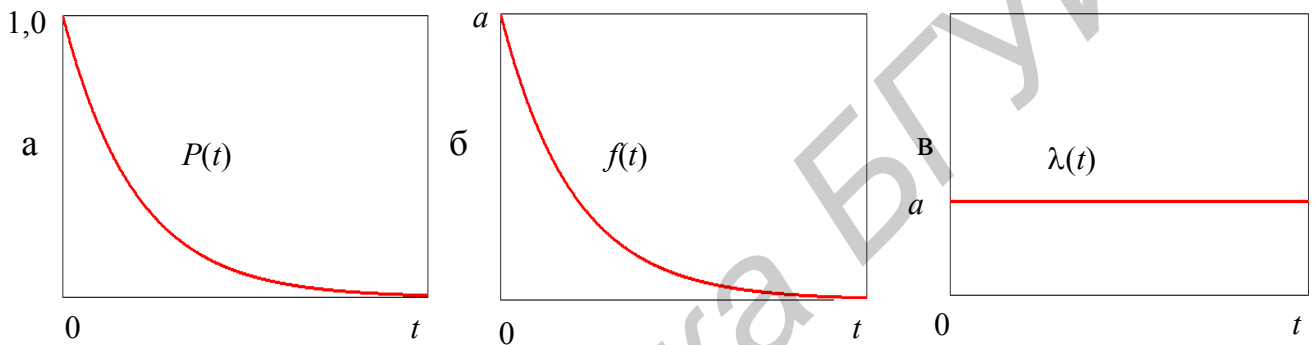
2.3.1 Экспоненциальный закон

Данный закон характеризуется следующими функциями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } P(t) = \exp(-at); \\ \text{б) } f(t) = a \cdot \exp(-at); \\ \text{в) } \lambda(t) = a; \\ \text{г) } T_0 = 1/a; \quad \text{д) } \sigma_T = \Delta T_0 = 1/a; \\ \text{е) } T_{\Gamma} = -\left(\frac{1}{a}\right) \cdot \ln P_{\Gamma} \cong \left(\frac{1}{a}\right) \cdot (1 - P_{\Gamma}), \end{array} \right. \quad (15, \text{а-е})$$

где a – параметр закона.

Теоретические зависимости для этого закона приведены на рисунке 2.2.



а – вероятность безотказной работы $P(t)$, б – частота отказов $f(t)$,
в – интенсивность отказов $\lambda(t)$

Рисунок 2.2 – Теоретические зависимости экспоненциального закона

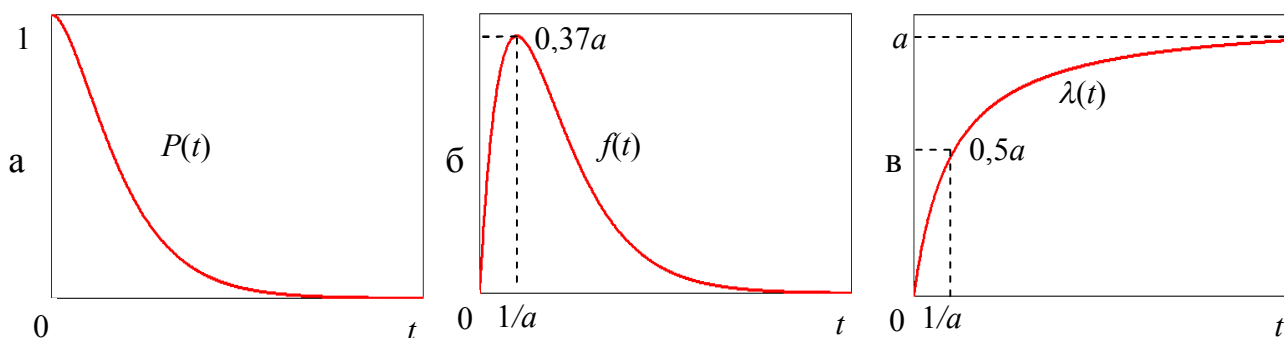
2.3.2 Закон Эрланга второго порядка

Этот закон характеризуется следующими функциями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } P(t) = (1 + at) \cdot \exp(-at); \\ \text{б) } f(t) = a^2 t \cdot \exp(-at); \\ \text{в) } \lambda(t) = \frac{a^2 t}{1 + at}; \\ \text{г) } \frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{a^2}{(1 + at)^2}; \\ \text{д) } T_0 = 2/a; \quad \text{е) } \sigma_T = \Delta T_0 = \frac{\sqrt{2}}{a}; \\ \text{ж) } T_{\Gamma} \cong \left(\frac{1}{a}\right) \cdot \sqrt{(1 - P_{\Gamma})}, \end{array} \right. \quad (16, \text{а-ж})$$

где a – параметр закона.

Основные зависимости для этого закона приведены на рисунке 2.3.



а – вероятность безотказной работы $P(t)$; б – частота отказов $f(t)$;
в – интенсивность отказов $\lambda(t)$

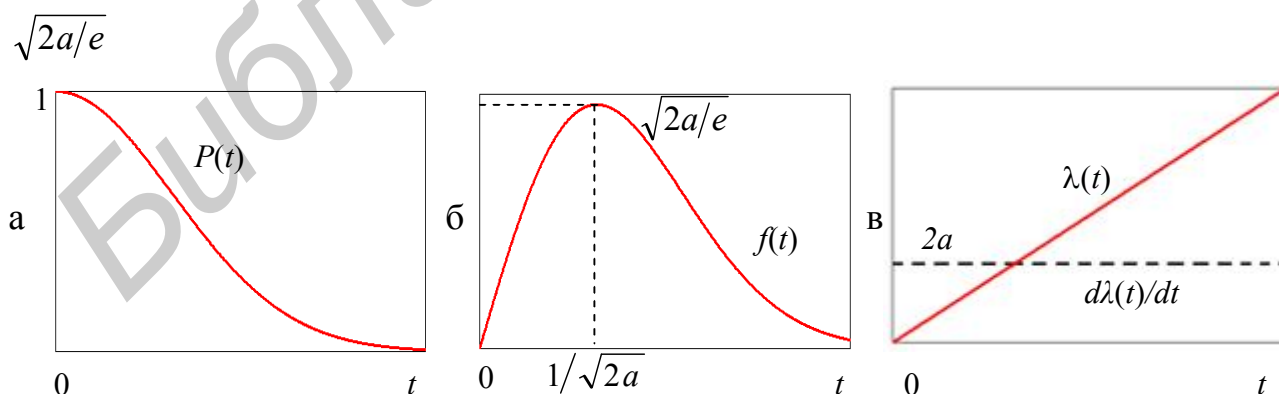
Рисунок 2.3 – Теоретические зависимости закона Эрланга второго порядка

2.3.3 Закон Рэлея

Данный закон характеризуется следующими функциями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } P(t) = \exp(-at^2); \\ \text{б) } f(t) = 2at \cdot \exp(-at^2); \\ \text{в) } \lambda(t) = 2at; \\ \text{г) } \frac{d\lambda(t)}{dt} = 2a; \\ \text{д) } T_0 = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}; \text{ е) } \sigma_T = \Delta T_0 = \sqrt{\frac{4-\pi}{4a}}; \\ \text{ж) } T_0^2 + \sigma_T^2 = \frac{1}{a}, \text{ з) } T_\Gamma \cong \sqrt{\frac{(1-P_\Gamma)}{a}}. \end{array} \right. \quad (17, \text{а-ж})$$

Здесь $a = \text{const}$ – параметр закона. Примерный вид функций для этого закона показан на рисунке 2.4.



а – вероятность безотказной работы $P(t)$; б – частота отказов $f(t)$;
в – интенсивность отказов $\lambda(t)$

Рисунок 2.4 – Теоретические зависимости закона Рэлея

Как следует из выражений (15) – (17), приведенные в пунктах 2.3.1–2.3.3, законы относятся к классу **однопараметрических** законов, когда вид функций и значения параметров закона T_0 , σ_T , T_T однозначно определяются значением одного параметра a .

2.3.4 Закон Вейбулла

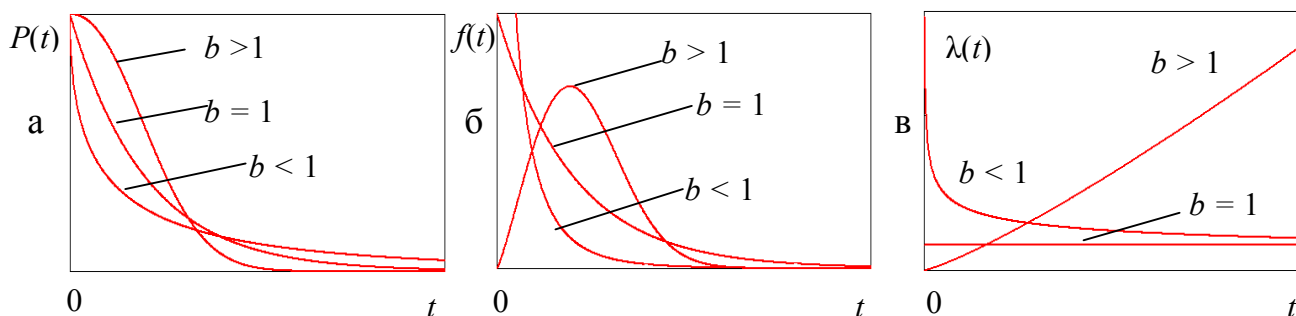
Этот закон, в отличие от вышеперечисленных, характеризуется не одним, а двумя постоянными параметрами и поэтому относится к классу **двухпараметрических** законов. Для него справедливы следующие соотношения, зависящие от **фиксированных параметров a , b** и времени t [11, 12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } P(t) = \exp(-at^b); \\ \text{б) } f(t) = abt^{b-1} \cdot \exp(-at^b); \\ \text{в) } \lambda(t) = bat^{b-1}; \\ \text{г) } T_0 = \int_0^{\infty} P(t)dt = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt = a^{-\frac{1}{b}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right); \\ \text{д) } \sigma_T = a^{-\frac{1}{b}} \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)} = \sqrt{a^{-\frac{2}{b}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - T_0^2}; \quad (18, \text{а-з}) \\ \text{е) } T_0^2 + \sigma_T^2 = a^{-\frac{2}{b}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right); \\ \text{ж) } T_T \cong \left[\frac{(1 - P_T)}{a}\right]^{\frac{1}{b}}; \quad \text{з) } P_T \cong 1 - aT_T^b, \end{array} \right.$$

где $\Gamma(v) = \int_0^{\infty} x^{v-1} \cdot e^{-x} dx$ – табличная гамма-функция (приложение А).

Характерными особенностями гамма-функции при $b \geq 0$, т. е. при $v = (1+b) > 1,0$, являются [3, 8, 9, 21]: а) $\Gamma(v=1) = \Gamma(v=2) = 1,0$; б) $\Gamma(v=1,5) \cong 0,886$; в) если v – целое число, то $\Gamma(v) = (v-1)!$; если $v \geq 2$ и v – нецелое число, то справедливо равенство: $\Gamma(v) = (v-1)\Gamma(v-1)$; например, $\Gamma(v=3,5) = (3,5-1)\Gamma(2,5) = 2,5 \cdot 1,5 \cdot \Gamma(1,5) = 2,5 \cdot 1,5 \cdot 0,886 \cong 3,32$.

Примерные зависимости вероятностных функций для ряда значений параметров a и b приведены на рисунке 2.5. Отметим, что при $b = 1$ закон Вейбулла трансформируется в экспоненциальный закон (15), а при $b = 2$ – в закон Рэлея (17).



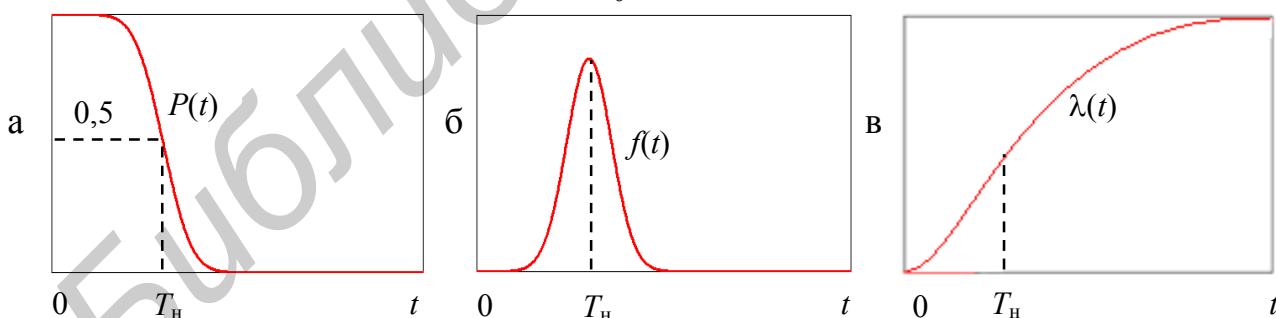
а – вероятность безотказной работы $P(t)$; б – частота отказов $f(t)$;
в – интенсивность отказов $\lambda(t)$

Рисунок 2.5 – Примерный вид зависимостей для закона Вейбулла

2.3.5 Нормальный (Гаусса) закон

Для этого закона характерно, что он также определяется двумя фиксированными параметрами T_H и σ_H [11, 12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } f(t) = \frac{1}{\sigma_H \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(t-T_H)^2}{2\sigma_H^2}\right); \\ \text{б) } P(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - \int_0^t f(t)dt = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{t-T_H}{\sigma_H}\right); \\ \text{в) } \Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx; \\ \text{г) } \lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}; \quad \text{д) } T_0 = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt = T_H; \quad \text{е) } \sigma_T = \sigma_H, \end{array} \right. \quad (19, \text{а-е})$$



а – вероятность безотказной работы $P(t)$; б – частота отказов $f(t)$;
в – интенсивность отказа $\lambda(t)$

Рисунок 2.6 – Типовые зависимости нормального (Гаусса) закона

Величина T_Γ для заданного P_Γ определяется численным решением из уравнения

$$P_\Gamma = P(T_\Gamma) = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{T_\Gamma - T_H}{\sigma_H}\right), \quad (19, \text{ж})$$

с учетом, что $\Phi_0(+z) = -\Phi_0(-z)$; T_H и σ_H – параметры нормального закона, при этом $T_H \geq 3\sigma_H$, $T_r < T_H$. Формула (19, в) – табличная функция Лапласа (приложение Б).

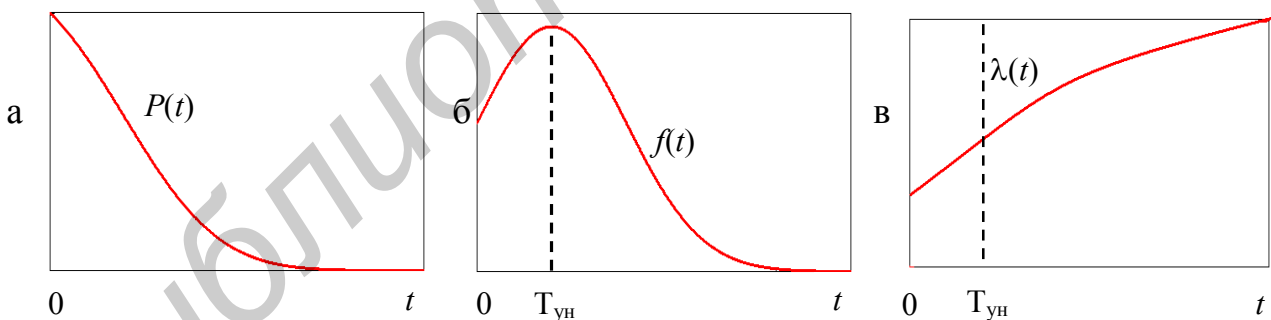
Как следует из (19, д, е), параметры закона T_H и σ_H в данном случае численно равны среднему времени безотказной работы T_0 и его среднему квадратическому отклонению σ_T .

Типовые зависимости для нормального закона приведены на рисунке 2.6.

2.3.6 Усеченный нормальный закон

Этот закон характеризуется параметрами T_{yH} , σ_{yH} и следующими соотношениями [11, 12]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } f(t) = \frac{C_y}{\sigma_{yH} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-T_{yH})^2}{2\sigma_{yH}^2}\right); \quad C_y = \frac{1}{0,5 + \Phi_0(z_0)}; \quad z_0 = \frac{T_{yH}}{\sigma_{yH}}; \\ \text{б) } P(t) = C_y \left[\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{t-T_{yH}}{\sigma_{yH}}\right) \right]; \\ \text{в) } \lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}; \\ \text{г) } T_0 = T_{yH} + k\sigma_{yH}; \quad k = \left(\frac{C_y}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp\left(-\frac{T_{yH}^2}{2\sigma_{yH}^2}\right); \\ \text{д) } \sigma_T = \sigma_{yH} \sqrt{1 - k^2 + k \frac{T_{yH}}{\sigma_{yH}}}; \end{array} \right. \quad (20, \text{а-д})$$



а – вероятность безотказной работы $P(t)$; б – частота отказов $f(t)$,
в – интенсивность отказа $\lambda(t)$

Рисунок 2.7 – Примерные зависимости для усеченного нормального закона

Гарантированное время безотказной работы T_r определяется численным решением из уравнения

$$P_r = C_y \left[\frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{T_r - T_{yH}}{\sigma_{yH}}\right) \right]. \quad (20, \text{е})$$

Отметим, что здесь в отличие от нормального закона, $T_0 \neq T_{ун}$; $\sigma_T \neq \sigma_{ун}$, при этом $T_{ун} < 3\sigma_{ун}$; $T_0 > T_{ун}$.

Теоретические зависимости, относящиеся к усеченному нормальному закону, показаны на рисунке 2.7.

Приведенные законы распределения, хотя и являются широко распространенными и хорошо известными, тем не менее составляют только часть известных в науке вероятностных законов. Кроме того, на практике часто применяют также и композиции рассмотренных выше законов.

2.4 Исследование функций надежности по результатам испытаний

Опытные испытания являются очень важным инструментом для определения реальных характеристик и параметров надежности технических объектов. На практике применяют различные варианты проведения опытных испытаний, которые отличаются, например, числом испытываемых изделий, условиями проведения экспериментов, возможностью замены в ходе испытаний отказавших изделий на другие исправные или на те же, но после восстановительного ремонта и т. д. [7, 11, 12, 14, 17].

В зависимости от условий проведения опытных испытаний различают **форсированные** (или ускоренные) испытания и **нормальные** (или рабочие) испытания.

В режиме форсированных испытаний сознательно создают более тяжелые условия работы испытываемых изделий (например, за счет повышенной температуры, повышенных или пониженных питающих напряжений, значительной вибрации, тряски, ударов и т. п.), при которых существенно сокращается время безотказной работы каждого изделия и, соответственно, общее время испытания всей партии изделий. По результатам форсированных испытаний определяются тип и параметры вероятностного закона (например, из числа рассмотренных выше), наиболее точно аппроксимирующие результаты опыта.

В режиме проведения **нормальных** (или рабочих) испытаний условия проведения эксперимента соответствуют **типовым условиям эксплуатации** испытываемых изделий, при которых время безотказной работы изделия существенно больше (в десятки и даже сотни раз), чем в режиме форсированных испытаний. При этом среднее время безотказной работы может составлять десятки лет и более (например, среднее время безотказной работы навигационных спутников (ИСЗ) системы ГЛОНАСС и GPS составляет не менее 5 лет [19]).

В таких условиях приходится проводить **укороченные** испытания на надежность, не дожидаясь выхода из строя всех изделий из испытываемой партии. При известном законе вероятности безотказной работы (обоснованном по результатам форсированных испытаний) в этом случае определяются только параметры этого закона (один или два параметра), которые наиболее точно аппроксимируют результаты укороченных экспериментов.

Для решения указанных задач целесообразно осуществлять предварительную обработку исходных данных – результатов опытных испытаний, которые обычно представляют в виде набора пар данных $\{H_j, t_j\}$, $j \in [1, N_0]$, где H_j – номер j -го изделия, присвоенный ему до начала испытания; t_j – время работы до отказа j -го изделия; N_0 – общее число изделий.

Пусть максимальное время работы до отказа последнего из партии изделия составляет t_{\max} . Поскольку представляемое число изделий в партии N_0 , как правило, не менее 100, удобно весь рассматриваемый временной интервал $0 - t_{\max}$ разделить на K одинаковых подынтервалов длительностью Δt , рассчитываемых из уравнений [2, 7]:

$$\text{а) } K \geq (1 + 1,4 \ln N_0) = 1 + \frac{1}{6,2} \cdot 20 \lg N_0, \quad \text{б) } \Delta t = \frac{t_{\max}}{K}. \quad (21, \text{а-б})$$

Рекомендуется выбирать K не менее 10.

Результаты испытаний удобно свести в двухстрочную таблицу вида $i-n_i$, где в верхней строке указывается номер интервала $i = 1, 2, \dots, K$, а в нижней строке – число изделий n_i , вышедших из строя в промежутке времени $\Delta t_i \in [t_{i-1}, t_i]$ от $t_{i-1} = (i-1)\Delta t$ до $t_i = i\Delta t$. Пример такого представления результатов испытаний приведен в таблице 2.1 (верхние две строки). Здесь $K = 13$; $i \in \overline{1,13}$; $N_0 = 100 = \sum_{i=1}^{13} n_i$.

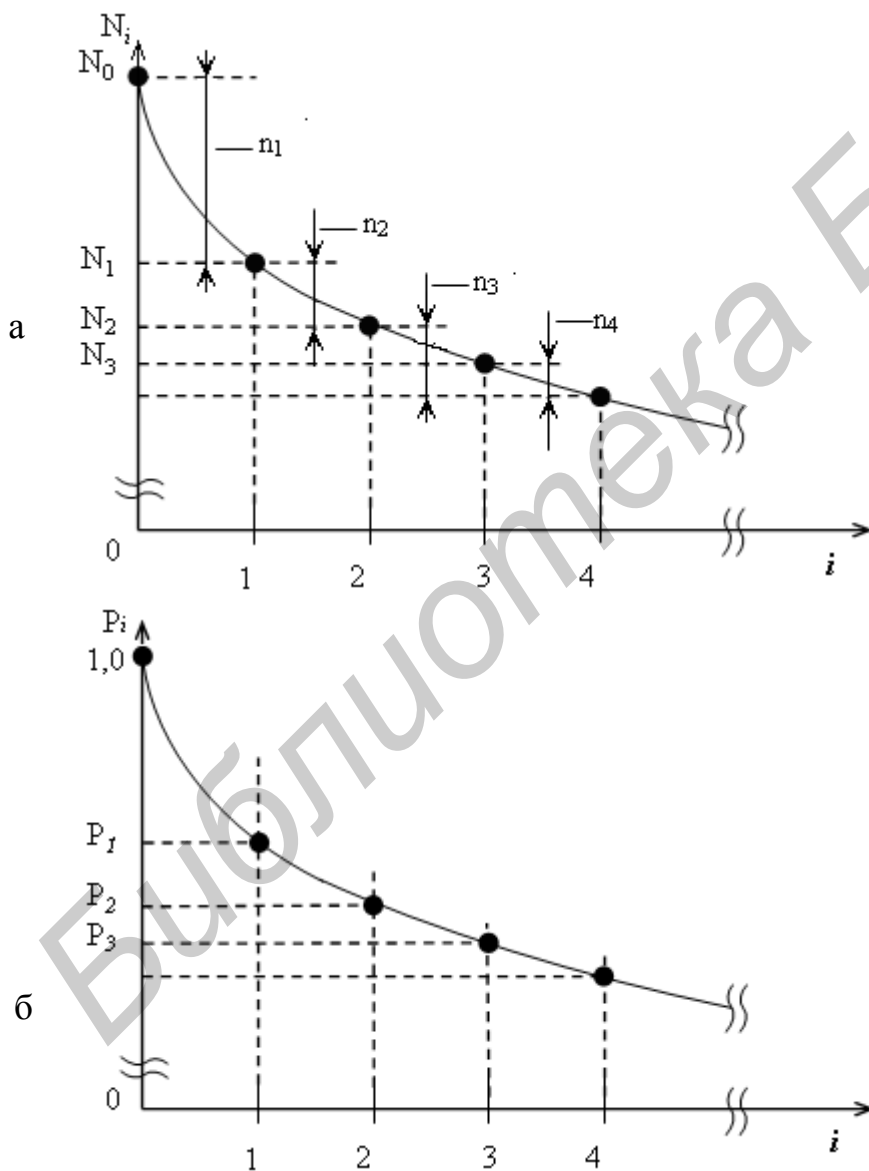
Таблица 2.1 – Пример группирования опытных данных по интервалам

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n_i	33	27	14	10	5	3	4	0	0	1	0	2	1
N_i	67	40	26	16	11	8	4	4	4	3	3	1	0
P_i	0,67	0,40	0,26	0,16	0,11	0,08	0,04	0,04	0,04	0,03	0,03	0,01	0,00
$f_i \Delta t$	0,33	0,27	0,14	0,1	0,05	0,03	0,04	0	0	0,01	0	0,02	0,01
$\lambda_i \Delta t$	0,4	0,51	0,42	0,47	0,38	0,33	0,66	0	0	0,28	0	1,0	2,0

Имея результаты испытаний, представленные в виде, подобном первым двум строкам таблицы 2.1, нетрудно определить **выборочные значения** других характеристик безотказной работы.

Примерные значения функций $N_i = N_0 - \sum_{s=1}^i n_s$, P_i , f_i и λ_i , рассчитанные по формулам (22), в зависимости от времени $t_i = i\Delta t$ по исходным данным таблицы 2.1, приведены в нижних строках таблицы 2.1. Соответствующие им зависимости показаны на рисунках 8, а, б и 9, а, б. Пунктиром показаны приближенные зависимости $P(t_i)$ и $\lambda(t_i)$, которые обычно используются в последующих задачах о нахождении оптимальных параметров функций безотказной работы.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } P(t = i\Delta t) &= P_i = \frac{N_i}{N_0} = 1 - \sum_{s=1}^i \frac{n_s}{N_0} = 1 - \left(\frac{n_1 + n_2 + \dots + n_i}{N_0} \right); \quad P_0 = 1; i = 0; \\
 \text{б) } P((i-1)\Delta t < t < i\Delta t) &= P_{i-1} - (P_{i-1} - P_i) \frac{(t - (i-1)\Delta t)}{\Delta t} \cong \frac{P_{i-1} + P_i}{2} = \frac{N_{i-1} + N_i}{2N_0}; \\
 \text{в) } f(t = i\Delta t) &= f_i = \frac{P_{i-1} - P_i}{\Delta t} = \frac{n_i}{N_0 \Delta t}; \quad i \in \overline{1, K}; f((i-1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t) = f_i, \quad (22, \text{а-д}) \\
 \text{г) } \lambda((i-1)\Delta t < t < i\Delta t) &= \frac{f_i}{P((i-1)\Delta t < t < i\Delta t)} \cong \frac{2f_i}{P_{i-1} + P_i} \cong \frac{2n_i}{\Delta t(N_i + N_{i-1})}; \\
 \text{д) } \frac{\Delta \lambda_i}{\Delta t} &= \frac{\lambda_i - \lambda_{i-1}}{\Delta t} = \frac{2}{\Delta t^2} \left(\frac{n_i}{N_i + N_{i-1}} - \frac{n_{i-1}}{N_{i-1} + N_{i-2}} \right).
 \end{aligned}$$



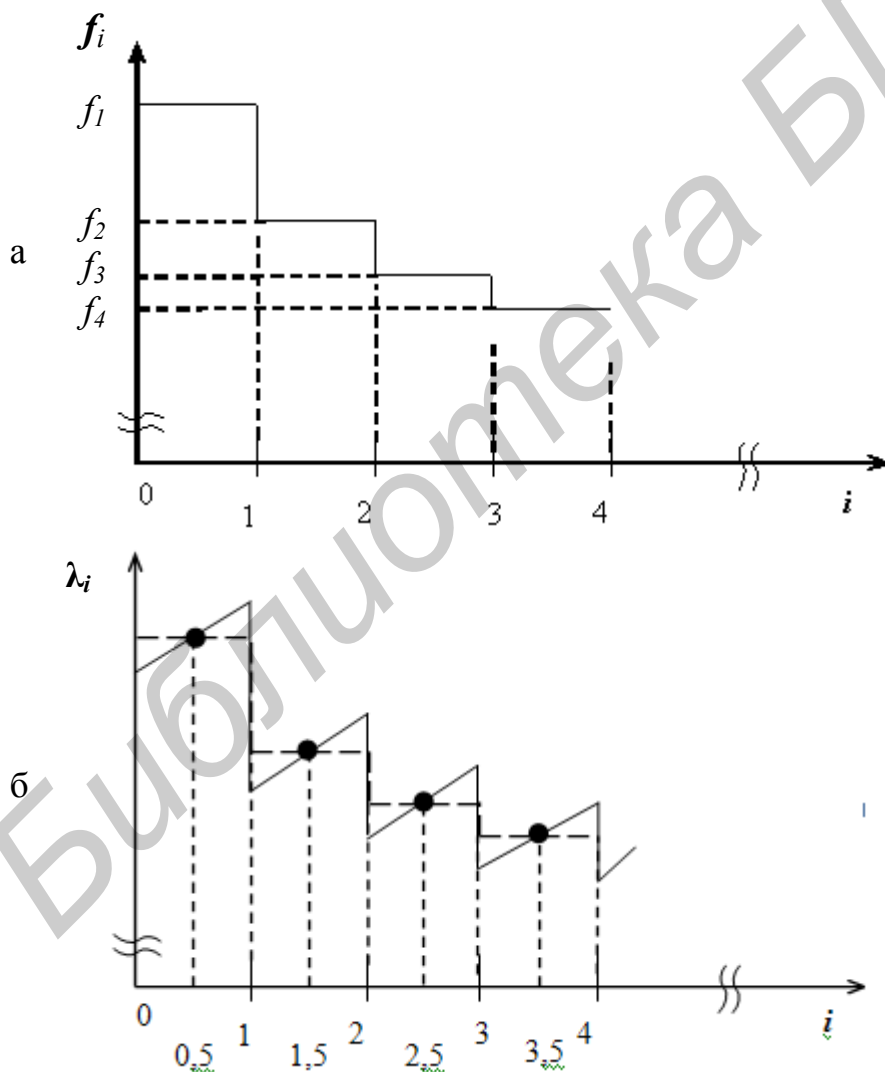
а – $N_i = \varphi(t)$; б – $P_i(t)$ по данным таблицы 2.1

Рисунок 2.8 – Примерный вид изменения функций

В качестве **числовых показателей (оценок)** выборочных функций (22) часто принимают выборочные первый M_1 и второй M_2 моменты распределения и выборочную дисперсию S . Первый выборочный момент называется также **выборочным средним**, второй – **выборочным средним квадратом**. Они определяются с учетом (22) из выражений

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } M_1 = \sum_{i=1}^K t_i f_i \Delta t \cong \frac{\Delta t}{N_0} \sum_{i=1}^K (i - 0,5) n_i ; \\ \text{б) } M_2 = \sum_{i=1}^K t_i^2 f_i \Delta t \cong \frac{\Delta t^2}{N_0} \sum_{i=1}^K (i - 0,5)^2 n_i ; \\ \text{в) } S^2 = M_2 - M_1^2 . \end{array} \right. \quad (23, \text{а-в})$$

В формулах (23) за t_i принимают середину i -го интервала.



а – $f(t_i)$; б – $\lambda(t_i)$ по данным таблицы 2.1

Рисунок 2.9 – Примерная зависимость во времени функций

Основной задачей при статистической обработке выборочных функций (22) является нахождение такого **оптимального теоретического закона** распределения и **его параметров**, которые в наибольшей степени обеспечивают совпадение с выборочными экспериментальными функциями (22), полученными по результатам опытных испытаний.

В качестве **критерия близости** обычно используют **средний квадрат отклонений** между значениями выбранной выборочной экспериментальной функции $\varphi_{\text{Э}}(t_i)$ и соответствующей **теоретической** кривой $\varphi_{\text{Т}}(t_i)$ в виде

$$D_{\text{ЭТ}} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (\varphi_{\text{Э}}(t_i) - \varphi_{\text{Т}}(t_i))^2. \quad (24)$$

Очевидно, функции $\varphi_{\text{Э}}(t_i)$ и $\varphi_{\text{Т}}(t_i)$ должны быть **одноименными** и отражать или функцию вероятности безотказной работы $P(t)$ или плотность вероятности $f(t)$ или, наконец, интенсивность отказов $\lambda(t)$ для реального (экспериментального) и теоретического распределений.

Во многих случаях, особенно когда экспериментальная функция $\varphi_{\text{Э}}(t_i)$ существенно меняется в разные моменты времени t_i , более «чутким» **критерием различия** экспериментальной и теоретической функций является так называемый **относительный средний квадрат отклонения**, определяемый в виде

$$D_{\text{ЭТ.ОТН}} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left(\frac{\varphi_{\text{Э}}(t_i) - \varphi_{\text{Т}}(t_i)}{\varphi_{\text{Э}}(t_i)} \right)^2. \quad (24, a)$$

К сожалению, в настоящее время не существует таких аналитических методов решения, которые в ходе минимизации функционала (24) или (24, a) позволяли сразу найти и оптимальный закон распределения (з. п.) $\varphi_{\text{Т}}(t_i)$ и его оптимальные параметры (точечные оценки). Поэтому на практике применяют метод, который называют «синтез через анализ». Он включает в себя несколько последовательно выполняемых процедур – этапов.

На **первом** этапе, ориентируясь на вид выбранной экспериментальной зависимости $\varphi_{\text{Э}}(t_i)$, $i \in \overline{1, K}$, выбирают несколько типов теоретических законов распределения, которые имеют теоретические зависимости $\varphi_{\text{Т}}(t_i)$, подобные экспериментальной кривой.

На **втором** этапе для **каждого** из выбранных теоретических законов (например, p -го) **подбирают его параметры** (параметры закона) таким образом, чтобы минимизировать (24) (далее мы увидим, что эту процедуру можно выполнить несколькими способами (например j -м способом) и каждый из них следует проверить).

На **третьем** этапе выбирают тот теоретический закон распределения (его называют **квазиоптимальным**), который обеспечивает **минимальное** значение (24) по сравнению с другими. Алгоритм принятия решения по предлагаемой схеме показан на рисунке 2.10.

2.5 Определение оптимальных параметров выбранного теоретического закона распределения

Как уже говорилось, для каждого из выбранных теоретических законов распределения с учетом особенностей поведения его функций $P(t)$, $f(t)$ и $\lambda(t)$ можно предложить несколько вариантов определения параметров этого закона. На практике наиболее часто используются методы, получившие название «методов моментов» (ММ), «метода максимального правдоподобия» (ММП) и «метода наименьших квадратов» (МНК). Рассмотрим их применительно к каждому из рассмотренных выше теоретических законов распределения.

2.5.1 Параметрическая оптимизация экспоненциального закона

Для данного закона (см. (15, а–е)) неизвестным является один параметр a . Используя метод моментов, примем, что среднее время безотказной работы T_0 , определяемое из (11) и (15, г), примерно равно выборочному среднему M_1 экспериментальной функции, определяемому из (23, а). Тогда

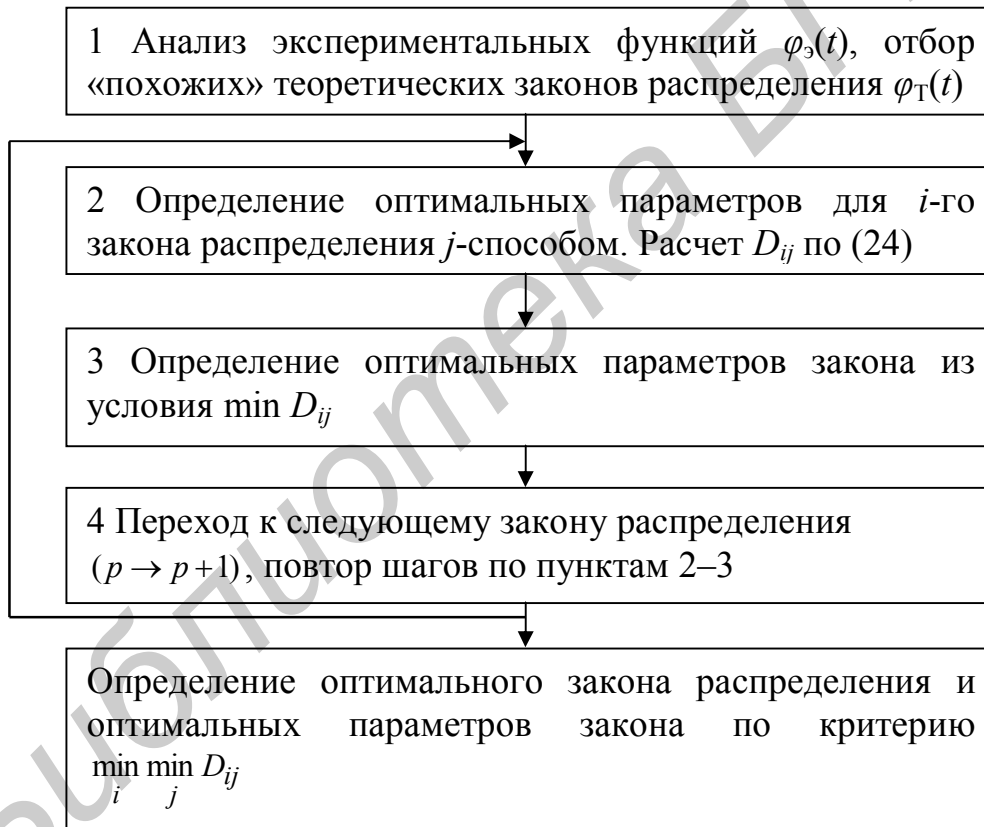


Рисунок 2.10 – Алгоритм оптимизации закона распределения и его параметров по результатам экспериментов

$$\frac{1}{a} \cong \sum_{i=1}^K \frac{(i-0,5)n_i \Delta t}{N_0}; \quad a = a_{11} = \frac{N_0}{\Delta t} \left(\sum_{i=1}^K (i-0,5) \cdot n_i \right)^{-1}. \quad (25, a)$$

Аналогично можно говорить о примерном равенстве среднего квадрата распределения (15) и выборочного среднего квадрата опытного распределения.

Тогда, учитывая (23, б) и (15, г), (15, д), получим $T_0^2 + \sigma_T^2 = \frac{2}{a^2} \cong M_2$ или

$$a = a_{12} \cong \left\{ \sum_{i=1}^K (i-0,5)^2 \Delta t^2 n_i / 2N_0 \right\}^{-0,5} = (\sqrt{2N_0} / \Delta t) \left\{ \sum_{i=1}^K (i-0,5)^2 n_i \right\}^{-0,5}. \quad (25, б)$$

При использовании **метода наименьших квадратов** учтем свойство этого закона (15, в) и (22). Тогда имеем $\lambda_i \approx a$. Подберем параметр a методом наименьших квадратов таким образом, чтобы минимизировать функционал

$$Q = \sum_{i=1}^K (\lambda_i - a)^2 \rightarrow \min.$$

Из условия $dQ/da = 0$ и с учетом (22, г) получим

$$a = a_{13} = \sum_{i=1}^K \frac{\lambda_i}{K} = \frac{2}{K\Delta t} \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N_{i-1} + N_i}. \quad (25, в)$$

При использовании **метода максимального правдоподобия (ММП)** неизвестный параметр a находится на основе использования **функции правдоподобия**, которая определяется в виде [1, 3, 7, 8, 18] $L = \prod_{i=1}^M f(t_i)$, где

$f(t_i)$ определяется из (15, б), M – достаточно большое число анализируемых точек. Можно показать [3, 7, 8], что исследование на экстремум функции $L = \varphi(a)$ в зависимости от параметра a так же, как и функции $\ln L = \ln \varphi(a)$, дает одно и то же оптимальное значение a . Тогда решая уравнение $d \ln L / da = 0$ и учитывая (15, б), придем к выражению

$f(t_i)$ определяется из (15, б), M – достаточно большое число анализируемых точек. Можно показать [3, 7, 8], что исследование на экстремум функции $L = \varphi(a)$ в зависимости от параметра a так же, как и функции $\ln L = \ln \varphi(a)$, дает одно и то же оптимальное значение a . Тогда решая уравнение $d \ln L / da = 0$ и учитывая (15, б), придем к выражению

$$\frac{d \ln L}{da} = \frac{d \ln \prod_{i=1}^M a \exp(-at_i)}{da} = \frac{d}{da} [\ln a^M \exp(-a \sum_{i=1}^M t_i)] = \frac{d}{da} [M \ln a - a \sum_{i=1}^M t_i] = 0.$$

Взяв производную, придем к уравнению $a_{\text{опт}}^{-1} = \sum_{i=1}^M t_i / M$ и далее –

к выражению, аналогичному (25, а). Следовательно, **в данном случае ММП** дает тот же результат (значение параметра a), что и **метод первого момента**.

Предпочтительность выбора варианта параметра a_{1j} ($j = 1 - 3$) оценивают по величине среднего квадрата ошибки аппроксимации закона вероятности безотказной работы, используя (24), (15, а) и (22, а, б). Тогда

$$D_{1j} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K [\exp(-a_{1j}(i-0,5)\Delta t) - 0,5(P_{i-1} + P_i)]^2; \quad j = 1, 2, 3. \quad (25, г)$$

Наряду с критерием (25, г) при сравнении нескольких законов распределения может быть полезным также и использование критерия минимума среднего квадрата ошибки аппроксимации функции **плотности**

вероятности экспериментального закона. Тогда используя (15, б) и (22, в), получим

$$D^*_{1j} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K [a_{1j} \exp(-a_{1j}(i-0,5)\Delta t) - (n_i / N_0 \Delta t)]^2. \quad (25, д)$$

То значение $a_{1j}, j = 1, 2, 3$, которое обеспечивает наименьшее значение D_{1j} или D^*_{1j} , считается более точным и используется в последующих расчетах.

2.5.2 Параметрическая оптимизация закона Эрланга

Для закона Эрланга (см. выражение (16)) неизвестным также является один параметр a . Применяя **метод моментов**, совместно используем выражения (16, г, д) и (23, а, б). Тогда на основании (23, а) и (16, д), т. е. приравнявая **первые моменты**, получим

$$a = a_{21} = \frac{2N_0}{\Delta t} \left(\sum_{i=1}^K (i-0,5)n_i \right)^{-1}. \quad (26, а)$$

На основании (16, д, е) и (23, б), приравнявая **вторые моменты**, получим

$$a = a_{22} = \frac{\sqrt{6N_0}}{\Delta t} \left\{ \sum_{i=1}^K (i-0,5)^2 n_i \right\}^{-0,5}. \quad (26, б)$$

При использовании метода **максимального правдоподобия** (ММП) с учетом (16, б) приходим к решению уравнения $d \ln L / da = 0$ или

$$\frac{d \ln L}{da} = \frac{d}{da} \left[\ln \prod_{i=1}^M f(t_i) \right] = \frac{d}{da} \ln \prod_{i=1}^M a^2 t_i \exp(-at_i) = \frac{d}{da} \left[\sum_{i=1}^M (\ln t_i + 2 \ln a - at_i) \right] = \frac{2M}{a} - \sum_{i=1}^M t_i = 0.$$

Отсюда $a = 1 / \left\{ \sum_{i=1}^M t_i / 2M \right\}$. Здесь, как и ранее, M – достаточно большое число

точек анализа. Сравнивая с (26, а), приходим к выводу, что ММП в **данном случае** дает тот же результат, что и метод моментов при сравнении **первых моментов** теоретического и опытного распределений.

Метод наименьших квадратов (МНК) требует преобразования функций $P(t), f(t)$, или $\lambda(t)$ к виду, удобному для однозначного определения неизвестного параметра a . Здесь возможны несколько вариантов. В первом случае целесообразно использовать функцию

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{d\lambda(t)}{dt}} = \frac{a}{1+at},$$

определяемую из (16, г). Тогда

$$a = \frac{\psi(t)}{1-t\psi(t)} = \varphi(t).$$

Подберем параметр a таким образом, чтобы минимизировать функционал

$$Q = \sum_{i=1}^K (\varphi(t_i) - a)^2 \rightarrow \min.$$

Из условия $dQ/da = 0$, получим

$$a = \sum_{i=1}^K \frac{\varphi(t_i)}{K} = \sum_{i=1}^K \frac{\Psi(t_i)}{K(1 - t_i \cdot \Psi(t_i))}.$$

Полагая, что $\Psi(t) \cong \sqrt{\frac{\Delta\lambda(t)}{\Delta t}}$ и $t_i = (i - 0,5)\Delta t$, получим

$$a = a_{23} = \sum_{i=1}^K \frac{K^{-1} \cdot \sqrt{(\lambda_i - \lambda_{i-1})/\Delta t}}{1 - (i - 0,5)\Delta t \sqrt{(\lambda_i - \lambda_{i-1})/\Delta t}}. \quad (26, в)$$

Для удобства вычислений по формуле (26, в) полезно использовать (22, д).

Во втором случае удобно использовать функцию $\lambda(t)$, определяемую из (16, в) для моментов времени t_i и $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Тогда

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} = \frac{(t_i + \Delta t)(1 + at_i)}{t_i(1 + a(t_i + \Delta t))} = \frac{(1 + \Delta t/t_i)(1 + at_i)}{1 + a(t_i + \Delta t)}, \text{ откуда}$$

$$a = \frac{\Delta t/t_i - \Delta\lambda_i/\lambda_i}{(t_i + \Delta t)\Delta\lambda_i/\lambda_i} = \varphi(t_i), \text{ где } \Delta\lambda_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i.$$

Минимизируя, как и ранее, функцию $Q = \sum_{i=1}^K (\varphi(t_i) - a)^2$, из условия

$dQ/da = 0$ получим

$$a = a_{24} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta t/t_i - \Delta\lambda_i/\lambda_i}{(t_i + \Delta t)\Delta\lambda_i/\lambda_i} = \frac{1}{\Delta t(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i(i-0,5)^{-1} - \Delta\lambda_i}{(i+0,5)\Delta\lambda_i}. \quad (26, г)$$

Как и в предыдущем параграфе, выбор предпочтительного значения a_{2j} , $j = 1-4$ из (26, а-г) производят, ориентируясь на оценку среднего квадрата ошибки аппроксимации, используя (24), (16, а) и (22, а, б). Тогда для $j = 1-4$

$$D_{2j} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[(1 + a_{2j}(i-0,5)\Delta t) \exp(-a_{2j}(i-0,5)\Delta t) - 0,5(P_{i-1} + P_i) \right]^2. \quad (26, д)$$

Если для сравнения с другими законами распределения более наглядно производить сравнение по функциям **плотности вероятности** теоретического и опытного законов, то тогда средний квадрат ошибки аппроксимации находят, используя (16, б) и (22, в) в виде

$$D_{2j}^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[a_{2j}^2 (i-0,5)\Delta t \exp(-a_{2j}(i-0,5)\Delta t) - n_i / N_0 \Delta t \right]^2. \quad (26, е)$$

В последующих расчетах используется то значение a_{2j} , которое обеспечивает минимальное значение D_{2j} или D_{2j}^* .

2.5.3 Параметрическая оптимизация закона Рэлея

Для закона Рэлея (см. выражение (17)) оптимизируемым является один параметр a . Применяя **метод моментов**, можно двумя способами определить этот параметр. Так, используя (17, г) и (23, а), т. е. приравнивая **первые моменты** теоретического и экспериментального распределений, получим

$$a = a_{31} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{N_0}{\Delta t} \right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^K (i - 0,5) n_i \right\}^{-2} \quad (27, а)$$

Приравнивая **вторые моменты** распределений (17, з) и (23, б), получим

$$a = a_{32} = \frac{N_0}{\Delta t^2} \left\{ \sum_{i=1}^K (i - 0,5)^2 n_i \right\}^{-1} \quad (27, б)$$

При использовании **метода максимального правдоподобия** (ММП), как и ранее, анализируется функция $\ln L = \ln \prod_{i=1}^M 2at_i \exp(-at^2_i)$ (см. (17, б)). Решая уравнение $d \ln L / da = 0$, после ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} [\ln L] &= \frac{d}{da} \left\{ \ln \prod_{i=1}^M 2at_i \exp(-at^2_i) \right\} = \frac{d}{da} \left\{ \sum_{i=1}^M (\ln 2at_i - at^2_i) \right\} = \frac{d}{da} \left\{ \sum_{i=1}^M (\ln a + \ln 2t_i - at^2_i) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{a} - t^2_i \right) = \frac{M}{a} - \sum_{i=1}^M t^2_i = 0. \end{aligned}$$

Далее приходим к решению вида: $a^{-1} = \sum_{i=1}^M t^2_i / M \cong M_2$, что совпадает с (17, ж) и

(27, б). Таким образом, **в данном случае** ММП дает тот же результат, что и при использовании равенства **вторых моментов** теоретического и опытного (эмпирического) распределений.

При использовании **метода наименьших квадратов** (МНК) можно применить как условие (17, в), так и (17, г). При использовании (17, в) подбор параметра a сводится к задаче минимизации функционала $Q = \sum_{i=1}^K (\lambda(t_i) - 2at_i)^2$.

Из условия $dQ/da = 0$ приходим к уравнению вида $a = a_{33} = \sum_{i=1}^K \lambda_i t_i / 2 \sum_{i=1}^K t_i^2$,

которое с учетом (22, г) приводится к виду

$$a = a_{33} = \frac{12}{K \Delta t^2 \cdot (4K^2 - 1)} \sum_{i=1}^K \frac{n_i (i - 0,5)}{N_{i-1} + N_i} \quad (27, в)$$

При выводе (27, в) использовано $t_i = (i - 0,5)\Delta t$ и $\sum_{i=1}^K i^2 = K(K + 1)(2K + 1) / 6$.

При использовании выражения (17, г) в соответствии с методом наименьших квадратов подбор параметра a сводится к минимизации функционала

$Q = \sum_{i=1}^K (\lambda'(t_i) - 2a)^2$, где $\lambda'(t_i) \cong (\lambda_{i+1} - \lambda_i) / \Delta t$. Из условия $dQ/da = 0$ приходим

к уравнению $\sum_{i=1}^K (\lambda'(t_i) - 2a) = 0$, которое записывается в виде

$$a = a_{34} = \sum_{i=1}^K \frac{\lambda'(t_i)}{2K} \cong \frac{\lambda_K - \lambda_1}{2K\Delta t} \cong \frac{1}{K\Delta t^2} \left(\frac{n_K}{N_{K-1}} - \frac{n_1}{N_0 + N_1} \right). \quad (27, \text{г})$$

Как и для предыдущих законов, предпочтительным считается тот вариант параметра $a_{3j}, j = 1 - 4$, который для закона Рэля обеспечивает минимум среднего квадрата ошибки аппроксимации закона вероятности безотказной работы:

$$D_{3j} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[\exp(-a_{3j}(i-0,5)^2 \Delta t^2) - 0,5(P_{i-1} + P_i) \right]^2. \quad (27, \text{д})$$

Если сравниваются функции плотности вероятности теоретического и эмпирического закона, то тогда используют (17, б) и (22, в)

$$D_{3j}^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[2a_{3j}(i-0,5)\Delta t \exp(-a_{3j}(i-0,5)^2 \Delta t^2) - n_i / N_0 \Delta t \right]^2. \quad (27, \text{е})$$

2.5.4 Параметрическая оптимизация закона Вейбулла

Для закона Вейбулла (см. выражение (18)) необходимо оптимизировать два параметра: a и b . Как видно из (18, г) и (18, д), метод моментов не позволяет непосредственно определить эти параметры, поскольку и первый, и второй моменты распределения сложным образом зависят одновременно от параметров a и b . Также неконструктивным оказывается и метод максимального правдоподобия.

При использовании **метода наименьших квадратов** требуется предварительно провести определенные преобразования над известными функциями $P(t)$, $f(t)$, и $\lambda(t)$, чтобы привести их к системе линейных уравнений относительно оптимизируемых параметров. Целесообразно в качестве исходной преобразуемой функции выбрать функцию (18, в): $\lambda(t) = abt^{b-1}$, считая известными ее значения в моменты $t_i = (i-0,5)\Delta t, i \in \overline{1, K}$. Логарифмируя обе части равенства, приходим к выражению вида

$$\ln \lambda(t_i) = \ln(ab) + (b-1)\ln(t_i),$$

которое с учетом введенных обозначений:

$$1) \ln(ab) = X_0; 2) (b-1) = Y_0; 3) \ln \lambda(t_i) = \ln \lambda_i = \varphi_i; 4) \ln(t_i) = \Psi_i \quad (28, \text{а})$$

приводится к уравнению вида: $X_0 + Y_0 \Psi_i - \varphi_i = 0$.

Последнее является **линейным** относительно неизвестных переменных X_0 и Y_0 .

Будем подбирать эти переменные таким образом, чтобы они минимизировали функционал $Q = \sum_{i=1}^K (X_0 + Y_0 \Psi_i - \varphi_i)^2$. Из решения системы

уравнений: 1) $dQ/dX_0 = 0$; 2) $dQ/dY_0 = 0$, приходим к системе уравнений вида

$$1) KX_0 + Y_0 \sum_{i=1}^K \Psi_i = \sum_{i=1}^K \varphi_i; 2) X_0 \sum_{i=1}^K \Psi_i + Y_0 \sum_{i=1}^K \Psi_i^2 = \sum_{i=1}^K \varphi_i \Psi_i. \quad (28, б)$$

Система двух линейных относительно X_0 и Y_0 уравнений решается известным образом, в результате получаем

$$X_0 = \frac{\sum_{i=1}^K \varphi_i \cdot \sum_{i=1}^K \Psi_i^2 - \sum_{i=1}^K \Psi_i \cdot \sum_{i=1}^K \varphi_i \Psi_i}{K \sum_{i=1}^K \Psi_i^2 - \sum_{i=1}^K \Psi_i \cdot \sum_{i=1}^K \Psi_i}; Y_0 = \frac{\sum_{i=1}^K \varphi_i \cdot \sum_{i=1}^K \Psi_i - K \sum_{i=1}^K \varphi_i \Psi_i}{\sum_{i=1}^K \Psi_i \cdot \sum_{i=1}^K \Psi_i - K \sum_{i=1}^K \Psi_i^2}. \quad (28, в)$$

Учитывая (28, а) и (28, в), определяем искомые параметры:

$$b = 1 + Y_0; a = \frac{\exp(X_0)}{1 + Y_0}. \quad (28, г)$$

При расчете по формулам (28, г) и (28, в) целесообразно использовать приводимые ниже упрощения:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \sum_{i=1}^K \varphi_i = \sum_{i=1}^K \ln \lambda_i = \ln \left(\prod_{i=1}^K \lambda_i \right); \\ 2) \sum_{i=1}^K \Psi_i = \sum_{i=1}^K \ln t_i = \sum_{i=1}^K \ln(i-0,5)\Delta t = \sum_{i=1}^K (\ln(i-0,5) + \ln \Delta t) = K \ln \Delta t + \ln \left[\frac{(2K)!}{K! 2^{2K}} \right] = \ln \left\{ \Delta t^K (2K)! / 2^{2K} \cdot K! \right\}; \\ 3) \sum_{i=1}^K \Psi_i^2 = \sum_{i=1}^K (\ln(i-0,5)\Delta t)^2 = \sum_{i=1}^K (\ln(i-0,5) + \ln \Delta t)^2 = \sum_{i=1}^K \ln^2(i-0,5) + 2 \ln \Delta t \cdot \ln \left\{ \frac{(2K)!}{2^{2K} \cdot K!} \right\} + K (\ln \Delta t)^2; \\ 4) \sum_{i=1}^K \Psi_i \cdot \sum_{i=1}^K \Psi_i = \left(\sum_{i=1}^K \Psi_i \right)^2 = \ln^2 \left\{ \frac{\Delta t^K \cdot (2K)!}{2^{2K} \cdot K!} \right\}; \\ 5) \sum_{i=1}^K \varphi_i \Psi_i = \sum_{i=1}^K \ln \lambda_i \cdot \ln t_i = \sum_{i=1}^K (\ln \lambda_i (\ln(i-0,5) + \ln \Delta t)) = (\ln \Delta t) \cdot \ln \left(\prod_{i=1}^K \lambda_i \right) + \ln \left(\prod_{i=1}^K (i-0,5)^{\ln \lambda_i} \right). \end{array} \right. \quad (28, д)$$

В этих формулах λ_i определяется из (22, г).

После определения оптимальных параметров распределения a и b рассчитывается средний квадрат ошибки аппроксимации

$$D_4 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[\exp(-a((i-0,5)\Delta t)^b) - 0,5(P_{i-1} + P_i) \right]^2, \quad (28, е)$$

если сравниваются функции вероятности безотказной работы для теоретического и экспериментального законов.

Иногда удобнее ориентироваться на средний квадрат ошибки аппроксимации функций плотности вероятности теоретического и экспериментального законов. Тогда используя (18, б) и (22, в), получим

$$D_4^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[ab t_i^{b-1} \exp(-a t_i^b) - \frac{n_i}{N_0 \Delta t} \right]^2, \quad (28, ж)$$

где, как и ранее, $t_i = (i-0,5)\Delta t, i \in [1, K]$.

2.5.5 Параметрическая оптимизация нормального закона

Для нормального закона (см. выражения (19)) характерно, что два его параметра: T_H и σ_H – легко определить на основе метода моментов. Тогда с учетом (19, д) и (23, а), т. е. приравнявая **первые моменты**, получим

$$T_H = T_{H1} \cong M_1 = \frac{\Delta t}{N_0} \sum_{i=1}^K (i - 0,5)n_i. \quad (29, а)$$

С учетом (19, е) и (23, б), т.е. приравнявая **вторые моменты**, получим

$$\sigma_H^2 = \sigma_{H1}^2 \cong M_2 - M_1^2 = \frac{\Delta t^2}{N_0} \sum_{i=1}^K (i - 0,5)^2 n_i - T_{H1}^2. \quad (29, б)$$

Другой вариант расчета параметров нормального закона основан на использовании **функции правдоподобия**, определяемой в виде [18]

$$L = \prod_{i=1}^M f(t_i) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^M \sigma_H^M} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_H^2} \sum_{i=1}^M (t_i - T_H)^2 \right],$$

где M – общее число анализируемых точек по времени ($M \gg 1$).

Оптимальные параметры T_H и σ_H находят путем решения системы уравнений

$$1) \partial \ln L / \partial T_H = 0 \text{ и } 2) \partial \ln L / \partial \sigma_H = 0.$$

Можно показать, что в этом случае

$$T_H = T_{H2} = \sum_{i=1}^M \frac{t_i}{M} \approx M_1; \quad (29, в)$$

$$\sigma_H^2 = \sigma_{H2}^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(t_i - T_{H2})^2}{M} = \sum_{i=1}^M \frac{t_i^2}{M} - T_{H2}^2 \cong S^2 \cong M_2 - M_1^2. \quad (29, г)$$

Следовательно, в данном случае **метод максимального правдоподобия** дает **те же результаты**, что и **метод моментов**.

В исследованиях [4] показано, что с целью уменьшения влияния разброса экспериментальных наблюдений на параметры нормального закона последние целесообразно определять по критерию **максимальной устойчивости**:

$$1) T_H = T_{H3} = \frac{\sum_{i=1}^K t_i f_i}{\sum_{i=1}^K f_i}; \quad 2) \sigma_H^2 = \sigma_{H3}^2 = \frac{\sum_{i=1}^K (t_i - T_H)^2 f_i}{0,5 \sum_{i=1}^K f_i}.$$

Если в этих выражениях умножить числитель и знаменатель дроби на величину Δt и учесть, что $\sum_{i=1}^K f_i \Delta t \cong 1,0$, то получим

$$T_{H3} = T_{H1} \text{ (см. (29, а)); } \sigma_{H3}^2 = 2\sigma_{H1}^2 \text{ (см. (29, б)).} \quad (29, д)$$

Четвертый вариант определения параметров нормального закона T_H и σ_H основан на использовании **метода наименьших квадратов**. С этой целью найдем значения функции плотности распределения $f(t)$ (см. (19, а)) для двух

значений $t_1 = t_i$ и $t_2 = t_j$: $f(t = t_i) = f_i$; $f(t = t_j) = f_j$. Тогда $\frac{f_i}{f_j} = \exp\left[\frac{(t_j - T_H)^2 - (t_i - T_H)^2}{2\sigma_H^2}\right]$

и после логарифмирования получаем

$$(t_j - T_H)^2 - (t_i - T_H)^2 - 2\sigma_H^2 \ln\left(\frac{f_i}{f_j}\right) = 0, \text{ где } t_i = (i - 0,5)\Delta t, t_j = (j - 0,5)\Delta t \quad (30, \text{ а})$$

Введем обозначения:

$$\frac{T_H}{\Delta t} = X_0; \frac{\sigma_H^2}{\Delta t^2} = Y_0; j = i + 1; \ln\frac{f_i}{f_{i+1}} = \Psi_i. \quad (30, \text{ б})$$

Тогда предыдущее уравнение (30, а) приведет к виду $i - X_0 - Y_0\Psi_i = 0$.

По методу наименьших квадратов необходимо подобрать такие значения X_0 и Y_0 , которые бы минимизировали функционал $Q = \sum_{i=1}^{K-1} (X_0 + Y_0\Psi_i - i)^2$. Для этого следует решить систему уравнений вида: 1) $\partial Q / \partial X_0 = 0$ и 2) $\partial Q / \partial Y_0 = 0$ относительно неизвестных X_0 и Y_0 . Можно показать, что эта система имеет вид

$$\begin{cases} X_0(K-1) + Y_0 \sum_{i=1}^{K-1} \Psi_i = \frac{(K-1)K}{2}; \\ X_0 \sum_{i=1}^{K-1} \Psi_i + Y_0 \sum_{i=1}^{K-1} \Psi_i^2 = \sum_{i=1}^{K-1} i\Psi_i. \end{cases} \quad (30, \text{ в})$$

Обозначим коэффициенты и постоянные члены в (30, в) с учетом (30, б):

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^{K-1} \Psi_i = \sum_{i=1}^{K-1} \ln\frac{f_i}{f_{i+1}} = \ln\prod_{i=1}^{K-1} \frac{f_i}{f_{i+1}} = \ln\frac{f_1}{f_K}; \\ \beta &= \sum_{i=1}^{K-1} \Psi_i^2 = \sum_{i=1}^{K-1} \ln^2\frac{f_i}{f_{i+1}}; \quad \gamma = \sum_{i=1}^{K-1} i\Psi_i = \ln\prod_{i=1}^{K-1} \left(\frac{f_i}{f_{i+1}}\right)^i, \end{aligned} \quad (30, \text{ г})$$

где значения f_i берутся из (22, в).

Тогда решение системы (30, в) запишется в виде

$$\begin{cases} Y_0 = \frac{(K-1)(0,5K\alpha - \gamma)}{\alpha^2 - \beta(K-1)}; \\ X_0 = \frac{0,5K\beta(K-1) - \gamma\alpha}{\beta(K-1) - \alpha^2}. \end{cases} \quad (30, \text{ д})$$

С учетом (30, б) и (30, д) получим окончательно

$$\sigma_H^2 = \sigma_{H4}^2 = Y_0\Delta t^2; T_H = T_{H4} = X_0\Delta t. \quad (30, \text{ е})$$

В отличие от других законов распределения, рассматриваемых выше, нормальный закон для определения вероятности безотказной работы $P(t)$ в момент

времени t_i требует обращения к табличной функции Лапласа (см. выражение (19)). Тогда средний квадрат ошибки отклонения выбранного теоретического закона распределения с параметрами T_{Hj} и σ_{Hj} , $j = 1 - 4$, определяется в виде

$$D_{5j} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[0,5 - \Phi_0 \left(\frac{t_i - T_{Hj}}{\sigma_{Hj}} \right) - 0,5(P_{i-1} + P_i) \right]^2, \quad (31, a)$$

где, как и ранее, $t_i = (i - 0,5)\Delta t$, P_i , P_{i-1} – экспериментальные значения вероятности безотказной работы для $t = t_i$ и $t = t_{i-1}$ (см. (22, а, б)), $\Phi_0(z)$ – табличная функция Лапласа, определяемая для $z = z_i = \frac{(i - 0,5)\Delta t - T_{Hj}}{\sigma_{Hj}}$ (см. 19, в)

В ряде случаев удобнее определить средний квадрат ошибки аппроксимации, сравнивая функции плотности вероятности теоретического и экспериментального законов распределения. Тогда, используя (19, а) и (22, в), получим

$$D_{5j}^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[\frac{1}{\sigma_{Hj} \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(t_i - T_{Hj})^2}{2\sigma_{Hj}^2} \right) - \frac{n_i}{N_0 \Delta t} \right]^2. \quad (31, б)$$

Расчет по (31, а, б) проводится для всех $j=1 - 4$. **Оптимальными** считаются те значения (T_{Hj}, σ_{Hj}) , которые обеспечивают **минимум** D_{5j} или D_{5j}^* .

2.5.6 Параметрическая оптимизация усеченного нормального закона

Для усеченного нормального закона (см. выражение (20)) необходимо оптимизировать два параметра: T_{yH} и σ_{yH} . Как видно из (20, г) и (20, д), по методу моментов невозможно непосредственно определить эти параметры, поскольку и первый, и второй моменты распределения, определяющие параметры T_0 и σ_T , сложным образом одновременно зависят от параметров T_{yH} и σ_{yH} . Аналогичный вывод касается и метода максимального правдоподобия.

На наш взгляд, наиболее эффективным в **данном случае** является метод **наименьших квадратов**, который, как следует из преобразований (30), пригоден как для неусеченного, так и усеченного нормального законов. При этом оказалось, что если осуществлять такие же процедуры преобразования над функцией плотности распределения $f(t)$ из (20, а), какие ранее применялись к функции $f(t)$ из (19, а), то можно полностью использовать результаты (30, а)–(30, е). Далее по рассчитанным на основании (30, е) параметрам T_{yH} и σ_{yH} определяется поправочный множитель $C_{yH} = \varphi(T_{yH}, \sigma_{yH})$ – см. (20, а) и (19, в). Таким образом, порядок расчета имеет вид

$$X_0, Y_0 - \text{из (30, д);} \quad (32, a)$$

$$\sigma_{yH}^2 = Y_0 \Delta t^2; T_{yH} = X_0 \Delta t; \quad (32, б)$$

$$C_y - \text{из (20, а).} \quad (32, в)$$

После этого находят средний квадрат ошибки между теоретическим и

экспериментальными законами распределения:

$$D_6 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[C_y \left(0,5 - \Phi_0 \left(\frac{t_i - T_{\text{ун}}}{\sigma_{\text{ун}}} \right) \right) - 0,5(P_{i-1} + P_i) \right]^2; \quad (32, \text{г})$$

$$D_6^* = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left[\frac{C_y}{\sigma_{\text{ун}} \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(t_i - T_{\text{ун}})^2}{2\sigma_{\text{ун}}^2} \right) - \frac{n_i}{N_0 \Delta t} \right]^2. \quad (32, \text{д})$$

Здесь (32, г) определяет средний квадрат ошибки для функции вероятности безотказной работы; а (32, д) – для функции плотности вероятности. При этом параметры экспериментального закона определяются, как и ранее, из (22), $t_i = (i - 0,5)\Delta t$, $i \in \overline{1, K}$; $\Phi_0(z)$ – табличная функция Лапласа, определяемая для $\bar{Z} = \bar{Z}_i = (t_i - T_{\text{ун}}) / \sigma_{\text{ун}}$ (см. (19, в)).

2.5.7 Выбор и обоснование оптимального теоретического закона распределения

Как уже говорилось в подразделе 2.4, в качестве **оптимального** теоретического закона выбирается тот из числа рассмотренных (см. подраздел 2.3), который обеспечивает **минимальное** значение среднего квадрата ошибки между выборочными значениями одноименных функций экспериментального (эмпирического, опытного) и **каждого** из рассматриваемых теоретических законов распределения (см. (24), (24, а) и рисунок 2.10). При малых различиях между полученными данными целесообразно находить относительную величину $\delta D_{sq} = D_s / D_q$ или $\delta D_{sq}^* = D_s^* / D_q^*$, где $s = 1, 2, \dots, 6$ – текущий номер теоретического закона (см. подпункты 2.5.1 – 2.5.6), q – номер закона, выбранный условно в качестве опорного. Очевидно, при $s = q$ имеем $\delta D_{sq} = \delta D_{sq}^* = 1$.

В случае если несколько (два и более) теоретических закона дают приблизительно одно и то же значение δD_{sq} или δD_{sq}^* , целесообразно выбирать тот из них, который дает минимальное значение среднего квадрата отклонения D_s или D_s^* на укороченном интервале $0 < t_i < t_{\min}$ (см. (23, а)) или соответственно для числа точек

$$0 < i < K^*; K^* \leq [t_{\min} / \Delta t], \quad (33)$$

где K^* – ближайшее меньшее целое от величины $t_{\min} / \Delta t$, ($t_{\min} < t_{\max}$, $K^* < K$).

Тогда расчет D_s и D_s^* ведется по вышеприведенным формулам для $i = 0, 1, \dots, K^*$, т. е. для тех времен безотказной работы, где вероятность безотказной работы достаточно велика ($P_i \geq 0,5$) и где близость теоретического и опытного законов распределения позволяет более точно прогнозировать гарантированное время работы проектируемого изделия.

2.6 Определение показателей надежности по результатам укороченных испытаний

Как уже говорилось (см. подраздел 2.4), в режиме форсированных (ускоренных) опытных испытаний оценивается время безотказной работы представительной партии однотипных изделий, когда условия их работы существенно отличаются от реальных эксплуатационных условий.

Вследствие «тяжелых» условий работы изделий в режиме форсированных испытаний (повышенная или пониженная температура, повышенные или пониженные питающие напряжения, вибрации, удары и т. п.) изделия сравнительно быстро выходят из строя. В результате за относительно небольшое время испытаний удается вывести из строя всю опытную партию и тем самым получить достаточную информацию о примерных вероятностных законах безотказной работы в таком режиме.

Главная задача при этом – определить **оптимальный теоретический закон** распределения времени безотказной работы, **наилучшим образом** описывающий **результаты испытаний** (см. подраздел 2.5). Главная трудность – обеспечить эквивалентность (пропорциональность по времени) законов распределения времени безотказной работы в режиме форсированных и нормальных испытаний.

Если это выполнено, то тогда можно считать, что оптимальный закон распределения, найденный по результатам форсированных испытаний, сохраняется (с точностью до значений параметров этого закона) на этапе проведения испытаний в нормальных условиях. Тогда в режиме **нормальных** испытаний эксплуатации остается только задача определения **параметров** этого закона.

Эту задачу можно решить, используя режим **укороченных испытаний**, когда используется **только начальный участок** зависимости вероятности $P(t)$ или плотности вероятности $f(t)$ времени безотказной работы.

Расчет показателей надежности в режиме укороченных испытаний в нормальных условиях опирается на таблицу опытных данных, которую оформляют, как правило, по образцу таблицы 2.1 (см. подраздел 2.4), где i – порядковый номер интервала времени $t_i = i\Delta t_3$, n_i – число изделий, вышедших из строя в промежутке времени $t_{i-1} < t < t_i$.

Характерным отличием этой таблицы от упомянутой выше является то, что интервал времени Δt_3 в десятки, а то и в сотни раз больше, чем интервал Δt в режиме форсированных испытаний (как правило, Δt – не более нескольких дней или недель, Δt_3 – как правило несколько месяцев или даже лет). При этом число изделий n_i , выходящих из строя на интервале Δt_3 , как правило, невелико (обычно несколько единиц). Кроме того, невелико также и число самих исследуемых интервалов: $i \in [1, m]$, $m < K$, где K – число интервалов в режиме форсированных испытаний.

Формулы для расчета показателей надежности определяются в зависимости от выбранного (и обоснованного ранее) теоретического закона. В предыдущих разделах было показано, что для выбранного (заданного)

вероятностного закона выбор параметров этого закона может производиться различным образом, при этом оптимальное значение параметра определяется в результате нахождения минимума среднего квадрата отклонения между теоретическим и экспериментальным законами.

В режиме укороченных испытаний можно использовать только **небольшое** число отказов на начальном участке функции вероятности или плотности вероятности безотказной работы. Тогда при выбранной функции закона распределения расчет его параметров ведут, как правило, по **методу наименьших квадратов (МНК)**. Другие варианты определения параметров, например, метод моментов, метод максимального правдоподобия и т. п., **принципиально требуют большого массива** опытных данных, охватывающих поведение исследуемой функции в широкой области значений.

Обозначив параметры закона в режиме нормальных испытаний (эксплуатации) буквами $a_{\text{Э}}$, $b_{\text{Э}}$ и используя материалы подраздела 2.5, найдем функции и параметры закона в этом режиме.

А. Экспоненциальный закон

$$\begin{aligned} \text{а) } P_{\text{Э}}(t) &= \exp(-a_{\text{Э}}t); & \text{б) } a_{\text{Э}} &= \sum_{i=1}^m \frac{2n_i}{m\Delta t_{\text{Э}}(N_{i-1} + N_i)}; & \text{в) } T_{\text{ГЭ}} &= \frac{(1 - P_{\text{ГЭ}})}{a_{\text{Э}}}. \\ & & \text{г) } T_{\text{ОЭ}} &= 1/a_{\text{Э}}; & \text{д) } \sigma_{\text{ТЭ}} &= 1/a_{\text{Э}}. \end{aligned} \quad (34, \text{ а-д})$$

Здесь использованы выражения (25, в), (22, г) и (15, а-е); $T_{\text{ГЭ}}$ – гарантированное время нормальной работы (эксплуатации) при гарантированной вероятности $P_{\text{ГЭ}}$. Полагая, что точка с координатами $(P_{\text{ГЭ}}, T_{\text{ГЭ}})$ принадлежит функции $P_{\text{Э}}(t)$, проходящей через точки $P_{\text{Э}i} = \varphi(i\Delta t_{\text{Э}})$, и что для этих точек также справедлива функциональная связь типа уравнения (34, в), найдем параметр закона в виде среднего арифметического:

$$a_{\text{Э}}^* = a_{\text{АЭ}} \cong \sum_{i=1}^m \frac{1 - P_{\text{Э}i}}{i\Delta t_{\text{Э}}} \cdot \frac{1}{m} = (1/m\Delta t_{\text{Э}}) \sum_{i=1}^m (1 - P_{\text{Э}i})/i. \quad (34, \text{ е})$$

Б. Закон Эрланга второго порядка

Здесь используем (16, а-ж), (26, в, г), (22, г). Тогда

$$\left\{ \begin{aligned} \text{а) } P_{\text{Э}}(t) &= (1 + a_{\text{Э}1}t)\exp(-a_{\text{Э}1}t); \\ \text{б) } a_{\text{Э}1} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta t_{\text{Э}}}} \sum_{i=1}^m \frac{m^{-1} \sqrt{\lambda_i - \lambda_{i-1}}}{1 - (i - 0,5)\sqrt{(\lambda_i - \lambda_{i-1})\Delta t_{\text{Э}}}}; & \lambda_i &= \frac{2n_i}{\Delta t_{\text{Э}}(N_{i-1} + N_i)}; \\ \text{в) } a_{\text{Э}2} &= \frac{1}{(m-1)\Delta t_{\text{Э}}} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i(i-0,5)^{-1} - \Delta\lambda_i}{(i+0,5)\Delta\lambda_i}; & \Delta\lambda_i &= \lambda_{i+1} - \lambda_i; \\ \text{г) } T_{\text{ГЭ}} &= \frac{\sqrt{1 - P_{\text{ГЭ}}}}{a_{\text{Э}}}; & \text{д) } T_{\text{ОЭ}} &= 2/a_{\text{Э}}; & \text{е) } \sigma_{\text{ТЭ}} &= \sqrt{2}/a_{\text{Э}}. \end{aligned} \right. \quad (35, \text{ а-е})$$

По аналогии с экспоненциальным законом найдем приближенное значение параметра $a_{\text{Э}}$, полагая, что точка с координатами $(P_{\text{ГЭ}}, T_{\text{ГЭ}})$, определяемая из

(35, г), принадлежит множеству точек $P_{\vartheta_i} = \varphi(i\Delta t_{\vartheta})$. Тогда среднее арифметическое значение параметра a_{ϑ} равно

$$a_{\vartheta}^* = a_{\text{в}\vartheta} \cong \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\sqrt{1-P_{\vartheta_i}}) / i\Delta t_{\vartheta} = (1/m\Delta t_{\vartheta}) \sum_{i=1}^m \sqrt{(1-P_{\vartheta_i})/i^2}. \quad (35, \text{ж})$$

В. Закон Рэлея

Здесь можно использовать метод наименьших квадратов (МНК), применяя его к (17, в) или к (17, ж). Тогда по аналогии с (27, в), (27, г) приходим к выражениям

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } P_{\vartheta}(t) = \exp(-a_{\vartheta}t^2); \\ \text{б) } a_{\vartheta 1} = \frac{12}{m(4m^2-1)\Delta t_{\vartheta}^2} \sum_{i=1}^m \frac{n_i(i-0,5)}{N_{i-1}+N_i}; \\ \text{в) } a_{\vartheta 2} = \frac{(\lambda_m - \lambda_1)}{2m\Delta t_{\vartheta}}; \lambda_i = \frac{2n_i}{\Delta t_{\vartheta}(N_{i-1}+N_i)}; \\ \text{г) } T_{\Gamma\vartheta} = \sqrt{\frac{1-P_{\Gamma\vartheta}}{a_{\vartheta}}}; \text{д) } T_{O\vartheta} = \sqrt{\frac{\pi}{4a_{\vartheta}}}; \text{е) } \sigma_{\Gamma\vartheta} = \sqrt{\frac{4-\pi}{4a_{\vartheta}}}. \end{array} \right. \quad (36, \text{а-е})$$

Для закона Рэлея так же, как и для предыдущих законов, возможно более быстрое, хотя и менее точное определение параметра закона a_{ϑ} , исходя из предположения, что точка с координатами $(P_{\Gamma\vartheta}, T_{\Gamma\vartheta})$, определяемая из (36, г), принадлежит семейству точек $P_{\vartheta_i} = \varphi(i\Delta t)$. Тогда

$$a_{\vartheta}^* = a_{\text{в}\vartheta} \cong \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1-P_{\vartheta_i}) / (i\Delta t_{\vartheta})^2 = (1/m\Delta t_{\vartheta}^2) \sum_{i=1}^m (1-P_{\vartheta_i}) / i^2. \quad (36, \text{ж})$$

При окончательном решении выбирают тот вариант определения параметра a_{ϑ} , который по аналогии с (27, д) минимизирует средний квадрат ошибки

$$D_{3j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left[\exp(-a_{\vartheta}t_i^2) - 0,5(P_{\vartheta_{i-1}} + P_{\vartheta_i}) \right]^2, \quad (36, \text{з})$$

где $j = 1-3$, $t_i = (i-0,5)\Delta t_{\vartheta}$; P_{ϑ_i} и $P_{\vartheta_{i-1}}$ – результаты опыта по (22, а, б) в режиме нормальной эксплуатации.

Г. Закон Вейбулла

Двухпараметрический закон Вейбулла (см. (18)) по результатам укороченных испытаний в нормальном режиме эксплуатации характеризуется набором данных, который подобен (22) и отличается величиной интервала Δt_{ϑ} (вместо Δt) и числом учтенных точек $i \in [1, m]$ (а не K). С учетом этих изменений параметры закона a и b определяются из (28, г, д) с учетом (22, г).

При малом числе экспериментальных данных расчёт параметров закона Вейбулла a_{ϑ} и b_{ϑ} по (28, в, г) может дать большие ошибки. В этом случае удобно принять во внимание, что вероятностные законы $P(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$ для режимов форсированных и нормальных испытаний всегда подобны друг другу (в

противном случае следует признать, что режим форсированных испытаний выбран неправильно). Как видно из анализа рисунков 2.5, это будет выполняться, если принять $b = b_3$, где параметр b известен по результатам форсированных испытаний (см. (28, в, г)). Тогда, учитывая (18, в), можно записать

$$\lambda(t = t_i) = \lambda_i = a_3 b_3 t_i^{b_3 - 1}, \quad i \in [1, m],$$

где λ_i определяется из (22, г), а $t_i = (i - 0,5)\Delta t_3$. Применяя метод МНК, определяем значение параметра a_3 , которое наилучшим образом описывает поведение экспериментальной функции λ_i :

$$a_3 = \frac{1}{m b_3} \sum_{i=1}^m \lambda_i [(i - 0,5)\Delta t_3]^{1 - b_3}. \quad (37)$$

Зная параметры закона a_3 и b_3 , затем определяем показатели закона T_{O3} , σ_{O3} , $P_{Г3}$, $T_{Г3}$, используя формулы (18, а-з).

Д. Нормальный закон

Для нормального закона (см. (19)), учитывая укороченный режим испытаний (т.е. малое число точек функций вероятности безотказной работы), целесообразно использовать **только метод наименьших квадратов** (формулы (30, а-е)). При этом учитываются результаты испытаний типа (22) для $i \in [1, m]$ с заменой $K \rightarrow m$ и $\Delta t \rightarrow \Delta t_3$. Соответственно, ошибка аппроксимации рассчитывается из (31, а), а гарантированное время наработки – из (19, ж). Параметры обозначаются соответственно T_{H3} , σ_{H3} , $P_{Г3}$, $T_{Г3}$.

При малом числе экспериментальных данных расчёт параметров закона T_{H3} и σ_{H3} по (30, г-е) может давать большие ошибки. В этом случае целесообразно учесть подобие вероятностного закона в режиме форсированных и нормальных испытаний, а именно условие $T_{H3}/\sigma_{H3} = T_H/\sigma_H = C$. Здесь $C = \text{const}$ и определяется по результатам форсированных испытаний.

Тогда с учётом (30, а, б) придём к условию

$$\frac{T_{H3}}{\Delta t_3} = i + \frac{\sigma_{H3}^2}{\Delta t_3^2} \ln \frac{f_{i+1}}{f_i}, \quad i \in \overline{1, m}.$$

Применяя метод МНК к этому выражению, получим равенство

$$(m - 1) \frac{T_{H3}}{\Delta t_3} = \sum_{i=1}^{m-1} \left(i + \frac{\sigma_{H3}^2}{\Delta t_3^2} \ln \frac{f_{i+1}}{f_i} \right) = \frac{m \cdot (m - 1)}{2} + \frac{\sigma_{H3}^2}{\Delta t_3^2} \ln \frac{f_m}{f_1},$$

которое с учётом $T_{H3}/\sigma_{H3} = C$ приводится к виду

$$T_{H3}/\Delta t_3 = \frac{m}{2} + \frac{(T_{H3}/\Delta t_3)^2}{C^2(m - 1)} \ln \frac{f_m}{f_1}. \quad (38, а)$$

Приближённое решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{T_{H3}}{\Delta t_3} \cong \frac{(m - 1)C^2}{\ln(f_m/f_1)} - \frac{m}{2}. \quad (38, б)$$

Для известных $T_{нэ}$ и $\sigma_{нэ} = T_{нэ}/C$ далее рассчитывают $T_{гэ}$ и $P_{гэ}$, используя (19, ж) и приложение Б.

Е. Усеченный нормальный закон

Если в результате расчетов характеристик надежности в режиме форсированных испытаний оказалось, что наилучшее приближение к эксперименту обеспечивает усеченный нормальный закон (см. (20)), то, очевидно, и в нормальном режиме эксплуатации он будет справедлив. Тогда по результатам укороченных испытаний необходимо только определить параметры усеченного нормального закона $T_{ун}$ и $\sigma_{ун}$ для нормальных условий эксплуатации $T_{ун.э}$ и $\sigma_{ун.э}$.

Учитывая, как правило, малый объем экспериментальных данных (испытания проводятся в течение небольшого периода времени и число вышедших из строя изделий также мало), а также сложный нелинейный характер зависимостей между функциями надежности $P(t), f(t), \lambda(t)$ и параметрами $T_{ун}$ и $\sigma_{ун}$, целесообразно использовать **только метод наименьших квадратов** (см. (32) и (30)). При этом учитываются результаты нормальных испытаний типа (22) для $i \in [1, m]$ с заменой $K \rightarrow m (m < K)$ и $\Delta t \rightarrow \Delta t_э (\Delta t_э \gg \Delta t)$. Следовательно по сравнению с режимом форсированных испытаний в данном случае уменьшается число экспериментальных точек и существенно увеличивается масштаб по времени. При этом ошибка аппроксимации теоретическим законом реальных функций надежности оценивается аналогично (32, г, д), а гарантированное время наработки на отказ для заданного значения $P_{гэ}$ рассчитывается аналогично (20, е).

С целью повышения точности расчётов для усечённого нормального закона целесообразно учесть подобие вероятностных законов в режиме форсированных и нормальных испытаний, а именно условия:

$$1) T_{ун}/\sigma_{ун} = T_{ун.э}/\sigma_{ун.э} = C; \quad 2) C_y = C_{y.э}, \text{ (см. (20, а))},$$

где $T_{ун}$, $\sigma_{ун}$, C и C_y – параметры, определённые для режима форсированных испытаний.

При известных значениях C по результатам испытаний f_i , (см. (22, в)), $i \in \overline{1, m}$, рассчитывают $T_{ун.э}$ по той же формуле, что и $T_{нэ}$ для нормального закона (см. (38), пункт Д). Далее, зная $T_{ун.э}$, $\sigma_{ун.э} = T_{ун.э}/C$ и коэффициент $C_y = C_{y.э}$, по формулам (20, г, д, е) определяют среднее $T_{оэ}$ и гарантированное $T_{гэ}$ время эксплуатации в нормальных условиях.

Примечание – Во многих случаях полезно знать не только среднее значение параметров вероятностного закона, но и возможный разброс (интервал) значений этих параметров. Это позволяет определить, соответственно, и разброс значений показателей закона $T_{гэ}, T_{оэ}, \sigma_{тэ}$ относительно их средних значений, которые определены выше. Наиболее просто эта задача решается для однопараметрических законов (А, Б, В) и, в частности, когда среднее значение па-

раметра определяется по приближённым выражениям (34, е), (35, ж), (36, ж). В этом случае среднее квадратическое отклонение σa расчётного параметра a определяется по известной методике обработки результатов многократных наблюдений (см., например, [1, 3, 7, 8]):

А. Для экспоненциального закона, используя (34, е), получим

$$\sigma a_{AЭ} = \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1-P_{Эi}}{i\Delta t_э} - a_{AЭ} \right)^2 \right\}^{0,5}; \quad (39, а)$$

Б. Для закона Эрланга, используя (35, ж), находим

$$\sigma a_{БЭ} = \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m \left[\frac{(1-P_{Эi})^{0,5}}{i\Delta t_э} - a_{БЭ} \right]^2 \right\}^{0,5}; \quad (39, б)$$

В. Для закона Рэлея (на основании (36, ж))

$$\sigma a_{ВЭ} = \left\{ \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i=1}^m \left[\frac{1-P_{Эi}}{i^2\Delta t_э^2} - a_{ВЭ} \right]^2 \right\}^{0,5}. \quad (39, в)$$

Далее известным образом определяют доверительный интервал отклонения Δa рассчитываемого параметра относительно его среднего значения a по формуле: $\Delta a_j = t_s \cdot \sigma a_j$, где $j = AЭ, БЭ, ВЭ$; t_s – коэффициент Стьюдента, зависящий от принятой доверительной вероятности P_α и числа наблюдений m .

В частности, при $P_\alpha = 0,95$ и $m = 4; 6$ и 8 имеем соответственно $t_s = 3,18; 2,57$ и $2,36$ [3, 8, 9, 18, 25, 26]. Полагая, что истинное значение параметра лежит в интервале значений $a_j \pm \Delta a_j$, затем на основании соответствующих выражений (34) – (36) рассчитывают доверительный интервал возможных значений показателей закона. Например, для экспоненциального закона на основании (34, в), (39, а) получим:

$$T_{ГЭ \min} = \frac{1 - P_{ГЭ}}{a_{AЭ} + t_s \cdot \sigma a_{AЭ}}; \quad T_{ГЭ \max} = \frac{1 - P_{ГЭ}}{a_{AЭ} - t_s \cdot \sigma a_{AЭ}}. \quad (40)$$

Для остальных показателей этого закона ($T_{0Э}, \sigma_{ТЭ}$), а также для других законов расчёты выполняются аналогично.

На основе изложенного выше материала разработано программное и методическое обеспечение для выполнения компьютеризированной лабораторной работы №5 по учебной дисциплине «Квалиметрия и системный анализ» под названием «Прогнозирование показателей надежности технических систем по результатам испытаний». Лабораторная работа предназначена для студентов БГУИР, обучающихся по специальности «Метрологическое обеспечение информационных систем и сетей», но может быть использована и студентами других специальностей и вузов при изучении вопросов надежности различной техники и технологий.

Для индивидуализации лабораторной работы разработано большое число разнообразных исходных данных, которые отражают результаты испытаний технических систем в режиме форсированных и нормальных (эксплуатационных) испытаний (приложения В и Г).

3 Содержание лабораторной работы и порядок ее выполнения

3.1 *Выбор исходных данных.* Ознакомьтесь с условиями предлагаемого вам варианта результатов опытных испытаний технической системы (ее вероятностных характеристик – В. Х.) в режиме форсированных испытаний (В. Х. ф.) и нормальной эксплуатации (В. Х. э), № – порядковый номер варианта (см. приложения В и Г).

Для режима **форсированных испытаний** задается число интервалов испытаний K ($K > 10$) и число изделий n_i , отказавших на i -м интервале времени в промежутке $(i - 1)\Delta t \leq t \leq i\Delta t$, $i \in [1, K]$, а также величина интервала Δt или общее время испытаний $\Delta t_{\max} = K\Delta t$. Общее число изделий N_0 , поставленных на испытания, для всех вариантов постоянно: $N_0 = 100$ (см. приложения В и Г).

Для режима **укороченных** испытаний задается: закон вероятности безотказной работы (ε – экспоненциальный, Эр – Эрланга второго рода, Р – Рэлея, В – Вейбулла, н – нормальный, ун – усеченный нормальный); величина элементарного интервала испытания в нормальных условиях эксплуатации Δt_3 ; общее время проведения испытаний в укороченном режиме $\Delta t_{\text{ту}}$ или число интервалов наблюдений $m = \Delta t_{\text{ту}}/\Delta t_3$; количество изделий n_i , отказавших на i -м интервале времени испытаний в промежутке $(i - 1)\Delta t_3 \leq t \leq i\Delta t_3$, для $i \in \overline{1, m}$.

Параметры в режиме укороченных испытаний приведены в таблицах приложения Г и задаются преподавателем индивидуально в зависимости от **вида вероятностного закона**, обоснованного по результатам ускоренных (форсированных) испытаний.

В этих таблицах приводятся также значения гарантированной вероятности безотказной работы $P_{ГЭ}$, для которой затем потребуется определить гарантированное время безотказной работы $T_{ГЭ}$.

3.2 Включите программу моделирования в режиме **ускоренных** (форсированных) испытаний. Для этого на рабочем столе найдите папку «Прогнозирование 1» и откройте ее. Запустите программу «Лабораторная работа № 5».

3.3 В рабочем окне программы (рисунок 3.1) введите исходные данные для режима **ускоренных** испытаний: количество промежутков времени $[K]$, длину элементарного интервала $[\Delta t]$ и число изделий, вышедших из строя на i -м промежутке времени $[n_i]$. По этим данным и формуле (22, б) строится конкретная зависимость вероятности безотказной работы $P(t_i = (i - 0,5)\Delta t) = \varphi(t_i)$ (для примера на рисунках 3.2 – 3.7 показан вариант кусочно-линейной функции, построенный по данным таблицы 2.1).

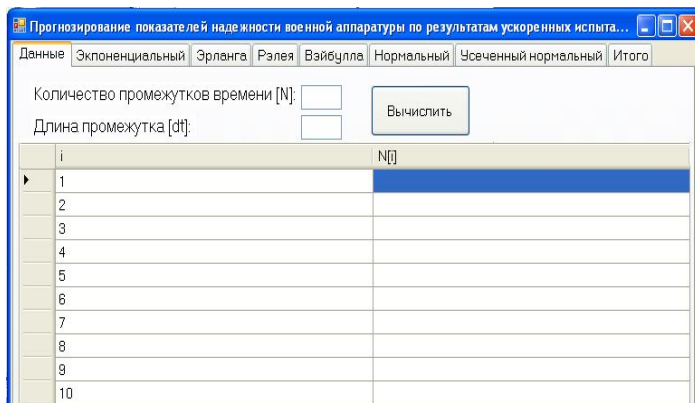


Рисунок 3.1 – Рабочее окно программы для прогнозирования показателей надежности

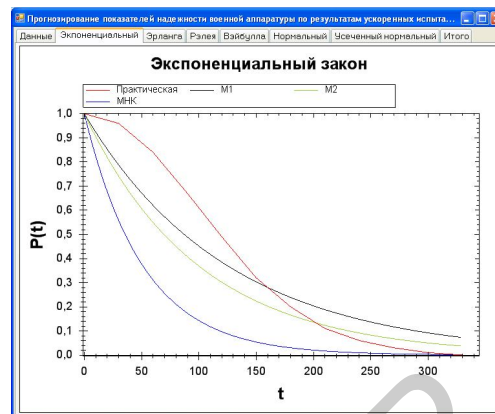


Рисунок 3.2 – Экспериментальные зависимости и теоретические функции для экспоненциального закона

3.4 В рабочем окне программы (рисунок 3.1) выберите тип теоретического (аппроксимирующего) вероятностного закона, например, **экспоненциальный** (э). В этом случае программа рассчитывает оптимальный параметр закона a_{1j} , $j = 1, 2, 3$ (см. формулы (25)), который соответствует каждому j -му критерию оптимизации: при $j = 1$ обеспечивается равенство первых моментов теоретического и экспериментального (опытного) распределения; при $j = 2$ – равенство вторых моментов, при $j = 3$ параметр a_{1j} рассчитывается по методу наименьших квадратов (см. (25, в)).

По рассчитанным значениям параметра a_{1j} строится соответствующая функция $P_{1j}(t)$ для данного теоретического закона (в данном случае по формуле (15, а)). Примерный вид рассчитанных функций показан на рисунке 3.2.

3.5 Повторите пункт 3.4, выбрав другой аппроксимирующий закон, например, **Эрланга** (Эр). В этом случае получим семейство функций $P_{2j}(t)$, рассчитанных по формулам (26) для трех возможных критериев оптимизации параметра закона a_{2j} (смотри рисунок 3.3, где функции $P_{2j}(t)$ рассчитаны по формуле (16, а)).

3.6 Повторите пункт 3.4, выбрав аппроксимирующую теоретическую зависимость по **закону Рэлея** (формула (17, а)). Оптимальное значение параметра a_{3j} , $j = 1 - 3$, для трех критериев оптимизации (равенство первого и второго моментов распределения и минимум квадратов отклонения) рассчитывается по формулам (27), а варианты функций $P_{3j}(t)$, соответствующие рассчитанным значениям a_{3j} , показаны на рисунке 3.4.

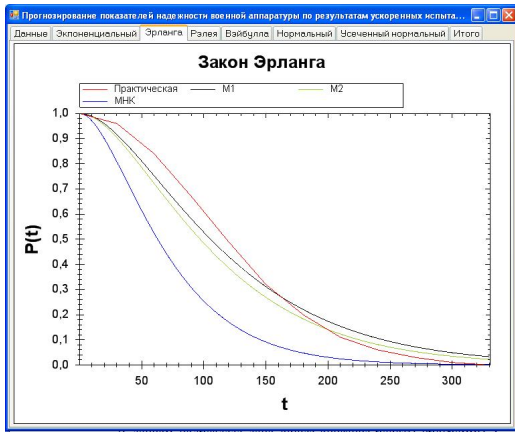


Рисунок 3.3 – Поведение экспериментальной зависимости и теоретических функций для закона Эрланга

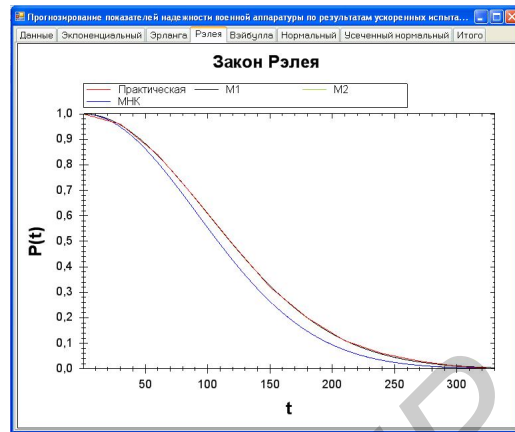


Рисунок 3.4 – Экспериментальные зависимости и теоретические функции для закона Рэлея

3.7 Повторите пункт 3.4, выбрав теоретический закон **Вейбулла** (см. (18, а)). Для него, как следует из (28), два оптимизируемых параметра a и b определяются только при использовании метода наименьших квадратов (МНК). Вариант функции $P_{4j}(t)$, рассчитанной по (28) для тех же исходных данных таблицы 2.1, показан на рисунке 3.5.

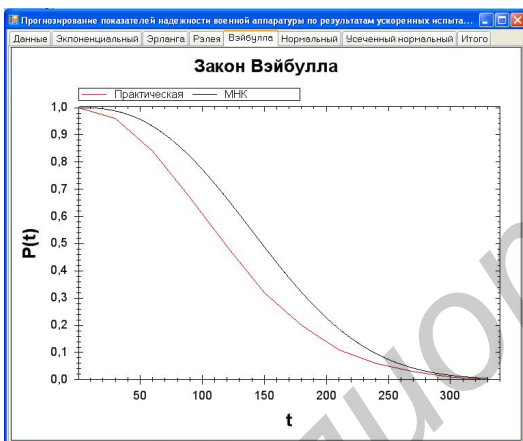


Рисунок 3.5 – Поведение экспериментальной зависимости и теоретических функций для закона Вейбулла

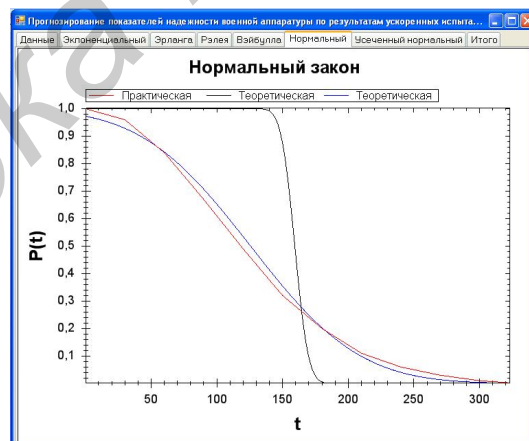


Рисунок 3.6 – Экспериментальные зависимости и теоретические функции для нормального закона

Примечание – Этот метод, в силу особенностей расчетных формул, дает большие ошибки, если в исходных данных встречаются интервалы, где $n_i = 0$, при этом $n_{i-1} \geq 1$ или $n_{i+1} \geq 1$. Можно существенно уменьшить ошибки расчета, если принять, например, $n_i \approx 0,5$ и соответственно уменьшить n_{i-1} или n_{i+1} на 0,5. В этом случае остается неизменной сумма $\sum_{i=1}^K n_i = N_0$.

3.8 Повторите пункт 3.4, выбрав в окне рисунка 3.1 **нормальный закон** распределения. Для него, как следует из (29), возможны три варианта оптимизации двух параметров закона: T_n и σ_n . В первом случае используется метод моментов (формулы (29, а, б)), во втором – по критерию максимальной устойчи-

ности – формула (29, д). Третий вариант определения оптимальных параметров T_n и σ_n основан на использовании метода наименьших квадратов (формулы (30)).

При расчете по (30) необходимо использовать соображения, высказанные в примечании к пункту 3.7.

Варианты теоретических функций вероятности $P_{5j}(t)$, $j = 1, 2, 3$, рассчитанные по формулам (29) и (30) и данным таблицы 2.1, приведены на рисунке 3.6.

3.9 Повторите пункт 3.4, выбрав в окне рисунка 3.1 **усеченный нормальный закон**. Для него, как следует из пунктов 2.3.6 и 2.5.6, необходимо оптимизировать два параметра ($T_{ун}$ и $\sigma_{ун}$), которые обеспечивают наилучшее приближение теоретического закона. В этом случае целесообразно использовать только **метод наименьших квадратов**, а для расчета параметров применять формулы (30) и (32). Здесь также следует учитывать примечание к пункту 3.7. Пример рассчитанной таким образом теоретической функции $P_6(t)$ приведен на рисунке 3.7.

3.10 Как видно из рисунков 3.2 – 3.7, различные варианты теоретических законов $P_{ij}(t)$, где $i \in [1, 6]$, $j \in [1, 3]$, по-разному аппроксимируют **экспериментальный закон** вероятности безотказной работы, показанный на этих рисунках в виде кусочно-ломаной кривой. В качестве критерия «близости» используется критерий (24, а) – минимум относительного среднего квадрата отклонений или критерий (24) – минимум абсолютного среднего квадрата отклонений.

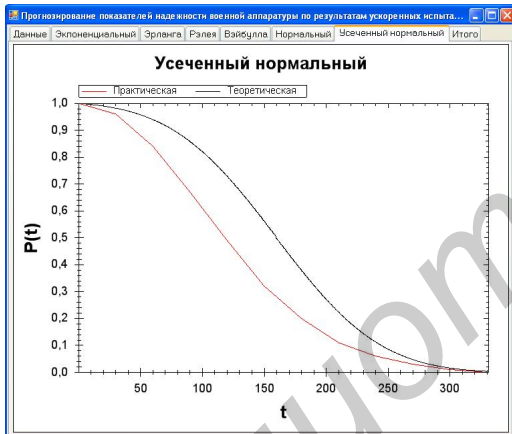


Рисунок 3.7 – Экспериментальные зависимости и теоретические функции для усеченного нормального закона

Экспоненциальный	Эрленга	Рэлея	Вайбулла	Нормальный	Усеченный нормальный	Итого
a1 = 7,965449e-003, Погр: 1,408479e+057	a1 = 1,591080e-002, Погр: 2,089017e-001	a1 = 4,970720e-005, Погр: 9,399347e-002				
a2 = 9,980308e-003, Погр: 9,498009e+072	a2 = 1,728640e-002, Погр: 1,801667e-001	a2 = 4,980328e-005, Погр: 9,405497e-002				
a3 = 1,947424e-002, Погр: 1,565256e+147	a3 = 2,869550e-002, Погр: 6,503253e+000	a3 = 5,913785e-005, Погр: 4,289563e-001				
Погр: 1,408479e+057	Погр: 1,801667e-001	Погр: 9,399347e-002				
Вайбулла	Нормальный	Усеченный нормальный				
-	-	-				
-	-	-				
-	-	-				
Погр: 1,750083e-001	Погр: 3,845724e+004	Погр: 2,113085e-001				

Рисунок 3.8 – Итоговая таблица для определения закона распределения

Рисунок 3.9 – Рабочее окно программы для прогнозирования показателей надежности по результатам укороченных испытаний

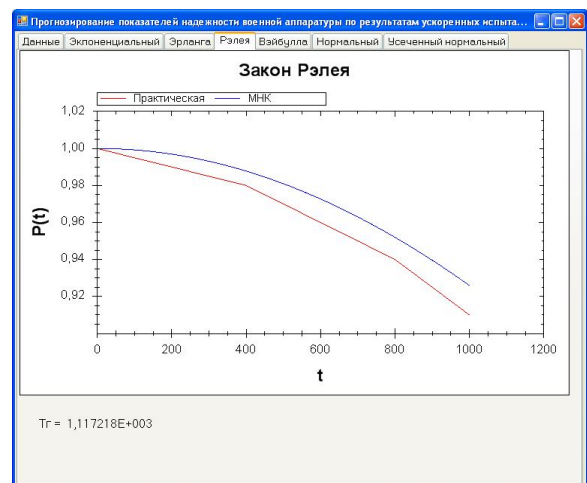


Рисунок 3.10 – Определение гарантированного времени безотказной работы по результатам укороченных испытаний

Для выбора оптимального закона распределения и его оптимальных параметров в рабочем окне программы (см. рисунок 3.1) нажимается вкладка «Итого». При этом для всех законов выводится итоговая таблица со значениями оптимальных параметров и значением среднего квадрата отклонения теоретического закона относительно экспериментального (см. рисунок 3.8).

3.11 По данным итоговой таблицы (см. пункт 3.10) выбирается **тип оптимального вероятностного закона** (одного из шести) и его оптимальные параметры (или один параметр), которые обеспечивают минимальное значение среднего квадрата отклонения теоретического закона относительно экспериментального. Принимается решение, что именно этому закону будут подчиняться результаты испытаний в режиме нормальной эксплуатации.

3.12 Откройте рабочее окно программы для прогнозирования показателей надежности по результатам **укороченных** испытаний в режиме нормальной эксплуатации (рисунок 3.9). Для этого на рабочем столе найдите ярлык «Прогнозирование 2».

По указанию преподавателя для выбранного (по пункту 3.11 лабораторной работы) теоретического закона выберите в соответствующем столбце таблицы приложения Г исходные данные по результатам укороченных испытаний и занесите их в программу. Также укажите число интервалов наблюдения m (как правило, $m < 10$) и отрезок времени, соответствующий одному интервалу Δt_3 . Введите значение гарантированной вероятности $P_{г3}$ и исходное число испытуемых изделий N_0 . Нажмите кнопку соответствующего теоретического закона, затем кнопку «Вычислить». Появится окно с рисунком, аналогичным рисунку 3.10, отображающим поведение экспериментальной и теоретической функций вероятности безотказной работы для режима укороченных испытаний, когда число вышедших из строя изделий сравнительно мало и, соответственно, достаточно велико значение функции $P(t)$.

3.13. Для заданного значения вероятности гарантированного времени работы $P_{г3}$ определите по графику рисунка 3.10 примерные значения гарантированного времени работы $T_{г3}$ для экспериментального и теоретического законов. Оцените различие результатов.

3.14. Вернитесь снова к рабочему окну (см. рисунок 3.9) и нажмите кнопку «Итого». Появится итоговая таблица (по типу рисунка 3.8), в которой будут указаны для данного закона оптимальные параметры (a или (a, b) или (T_n, σ_n) или $(T_{ун}, \sigma_{ун})$) и соответствующая величина гарантированного времени работы $T_{г3}$. Сравните результаты по данному и предыдущему пунктам.

3.15 Для определенных значений параметров закона рассчитайте по соответствующим формулам раздела 2.3 среднее время безотказной работы $T_{о3}$ и среднее квадратическое отклонение среднего времени безотказной работы $\sigma_{т3} = \Delta T_{о3}$.

4 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие данные.

1 Таблица исходных данных опытных испытаний для режима ускоренных испытаний вида $n_i = \varphi(t_i)$, где $i = \overline{1, K}$, K – число интервалов наблюдения, n_i – число изделий, вышедших из строя на i -м интервале; $t_i = (i - 0,5)\Delta t$.

2 Таблица значений основных характеристик надежности ($P(t)$, $N(t)$, $f(t)$, $\lambda(t)$) по результатам ускоренных испытаний (аналогичную таблице 2.1) и соответствующие им графики (аналогичные рисункам 2.2 – 2.7).

3 Графики изменений теоретических функций вероятности безотказной работы $P_{ij}(t)$ для каждого i -го закона вероятности и каждого j -го варианта оптимального параметра этого закона (аналогично рисункам 3.2 – 3.7).

4 Таблица значений оптимальных параметров по каждому закону и средних квадратов отклонений теоретических законов относительно экспериментального (по типу рисунка 3.8) с выделением оптимального закона и его параметров.

5 Таблица данных эксперимента для укороченных испытаний в режиме нормальной эксплуатации.

6 Графики зависимости вероятности безотказной работы для экспериментального и теоретического законов в режиме укороченных испытаний, определение по графикам для заданного значения гарантированной вероятности безотказной работы $P_{гэ}$ соответствующего значения гарантированного времени работы $T_{гэ}$.

7 Таблица оптимальных параметров выбранного теоретического закона $P(t)$ (один или два параметра) и рассчитанных для него значений параметров гарантированного $T_{гэ}$ и среднего $T_{ос}$ времени работы, а также среднего квадратического отклонения $\sigma_{гэ}$ среднего времени эксплуатации.

8 Выводы по работе (в частности, по сходимости результатов расчетов для теоретических и опытных законов).

5 Контрольные вопросы

1 Назовите основные виды функций, характеризующих безотказную работу технических систем.

2 Как связаны между собой функции вероятности безотказной работы $P(t)$, частоты отказов $f(t)$ и интенсивности отказов $\lambda(t)$? Запишите уравнения связи между этими функциями.

3 Что такое работоспособность изделия, как она определяется, от чего зависит?

4 Как можно классифицировать отказы в работе аппаратуры в зависимости от причин возникновения отказов?

5 Как можно классифицировать отказы в работе аппаратуры в зависимости от характера появления отказа?

6 Как можно классифицировать отказы в работе аппаратуры в зависимости от закономерности возникновения отказа?

7 Какой отказ называется независимым (или зависимым)?

8 Как можно классифицировать отказы в работе аппаратуры в зависимости от сложности устранения?

9 Как можно классифицировать отказы в работе аппаратуры в зависимости от места устранения?

10 Что такое среднее время безотказной работы, как оно определяется экспериментально и теоретически?

11 Что такое среднее квадратическое отклонение среднего времени наработки, как оно определяется экспериментально и теоретически?

12 Что такое гарантированное время наработки, как оно определяется?

13 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для экспоненциального закона.

14 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для закона Эрланга второго порядка.

15 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для закона Рэлея.

16 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для закона Вейбулла.

17 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для нормального (Гаусса) закона.

18 Назовите основные характеристики (функции) и параметры для усеченного нормального закона.

19 Какие виды экспериментальных испытаний технических изделий применяют на практике?

20 В чем отличия ускоренных и укороченных опытных испытаний изделий на надежность?

21 Каким образом по результатам эксперимента можно примерно определить функцию вероятности безотказной работы?

22 Каким образом по результатам эксперимента можно примерно определить функцию плотности вероятности безотказной работы?

23 Каким образом по результатам эксперимента можно примерно определить функцию интенсивности отказов?

24 Каким образом по результатам опытных испытаний можно определить первый выборочный момент – выборочное среднее?

25 Каким образом по результатам опытных испытаний можно определить второй момент распределения – выборочный средний квадрат?

26 Каким образом по результатам опытных испытаний можно определить выборочную среднюю дисперсию?

27 Каким образом можно оценить различие между экспериментальной функцией надежности и аппроксимирующей ее теоретической функцией?

28 Что такое «параметрическая оптимизация» вероятностного закона, каковы критерии оптимизации?

29 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация экспоненциального закона, аппроксимирующего результаты опытных испытаний на надежность?

30 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация закона Эрланга второго порядка, аппроксимирующего результаты опытных испытаний на надежность?

31 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация закона Рэлея, аппроксимирующего результаты опытных испытаний на надежность?

32 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация закона Вейбулла, аппроксимирующего результаты опытных испытаний на надежность?

33 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация нормального закона, аппроксимирующего результаты опытных испытаний на надежность?

34 По каким критериям осуществляется параметрическая оптимизация усеченного нормального закона, аппроксимирующего результаты опытных испытаний на надежность?

35 В чем отличия процедуры параметрической оптимизации вероятностного закона, аппроксимирующего результаты эксперимента в режиме ускоренных (форсированных) и укороченных испытаний?

ЛИТЕРАТУРА

1 Айвазян, С. А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: справоч. изд. / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Ю. Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 471 с.

2 Большаков, А. А. Методы обработки многомерных данных и временных рядов: учеб. пособие / А. А. Большаков, Р. Н. Каримов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 522 с.

3 Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие. – Изд. 5-е / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1999. – 400 с.

4 Шурыгин, А. М. Математические модели прогнозирования: учеб. пособие / А. М. Шурыгин. – М. : Горячая линия – Телеком, 2009. – 180 с.

5 Шурыгин, А. М. Прикладная стохастика: робастность, оценивание, прогноз / А. М. Шурыгин. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 224 с.

6 Прикладная статистика: Исследование зависимостей: справоч. изд. / С. А. Айвазян [и др.]. – М. : Финансы и статистика, 1985. – 487 с.

7 Надежность и эффективность в технике: справочник: В 10 т./ Ред. совет: В. С. Адуевский (предс.) [и др.]. – М.: Машиностроение. – Т. 2: Математические методы в теории надежности и эффективности. – 1987. – 280 с; – Т. 6: Экспериментальная отработка и испытания. – 1989. – 375 с.

8 Белов, А. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / А. А. Белов, Б. А. Баллод, Н. Н. Елизарова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2008. – 318 с.

9 Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи: учеб. пособие / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск : Новое знание, 2004. – 251 с.

- 10 Муха, В. С. Статистические методы обработки данных: учеб. пособие / В. С. Муха. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 183 с.
- 11 Половко, А. М. Основы теории надежности: учебник / А. М. Половко, С. В. Гуров. – СПб.: БХВ – Петербург, 2006. – 704 с.
- 12 Половко, А. М. Основы теории надежности. Практикум / А. М. Половко, С. В. Гуров. – СПб.: БХВ – Петербург, 2006. – 560 с.
- 13 Статистический анализ на компьютере / Ю. Н. Тюрин [и др.] – М.: Инфра-М, 1998. – 528 с.
- 14 Кириллов, В. И. Квалиметрия и системный анализ: учеб. пособие: 2-е изд. / В. И. Кириллов. – Минск : Новое знание; М. : Инфра-М, 2012. – 440 с.
- 15 Практикум на ЭВМ по математической статистике: учеб. пособие / Ю. С. Харин [и др.]. – Минск : Университетское, 1987. – 304 с.
- 16 Павлов, И. В. Статистические методы оценки надежности сложных систем по результатам испытаний / И. В. Павлов. – М. : Радио и связь, 1982. – 168 с.
- 17 Пешес, Л. Я. Основы теории ускоренных испытаний на надежность / Л. Я. Пешес, М. О. Степанова. – Минск : Наука и техника, 1972. – 166 с.
- 18 Волковец, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика: конспект лекций / А. И. Волковец, А. Б. Гуринович. – Минск : БГУИР, 2003. – 82 с.
- 19 Власов, И. Б. Глобальные навигационные спутниковые системы / И. Б. Власов. – М: Рудомино, 2010. – 200 с.
- 20 СТБ ГОСТ Р 50779.10-2001 (ИСО 3534.1-93). Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения.
- 21 Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – Изд. 16-е, стереотип. / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1966. – 608 с.
- 22 Математические методы в конструировании и технологии радиоэлектронных средств: метод. пособие / С. М. Боровиков [и др.]; под ред. С. М. Боровикова. – Минск: БГУИР, 2011. – 80 с.
- 23 Кириллов, В. И. Квалиметрия и системный анализ. Лабораторный практикум: учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч. 1 / В. И. Кириллов. – Минск : БГУИР, 2009. – 72 с.
- 24 Кириллов, В. И. Квалиметрия и системный анализ. Лабораторный практикум: учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / В. И. Кириллов. – Минск : БГУИР, 2009. – 46 с.
- 25 Аксенчик, А. В. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.-метод. пособие / А. В. Аксенчик. – Минск : БГУИР, 2011. – 184 с.
- 26 Калинин, В.М. Надёжность военной техники связи: учеб. пособие / В.М. Калинин. – Минск : ВА РБ, 2007. – 112 с.
- 27 ГОСТ 27.002 – 89. Надёжность в технике. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1989. – 37 с.
- 28 Карташов, Г.Д. Форсированные испытания аппаратуры / Г. Д. Карташов // Методы оптимизации качества, надёжности и эффективности процессов создания и освоения новой продукции: сб. ст. – М.: Знание, 1986. – С. 51 – 107.
- 29 Кириллов, В. И. Оптимизация показателей надежности технической системы по результатам форсированных испытаний / В. И. Кириллов // Метрология и приборостроение, 2012. – № 1. – С. 10 – 17.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Значения гамма-функции

x	$\Gamma(x)$
1	1
1,05	0,9735
1,1	0,95135
1,15	0,93304
1,2	0,91817
1,25	0,9064
1,3	0,89747
1,35	0,89115
1,4	0,88726
1,45	0,88566
1,5	0,88623
1,55	0,88887
1,6	0,89352
1,65	0,90012
1,7	0,90864
1,75	0,91906
1,8	0,93138
1,85	0,94561
1,9	0,96177
1,95	0,97988
2	1

Значения гамма-функции для $x < 1$ и для $x > 2$ могут быть вычислены с помощью формул [3, 8, 9, 21]:

а) при $x < 1$: $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, б) при $x > 2$: $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Значения функции Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0004	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0556	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0792	0832	0871	0909	0948	0987	1025	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1949	1985	2019	2054	2088	2126	2156	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2356	2389	2421	2453	2485	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2793	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3105	3123
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3364	3389
1,0	0,341	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3707	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3906	3925	3943	3961	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4250	4265	4278	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4544
1,7	4554	4563	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4648	4656	4664	4671	4678	4685	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4755	4761	4767
2,0	0,477	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4825	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4924	4927	4929	4930	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4954	4956	4957	4958	4959	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

3,0	0,49865	3,1	0,49903	3,2	0,49931	3,3	0,49952	3,4	0,49966	3,5	0,49977
3,6	0,49984	3,7	0,49989	3,8	0,49993	3,9	0,49995	4,0	0,499968	5,0	0,49999997

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Варианты исходных данных для ускоренных испытаний

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
№ <i>i</i> -го промежутка	1	4	1	3	2	14	26	19	26	4	8	5	5
	2	12	3	7	4	12	19	15	19	8	15	11	10
	3	17	4	12	7	10	14	13	14	11	16	13	12
	4	18	5	13	10	9	11	10	11	11	15	13	12
	5	17	7	14	10	8	8	8	8	10	12	12	12
	6	12	8	13	11	6	5	7	5	8	9	10	9
	7	9	8	11	10	6	5	5	5	7	7	8	9
	8	5	8	9	10	5	3	4	3	6	5	6	6
	9	3	8	7	9	4	2	4	2	5	4	5	6
	10	2	7	4	7	4	2	3	2	4	3	4	4
	11	1	7	3	6	3	1	2	1	3	2	4	4
	12		7	2	4	2	1	2	1	3	1	2	2
	13		5	1	3	3	1	1	1	2	1	2	2
	14		5	0	3	2	1	2	1	2	1	1	2
	15		4	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
	16		3		1	2	0	1	0	1	0	1	1
	17		3		1	2	0	0	0	1	1	0	1
	18		2		0	1	1	1	1	1		1	0
	19		1		1	1		0		0		0	1
	20		1			1		1		1		0	0
	21		1			1		0		0		1	0
	22		1			0		1		0			1
	23		1			1				0			
	24					0				1			
	25					1							
	26					1							
Δt , ч	96	48	72	48	48	72	48	72	48	72	48	72	

Продолжение приложения В

Варианты	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
№ i-го промежутка	1	0	0	11	53	0	1	0	0	4	4	6	28
	2	2	1	17	18	2	1	0	1	10	6	8	28
	3	5	3	17	9	14	5	2	1	15	7	8	21
	4	9	4	15	6	34	9	7	3	20	9	9	13
	5	13	6	12	4	34	15	16	4	19	10	10	7
	6	15	8	10	3	14	19	25	7	16	10	9	2
	7	16	9	6	2	2	19	25	9	9	11	9	1
	8	15	10	5	1		15	16	12	5	10	8	
	9	11	11	3	1		9	7	13	1	9	8	
	10	7	10	1	1		5	2	13	1	7	6	
	11	4	10	1	0		1		12		6	5	
	12	2	8	1	1		1		9		4	4	
	13	1	6	1	0				7		3	3	
	14		5		1				4		2	3	
	15		4						3		1	1	
	16		2						1		0	1	
	17		1						1		1	1	
	18		1									0	
	19		1									1	
Δt , ч	96	72	96	96	96	72	96	48	96	96	72	96	

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Варианты исходных данных для укороченных испытаний

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
№ <i>i</i> -го промежутка	1	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	2	2	1	2	0	1	1	2	0	1	2	1
	3	2	1	1	1	1	1	2	1	0	2	1
	4	2	1	1	0	1	2	2	1	1	2	1
	5	2	1	2	1	2	3	4	1	2	3	2
$\Delta t_{Э}, \text{ч}$	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	2100	1200	1200	1200	1200
$P_{ГЭ}$	0,95	0,94	0,93	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,90	0,91	0,92	0,93

Продолжение приложения Г

Варианты	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
№ <i>i</i> -го промежутка	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	3	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1
	4	2	1	3	0	4	3	2	3	3	4	2
	5	3	2	2	1	8	5	4	6	5	6	6
$\Delta t_{Э}, \text{сут.}$	100	100	100	100	100	100	60	60	60	60	60	60
$P_{ГЭ}$	0,90	0,90	0,92	0,95	0,85	0,85	0,90	0,90	0,92	0,90	0,90	0,85

Примечание – Варианты 1–4 соответствуют экспоненциальному закону распределения; варианты 5–8 – закону Рэлея; варианты 9–12 – закону Эрланга; варианты 13–16 – закону Вейбулла; варианты 17–20 – нормальному закону и, наконец, варианты 21–24 – усеченному нормальному закону.

Учебное издание

Кириллов Владимир Иванович

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ
НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Г. С. Корбут*
Корректор *Е. Н. Батурчик*

Подписано в печать 14.09.2012. Формат 60x84 1/16 . Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 3,37. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 100 экз. Заказ 510.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровка, 6