

УДК 681.5.015.26

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГООБЪЕКТНЫМИ СИСТЕМАМИ

С.М. ДЫМКОВ\*, А.В. МАРКОВ, В.И. СИМАНЬКОВ

\*National University of Singapore  
T-Lab Building 5A, Engineering Drive 1, № 09-02, Singapore, 117411

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
П. Бровка, 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 29 июня 2016

Описаны линейные алгоритмы управления положением для многообъектной системы. Алгоритмы используют минимум априорной информации и распространены на многомерные случаи. Исследуются методы, учитывающие внешние воздействия.

*Ключевые слова:* многообъектные системы, управление группой, децентрализованное управление, линейные системы.

### Введение

Рассмотрим распределенный алгоритм управления группой объектов. Задача каждого объекта состоит в том, чтобы занять положение в группе, основываясь на информации, полученной от соседних объектов. Это частный случай замкнутого управления многообъектной динамической системой (МОС) [1]. Концепция образования летных формирований, позаимствованная у птиц, позволяет увеличить эффективность группы. Самолеты, сухопутные единицы и корабли используют эту концепцию, так как она позволяет избежать столкновений, упростить управление, упорядочить движение [2–6]. Рассматриваемая задача имеет следующие подзадачи:

– управление группами в дискретные моменты времени. Задача состоит в том, чтобы адаптировать метод Ван-Лоана [7] к МОС;

– управление группами, представленными непрерывными моделями. Задача состоит в том, чтобы распространить метод Ван-Лоана на случай, когда динамика объектов описана обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ).

Рассмотрим решение этих задач.

### Управление группой в дискретные моменты времени

Пусть  $p_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, n$  –  $n$  произвольных объектов, данных на плоскости  $R^2$ . Для каждого объекта  $p_i$  доступна только информация относительно позиции двух самых близких объектов  $p_{i-1}$  и  $p_{i+1}$  (количество  $n$  объектов может быть также неизвестным). Последний объект  $p_n$  знает позицию  $p_{n-1}$  объекта и позицию некоторой данной точки  $B = (a_2, b_2)$ , первый объект  $p_1$  знает позицию  $p_2$  и некоторой точки  $A = (a_1, b_1)$ . Все объекты двигаются согласно собственной траектории.

*Задача.* Основываясь на данной информации, синтезировать алгоритм управления группой объектов таким образом, что они будут размещены в определенном порядке с заданным расстоянием между ними на отрезке  $[A, B]$ . Основные особенности этой задачи:

- 1) децентрализованное управление группой объектов;
- 2) неполная информация об объектах;
- 3) адаптивное управление, когда каждый объект определяет собственную траекторию движения согласно имеющейся информации относительно позиции двух самых близких объектов;

Задача может быть обобщена следующим образом:

- а) среди объектов данной группы выбирается некоторый «лидер», который двигается согласно сигналам задания, остальные объекты являются ведомыми;
- б) слежение за некоторой «целью» должно быть выполнено по заданной траектории (например, круг).

### Алгоритм управления группой объектов

Предлагается использовать следующий алгоритм: каждый ведомый объект имеет тенденцию занимать среднее положение между самыми близкими объектами. Позиция объектов на следующей итерации дана как [8]:

$$x_i^{k+1} = \frac{(x_{i-1}^k + x_{i+1}^k)}{2}, x_1^{k+1} = \frac{(a_1 + x_2^k)}{2}, x_n^{k+1} = \frac{(x_{n-1}^k + a_2)}{2}, i = 2, \dots, n-1, \quad (1)$$

$$y_i^{k+1} = \frac{(y_{i-1}^k + y_{i+1}^k)}{2}, y_1^{k+1} = \frac{(b_1 + y_2^k)}{2}, y_n^{k+1} = \frac{(y_{n-1}^k + b_2)}{2}, i = 2, \dots, n-1. \quad (2)$$

Также следует рассмотреть вопрос распределения номеров между объектами. Будем считать оптимальным распределением номеров такое, при котором объекты проходят минимальное расстояние для того чтобы занять свое место в строю. При построении в отрезок  $[A, B]$  используем сортировку объектов вдоль него, по их удаленности от точки  $A$ . То есть, первый номер получит объект, ближайший к точке  $A$ . Если же угол  $\varphi_i$ , образуемый векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{Ap_i}$ , больше  $90^\circ$ , то расстояние будем брать с обратным знаком. Обозначим  $\theta$  вектор индексов объектов:  $\theta = \text{sort}[\text{sign}(\cos \Phi) \cdot A]$ , где  $\Phi$  – вектор углов  $\varphi_i$  между  $\overline{AB}$  и  $\overline{Ap_i}$ ;  $A$  – вектор модулей векторов  $\overline{Ap_i}$ .

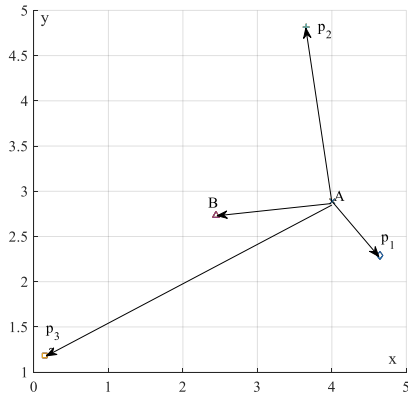
Косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, поделенному на произведение модулей векторов  $\cos \alpha = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|a| \cdot |b|}$ . После сортировки нумерация объектов имеет вид  $p_{\theta}$ . Поясним принцип сортировки рис. 1, а.

Здесь объект  $p_1$  получил первый номер, так как расположен наиболее близко к точке  $A$ , а также  $\overline{AB}$  и  $\overline{Ap_1}$ , образуют угол больше  $90^\circ$ . Объекты  $p_2, p_3$  более удалены,  $\overline{Ap_2}$  и  $\overline{Ap_3}$  образуют угол меньше  $90^\circ$  с вектором  $\overline{AB}$ .

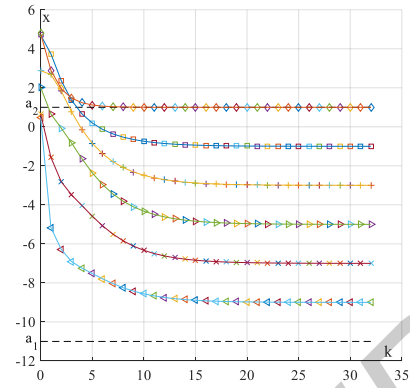
Объекты группы с данным информационным обменом имеют тенденцию при  $k \rightarrow \infty$  к единственному расположению на отрезке  $[A, B]$  в требуемом порядке  $(A, p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*, B)$  с одинаковым взаимным расстоянием, равным  $\frac{\|B - A\|}{(n+1)}$  таким образом, что

$$\|A - p_1^*\| = \|p_1^* - p_2^*\| = \dots = \|p_n^* - B\| = \frac{\|B - A\|}{(n+1)}.$$

Пример реализации предложенного алгоритма для  $n=6$  средств представлен на рис. 1, б. Здесь и далее на рисунках начальные точки выбраны случайно из диапазона  $[0;5]$ . Объекты заняли положения, близкие к окончательным, за 20 итераций.



*a*



*б*

Рис. 1. Пояснение принципа нумерация объектов (*a*), процесс построения шести объектов в линию (*б*)

### Управление группой, представленной непрерывной моделью в виде ОДУ

Положения, представленные выше, могут быть расширены на непрерывный случай, когда разностные уравнения динамики заменены дифференциальными уравнениями.

*Задача.* Разработать эффективные алгоритмы управления объектами и их распределения на отрезке (круге, кривой). Исходные условия следующие:

- 1) общее количество объектов в системе неизвестно;
- 2) следующая позиция каждого объекта определяется его собственными координатами и координатами его самых близких соседей;
- 3) первый и/или последний объект могут быть неподвижные или подвижные.

Для двумерного случая динамика объектов определяется следующими дифференциальными уравнениями [9]:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{x_{i-1} + x_{i+1}}{2}, x_1 = x_1(0), x_n(0) = x_n, \frac{dy_i}{dt} = \frac{y_{i-1} + y_{i+1}}{2}, y_1(0) = y_1; y_n(0) = y_n, i = 2, \dots, n-1.$$

Здесь без потери общности мы предполагаем, что *A* и *B* являются первым и последним объектами, соответственно, данной группы.

Объекты группы стремятся занять положения вида

$$(x_i(t), y_i(t)) \rightarrow \left(x_1 + \frac{i}{n+1}(x_n - x_1), y_1 + \frac{i}{n+1}(y_n - y_1)\right) \text{ при } t \rightarrow \infty \text{ для } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

### Примеры

В простых одномерных случаях, когда ограниченное множество объектов  $x_1, \dots, x_n$  произвольно задано на прямой. Пусть положения первого и последнего объектов установлены и не меняются со временем.

*Задача.* Занять отрезок  $[x_1, x_n]$  равномерно расположенными  $x_2, \dots, x_{n-1}$  объектами. Траектория этого движения, основанного на информации о состоянии соседей, описана специальными линейными дифференциальными уравнениями.

Затем рассмотрим несколько наглядных примеров с аналитическим решением соответствующей задачи управления группам с различными начальными условиями и информационными данными.

### Одномерный случай для $n = 4$ объектов и двух лидеров

Рассмотрим группу объектов  $x_1, \dots, x_4$ , где лидеры  $x_1$  и  $x_4$  проходят заданный путь таким образом, что движение этой группы описано уравнениями

$$x_1(t) \equiv \varphi_1(t), x_4(t) \equiv \varphi_2(t), \tag{3}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 + x_3}{2} - x_2, x_2(0) = x_2^0, \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_2 + x_4}{2} - x_3, x_3(0) = x_3^0.$$

Зададим  $\varphi_1(t) = e^{-t}$ ,  $\varphi_2(t) = e^{-t} + 10$ . В этом случае решение (3):

$$x_2(t) = \frac{10}{3} + e^{-\frac{3}{2}t} \left[ \frac{x_2^0 - x_3^0}{2} + \frac{5}{3} \right] + e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \frac{x_2^0 + x_3^0}{2} - 4 \right] - e^{-t}, \quad (4)$$

$$x_3(t) = \frac{20}{3} + e^{-\frac{3}{2}t} \left[ \frac{x_2^0 - x_3^0}{2} - \frac{5}{3} \right] + e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \frac{x_2^0 + x_3^0}{2} - 4 \right] - e^{-t}.$$

Тогда объекты расположатся на отрезке  $[0,10]$  следующим образом:

$$x_1^0 = 0, x_2^0 = \frac{10}{3}, x_3^0 = \frac{20}{3}, x_4^0 = 10.$$

Проведем моделирование данной динамической МОС (рис. 2). Как видно из рисунка, объекты данной МОС достигают места в строю за 7 с.

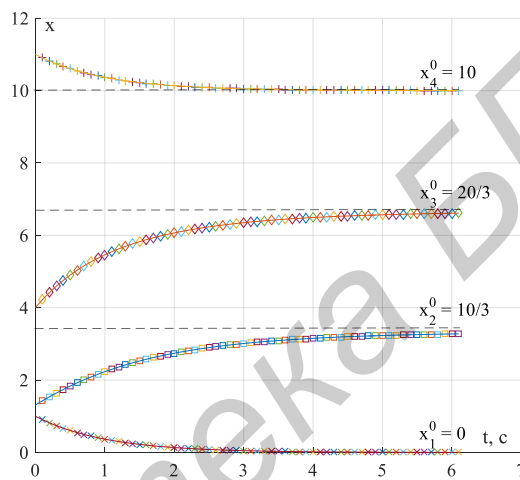


Рис. 2. Управление группой из четырех объектов

### Одномерный случай с $n = 5$ объектами

Рассмотрим множество объектов  $x_1, \dots, x_5$ , движение которых описано уравнениями

$$x_1(t) \equiv x_1^0, x_5(t) \equiv x_5^0, \quad (5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 + x_3}{2} - x_2, x_2(0) = x_2^0, \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_2 + x_4}{2} - x_3, x_3(0) = x_3^0, \frac{dx_4}{dt} = \frac{x_3 + x_5}{2} - x_4, x_4(0) = x_4^0. \quad (6)$$

Если первый и последний объект неподвижны:  $x_1(t) \equiv x_1^0, x_5(t) \equiv x_5^0$ , где  $x_1^0, x_5^0$  заданные числа, то необходимое решение задачи группы определяется динамикой остальных объектов  $x_2, x_3, x_4$ . Обозначим  $x = (x_2, x_3, x_4) \in R^3$ . Тогда остальные дифференциальные уравнения могут быть представлены в матричной форме следующим образом

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b, \text{ где } A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, b = \left( \frac{x_1^0}{2}, 0, \frac{x_5^0}{2} \right)^T \in R^3. \quad (7)$$

Собственные значения матрицы  $A$ :  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \lambda_3 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Заметим, что эти собственные значения могут быть записаны в компактной форме как  $\lambda_k = -2 \sin^2 \frac{k\pi}{8}, k = 1, 2, 3$ .

Соответствующие собственные векторы  $\alpha_k$  удовлетворяют линейному алгебраическому уравнению  $(A - \lambda_k E)\alpha_k = 0, k=1,2,3$ .

Можно показать, что эти собственные векторы

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Соответствующие линейные независимые решения дифференциальных уравнений (7):

$$x_2(t) = \alpha_1 e^{-t}, x_3(t) = \alpha_2 e^{(-1+\frac{\sqrt{2}}{2})t}, x_4(t) = \alpha_3 e^{(-1-\frac{\sqrt{2}}{2})t}.$$

Так как фундаментальная матрица  $W(t)$  для решения дифференциального уравнения (7) сформирована в соответствии с решениями  $W(t) = [x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]$ , то

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{(-1+\frac{\sqrt{2}}{2})t} & e^{(-1-\frac{\sqrt{2}}{2})t} \\ 0 & \sqrt{2}e^{(-1+\frac{\sqrt{2}}{2})t} & -\sqrt{2}e^{(-1-\frac{\sqrt{2}}{2})t} \\ -e^{-t} & e^{(-1+\frac{\sqrt{2}}{2})t} & e^{(-1-\frac{\sqrt{2}}{2})t} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Известно, что решение неоднородного дифференциального уравнения формы (7) может быть представлено как

$$x(t) = K(t,0)x(0) + \int_0^t K(t,\tau)bd\tau, \quad (10)$$

где  $K(t,\tau)$  – так называемая матрица Коши. В рассмотренном случае эта матрица может быть получена с помощью фундаментальной матрицы  $W(t)$  следующим образом:

$$K(t,\tau) = K(t-\tau) = W(t-\tau)W^{-1}(0). \quad (11)$$

Так как

$$W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, W^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

то решение дифференциальных уравнений (7) с начальными условиями (10) равно

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{3}{2}x_1^0 + \frac{1}{2}x_5^0 + e^{-t} \left[ \frac{x_2^0 - x_1^0 - x_4^0 + x_5^0}{2} \right] + e^{(-1+\frac{\sqrt{2}}{2})t} \left[ \frac{x_1^0 + x_5^0}{2(\sqrt{2}-2)} + \frac{x_2^0 + \sqrt{2}x_3^0 + x_4^0}{4} \right] + \\ &+ e^{(-1-\frac{\sqrt{2}}{2})t} \left[ \frac{x_2^0 - \sqrt{2}x_3^0 + x_4^0}{4} - \frac{x_5^0 + x_1^0}{2\sqrt{2}} \right], \quad (13) \\ x_3(t) &= -x_1^0 - x_5^0 + e^{(-1+\frac{\sqrt{2}}{2})t} \left[ \frac{x_2^0 + \sqrt{2}x_3^0 + x_4^0}{2\sqrt{2}} + \frac{x_1^0 + x_5^0}{2-2\sqrt{2}} \right] + e^{(-1-\frac{\sqrt{2}}{2})t} \left[ \frac{x_1^0 + x_5^0}{2+2\sqrt{2}} - \frac{x_2^0 + \sqrt{2}x_3^0 + x_4^0}{2\sqrt{2}} \right], \\ x_4(t) &= \frac{x_1^0}{2} + \frac{x_3^0}{2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}x_5^0 + e^{-t} \left[ \frac{x_1^0 - 2x_2^0 + x_4^0}{2} \right] + e^{(-1+\frac{\sqrt{2}}{2})t} \left[ \frac{x_2^0 + \sqrt{2}x_3^0 + x_4^0}{4} + \frac{x_1^0 + x_5^0}{2\sqrt{2}} \right] + \\ &+ e^{(-1-\frac{\sqrt{2}}{2})t} \left[ \frac{x_2^0 - \sqrt{2}x_3^0 + x_4^0}{4} - \frac{x_1^0 + x_5^0}{2(\sqrt{2}+2)} \right]. \end{aligned}$$

Проведено моделирование данной МОС, результаты представлены на рис. 3. Как видно, ограничивающее расположение объектов удовлетворяет поставленным условиям.

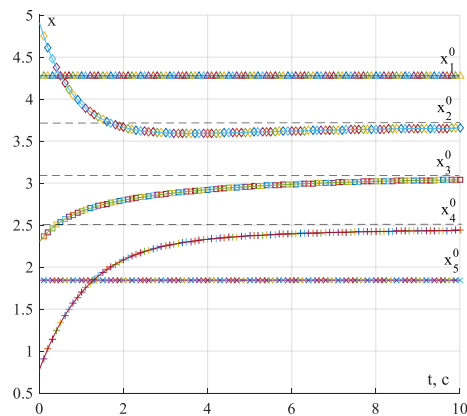


Рис. 3. Управление группой из четырех объектов

### Заключение

Представлена динамическая модель группы объектов при движении в строю по схеме ведущий-ведомый. В алгоритме управления группами только ведущие объекты периодически получают сигналы управления. Остальные объекты получают информацию о позиции двух ближайших объектов и используют эту информацию, чтобы занять такое положение, при котором сохранится заданное расстояние между ними. В отличие от [8], предлагается нумеровать объекты. Это решает задачу уникального набора соседних объектов, то есть объект не может быть «соседним» более чем для двух других объектов. Описанное распределение номеров позволяет задать маршруты, при которых уменьшится количество их пересечений, по сравнению со случайным, как в [7]. В алгоритме управления группами только ведущие объекты периодически получают сигналы управления. Остальные объекты получают информацию о позициях двух ближайших объектов и используют эту информацию, чтобы занять положение, при котором сохранится заданное расстояние между ними. Результаты моделирования подтверждают правильность произведенных расчетов.

## MATHEMATICAL MODELS AND ALGORITHMS FOR MULTI-AGENT CONTROL SYSTEMS

S.M. DYMKOV, A.V. MARKOV, V.I. SIMANKOV

### Abstract

The linear position control algorithms for multi-agent systems are described. The algorithms use a minimum of prior information and spread of these algorithms to the multidimensional case. The methods take into account the external impacts.

*Keywords:* multiagent systems, group control, decentralized control, linear systems.

### Список литературы

1. Wei R., Yongcan C. Distributed Coordination of Multi-agent Networks. London, 2011.
2. Allen M. J., Ryan J., Hanson C. E. *и др.* // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. Monterey, 2002. P. 4749–4756.
3. Edwards D.B., Bean T.A., Odell D.L. *и др.* // Proceedings of 2004 IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicles. New York: IEEE, 2004. P. 517–523.
4. Guilietti F., Pollini L. // IEEE Controls System Magazine. 2000. № 20 (6). С. 34–44.
5. Naffin D., Akar M., Sukhatme G. // Proceedings of the 7th International Symposium on Distributed Autonomous Robotic Systems. New York, 2004. P. 443–452.
6. Seiler P., Pant A., Hedrick K. // Proc. of the 41st IEEE Conf. on Decision and Control. New York, 2002. P. 118–123.
7. Elmachtoub A. N., Van Loan C. F. // Society for Industrial and Applied Mathematics. 2010. Vol. 52, № 1. P. 151–170.
8. Щербатов П.С. // УБС. 2010. № 30. С. 681–696.
9. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 7. С. 1–19.