Можей Н. П.
Кандидат физ.-мат. наук, доцент, докторант КФУ

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И КОГОМОЛОГИИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Работа посвящена нахождению геодезических и когомологий на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах с использованием пакета Maple. Рассматриваемая тема имеет многочисленные приложения в механике, оптике, теории поля для моделирования динамических систем на римановых многообразиях [1]. Изучение геодезических сопряжено с необходимостью исследования систем дифференциальных уравнений, что вынуждает прибегать к компьютерным методам исследования, в частности, к системе Maple.

Вначале получена локальная классификация трехмерных псевдоримановых однородных пространств как пар алгебр Ли. Для каждой такой пары вычисляем геодезические и когомологии (пакеты DifferentialGeometry, GroupActions, LieAlgebras, Tensor, LieAlgebraCohomology). Приведем пример для конкретной пары с таблицей умножения

[[e1,e2]=e2,[e1,e3]=-e3].

Сначала вычислим когомологии (функции RelativeChains и Cohomology). Получим

$$C := [[\ ], [\theta 4], [-\theta 2 \wedge \theta 3], [-\theta 2 \wedge \theta 3 \wedge \theta 4], [\ ]],$$

$$H := [[\theta 4], [-\theta 2 \wedge \theta 3], [-\theta 2 \wedge \theta 3 \wedge \theta 4]]$$

Умножение элемента группы с координатами [a1, a2, a3, a4] на элемент с координатами [x1, x2, x3, x4] (функция LeftMultiplication):

$$[x1=a1+x1e^{-a3};\ x2=a2+x2e^{a3};\ x3=x3+a3;\ x4=x4+a4].$$

Правоинвариантные векторные поля (функция LieAlgebraData):

[D_x1 ; D_x2 ; -x1 D_x1 + x2 D_x2 + D_x3 ; D_x4].

Обозначим многообразие M и координаты [x, y, z] на M, действие группы G на M:

$$[x=a1+xe^{-a3};y=a2+ye^{a3};z=z+a4].$$

Локальное действие (InfinitesimalTransformation):

[D_x;D_y;-xD_x+yD_y;D_z].

Подалгебра , являющаяся алгеброй Ли стабилизатора (IsotropySubalgebra): [-xD_x+yD_y]. Тензор на группе Ли в виде левоинвариантной формы Мауэра-Картана (с точностью до константы)

dx1 dx2 +dx2 dx1 +b dx4 dx4.

Сведем этот инвариантный тензор (PushPullTensor) к инвариантной невырожденной метрике на M:

g=dxdy+dydx+bdzdz.

Вычислим алгебру Ли векторов Киллинга (KillingVectors) - полную алгебру инфинитеземальных изометрий метрики:

Библиотека БГУИР

[-zD_x+yD_z/b;D_z/b;-zD_y+xD_z/b;xD_x-yD_y;D_x;D_y].

Вычислим символы Кристоффеля (Christoffel): C=0, кривизну (CurvatureTensor): R=0. Вычислим первую ковариантную производную кривизны (CovariantDerivative), чтобы убедиться, метрика постоянной кривизны, метрика является конформно плоской (CottonTensor), тензор кручения (TorsionTensor) нулевой.

Пусть ∇ - линейная связность на M. Если [x(t); y(t); z(t)] - кривая на M, тогда уравнения геодезических относительно связности – это система второго порядка ОДУ. Найдем вектор (GeodesicEquations), компоненты которого – уравнения на геодезические:

$$\{d^2/dt^2x(t);d^2/dt^2y(t);d^2/dt^2z(t)\}.$$

Решив эту систему 2 ОДУ второго порядка (dsolve) получаем геодезические:

$$\{x(t)=C5\ t+C6;y(t)=C3\ t+C4;z(t)=C1\ t+C2\}$$

Также библиотека plots системы Maple предоставляет возможности построения трехмерной динамической компьютерной модели геодезических, оснащенной динамическим цифровым, языковым и графическим сопровождением.

Список использованной литературы:

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М., 1989. – 472 с.

Библиотека БГУИР