Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Институт информационных технологий

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

В 2-х частях

Часть 1

Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Математический анализ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для студентов учреждений, обеспечивающих получение высшего образования по специальностям, закрепленным за УМО

Минск БГУИР 2011

УДК 51:378.146(076)
ББК [22.1+74.202.5]я73
М34

А в т о р ы:
Л. И. Майсеня, В. Э. Жавнерчик, А. А. Ермолицкий, И. Ю. Мацкевич

Р е ц е н з е н т ы:
главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук, профессор В. И. Берник;

профессор кафедры уравнений математической физики Белорусского
государственного университета, доктор педагогических наук,
кандидат физико-математических наук О. И. Мельников

Математические тесты : учеб.-метод. пособие. В 2 ч. Ч. 1 : Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Математический анализ / Л. И. Майсеня [и др.]. – Минск : БГУИР, 2011. – 142 с.
М34
ISBN 978-985-488-826-2(ч.1).

Содержатся тесты по курсу высшей математики, изучаемой в технических университетах, описание методики их использования и краткие теоретические сведения. Все тесты представлены парами как тесты базового и повышенного уровней сложности. Тесты могут быть использованы для диагностирования результатов математического образования и организации самостоятельной работы студентов.

Пособие предназначено для студентов, которые получают высшее образование в области информатики и радиоэлектроники.

УДК 51:378.146(076)
ББК [22.1+74.202.5]я73

ISBN 978-985-488-826-2(ч.1)
ISBN 978-985-488-827-9

Содержание

Введение

Успех в изучении каждой дисциплины, в том числе высшей математики (математики) в технических университетах, в значительной степени зависит от того, насколько эффективно функционирует взаимно обратная связь студент – преподаватель. Неотъемлемой частью учебного процесса как средства установления такой связи является контроль полученных студентами знаний. Без объективного учета и анализа полученных знаний невозможна их правильная коррекция и самокоррекция.

В процессе модернизации образовательной системы Республики Беларусь происходит внедрение в педагогическую практику новых эффективных технологий контроля знаний, основанных на использовании тестов. Вместе с традиционными способами изучения качества образования тесты позволяют исследовать ситуацию более полно и всесторонне. Их использование способствует получению объективной оценки знаний, умений и навыков студентов.

К существенным преимуществам тестовых технологий относятся:

– более детальная и всеобъемлющая проверка знаний, полученных из разных разделов математики;

– возможность одновременной аттестации большого количества студентов;

– эффективность дифференциации результата за счет включения заданий различной степени сложности;

– оптимальная реализация индивидуального подхода в изучении качества математической подготовки студентов;

– открытость процесса проверки и исключение субъективного подхода при выставлении итоговой отметки;

– динамика в реализации тестов на практике.

Учебно-методическое пособие «Математические тесты» разработано с целью реализации преимуществ тестовых технологий в практике обучения студентов университетов.

Методика использования пособия «Математические тесты» в образовательной практике

В предлагаемое пособие включено 30 тестов по всем основным разделам курса высшей математики (математики), традиционно изучаемым в технических университетах.

Тесты по теме «Выражения. Функции» (тесты № 2.1.1 и 2.1.2) включают учебный материал по элементарной математике. Они приведены с целью актуализации тех знаний школьного курса, которые особо востребованы при изучении высшей математики (математики) в университете. Четыре последних теста являются комбинированными, они содержат задания по различным темам курса высшей математики (математики).

Все тесты представлены парами – как тесты базового и повышенного уровней сложности. По сравнению с тестами базового уровня тесты повышенного уровня сложности требуют более высокого уровня математической подготовки студентов. Их выполнение характеризуется большим количеством логических операций, а многие задания имеют творческий характер. Таким образом, задания тестов имеют различный уровень сложности, т. е. характеризуются различным количеством логических операций в их решении. Для их выполнения требуется осуществить соответствующий тип учебной деятельности: репродуктивный, репродуктивно-продуктивный, продуктивный. Это способствует реализации дифференцированного подхода в процессе математического образования студентов.

Каждый тест состоит из 30 заданий. По структуре он содержит:

– 15 практических заданий группы А с предложенными четырьмя вариантами ответов (из которых только один верный);

– 10 практических заданий группы В, которые необходимо решить и получить ответ;

– 5 теоретических заданий группы С (с предложенными четырьмя вариантами ответов и единственным верным).

Выполнив задания группы А и группы С, необходимо выбрать номер ответа среди предложенных вариантов. После решения заданий группы В полученный числовой результат записывается студентом в качестве ответа.

Для оформления ответов необходимо заполнить приведенную ниже таблицу ответов.

Номер задания	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**	**A10**	**A11**	**A12**	**A13**	**A14**	**A15**
Номер ответа															
Номер задания	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**	**B7**	**B8**	**B9**	**B10**					
Ответ															
Номер задания	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**										
Номер ответа															

Анализ итогового заполнения этой таблицы позволит объективно оценить уровень знаний каждого студента в отдельности и группы в целом.

Учебно-методическое пособие содержит в качестве образца решение комбинированного теста № 1.1. С целью самопроверки правильности решения студентом комбинированного теста № 1.2 помещена также заполненная таблица ответов к заданиям данного теста.

«Математические тесты» могут быть использованы как для организации индивидуальной работы студентов во время практических занятий в университете, так и в процессе их самообразования.

Использование «Математических тестов» в образовательной практике имеет своей целью не только реализацию контролирующей функции, но и обучающей. Пособие содержит раздел «Краткие теоретические сведения», что позволит студентам (в случае затруднений) обратиться к теории, изучить ее и использовать в процессе решения тестовых заданий.

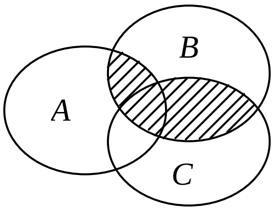
Тематические тесты

Тема 1. Множества. Комплексные числа

ТЕСТ № 1.1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Определите, какая из указанных операций над множествами соответствует заштрихованному множеству на рисунке:  	1) $A\cup B\cup C$; 2) $A\cup(B\cap C)$; 3) $A\cap B\cap C$; 4) $(A\cap B)\cup(B\cap C)$.
А2. Определите, какое из указанных соотношений является неверным, если **N**, **Z** – множества натуральных и целых чисел соответственно:	1) $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$; 2) $\mathbf{N}\cap\mathbf{Z}=\mathbf{N}$; 3) $\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}=\varnothing$; 4) $\mathbf{N}\cup\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$.
А3. Найдите множество *A*, если $A\cap B=\{3;7\}$, $A\cup B=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, $B=\{1;3;5;7;9\}$.	1) $\{1;2;3;7;8;9\}$; 2) $\{2;3;4;6;7;8\}$; 3) $\{3;7;8;9\}$; 4) $\{1;3;5;7;8;9\}$.
А4. Найдите множество $A\cap(B\cup C)$, если $A=[-3;+\infty)$, $B=(-2;4]$, $C=(4;10]$.	1) пустое множество; 2) $[-3;10)$; 3) $(4;10]$; 4) $(-2;10]$.
А5. Найдите сумму элементов множества $A=\left\{x \mid x^2-5x+6=0,\ x\in\mathbf{R}\right\}$.	1) 5; 2) 7; 3) 6; 4) –5.
А6. Определите, какое из указанных множеств чисел записано с помощью его характеристического свойства $A=\left\{a_k \,\middle\|\, a_k=\dfrac{(-1)^{k+1}(2k-1)}{2k+3},\ k=\overline{1,4}\right\}$:	1) $A=\left\{-\frac{1}{5};\frac{2}{7};-\frac{3}{9};\frac{4}{11}\right\}$; 2) $A=\left\{-\frac{1}{5};\frac{3}{7};-\frac{5}{9};\frac{7}{11}\right\}$; 3) $A=\left\{\frac{1}{5};-\frac{3}{7};\frac{5}{9};-\frac{7}{11}\right\}$; 4) $A=\left\{\frac{1}{4};-\frac{3}{4};\frac{5}{4};-\frac{7}{4}\right\}$.

А7. Найдите сумму целочисленных элементов множества решений неравенства $\log_{\frac{1}{2}} \log_4 x > 0$.	1) 3; 2) 5; 3) –2; 4) 1.
А8. Расположите числа $z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = 1 - 3i,$ $z_3 = -1 - i,\ z_4 = 2 + 2i$ в порядке возрастания их модулей.	1) $z_3,\ z_2,\ z_1,\ z_4;$ 2) $z_3,\ z_1,\ z_4,\ z_2;$ 3) $z_2,\ z_1,\ z_3,\ z_4;$ 4) $z_2,\ z_4,\ z_1,\ z_3.$
А9. Вычислите $i^{18} - 2i^7 + i^4 - 3i^8.$	1) $-3 + 2i;$ 2) $1 - 3i;$ 3) $2 + i;$ 4) $-2 - i.$
А10. Вычислите $\overline{z_1 + z_2}$, если $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = -1 + 4i.$	1) $-1 - i;$ 2) $1 - i;$ 3) $-1 + i;$ 4) $3 - 7i.$
А11. Вычислите $z_1^2 z_2$, если $z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = 2 - 3i.$	1) $6 + i;$ 2) $10 + 12i;$ 3) $6 - i;$ 4) $-18 + i.$
А12. Вычислите $\dfrac{z_1 z_2^3}{z_3}$, если $z_1 = 1 - 4i,\ z_2 = -1 + i,$ $z_3 = 2 - i.$	1) $26 - 2i;$ 2) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i;$ 3) $\dfrac{26}{5} - \dfrac{2}{5}i;$ 4) $\dfrac{14}{3} - \dfrac{8}{3}i.$
А13. Найдите аргумент числа $z = -2 + 2\sqrt{3}i.$	1) $-\dfrac{\pi}{3};$ 2) $\dfrac{5\pi}{6};$ 3) $-\dfrac{\pi}{6};$ 4) $\dfrac{2\pi}{3}.$
А14. Найдите запись числа $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.	1) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\right);$ 2) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right);$ 3) $2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right);$ 4) $\sqrt{3}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right).$
А15. Вычислите $z_1^8 z_2^4$, если $z_1 = -1 + i,\ z_2 = 1 - i.$	1) $32\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right);$ 2) $64(\cos\pi - i\sin\pi);$ 3) $64(\cos\pi + i\sin\pi);$ 4) $16\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right).$

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Найдите сумму элементов подмножества простых чисел множества $A=\{2;4;5;7;13;27;31;37;42;49\}$.
В2. Найдите наибольший общий делитель элементов множества $A=\{3960;300;810;750\}$.
В3. Найдите количество пар взаимно-простых чисел во множестве $A=\{2;3;4;5;10;12\}$.
В4. Найдите сумму элементов множества $A=\left\{a_n \,\middle|\, a_n=a_1+(n-1)d,\ a_1=-7,\ d=\frac{1}{2},\ n=\overline{1,13}\right\}$.
В5. Найдите сумму элементов множества $A=\left\{a_n \,\middle|\, a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n},\ n\in\mathbf{N}\right\}$.
В6. На первом курсе учатся 500 студентов. Из них своевременно сдали экзамен по математике 465 студентов, по физике – 481 студент. Не сдали экзамен ни по математике, ни по физике 15 человек. Определите, сколько студентов сдали оба экзамена.
В7. Найдите расстояние между точками $z_1=2-\sqrt{3}i,\ z_2=4+\sqrt{3}i.$
В8. Вычислите $\lvert z_1+z_2\rvert$, если $z_1=\sqrt{2}e^{i\pi},\ z_2=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}.$
В9. Найдите $\operatorname{Re} z$, если $z=\left(\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\right)2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$
В10. Найдите сумму квадратов корней уравнения $k^2+2k+2=0$ на множестве **C**.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

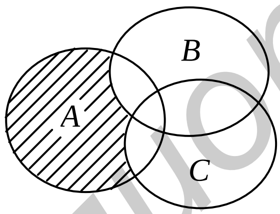
СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите определение: *Множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B, называется…* 1) *разностью множеств A и B*; 2) *пересечением множеств A и B*; 3) *объединением множеств A и B*; 4) *дополнением множества A до множества B.*
С2. Укажите неверное соотношение, если **R**, **C** – множества действительных и комплексных чисел соответственно: 1) $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$; 2) $\mathbf{C}\subset\mathbf{R}$; 3) $\mathbf{R}\cup\mathbf{C}=\mathbf{C}$; 4) $\mathbf{R}\cap\mathbf{C}=\mathbf{R}$.

С3. Закончите верно утверждение: *Если для комплексных чисел* z_1, z_2 *выполняется* $\lvert z_1\rvert > \lvert z_2\rvert$, *то…* 1) $z_1 > z_2$; 2) $z_1 > \pm z_2$; 3) *числа* z_1 *и* z_2 *сравнивать нельзя*; 4) $z_1 \geq z_2$.
С4. Укажите показательную форму комплексного числа *z*: 1) $z = \lvert z\rvert e^{-i\arg z}$; 2) $z = \dfrac{\lvert z\rvert}{e^{i\arg z}}$; 3) $z = \lvert z\rvert e^{i\arg z}$; 4) $z = \lvert z\rvert e^{i\arg z+\pi}$.
С5. Укажите формулу возведения комплексного числа *z* в натуральную степень *n*: 1) $z^n = \lvert z\rvert^n \left(\sin(n\arg z) + i\cos(n\arg z)\right)$; 2) $z^n = \lvert z\rvert^n e^{i\arg^n z}$; 3) $z^n = \lvert z\rvert^n \left(\cos(\arg^n z) + i\sin(\arg^n z)\right)$; 4) $z^n = \lvert z\rvert^n e^{in\arg z}$.

ТЕСТ № 1.1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Определите, какая из указанных операций над множествами соответствует заштрихованному множеству на рисунке:  	1) $A\cap(B\cup C)$; 2) $(B\cup C)\setminus A$; 3) $A\setminus(B\cup C)$; 4) $(A\cup B)\cap C$.
А2. Определите, какое из указанных равенств является верным, если **Q**, **I**, **R**, **C** – множества рациональных, иррациональных, действительных, комплексных чисел соответственно:	1) $(\mathbf{C}\cap\mathbf{R})\setminus\mathbf{I} = \mathbf{Q}$; 2) $(\mathbf{C}\cup\mathbf{R})\setminus\mathbf{I} = \mathbf{Q}$; 3) $(\mathbf{C}\cup\mathbf{R})\setminus(\mathbf{C}\cap\mathbf{R}) = \mathbf{I}$; 4) $(\mathbf{C}\cup\mathbf{R})\cap(\mathbf{C}\cap\mathbf{Q}) = \mathbf{R}$.
А3. Найдите множество $\mathbf{R}\setminus(A\cup B\cup C)$, если $A=(-\infty;3)$, $B=(3;12)$, $C=[10;+\infty)$.	1) $(-\infty;+\infty)$; 2) пустое множество; 3) $\{3\}$; 4) $[10;12)$.
А4. Найдите множество $\overline{(A\cap\overline{B})}\setminus B$, если $A=\left\{x \,\middle|\, x^2-4\leq 0,\ x\in\mathbf{R}\right\}$, $B=\left\{x \,\middle|\, x^2-6x+5>0,\ x\in\mathbf{R}\right\}$.	1) $(-\infty;5)$; 2) $(2;5]$; 3) $[2;+\infty)$; 4) $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

А5. Определите, какое из указанных множеств чисел записано с помощью его характеристического свойства $A=\left\{a_k \,\middle|\, a_k=(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}(k-1)!,\ k=\overline{1,5}\right\}$:	1) $A=\{0;1;-2;6;-12\}$; 2) $A=\{1;-1;-2;6;24\}$; 3) $A=\{-1;2;-6;24;-120\}$; 4) $A=\left\{-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3};\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right\}$.
А6. Найдите сумму целочисленных элементов множества $A=\left\{x \,\middle|\, \frac{-2}{x^2-6x-55}>0,\ x\in\mathbf{R}\right\}$.	1) 45; 2) 51; 3) 40; 4) 56.
А7. Найдите наибольший элемент во множестве чисел $A=\left\{\frac{(2n)!-(2n-2)!}{(2n-1)!};\frac{2n!+2(n-2)!}{(n-1)!};\frac{2n(n+1)!-n!}{(n+1)!}\right\}$, если $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 2$.	1) $4n+\frac{1}{n}$; 2) $\frac{n!}{2}$; 3) $\frac{4n^2-2n-1}{2n-1}$; 4) $2n+\frac{2}{n-1}$.
А8. Найдите множество целочисленных решений системы $\begin{cases}\lvert x\rvert<2,\\ \lvert y+1\rvert<1.\end{cases}$	1) $\{(0;1);(0;2);(1;1);(1;2)\}$; 2) $\{(-1;0);(0;-1)\}$; 3) $\{(-1;0);(0;-1);(1;-1)\}$; 4) $\{(-1;-1);(0;-1);(1;-1)\}$.
А9. Вычислите $\frac{z_1^{10}}{z_2^{3}}$, если $z_1=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$, $z_2=2e^{i\pi}$.	1) -1; 2) $-\frac{1}{8}$; 3) $6i-6$; 4) $1+i$.
А10. Вычислите $\frac{\operatorname{Re}(1+2i)^2-(i-3)}{1+5i-(\overline{4-i})}$.	1) $-\frac{3}{7}+\frac{1}{7}i$; 2) $-0{,}16+0{,}12i$; 3) $\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$; 4) $-0{,}4+0{,}3i$.
А11. Вычислите $\frac{-5i+5}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$.	1) $5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; 2) $5e^{i\frac{\pi}{2}}$; 3) $5e^{-i\frac{\pi}{2}}$; 4) $5e^{i\pi}$.
А12. Найдите значение кубического корня с положительной мнимой частью из комплексного числа $z=-8i$.	1) i; 2) $-1+i$; 3) $2+2i$; 4) $2i$.
А13. Определите, как на плоскости расположены комплексные числа $z_1=-2+2i$, $z_2=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $z_3=e^{i\frac{3\pi}{4}}$.	1) в вершинах равностороннего треугольника; 2) в вершинах прямоугольного треугольника; 3) на одной прямой; 4) в вершинах тупоугольного треугольника.
А14. Найдите координаты точки на плоскости, соответствующей комплексному числу $z=\frac{i+2e^{i\pi}}{i+1}$.	1) $(-0{,}5;1{,}5)$; 2) $(1;1)$; 3) $(-1{,}5;-1)$; 4) $(1;-2)$;

A15. Найдите уравнение окружности $x^2+y^2-4x+2y=4$ в комплексной форме.	1) $\lvert z+1-2i\rvert=4$; 2) $\lvert z-2+i\rvert=3$; 3) $\lvert z+1+i\rvert=1$; 4) $\lvert z+1+2i\rvert=4$.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Найдите сумму элементов множества $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, если A – множество, состоящее из первых четырех натуральных чисел, кратных 3, B – множество, состоящее из первых четырех натуральных чисел, кратных 6.
В2. Найдите сумму элементов множества $A=\left\{b_n \,\middle|\, b_1=1, b_2=1, b_n=b_{n-2}+b_{n-1}, n=\overline{3,7}\right\}$.
В3. Найдите количество целочисленных решений системы $\begin{cases} x+y<8, \\ x-y>4, \\ y-1\ge 0. \end{cases}$
В4. Вычислите площадь фигуры, образованной множеством $(\bar{A}\cap B)\setminus C$, где $A=\left\{(x;y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2>16\right\}$, $B=\left\{(x;y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, y\le\lvert x\rvert\right\}$, $C=\left\{(x;y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, x>0\right\}$.
В5. Определите, при каком наибольшем целочисленном значении n дробь $\dfrac{3n^2-16n+23}{n-3}$ является натуральным числом.
В6. Среди выпускников школы отметку «9» получили: по математике – 17 человек; по физике – 22; по информатике – 24; по математике и физике – 7; по математике и информатике – 6; по физике и информатике – 10; по всем трем предметам – 4 человека. Определите, сколько человек получили по совокупности этих предметов только одну отметку «9».
В7. Вычислите площадь фигуры, образованной множеством точек $\begin{cases} -1\le \operatorname{Im} z\le 2, \\ 0\le \operatorname{Re} z\le 1. \end{cases}$
В8. Найдите $x+y$ $(x, y\in\mathbf{R})$, если известно, что комплексные числа $z_1=2x-2yi$, $z_2=y+x+i$ являются сопряженными.
В9. Найдите $\operatorname{Im} z$, если $z=\dfrac{1}{\sqrt{2}(1-i)}-\dfrac{1}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$.
В10. Найдите произведение корней уравнения $x^4-5x^2-36=0$ на множестве **C**.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите определение: *Множество А называется подмножеством множества В, если…* 1) *эти множества имеют общие элементы*; 2) *каждый элемент множества А принадлежит множеству В*; 3) *элементы множества В являются также элементами множества А*; 4) *множество А имеет меньше элементов, чем множество В*.
С2. Укажите верное соотношение, если **Q**, **I**, **R** – множества рациональных, иррациональных, действительных чисел соответственно: 1) $\mathbf{R} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{I}$; 2) $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$; 3) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{I} = \varnothing$; 4) $\mathbf{R} \subset \mathbf{Q}$.
С3. Закончите верно утверждение: *На множестве действительных чисел выполнима операция…* 1) *извлечения корня степени n* $(n \in \mathbf{N}, n \geq 2)$ *из любого числа*; 2) *возведения любого числа в нулевую степень*; 3) *деления чисел*; 4) *возведения любого числа в степень с натуральным показателем*.
С4. Укажите, сколько различных комплексных чисел получится в результате возведения числа i во всевозможные натуральные степени: 1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 8.
С5. Укажите формулу умножения комплексных чисел $z_1 = \|z_1\|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \|z_2\|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$: 1) $z_1 z_2 = \|z_1\|\|z_2\|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$; 2) $z_1 z_2 = \|z_1\|\|z_2\|\big(\cos(\varphi_1\varphi_2) + i\sin(\varphi_1\varphi_2)\big)$; 3) $z_1 z_2 = \big(\|z_1\|+\|z_2\|\big)\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$; 4) $z_1 z_2 = \big(\|z_1\|+\|z_2\|\big)\big(\cos(\varphi_1\varphi_2) + i\sin(\varphi_1\varphi_2)\big)$.

Тема 2. Выражения. Функции

ТЕСТ № 2.1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Выделите полный квадрат в выражении $25x+4\sqrt{x}-3$.	1) $5\left(\sqrt{x}+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{3}{5}$; 2) $\left(5\sqrt{x}+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{79}{25}$; 3) $5\left(\sqrt{x}+2\right)^2-\frac{17}{5}$; 4) $\left(5\sqrt{x}+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{17}{5}$.
А2. Устраните иррациональность в знаменателе дроби $\frac{12}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.	1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$; 2) $12\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)$; 3) $\sqrt{30}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$; 4) $\frac{12}{\sqrt{30}}$.
А3. Упростите выражение $\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}}$ после замены переменной $x=t^{12}$.	1) $\frac{t+1}{6}$; 2) $-\frac{t^6}{t+1}$; 3) $\frac{t^2}{t-1}$; 4) $\frac{t}{t^2+1}$.
А4. Сократите дробь $\frac{c^4-16}{c^4-4c^3+8c^2-16c+16}$.	1) $\frac{c^2+4}{c^2-4}$; 2) $\frac{c-2}{c+2}$; 3) $\frac{c+2}{c-2}$; 4) $\frac{c-2}{c^2+4}$.
А5. Найдите остаток от деления многочлена $2x^3-3x^2+5x-4$ на многочлен x^2+4x-2.	1) $21x-14$; 2) $-19x+6$; 3) $2x-3$; 4) $53x-26$.
А6. Найдите $\sqrt{3}xy$, если $4x^2-4\sqrt{3}x+y-8\sqrt{y}+19=0$.	1) –6; 2) 18; 3) 24; 4) 12.
А7. Упростите выражение $\frac{1}{6}\left(\lg k+\lg(k+r)-2\lg r\right)-\frac{1}{3}\lg(k+r)$.	1) $\frac{1}{6}\lg(k-2r)$; 2) $\lg\sqrt[6]{2k-r}$; 2; 3) $\frac{1}{6}\lg\frac{k}{r^2}$; 4) $\lg\sqrt[6]{\frac{k}{r^2(k+r)}}$.

А8. Вычислите $\operatorname{arctg}(-1)+2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-3\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$	1) $-\frac{11}{12}\pi;$ 2) $\frac{11}{12}\pi;$ 3) $\frac{\pi}{6};$ 4) $-\frac{7}{8}\pi;$
А9. Вычислите $\sin(2\arcsin x),$ если $x=0,8.$	1) 1,4; 2) 0,96; 3) 0,6; 4) –0,5.
А10. Вычислите $\left(4+3\sqrt{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right),$ если $\cos\alpha=-0,6,\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}.$	1) $-\frac{11}{10};$ 2) $\frac{1}{5};$ 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}};$ 4) $\frac{4+3\sqrt{3}}{2}.$
А11. Найдите абсциссу графика функции $y=\frac{\sqrt{x}}{x-1},$ если $y=1.$	1) 1; 2) $\frac{3-\sqrt{5}}{2};$ 3) $\frac{3+\sqrt{5}}{2};$ 4) –2.
А12. Найдите область определения функции $y=\frac{\sqrt[4]{20-x-x^2}}{\lvert x-1\rvert-3}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-25}}.$	1) $(-5;-2)\cup(-2;4);$ 2) $[-5;3)\cup(3;4];$ 3) $[-5;4];$ 4) $(-\infty;-5]\cup[4;+\infty).$
А13. Определите, какая из указанных функций является четной:	1) $y=\frac{x^4+x^2}{\lvert x+1\rvert-2};$ 2) $y=x^3-x^2;$ 3) $y=\frac{\lvert x\rvert-x^2}{\sqrt{1-x^2}};$ 4) $y=\frac{x^4-x^3}{\lvert x\rvert}.$
А14. Найдите сумму координат точек пересечения графиков функций $y=3+2x-x^2,\ \ y=5-x.$	1) 3; 2) 6; 3) 7; 4) 10.
А15. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $(1;-1),\ (-2;8).$	1) $y=x+8;$ 2) $y=-3x+2;$ 3) $y=3x-2;$ 4) $y=-2x+7.$

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Упростите выражение $\frac{5\sqrt{ab}+b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$ до числа.
В2. Определите, какое число нужно прибавить к многочлену $4a^2+\frac{2}{3}a-\frac{5}{72},$ чтобы он являлся квадратом двучлена.

В3. Найдите остаток от деления многочлена x^3+3x^2+3x+1 на многочлен $x-1$.
В4. Найдите коэффициент при x^3 для заданного выражения $(1-2x)^6$.
В5. Найдите AB, если задано тождество $\dfrac{3}{x^2-5x+6}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$.
В6. Упростите выражение $60\log_a\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[5]{a}:\sqrt[4]{a}\right)$ до числа.
В7. Вычислите $\log_2^2(2a^2)$, если $\log_2 a=\dfrac{1}{2}$.
В8. Найдите наименьший положительный период функции $y=\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.
В9. Найдите произведение нулей функции $y=x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}-2$.
В10. Найдите $a+b$, если известно, что прямые $2x+ay=3$, $4x-2y=3b$ совпадают.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Укажите свойство модуля: 1) $\|x+y\|>\|x\|+\|y\|$; 2) $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$; 3) $\|x+y\|\geq\|x\|+\|y\|$; 4) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.
С2. Укажите основное логарифмическое тождество: 1) $a^{\log_b a}=b$; 2) $a^{\log_a b}=a$; 3) $a^{\log_b a}=a$; 4) $a^{\log_a b}=b$.
С3. Укажите верную формулу: 1) $a^3-b^3=(a-b)(a^2-ab+b^2)$; 2) $a^3-b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; 3) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; 4) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+2ab+b^2)$.
С4. Закончите верно утверждение: *График нечетной функции симметричен относительно…* 1) *оси* Ox; 2) *точки* $x=0$; 3) *начала системы координат*; 4) *оси* Oy.
С5. Закончите верно утверждение: *График функции* $y=f(x-a)$, *где* $a>0$, *получается параллельным переносом графика функции* $y=f(x)$ … 1) *вверх на а единиц*; 2) *вниз на а единиц*; 3) *влево на а единиц*; 4) *вправо на а единиц*.

ТЕСТ № 2.1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Устраните иррациональность в знаменателе дроби $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{5}}$.	1) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)}{x-5}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[4]{5}}{x+5}$; 3) $\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{5}}{x+5}$; 4) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{x-5}$.
А2. Вычислите $\dfrac{(x-y)^3-x^3+y^3}{x^2-y^2}$, если $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$.	1) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; 2) $-\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; 4) $\dfrac{1}{3}$.
А3. Сократите дробь $\dfrac{a^4+a^2+1}{a^2-a+1}$.	1) a^2-a-1; 2) a^2-a; 3) a^2+a+1; 4) a^2-a+1.
А4. Выделите целую часть в выражении $\dfrac{x^4-2x^2+3x-4}{x^2+2x-2}$.	1) x^2; 2) x^2-2x+4; 3) x^2+2x; 4) x^2-4.
А5. Найдите пару $(a;b)$, если известно, что многочлен x^3-4ax^2+2x-b делится на $x-2$ нацело и на $x+1$ с остатком 3.	1) $(1;-2)$; 2) $\left(\dfrac{1}{2};12\right)$; 3) $(-3;4)$; 4) $\left(\dfrac{3}{2};-12\right)$.
А6. Упростите выражение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если $x\in[1;2]$.	1) $2\sqrt{x-1}$; 2) 2; 3) $2x$; 4) $1+\sqrt{x-1}$.
А7. Найдите ABC, если задано тождество $\dfrac{1}{x^3-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$.	1) $\dfrac{1}{81}$; 2) $\dfrac{2}{27}$; 3) $-\dfrac{1}{27}$; 4) $\dfrac{1}{9}$.
А8. Определите, какая из указанных функций является монотонно возрастающей:	1) $y=x^3-1$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2}+x$; 3) $y=\lvert x+3\rvert$; 4) $y=5^{-x}$.

А9. Найдите угол наклона прямой $3x+3y-5=0$ к оси Ox.	1) $45°$; 2) $60°$; 3) $120°$; 4) $135°$.
А10. Найдите область неположительности функции $y=\dfrac{x^2-2x+1}{(x^2-2x)(x+3)^2}$.	1) $(0;\,2)$; 2) $(-3;\,0)\cup[1;\,2)$; 3) $(0;\,1]$; 4) $(-\infty;\,0]$.
А11. Найдите область знакоположительности функции $y=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+1}{x^2-3x-4}$.	1) $(-\infty;\,5)$; 2) $(-1;\,4)$; 3) $(5;\,+\infty)$; 4) $(-1;\,+\infty)$.
А12. Вычислите $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, если $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.	1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) 1; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
А13. Найдите область значений функции $y=3\sin^2 x-4\cos^2 x$.	1) $[-3;\,4]$; 2) $[-4;\,3]$; 3) $[3;\,4]$; 4) $[0;\,7]$.
А14. Преобразуйте выражение $\dfrac{2}{5-4\sin x+3\cos x}$ после замены переменной $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.	1) $\dfrac{t-1}{t+1}$; 2) $\dfrac{t}{1+t^2}$; 3) $\dfrac{1+t^2}{(t-2)^2}$; 4) $\dfrac{1+t^2}{1-t}$.
А15. Определите, при каких значениях аргумента функция $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$ принимает множество значений $\left[-\dfrac{\pi}{3};\,\dfrac{\pi}{4}\right]$.	1) $\left[2\sqrt{3};\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$; 2) $\left[-\sqrt{2};\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$; 3) $\left[-2\sqrt{3};\,2\right]$; 4) $\left[-\sqrt{3};\,\sqrt{2}\right]$.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Вычислите $a^3+2a^2+\dfrac{8}{a^2}+\dfrac{8}{a^3}$, если $a+\dfrac{2}{a}=-4$.
В2. Найдите $a+b$, если известно, что многочлен x^3+ax^2-2x+b делится на x^2-2x+5 нацело.
В3. Найдите коэффициент при x^5 для заданного выражения $(x-\sqrt{x})^7$.
В4. Найдите xy, если $\sqrt{x^2+4y^2+16y-2x+17}+\sqrt{y^2+9x^2-18x+4y+13}=0$.
В5. Вычислите $x^{\log_{\sqrt{x}}\left(12-6+3-\frac{3}{2}+\ldots\right)}$.

B6. Найдите сумму целых значений функции $y=\sqrt{1-4x+4x^2}-2\sqrt{\frac{x^2}{4}+x+1}$, если $x\in[1;4)$.
B7. Найдите наименьшее значение функции $y=\left\lvert \log_{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{x}{2}\right)\right\rvert$.
B8. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{2x+3}{2-2x}$, если $x\in\left[-3;\frac{1}{2}\right]$.
B9. Определите, при каком значении аргумента функции $y=16x-x^2-14$, $y=10\log_8\left(\frac{8}{x}+\frac{x}{8}\right)^{15}$ принимают равные значения.
B10. Определите, при каком значении x числа $9,\ 4-x,\ \sin\arcsin x$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Укажите верную формулу: 1) $c^{\log_c b}=b^{\log_b c}$; 2) $c^{\log_a b}=b^{\log_a c}$; 3) $a^{\log_c b}=c^{\log_a b}$; 4) $c^{\log_a b}=a^{\log_b a}$.
С2. Укажите верную формулу, если $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$: 1) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$; 2) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}-b^{n-1})$; 3) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+...+ab^{n-2}-b^{n-1})$; 4) $a^n-b^n=(a^{n-1}-b^{n-1})(a+b)$.
С3. Закончите определение: *Рациональная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *– многочлены, называется правильной, если…* 1) *она не сокращается*; 2) *многочлен* $P(x)$ *имеет первую степень*; 3) *степень многочлена* $P(x)$ *меньше степени многочлена* $Q(x)$; 4) *степень многочлена* $P(x)$ *меньше или равна степени многочлена* $Q(x)$.
С4. Укажите нечетную функцию: 1) $y=\operatorname{arctg}x$; 2) $y=\operatorname{arcctg}x$; 3) $y=\cos x$; 4) $y=\arccos x$.
С5. Закончите верно утверждение: *График функции* $y=f(-x)$ *симметричен графику функции* $y=f(x)$ *относительно…* 1) *оси* Ox; 2) *оси* Oy; 3) *начала системы координат*; 4) *прямой* $y=-x$.

Тема 3. Линейная алгебра

ТЕСТ № 3.1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Найдите произведение $a_{13}a_{21}a_{34}$ элементов матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$.	1) 30; 2) 15; 3) 0; 4) 27.
А2. Найдите сумму элементов матрицы X, если $5X-3A=4B,\ A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.	1) –2; 2) 5; 3) 4; 4) 3.
А3. Найдите сумму элементов матрицы X, если $2X+3E=A^{\mathrm{T}},\ A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 5.
А4. Найдите элемент c_{32} матрицы AB, если $A=\begin{bmatrix} 1 & -10 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -10 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.	1) –10; 2) 11; 3) 0; 4) 7.
А5. Найдите сумму элементов матрицы AB, если $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.	1) 20; 2) 23; 3) –22; 4) 0.
А6. Найдите сумму элементов матрицы AB, если $A=\begin{bmatrix} i & 1+i \\ 2i & -i \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3+i & 0 \\ -3i & 2+i \end{bmatrix}$.	1) $-1+7i$; 2) $3-2i$; 3) $6+i$; 4) $2-5i$.
А7. Найдите сумму элементов матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=3x^2-2x-5,\ A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.	1) 304; 2) 296; 3) 424; 4) 188.
А8. Вычислите $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$.	1) 8; 2) 17; 3) –23; 4) 7.

А9. Вычислите $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.	1) 3; 2) –4; 3) 0; 4) 2.
А10. Решите уравнение $\begin{vmatrix} x & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$	1) –7; 2) –8; 3) 7; 4) 8.
А11. Найдите минор M_{12} элемента a_{12} матрицы $\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$.	1) 4; 2) –6; 3) 8; 4) 6.
А12. Найдите алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} матрицы $\begin{bmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 7 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.	1) 2; 2) 38; 3) –4; 4) –2.
А13. Найдите сумму элементов матрицы A^{-1}, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.	1) 3; 2) 0; 3) 4; 4) –4.
А14. Найдите сумму элементов матрицы X, если $X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.	1) 0; 2) 3; 3) –2; 4) 1.
А15. Найдите $x_1 + x_2 + x_3$, если x_1, x_2, x_3 – решение системы $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$	1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) –2.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Найдите сумму элементов матрицы $AB - BA$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
В2. Найдите сумму элементов матрицы A^3, если $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

В3. Вычислите определитель матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$.
В4. Найдите действительную часть определителя $\begin{vmatrix} 1-i & 2+i \\ 3+i & 4-i \end{vmatrix}$.
В5. Найдите сумму корней уравнения $\begin{vmatrix} x^2-8 & x^2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0.$
В6. Вычислите $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.
В7. Вычислите $\dfrac{1}{b^2-a^2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.
В8. Найдите коэффициент при *x* для заданного определителя $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ x & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.
В9. Найдите сумму элементов матрицы A^{-1}, если $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
В10. Найдите $x_1 + x_2 + x_3$, если x_1, x_2, x_3 – решение системы $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите определение: *Если M_{ij} – минор элемента a_{ij} определителя n-го порядка, то алгебраическим дополнением этого же элемента называется число…* 1) $A_{ij} = M_{ij}$; 2) $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$; 3) $A_{ij} = -M_{ij}$; 4) $A_{ij} = (-1)^{ij} M_{ij}$.

C2. Укажите верное равенство: 1) $\det A^{-1} = \det A$; 2) $\det A^{-1} = -\det A$; 3) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$; 4) $\det A^{-1} = -\dfrac{1}{\det A}$.
C3. Закончите верно утверждение: *К элементарным преобразованиям строк матрицы не относится…* 1) *сложение первой и последней строк матрицы*; 2) *умножение всех элементов строки матрицы на нуль*; 3) *перестановка первой и последней строк матрицы*; 4) *умножение всех элементов строки матрицы на* –1.
C4. Закончите верно утверждение: *Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными не может иметь…* 1) *нулевой определитель матрицы системы, если* $m = n$; 2) *единственное решение*; 3) *ненулевой определитель матрицы системы, если* $m = n$; 4) *два решения*.
C5. Закончите определение: *Система линейных алгебраических уравнений называется однородной, если…* 1) *она имеет единственное решение*; 2) *она имеет бесконечное множество решений*; 3) *определитель основной матрицы системы равен нулю*; 4) *все элементы столбца свободных членов нулевые*.

ТЕСТ № 3.1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Найдите сумму $c_{21} + c_{32}$ элементов матрицы AB, если $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.	1) 2; 2) –4; 3) –1; 4) –5.
А2. Найдите сумму элементов матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = 2x^2 + 3x$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.	1) 74; 2) 80; 3) –56; 4) 92.
А3. Вычислите определитель матрицы $A^2 B^{\mathrm{T}}$, если $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.	1) 22; 2) 24; 3) 28; 4) 18.

A4. Вычислите $\det\left(A^3\right)$, если $A=\begin{bmatrix}1+i & i \\ i & 1-i\end{bmatrix}$.	1) 8; 2) 16; 3) 64; 4) 27.
A5. Определите, при каком значении λ матрица $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & \lambda & 4\end{bmatrix}$ вырождена.	1) 2; 2) –3; 3) 3; 4) –2.
A6. Вычислите $\det\left(A^2\right)$, если $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.	1) –4; 2) 8; 3) –2; 4) 4.
A7. Найдите сумму целочисленных решений неравенства $\begin{vmatrix}x & 2 & 1 \\ 0 & x & -1 \\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}\le 0$.	1) 2; 2) –2; 3) 1; 4) –1.
A8. Вычислите $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2\end{vmatrix}$.	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) –1.
A9. Найдите произведение минора элемента a_{13} и алгебраического дополнения элемента a_{23} матрицы $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.	1) 2; 2) –2; 3) –4; 4) 4.
A10. Найдите мнимую часть суммы элементов матрицы *X*, если $\begin{bmatrix}3-i & 2+i \\ i & 1-i\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3+4i & 2+i \\ -i & 1+2i\end{bmatrix}$.	1) 3; 2) –2; 3) –3; 4) 2.
A11. Найдите сумму элементов матрицы *X*, если $\begin{bmatrix}2 & 1 \\ 3 & 2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}-3 & 2 \\ 5 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4 \\ 3 & -1\end{bmatrix}$.	1) 10; 2) 25; 3) –30; 4) –15.
A12. Найдите элемент c_{22} матрицы *C*, если $C\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}$.	1) 3; 2) –2; 3) 1; 4) 0.
A13. Найдите ранг матрицы $\begin{bmatrix}3 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 7 & 12 & 11 & 8\end{bmatrix}$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

A14. Найдите x_2+x_3, если x_1, x_2, x_3 – решение системы $\begin{cases}3x_1+4x_2-x_3=-2,\\5x_1+3x_2-4x_3=-2,\\4x_1+2x_2+3x_3=5.\end{cases}$	1) 3; 2) –2; 3) 4; 4) 0.
A15. Найдите количество решений системы $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=7,\\x_1-4x_2+3x_3=-4,\\4x_1-5x_2+5x_3=3,\\6x_1-13x_2+11x_3=5.\end{cases}$	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) бесконечное множество.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Найдите сумму элементов матрицы ABC, если $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\3&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&3&1\\-1&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\3&1&1\end{bmatrix}$.
B2. Вычислите $\det\left(A^3A^{\mathrm{T}}\right)$, если $A=\begin{bmatrix}4&2\\3&2\end{bmatrix}$.
B3. Найдите действительную часть определителя $\begin{vmatrix}1-i&i&1\\-i&1&1+i\\1&1-i&1+i\end{vmatrix}$.
B4. Найдите коэффициент при x для заданного определителя $\begin{vmatrix}2&3&4&1\\5&2&1&-1\\4&3&7&x\\1&-1&2&3\end{vmatrix}$.
B5. Вычислите $\begin{vmatrix}5&1&0&0&0\\1&5&1&0&0\\0&1&5&1&0\\0&0&1&5&1\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}$.

B6. Найдите произведение корней характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$ матрицы $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

B7. Найдите элемент c_{14} матрицы A^{-1}, если $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B8. Найдите сумму элементов, стоящих на диагонали ненулевой матрицы *A* второго порядка, квадрат которой равен нулевой матрице.

B9. Найдите ранг матрицы $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.

B10. Найдите $20x_1+15x_2$, если x_1, x_2, x_3 – решение системы $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 2x_1-x_2-2x_3=2, \\ 3x_1+x_2-x_3=6. \end{cases}$

Часть C

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (C1–C5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

C1. Укажите формулу разложения определителя Δ матрицы $A_n=[a_{ij}]$ по элементам первой строки, если A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}:

1) $\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{k1}$; 2) $\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$; 3) $\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k1}A_{1k}$; 4) $\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1}$.

C2. Укажите свойство определителя:
1) *общий множитель элементов строки* (*столбца*) *можно вынести за знак определителя*;
2) *определитель не меняет значения при перестановке двух строк* (*столбцов*);
3) *определитель с двумя одинаковыми строками* (*столбцами*) *не равен нулю*;
4) *при транспонировании определитель меняет знак на противоположный*.

C3. Укажите формулу нахождения обратной матрицы A^{-1}, если $\tilde{A}$ – матрица, составленная из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы *A*:

1) $A^{-1}=(\det A)\cdot\tilde{A}$; 2) $A^{-1}=-(\det A)\cdot\tilde{A}^{\mathrm{T}}$; 3) $A^{-1}=-\dfrac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}$; 4) $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}^{\mathrm{T}}$.

С4. Закончите верно утверждение: *Система* n *линейных алгебраических уравнений с* n *неизвестными будет совместной, если…* 1) *ранг расширенной матрицы системы равен* n; 2) *ранг расширенной матрицы системы меньше ранга матрицы системы*; 3) *ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы*; 4) *ранг расширенной матрицы системы больше ранга матрицы системы*.
С5. Закончите определение: *Система линейных алгебраических уравнений называется неоднородной, если…* 1) *она имеет единственное решение*; 2) *она имеет бесконечное множество решений*; 3) *определитель основной матрицы системы не равен нулю*; 4) *столбец свободных членов содержит ненулевой элемент*.

Тема 4. Векторная алгебра

ТЕСТ № 4.1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Найдите сумму координат вектора $\overline{d} = 2\overline{a} + 3\overline{b} - \overline{c}$, если $\overline{a} = (2; 3; -4)$, $\overline{b} = (-1; 2; 1)$, $\overline{c} = (3; 0; 2)$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
А2. Найдите сумму координат точки A, если $\overline{AB} = (1; 2; -1)$, $B(3; -1; -2)$.	1) –3; 2) 2; 3) 3; 4) –2.
А3. Определите, при каком значении λ векторы $\overline{a} = (2; 4; -\lambda)$, $\overline{b} = (1; 2; 4)$ коллинеарны.	1) –4; 2) –8; 3) 4; 4) 8.
А4. Найдите длину вектора $\overline{AB}$, если $A(1; 1; 2)$, $B(2; 4; 3)$.	1) $\sqrt{59}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $\sqrt{33}$; 4) $\sqrt{5}$.
А5. Найдите единичный вектор, сонаправленный с вектором $-2\overline{a}$, если $\overline{a} = 3\overline{i} + 4\overline{j}$.	1) $(-2; -2)$; 2) $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$; 3) $(-6; -8)$; 4) $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.
А6. Найдите длину медианы AM треугольника ABC, если $A(6; 4; 2)$, $B(4; 6; 1)$, $C(2; 4; 7)$.	1) $\sqrt{14}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) 4; 4) $\sqrt{17}$.
А7. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a} = (-2; 3; 4)$, $\overline{b} = (1; -3; 4)$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 5.
А8. Найдите угол между векторами $\overline{a} = (4; -1; 1)$, $\overline{b} = (2; 1; 2)$.	1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$.
А9. Определите, при каком значении λ векторы $\overline{a} = (\lambda; 2; -1)$, $\overline{b} = (3; -4; 1)$ ортогональны.	1) 3; 2) –2; 3) 1; 4) –3.
А10. Найдите модуль векторного произведения векторов $\overline{a} = \overline{i} + \overline{k}$, $\overline{b} = -\overline{j} + 2\overline{k}$.	1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{10}$; 4) $\sqrt{2}$.
А11. Найдите синус угла между векторами $\overline{a} = (2; 3; 6)$, $\overline{b} = (2; -2; 1)$.	1) $\frac{3\sqrt{17}}{10}$; 2) $\frac{3\sqrt{17}}{20}$; 3) $\frac{5\sqrt{17}}{20}$; 4) $\frac{5\sqrt{17}}{21}$.

A12. Вычислите площадь треугольника ABC, если $A(3;4;-2)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;2;-1)$.	1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{29}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{13}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{33}}{2}$.
A13. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=3\overline{p}-2\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+4\overline{q}$, если $\lvert\overline{p}\rvert=2$, $\lvert\overline{q}\rvert=1$, $(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q})=\frac{\pi}{6}$.	1) 14; 2) 16; 3) 10; 4) 8.
A14. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}$, $\overline{c}=\overline{j}-\overline{k}$.	1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) –2.
A15. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}=(1;1;4)$, $\overline{b}=(2;-1;-1)$, $\overline{c}=(1;3;-1)$.	1) 16; 2) 33; 3) 45; 4) 28.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (B1–B10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Определите, при каком положительном значении λ длина вектора $\overline{a}=(-8;6)$ в два раза больше длины вектора $\overline{b}=(3;\lambda)$.
B2. Найдите периметр треугольника ABC, если $A(8;0;7)$, $B(10;2;8)$, $C(10;-2;8)$.
B3. Найдите сумму координат вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A(2;2;2)$, $B(6;5;0)$, $C(0;3;8)$.
B4. Найдите сумму координат точки C, если известно, что отрезок AB точками C и D разделен на три равные части, $A(3;-5;2)$, $B(5;-3;1)$.
B5. Найдите угол между векторами $\overline{a}=2\overline{p}+4\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}-\overline{q}$, если $\lvert\overline{p}\rvert=1$, $\lvert\overline{q}\rvert=1$, $(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q})=\frac{2\pi}{3}$.
B6. Найдите сумму координат вектора $\overline{b}$, если $\overline{b}\parallel\overline{a}$, $(\overline{a},\overline{b})=28$, $\overline{a}=(1;2;-3)$.
B7. Найдите работу равнодействующей трех сил $\overline{F}_1=(2;4;3)$, $\overline{F}_2=(3;-2;5)$, $\overline{F}_3=(-1;3;-2)$, приложенных в точке $A(2;-1;3)$, при прямолинейном перемещении точки A в точку $B(7;4;8)$.
B8. Найдите $\lvert[\overline{a},\overline{b}]\rvert$, если $\lvert\overline{a}\rvert=5$, $\lvert\overline{b}\rvert=2$, $(\overline{a},\overline{b})=12$.
B9. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{p}-3\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+2\overline{q}$, если $\lvert\overline{p}\rvert=\sqrt{2}$, $\lvert\overline{q}\rvert=2$, $(\overline{p}\,\hat{,}\,\overline{q})=\frac{\pi}{4}$.
B10. Вычислите объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}=(6;8;-5)$, $\overline{b}=(3;-1;1)$, $\overline{c}=(2;1;-2)$.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите верно утверждение: *Векторы* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *являются неколлинеарными, если…* 1) $\bar{a} = x\bar{b}$; 2) $(\bar{a}, \bar{b}) = \lvert\bar{a}\rvert \lvert\bar{b}\rvert$; 3) $[\bar{a}, \bar{b}] \neq \bar{0}$; 4) $(\bar{a}, \bar{b}) = -\lvert\bar{a}\rvert \lvert\bar{b}\rvert$.
С2. Закончите определение: *Базисом на плоскости называется…* 1) *упорядоченная тройка некомпланарных векторов*; 2) *упорядоченная пара коллинеарных векторов*; 3) *упорядоченная пара линейно независимых векторов*; 4) *упорядоченная пара линейно зависимых векторов*.
С3. Закончите верно утверждение: *Ненулевые векторы* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *являются ортогональными, если…* 1) $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$; 2) $[\bar{a}, \bar{b}] = \lvert\bar{a}\rvert \lvert\bar{b}\rvert$; 3) $(\bar{a}, \bar{b}) = \lvert\bar{a}\rvert \lvert\bar{b}\rvert$; 4) $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$.
С4. Укажите формулу нахождения косинуса угла φ между векторами $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$: 1) $\cos\varphi = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$; 2) $\cos\varphi = \dfrac{x_1 y_2 + x_2 y_1 + z_1 z_2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}$; 3) $\cos\varphi = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}$; 4) $\cos\varphi = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.
С5. Укажите формулу вычисления площади *S* параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$: 1) $S = [\bar{a}, \bar{b}]$; 2) $S = (\bar{a}, \bar{b})$; 3) $S = \lvert[\bar{a}, \bar{b}]\rvert$; 4) $S = \lvert(\bar{a}, \bar{b})\rvert$.

ТЕСТ № 4.1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Найдите сумму координат вектора $\bar{a} = (-3; 2; -3)$ в базисе $\bar{e}_1 = (3; -1; 2)$, $\bar{e}_2 = (-2; 3; 1)$, $\bar{e}_3 = (4; -5; -3)$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
А2. Отрезок AB разделен точками M_1, M_2, M_3 на четыре равные части. Найдите сумму координат точки M_3, если $A(2; -5; 7)$, $B(-2; -1; 3)$.	1) 5; 2) 3; 3) 2; 4) 1.

А3. Найдите сумму координат точки C, если известно, что точка $B(-2;3)$ является серединой отрезка AC, $A(-3;2)$.	1) 2; 2) 4; 3) –1; 4) 3.
А4. Найдите сумму координат точки пересечения медиан треугольника ABC, если $A(3;-2)$, $B(-3;2)$, $C(1;2)$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 0.
А5. Найдите сумму координат вектора $\overline{d}$, если $\left(\overline{a},\overline{d}\right)=8$, $\overline{a}=(2;-1;3)$, $\left(\overline{b},\overline{d}\right)=0$, $\overline{b}=(4;3;-5)$, $\left(\overline{c},\overline{d}\right)=10$, $\overline{c}=(7;-2;-6)$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
А6. Найдите длину вектора $\overline{c}$, если $\left(\overline{a},\overline{c}\right)=-3$, $\overline{a}=(1;-2;4)$, $\left(\overline{b},\overline{c}\right)=8$, $\overline{b}=(3;1;-5)$, вектор $\overline{c}$ перпендикулярен оси Oy.	1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) 1; 4) 2.
А7. Найдите длину вектора $\overline{a}=5\overline{p}-7\overline{q}$, если $\lvert\overline{p}\rvert=3$, $\lvert\overline{q}\rvert=\sqrt{2}$, $(\widehat{\overline{p},\overline{q}})=\dfrac{\pi}{4}$.	1) 10; 2) $\sqrt{85}$; 3) 12; 4) $\sqrt{113}$.
А8. Найдите внутренний угол при вершине A в треугольнике ABC, если $A(-3;5;6)$, $B(1;-5;7)$, $C(8;-3;-1)$.	1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°.
А9. Найдите проекцию вектора $\overline{a}=(1;2;-3)$ на направление вектора $\overline{b}=(-2;1;-1)$.	1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{3}{2}$.
А10. Найдите первую координату вектора $\left[\left(3\overline{i}-4\overline{j}-5\overline{k}\right),\left(2\overline{i}+6\overline{j}-\overline{k}\right)\right]$.	1) 34; 2) 26; 3) –7; 4) 49.
А11. Найдите сумму координат вектора $\left[\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right]$, если $\overline{a}=(3;-1;2)$, $\overline{b}=(1;1;-1)$, $\overline{c}=(2;0;1)$.	1) –4; 2) 0; 3) 8; 4) 4.
А12. Найдите сумму координат вершины C треугольника ABC, если $A(2;-1;3)$, $B(1;2;1)$, точка C лежит на оси Oz, площадь треугольника равна $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$.	1) 0; 2) 1; 3) –2; 4) 2.
А13. Найдите длину высоты CH треугольника ABC, если $A(4;-14;8)$, $B(2;-18;12)$, $C(12;-8;12)$.	1) 4; 2) 8; 3) 10; 4) 16.
А14. Определите, при каком значении λ векторы $\overline{a}=(3;2;-1)$, $\overline{b}=(4;5;1)$, $\overline{c}=(\lambda;0;1)$ компланарны.	1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2.
А15. Вычислите объем пирамиды $ABCD$, если $A(5;2;2)$, $B(-8;-2;5)$, $C(6;3;0)$, $D(9;3;2)$.	1) 1; 2) 2; 3) 0,5; 4) 0,2.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (B1–B10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Найдите сумму координат вектора $\overline{a} = 2\overline{i} + 6\overline{j}$ в базисе $\overline{e}_1 = 2\overline{i}$, $\overline{e}_2 = 3\overline{i} + 3\overline{j}$.
B2. Найдите сумму координат вектора, который является ортогональной проекцией вектора $\overline{a} = (-14; 2; 5)$ на прямую, параллельную вектору $\overline{b} = (2; -2; 1)$.
B3. Найдите сумму координат вектора, который является ортогональной проекцией вектора $\overline{a} = (8; 4; 1)$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\overline{b} = (2; -2; 1)$.
B4. Найдите длину большей диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$, если $\lvert\overline{a}\rvert = 3$, $\lvert\overline{b}\rvert = 4$, $\left(\overline{a}, \widehat{\ }\, \overline{b}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.
B5. Найдите проекцию вектора $\overline{a} = \left[2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}, \overline{i} + 5\overline{j}\right]$ на направление вектора $\overline{b} = (2; -1; 2)$.
B6. Найдите длину высоты AH треугольника ABC, если $\overline{AB} = \overline{p} - 3\overline{q}$, $\overline{AC} = \overline{p} + 4\overline{q}$, $\lvert\overline{p}\rvert = 1$, $\lvert\overline{q}\rvert = 2$, $\left(\overline{p}, \widehat{\ }\, \overline{q}\right) = 30°$.
B7. Найдите сумму координат вектора, который является ортогональной проекцией вектора $\overline{c} = (1; 1; 9)$ на плоскость, параллельную векторам $\overline{a} = (8; 4; 1)$ и $\overline{b} = (2; -2; 1)$.
B8. Найдите сумму координат вектора $\overline{c}$, компланарного векторам $\overline{a} = (8; 4; 1)$ и $\overline{b} = (2; -2; 1)$, перпендикулярного вектору $\overline{a}$, равного ему по длине и образующего с вектором $\overline{b}$ тупой угол.
B9. Найдите сумму координат вершины D пирамиды $ABCD$, если $A(4; -1; 2)$, $B(5; 1; 4)$, $C(3; 2; -1)$, точка D лежит на оси Oz $(z > 0)$, объем пирамиды равен 9.
B10. Найдите длину высоты DH пирамиды $ABCD$, если $A(2; -1; 3)$, $B(1; -3; 5)$, $C(6; 2; 5)$, $D(3; -2; -5)$.

Часть C

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (C1–C5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
C1. Закончите верно утверждение: *Векторы* $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ *являются некомпланарными, если…* 1) $\overline{a} = x\overline{b} + y\overline{c}$; 2) $\overline{a} \parallel \overline{b} \parallel \overline{c}$; 3) $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) \neq 0$; 4) $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = 0$.

C2. Закончите верно утверждение:

Линейно независимыми являются…

1) *два коллинеарных вектора*; 2) *три некомпланарных вектора*;
3) *три компланарных вектора*; 4) *всякие четыре вектора в пространстве.*

C3. Укажите формулу нахождения проекции вектора $\bar{b}$ на направление вектора $\bar{a}$:

1) $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$; 2) $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$;

3) $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{a}|\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$; 4) $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{a}|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$.

C4. Укажите формулу нахождения модуля векторного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$:

1) $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$; 2) $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|$;

3) $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = |\bar{a}|^2\,|\bar{b}|^2$; 4) $\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$.

C5. Укажите верное равенство для смешанного произведения векторов, если $\lambda \in \mathbf{R}$:

1) $\left(\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = -\lambda\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$; 2) $\left(\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = \lambda\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$;

3) $\left(\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = \lambda^3\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$; 4) $\left(\lambda\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right) = \left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$.

Тема 5. Аналитическая геометрия

ТЕСТ № 5.1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(3;2)$.	1) $2x+3y+5=0$; 2) $3x+2y-5=0$; 3) $2x-3y-5=0$; 4) $3x-2y+5=0$.
А2. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;4)$ параллельно вектору $\overline{a}=(2;-3)$.	1) $2x+3y+2=0$; 2) $3x+2y+1=0$; 3) $2x-3y+2=0$; 4) $3x-2y-2=0$.
А3. Найдите длину отрезка, отсекаемого на оси абсцисс прямой $3x+4y-12=0$.	1) 3; 2) 2; 3) 6; 4) 4.
А4. Найдите угол между прямыми $y=-\frac{2}{5}x+3$, $y=\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}$.	1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{2}$.
А5. Найдите расстояние между параллельными прямыми $3x-4y-6=0$, $6x-8y+28=0$.	1) 2; 2) 6; 3) 4; 4) 8.
А6. Определите тип линии $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$.	1) парабола; 2) эллипс; 3) гипербола; 4) параллельные прямые.
А7. Найдите сумму координат центра линии $(x-3)^2+(y+1)^2=16$.	1) 2; 2) 4; 3) –4; 4) 16.
А8. Найдите сумму координат нормального вектора плоскости $2x-3y+10=0$.	1) 5; 2) –5; 3) –1; 4) 9.
А9. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;3)$ параллельно векторам $\overline{a}=(1;-1;2)$, $\overline{b}=(2;1;-3)$.	1) $x-y+2z-4=0$; 2) $2x+y-3z-4=0$; 3) $x+3z-4=0$; 4) $x+7y+3z-4=0$.
А10. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;6;3)$ и ось Oz.	1) $6x+y=0$; 2) $6x+3z=0$; 3) $x+6y=0$; 4) $3x+6z=0$.

A11. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -3; 2)$, $B(4; 2; -1)$ и начало координат.	1) $x-3y+2z=0$; 2) $4x+2y-z=0$; 3) $x-9y-14z=0$; 4) $x+2y-z=0$.
A12. Найдите расстояние от точки $M(-2; 3; 1)$ до плоскости $4x+3y-2z-12=0$.	1) $\frac{13}{\sqrt{29}}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{29}$; 4) $\frac{29}{\sqrt{13}}$.
A13. Найдите сумму координат направляющего вектора прямой $\begin{cases} x=2+t, \\ y=1-t, \\ z=2+4t. \end{cases}$	1) 4; 2) 5; 3) 9; 4) 1.
A14. Найдите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; -3; 1)$ параллельно вектору $\bar{a}=(3; -4; 5)$.	1) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-5}{1}$; 2) $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+5}{1}$; 3) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-1}{1}$; 4) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-1}{5}$.
A15. Определите тип поверхности $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(z-3)^2}{36}=-1$.	1) однополостный гиперболоид; 2) гиперболический параболоид; 3) эллипсоид; 4) двуполостный гиперболоид.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (B1–B10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Найдите сумму координат точки, которая является центром окружности, описанной около треугольника ABC, если $A(5; 6)$, $B(3; 4)$, $C(9; 1)$.
B2. Найдите сумму координат центра симметрии линии $4x^2-y^2-16x+6y+23=0$.
B3. Найдите эксцентриситет гиперболы, сопряженной гиперболе $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.
B4. Найдите угол между плоскостями, проходящими через точку $M(1; -1; 1)$, если известно, что одна из плоскостей содержит ось Ox, а другая – ось Oz.
B5. Определите, при каком значении λ плоскости $4x+\lambda y-7z+3=0$, $x-2y+4z-1=0$ взаимно перпендикулярны.

В6. Найдите длину высоты DH пирамиды $ABCD$, если $A(1;2;-3)$, $B(1;0;-4)$, $C(-1;3;0)$, $D(0;3;-5)$.
В7. Найдите модуль суммы координат единичного направляющего вектора прямой $\begin{cases} x-2y+5z-4=0, \\ 3x-2y-z-12=0. \end{cases}$
В8. Найдите сумму координат точки пересечения прямых $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$.
В9. Найдите синус угла между прямой $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{5}$ и плоскостью $3x+y-2=0$.
В10. Найдите сумму координат центра симметрии поверхности $3x^2-y^2+3z^2-18x+10y+12z+14=0$.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите верно утверждение: *Если прямые* $ax+by+c=0$ *и* $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$ *параллельны, то…* 1) $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$; 2) $\frac{a}{n}=\frac{b}{m}$; 3) $bn+cm=0$; 4) $am+bn=0$.
С2. Закончите верно утверждение: *Если плоскости* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *и* $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ *перпендикулярны, то…* 1) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$; 2) $\frac{A_1}{D_2}=\frac{B_1}{C_2}=\frac{C_1}{A_2}$; 3) $A_1D_2+B_1C_2+C_1A_2=0$; 4) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.
С3. Укажите формулу нахождения расстояния d от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$: 1) $d=\frac{\lvert x_0+y_0+z_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; 2) $d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; 3) $d=\frac{\lvert x_0+y_0+z_0+D\rvert}{A^2+B^2+C^2}$; 4) $d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{A^2+B^2+C^2}$.
С4. Закончите верно утверждение: *Если плоскость* $Ax+By+Cz+D=0$ *и прямая* $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}$ *перпендикулярны, то…* 1) $Am+Bn+Ck=0$; 2) $Am-Bn-Ck=0$; 3) $\frac{A}{m}=\frac{C}{n}=\frac{D}{k}$; 4) $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{k}$.

С5. Укажите тип поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: 1) эллипсоид; 2) эллиптический параболоид; 3) эллиптический цилиндр; 4) конус второго порядка.

ТЕСТ № 5.1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите угол между прямыми $2x-y+5=0$, $3x+y-1=0$.	1) 0; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$;
А2. Найдите сумму координат точки, которая является проекцией точки $M(-5;6)$ на прямую $7x-13y-105=0$.	1) –5; 2) 2; 3) 5; 4) 4.
А3. Вычислите длину высоты AD треугольника ABC, если $A(5;2)$, $B(2;3)$, $C(0;-3)$.	1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{14}$; 4) $\sqrt{3}$.
А4. Найдите уравнение окружности радиуса 4, расположенной в первой четверти и касающейся обеих осей координат.	1) $(x-2)^2+(y-2)^2=4$; 2) $(x+2)^2+(y+2)^2=4$; 3) $(x+4)^2+(y+4)^2=16$; 4) $(x-4)^2+(y-4)^2=16$.
А5. Определите тип линии $7x-5y^2+10y-19=0$.	1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) пересекающиеся прямые.
А6. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(7;-3;9)$ перпендикулярно плоскостям $3x-5y+z-4=0$, $x-y+3z+11=0$.	1) $7x+4y+z-46=0$; 2) $7x+4y-z-28=0$; 3) $4x+7y+z+10=0$; 4) $4x+7y-z-30=0$.
А7. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-1;2;3)$, $B(4;-1;2)$ перпендикулярно плоскости $x+y+z-4=0$.	1) $4x-y+2z=0$; 2) $x-2y+3z-7=0$; 3) $x+4y-3z+7=0$; 4) $x+3y-4z+7=0$.

A8. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;3;-2)$, $M_2(4;-5;6)$, $M_3(-3;1;2)$.	1) $4x+11y+9z-20=0$; 2) $4x-11y+10z-18=0$; 3) $8x-22y+19z+30=0$; 4) $8x+22y+19z-36=0$.
A9. Найдите острый двугранный угол, образованный плоскостями $2x+y+2z-3=0$, $x-y+4z+2=0$.	1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$.
A10. Найдите сумму координат точки, которая является проекцией точки $M(5;4;-1)$ на плоскость $7x-3y+2z+41=0$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
A11. Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-1+6t, \\ z=4t \end{cases}$ параллельно прямой $\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=3t, \\ z=-t. \end{cases}$	1) $18x+11y+3z+47=0$; 2) $18x-11y+3z-47=0$; 3) $18x+11y-3z+27=0$; 4) $18x-11y-3z-27=0$.
A12. Вычислите длину перпендикуляра, проведенного из точки $M(1;0;1)$ на прямую $\begin{cases} x=3z+2, \\ y=2z. \end{cases}$	1) $2\sqrt{\frac{3}{7}}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{7}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{7}$; 4) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$.
A13. Найдите уравнение высоты AD треугольника ABC, если $A(2;4;5)$, $B(-1;3;2)$, $C(4;-4;1)$.	1) $\frac{x+2}{10}=\frac{y+4}{20}=\frac{z+5}{11}$; 2) $\frac{x+2}{20}=\frac{y+4}{10}=\frac{z+5}{23}$; 3) $\frac{x-2}{20}=\frac{y-4}{11}=\frac{z-5}{23}$; 4) $\frac{x-2}{10}=\frac{y-4}{23}=\frac{z-5}{11}$.
A14. Определите, при каком значении λ плоскость $\lambda x+2y-z+7=0$ параллельна прямой $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=-3t+5, \\ z=4t-3. \end{cases}$	1) –3; 2) 4; 3) –2; 4) 5.
A15. Определите тип поверхности $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$.	1) эллипсоид; 2) эллиптический параболоид; 3) гиперболический параболоид; 4) однополостный гиперболоид.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Найдите сумму координат точки, лежащей на прямой $2x+5y-3=0$ и равноудаленной от точек $A(3;-7)$, $B(5;-1)$.
В2. Найдите сумму координат точки, симметричной точке $M(-2;9)$ относительно прямой $2x-3y+18=0$.
В3. Найдите сумму координат вершины C треугольника ABC, если $A(-6;2)$, $B(2;-2)$, $H(1;2)$ – точка пересечения его высот.
В4. Найдите расстояние от точки $M(1;-2)$ до биссектрисы того угла между прямыми $x+3y-7=0$, $2x-6y+15=0$, внутри которого находится точка M.
В5. Найдите сумму координат фокуса параболы $3x^2+12x+16y-12=0$.
В6. Найдите расстояние между фокусами линии $9x^2-4y^2+18x-12y+36=0$.
В7. Найдите сумму координат точки, симметричной точке $M(1;2;3)$ относительно плоскости $2x-3y+5z-68=0$.
В8. Найдите сумму координат точки, симметричной точке $M(1;2;3)$ относительно прямой $\dfrac{x-8}{1}=\dfrac{y-11}{3}=\dfrac{z-4}{-1}$.
В9. Вычислите косинус острого угла между прямыми $\begin{cases}3x+y-z+1=0,\\3x-y+z=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x-y+1=0,\\2x+2y-5z+1=0.\end{cases}$
В10. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+7}{-9}=\dfrac{z-2}{-2}$, $\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите верно утверждение: *Если прямые* $ax+by+c=0$ *и* $\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt\end{cases}$ *перпендикулярны, то…*   1) $ax_0+by_0=0$; 2) $\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}$; 3) $am+bn=0$; 4) $\dfrac{a}{x_0}=\dfrac{b}{y_0}$.

С2. Укажите формулу нахождения эксцентриситета ε кривой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ если $a>b>0$:

1) $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$; 2) $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; 3) $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$; 4) $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

С3. Закончите верно утверждение:

Направляющий вектор $\bar{a}$ *прямой* $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ *можно найти по формуле…*

1) $\bar{a}=(A_1A_2;\,B_1B_2;\,C_1C_2)$; 2) $\bar{a}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$;

3) $\bar{a}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ D_1 & D_2 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\bar{a}=C_1D_2\bar{i}+C_2D_1\bar{j}+A_1A_2\bar{k}$.

С4. Закончите верно утверждение:

Если плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ *и прямая* $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+kt \end{cases}$ *параллельны, то…*

1) $\frac{A}{x_0}=\frac{B}{y_0}=\frac{C}{z_0}$; 2) $Ax_0+By_0+Cz_0=0$; 3) $Am+Bn+Ck=0$; 4) $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{k}$.

С5. Укажите тип поверхности $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$:

1) однополостный гиперболоид; 2) двуполостный гиперболоид;
3) гиперболический параболоид; 4) конус второго порядка.

Тема 6. Предел последовательности и функции

ТЕСТ № 6.1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Найдите 7-й член последовательности (x_n), если $x_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.	1) $\dfrac{5}{2}$; 2) $\dfrac{7}{3}$; 3) 3; 4) $\dfrac{17}{8}$.
А2. Определите, какое из указанных чисел является членом последовательности (x_n), если $x_n = n^2+2n+3$:	1) 28; 2) 6; 3) 12; 4) 13.
А3. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+6n+1}{n^2+3n}$.	1) ∞; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) 2; 4) 1.
А4. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-5}{n^3-1}+\dfrac{1}{n+2}\right)$.	1) 0; 2) 1; 3) ∞; 4) –1.
А5. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{n}{2n^2-1}\right)$.	1) $-\dfrac{1}{2}$; 2) 1; 3) 0; 4) ∞.
А6. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$.	1) 1; 2) ∞; 3) –1; 4) 0.
А7. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$.	1) 5; 2) 0; 3) $\dfrac{1}{5}$; 4) –5.
А8. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{n+1}\right)^n$.	1) 3; 2) ∞; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) e.
А9. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n$.	1) $\dfrac{1}{2}$; 2) e; 3) $-\dfrac{1}{2}$; 4) 0.
А10. Определите, какая из указанных последовательностей является монотонно убывающей:	1) (n^2); 2) $(\sqrt{n})$; 3) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$; 4) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

А11. Вычислите $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$.	1) ∞; 2) 2; 3) 0; 4) –2.
А12. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^2-x-1}$.	1) –1; 2) 1; 3) 0; 4) $\dfrac{1}{2}$.
А13. Вычислите $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3x}$.	1) 3; 2) ∞; 3) $\dfrac{1}{3}$; 4) –1.
А14. Вычислите $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{5x^2}{x^2-1}\right)^x$.	1) ∞; 2) 0; 3) 5; 4) 1.
А15. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{x^2-x}$.	1) $-\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) 0; 4) ∞.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Вычислите $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{(n^2+1)^{50}}{(n+1)^{100}}$.
В2. Вычислите $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{(n+1)^{10}(n^2+1)}{(3n+1)^2(n+5)^5(n-1)^5}$.
В3. Вычислите $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-7}}$.
В4. Вычислите $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5+n^2+1}+5n}{4n^2+\sqrt[4]{n^3+n}}$.
В5. Вычислите $\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+1)!-n!}$.
В6. Вычислите $\lim\limits_{x\to \infty}5^{\frac{2x^2}{x^2+3}}$.
В7. Вычислите $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{2x^3-3x^2+7}{3x^3+4x^2-x+2}}$.
В8. Вычислите $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}$.

B9. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x+1)^3-1}{2x}$.

B10. Вычислите $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2+2x}$.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

С1. Закончите определение:

Числовая последовательность (x_n) *называется возрастающей, если…*

1) $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$; 2) $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$;

3) $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots$; 4) $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots$.

С2. Закончите определение:

Число a называется пределом числовой последовательности (x_n), *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число N такое, что для всех* $n \ge N$ *выполняется…*

1) $|x_n - a| > \varepsilon$; 2) $|x_n| < a$; 3) $|x_n| > a$; 4) $|x_n - a| < \varepsilon$.

С3. Закончите верно утверждение:

Сходящаяся числовая последовательность является…

1) *ограниченной*; 2) *монотонно убывающей*;

3) *монотонно возрастающей*; 4) *невозрастающей*.

С4. Укажите неверную формулу для сходящихся числовых последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $(c = \text{const})$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

С5. Закончите определение:

Функция $f(x)$ *называется бесконечно малой при* $x \to x_0$, *если…*

1) $x_0 \to -\infty$; 2) *не существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

ТЕСТ № 6.1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Найдите первые четыре члена последовательности (x_n), если $x_n = \sin\frac{\pi n}{2}$.	1) $1, 0, 1, 0, \ldots$; 2) $1, 0, -1, 0, \ldots$; 3) $-1, 1, -1, 1, \ldots$; 4) $0, 1, -1, 0, \ldots$.
А2. Найдите формулу общего члена последовательности $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, \ldots$.	1) $\frac{2n-1}{2n}$; 2) $\frac{2n+1}{2n}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{2n}$; 4) $-\frac{2n+1}{2n}$.
А3. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.	1) ∞; 2) 0; 3) –1; 4) 1.
А4. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{4^n}$.	1) $\frac{3}{4}$; 2) ∞; 3) 1; 4) 0.
А5. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.	1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) –2.
А6. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2 n$.	1) 1; 2) ∞; 3) –1; 4) 0.
А7. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{6n+1}$.	1) e; 2) e^4; 3) 1; 4) e^6.
А8. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n-3)-\ln n)$.	1) 3; 2) e^{-3}; 3) –3; 4) e.
А9. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.	1) 3; 2) ∞; 3) 0; 4) $\frac{1}{3}$.
А10. Определите, какая из указанных последовательностей является ограниченной:	1) (3^n); 2) (n^3); 3) $\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$; 4) $(\sqrt[3]{n})$.
А11. Вычислите $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$.	1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) ∞; 4) $\frac{1}{2}$.

А12. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.	1) $\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{2}{15}$; 3) $\dfrac{15}{2}$; 4) 1.
А13. Вычислите $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.	1) 0; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\dfrac{3}{4}$.
А14. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x^2}+5\right)$.	1) 5; 2) 0; 3) $\dfrac{1}{5}$; 4) ∞.
А15. Определите, какая из указанных функций не является бесконечно большой:	1) $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-6x+5}$ при $x\to 1$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-4x}$ при $x\to\infty$; 3) $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2-4x+4}$ при $x\to 2$; 4) $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt[4]{x^2+3x}}$ при $x\to\infty$.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{5n+11}+\dfrac{\cos n}{10n}\right)$.
В2. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$.
В3. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.
В4. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)!+(2n)!}{(2n+4)!}$.
В5. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+3)!}{(2n+5)!}$.
В6. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos x+x\cos x}$.

B7. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{5+8x^3}-2x\right)$.
B8. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}$.
B9. Вычислите $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{3-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+9}-6}$.
B10. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

Часть C

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (C1–C5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
C1. Закончите определение: *Числовая последовательность* (x_n) *называется ограниченной, если…* 1) *существует число M такое, что* $x_n \le M$ *для всех* $n \in \mathbf{N}$; 2) *существует число M такое, что* $x_n \ge M$ *для всех* $n \in \mathbf{N}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; 4) *существуют числа m и M такие, что* $m \le x_n \le M$ *для всех* $n \in \mathbf{N}$.
C2. Закончите верно утверждение: *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ *и, начиная с некоторого номера n, выполняется* $x_n \le z_n \le y_n$, *то…* 1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{1}{a}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.
C3. Закончите верно утверждение: *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *и последовательность* (y_n) *является ограниченной, то…* 1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = +\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = -\infty$.
C4. Закончите определение: *Число A называется пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* δ *такое, что из неравенства* $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ *следует…* 1) $\lvert f(x) - A\rvert > \varepsilon$; 2) $\lvert f(x)\rvert < A$; 3) $\lvert f(x) - A\rvert = \varepsilon$; 4) $\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$.
C5. Закончите определение: *Функция* $f(x)$ *называется бесконечно большой при* $x \to x_0$, *если…* 1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$; 2) $x_0 = +\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$; 4) *не существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

ТЕСТ № 6.2.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.	1) 1; 2) 7; 3) 0; 4) $\frac{1}{7}$.
А2. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x^2+6x}$.	1) 1; 2) 3; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{6}$.
А3. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.	1) 1; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 0; 4) 5.
А4. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\sin x}{x^2}$.	1) 0; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 3.
А5. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg} 2x)$.	1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) ∞; 4) 1.
А6. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{x^3}$.	1) 5; 2) ∞; 3) 1; 4) $\frac{1}{5}$.
А7. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{3x^2}$.	1) 2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 6; 4) 1.
А8. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{2x^2}$.	1) –3; 2) 2; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) ∞.
А9. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.	1) 1; 2) e^3; 3) e^6; 4) 0.
А10. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3+x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$.	1) $\sqrt{e}$; 2) e; 3) ∞; 4) $\sqrt[3]{e}$.
А11. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.	1) e^2; 2) e; 3) 1; 4) $\sqrt{e}$.
А12. Вычислите $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3+x}\right)^{x+2}$.	1) 3; 2) 0; 3) $\frac{1}{3}$; 4) ∞.

A13. Вычислите $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+4}{1+5x}\right)^{x^2}$.	1) $\dfrac{1}{5}$; 2) 0; 3) $e^{\frac{4}{5}}$; 4) $e^{\frac{1}{5}}$.
A14. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) ∞.
A15. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}2x^2\left(\ln(x^2+1)-\ln x^2\right)$.	1) e^2; 2) 2; 3) e^{-2}; 4) ∞.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (B1–B10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Вычислите $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{x}$.
B2. Вычислите $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin 3x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,3x}\right)$.
B3. Вычислите $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 2x}{3x^2}$.
B4. Вычислите $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,x}{1-\cos x}$.
B5. Вычислите $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{16x^2}$.
B6. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{2x+5}$.
B7. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+x+1}\right)^{-x^2}$.
B8. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{3x^2-1}{3x^2+4}\right)^{x^2+1}$.
B9. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(2x-3)-\ln(2x-1)\right)$.
B10. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3+3)\left(\ln(x^3+4)-\ln(x^3+1)\right)$.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите определение: *Число А называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число М такое, что из неравенства $\lvert x\rvert > M$ следует…* 1) $\lvert f(x)-A\rvert > \varepsilon$; 2) $\lvert f(x)\rvert < A$; 3) $\lvert f(x)-A\rvert = \varepsilon$; 4) $\lvert f(x)-A\rvert < \varepsilon$.
С2. Укажите формулу первого замечательного предела: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = e$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.
С3. Закончите определение: *Бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если…* 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = -1$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$; 4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha(x)\beta(x)\right) = 1$.
С4. Укажите неверную запись вида неопределенности: 1) 1^∞; 2) 0^0; 3) ∞^0; 4) 0^∞.
С5. Закончите верно утверждение: *Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если…* 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a$; 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$; 3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$.

ТЕСТ № 6.2.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sin(x-1)}$.	1) 0; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 3; 4) 1.
А2. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sqrt{1+x}-1}$.	1) 14; 2) 7; 3) $\frac{7}{2}$; 4) ∞.
А3. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} 2x}$.	1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) 0.

A4. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x(x+2)}$.	1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) $\dfrac{1}{2}$.
A5. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$.	1) 1; 2) $\dfrac{3}{5}$; 3) ∞; 4) 3.
A6. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\ln(1-x^2)}$.	1) ∞; 2) 4; 3) 1; 4) $-\dfrac{1}{4}$.
A7. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{2-\sqrt{2x^2+4}}$.	1) 2; 2) –2; 3) 1; 4) 0.
A8. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1+2x)}{3x}$.	1) $\dfrac{2}{3\ln 2}$; 2) $\dfrac{3}{2\ln 2}$; 3) $\dfrac{3}{2}$; 4) 1.
A9. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e)-1}{x}$.	1) e; 2) $\dfrac{2}{e}$; 3) $\dfrac{1}{e}$; 4) 1.
A10. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{e^{2x^2}-1}$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) ∞.
A11. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x^2+2x}$.	1) $\dfrac{1}{2}$; 2) 2; 3) e; 4) 0.
A12. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-2^x}{x}$.	1) $\ln\dfrac{2}{5}$; 2) $\ln\dfrac{5}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}\ln 5$; 4) 1.
A13. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$.	1) $\dfrac{\ln 2}{2}$; 2) ∞; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) 0.
A14. Определите, какая из указанных функций является бесконечно малой:	1) $f(x)=\operatorname{arctg}(x+3)$ при $x\to 0$; 2) $f(x)=e^{-(x+2)}$ при $x\to -2$; 3) $f(x)=\log_a(1+x)$ при $x\to -1$; 4) $f(x)=1-\cos 2x$ при $x\to 0$.
A15. Определите, какое из указанных соотношений является неверным:	1) $\sin x \sim x$ при $x\to 0$; 2) $\operatorname{arctg}(x-3)\sim(x-3)$ при $x\to 3$; 3) $\log_a(1-x)\sim x$ при $x\to 0$; 4) $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (B1–B10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3x-1)^4-1}{3x}$.
B2. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\arcsin^2 2x}$.
B3. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\log_3(3+x^2)-1}$.
B4. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{\ln(e-x^2)-1}$.
B5. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+2x}-1\right)\ln(1+x)}{\operatorname{tg} 2x^2}$.
B6. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[7]{1-2x}-1\right)\operatorname{arctg} x}{x^2}$.
B7. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln(2-\cos 4x)}$.
B8. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.
B9. Вычислите $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x-1)\cos x}{x^2+2}$.
B10. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x\sin^2\frac{1}{x}+5\cos x}}{\operatorname{tg} x+\cos x}$.

Часть C

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (C1–C5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
C1. Закончите верно утверждение: *Если* $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=A$ *и в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *выполняется* $f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$, *то…* 1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$; 4) *не существует* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

C2. Закончите верно утверждение:

Если $|f(x)| \geq C > 0$ $(C = \text{const})$ *в некоторой окрестности точки* x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, *то при* $x \to x_0$ *функция* $f(x)g(x)$ *является…*

1) *бесконечно малой*; 2) *бесконечно большой*; 3) *возрастающей*; 4) *убывающей*.

C3. Укажите формулу второго замечательного предела:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = e$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

C4. Укажите неверную формулу:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^x = e$; 3) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

C5. Закончите верно утверждение:

Прямая $y = c$ *является горизонтальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, *если…*

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = c$; 2) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$; 3) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$; 4) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$.

Тема 7. Производная

ТЕСТ № 7.1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Определите, какой из указанных пределов является производной функции $f(x)=4x^3-1$ в точке x_0:	1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(4x_0+\Delta x)^3-4x_0^3}{\Delta x}$; 2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{4(x_0+\Delta x)^3-4x_0^3}{\Delta x}$; 3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(4x_0+\Delta x)^3-4x_0-2}{x_0}$; 4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{4(x_0+\Delta x)^3-4x_0}{x_0}$.
А2. Вычислите $y'(-1)$, если $y=4x^3-2x^2+x-5$.	1) 7; 2) 10; 3) 17; 4) 2.
А3. Вычислите $y'(3)$, если $y=\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$.	1) –2; 2) 1; 3) 3; 4) 2.
А4. Вычислите $y'(0)$, если $y=\log_3(x^2+3x-1)$.	1) –3; 2) $\ln 3$; 3) $\dfrac{1}{\ln 3}$; 4) $-\dfrac{3}{\ln 3}$.
А5. Вычислите $y'(2)$, если $y=2^{x^2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$.	1) $64\ln 2$; 2) 64; 3) $\ln 2$; 4) 1.
А6. Вычислите $y'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, если $y=\dfrac{\cos x}{1+2\sin x}$.	1) 0; 2) 1; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) –1.
А7. Вычислите $y'(-1)$, если $y=5\sin^2 x^3$.	1) –15; 2) $15\sin 2$; 3) $-15\sin 2$; 4) 0.
А8. Вычислите $y'(128)$, если $y=e^{\sqrt[7]{x^2}}$.	1) 112; 2) e^4; 3) $112e^4$; 4) $\dfrac{e^4}{112}$.
А9. Вычислите $y'(-1)$, если $y=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}$.	1) 2; 2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 4) –2.
А10. Вычислите $y'(e^2)$, если $y=\dfrac{\ln x}{x}-5\ln 2$.	1) 1; 2) e^{-4}; 3) $-e^{-4}$; 4) e.

А11. Найдите дифференциал функции $y = x^2 \ln x$ в точке $x_0 = e^{-2}$.	1) $-3e^{-2}dx$; 2) $-e^2 dx$; 3) dx; 4) $3dx$.
А12. Вычислите угол наклона касательной к параболе $y = x^2 + 5x + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.	1) $30°$; 2) $60°$; 3) $45°$; 4) $135°$.
А13. Найдите сумму $k + b$ коэффициентов уравнения касательной $y = kx + b$ к кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.	1) 0,36; 2) –0,36; 3) 0,04; 4) –0,04.
А14. Материальная точка движется вдоль оси Ox по закону $x(t) = t - \sin t$ (t – в секундах, x – в метрах). Найдите скорость движения точки (в м/с) в момент времени $t = \frac{\pi}{3}$ с.	1) 0,1; 2) 0,5; 3) 0,01; 4) 0,05.
А15. Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону $s(t) = -4{,}905t^2 + 981t + 950$ (t – в секундах, s – в метрах). Найдите момент времени (в секундах), когда скорость тела станет равной нулю.	1) 10; 2) 50; 3) 200; 4) 100.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Найдите приращение функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 1$, если $\Delta x = 0{,}1$.
В2. Вычислите $y'\left(\sqrt{2}\right)$, если $y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}$.
В3. Вычислите $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.
В4. Найдите ординату точки, в которой касательная к параболе $y = 4x^2 - 6x + 3$ параллельна прямой $y = -2x + 1$.
В5. Найдите положительную абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ имеет угол наклона $135°$.
В6. Определите, при каком значении переменной x $(x > 0)$ касательные к графикам функций $y = \frac{x^5}{5}$, $y = \frac{32}{3}x^3 + 144x - 161$ параллельны.

В7. Вычислите площадь треугольника, образованного касательной, проведенной к графику функции $y = 3\sqrt{1-4x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -2,$ и осями координат.
В8. Для машины, движущейся со скоростью 30 м/с, тормозной путь определяется по закону $s(t) = 30t - 16t^2$ (t – в секундах, s – в метрах), Определите, какое расстояние (в метрах) пройдет машина до полной ее остановки; результат округлите до целого значения.
В9. Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $s(t) = 2t^2 + 3t - 1$ (t – в секундах, s – в метрах). Найдите кинетическую энергию $E = \frac{mv^2}{2}$ (в джоулях; $1\,\text{Дж} = 1\,\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$) тела через 3 с после начала движения.
В10. Масса неоднородного стержня изменяется по закону $m(l) = 1{,}5l - \frac{l^3}{3}$ (l – в метрах, m – в килограммах). Найдите длину (в метрах) стержня, в конце которого линейная плотность $\mu = m'(l)$ будет втрое меньше, чем в начале.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Укажите неверное определение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0: 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; 2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$; 3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; 4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x - x_0)}{x - x_0}$.
С2. Закончите верно утверждение: *Геометрический смысл производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *состоит в том, что…* 1) $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$ *где* α *– угол между касательной к графику функции и осью* Oy; 2) $f'(x_0) = \cos\alpha,$ *где* α *– угол между касательной к графику функции и осью* Ox; 3) $f'(x_0) = \alpha,$ *где* α *– угол между касательной к графику функции и осью* Ox; 4) $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$ *где* α *– угол между касательной к графику функции и осью* Ox.
С3. Укажите формулу уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$: 1) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; 2) $y = -f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; 3) $y = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$; 4) $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.
С4. Укажите верную формулу: 1) $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v'(x)$; 2) $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v'(x) + u(x)v(x)$; 3) $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$; 4) $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v'(x) - u(x)v(x)$.

C5. Укажите формулу нахождения производной y'_x сложной функции $y=f\left(g(x)\right)$, если $y=f(u)$, $u=g(x)$ – дифференцируемые функции: 1) $y'_x=f'_xg'_x$; 2) $y'_x=f'_ug'_x$; 3) $y'_x=\dfrac{f'_u}{g'_x}$; 4) $y'_x=f'_u+g'_x$.

ТЕСТ № 7.1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Найдите y', если $y=\ln\left(2\sin\left(\operatorname{arcctg} e^{-\frac{x}{2}}\right)\right)$.	1) $\dfrac{1}{e^x+1}$; 2) $\dfrac{1}{2(e^x+1)}$; 3) $\dfrac{2e^x}{e^x+1}$; 4) $\dfrac{e^x}{e^x+1}$.
А2. Вычислите $y'\left(\dfrac{125}{2}\right)$, если $y=\log_2\log_3\log_5 2x$.	1) $\dfrac{1}{\ln2\ln3\ln5}$; 2) $\dfrac{2}{375}$; 3) $\dfrac{2}{375\ln2\ln3\ln5}$; 4) $\dfrac{1}{375}$.
А3. Вычислите $y'(0)$, если $xe^y+ye^x=1$.	1) $-1-e$; 2) $-\dfrac{1}{1+e}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{1}{1+e}$.
А4. Найдите $y'(x)$, если $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.	1) $\dfrac{x+y}{x-y}$; 2) 1; 3) $\dfrac{x-y}{x+y}$; 4) $\dfrac{x}{y-x}$.
А5. Найдите $y'(x)$, если $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t).\end{cases}$	1) $\operatorname{tg} t$; 2) $\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$; 4) $\cos\dfrac{t}{2}$.
А6. Вычислите y'_x при $t_0=\dfrac{\pi}{3}$, если $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=4\sin^2 t.\end{cases}$	1) 4; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $2\sqrt{3}$; 4) –4.
А7. Вычислите $y'(1)$, если $y=(\operatorname{arctg} x)^{2\ln x}$.	1) 3; 2) $2\ln\dfrac{\pi}{4}$; 3) $\ln\dfrac{\pi}{4}$; 4) 1.

А8. Вычислите $y'(1)$, если $y = x^{5x}e^{7x}$.	1) e^7; 2) $5\ln 5$; 3) $12e^7$; 4) 12.
А9. Вычислите дифференциал функции $y = 2x^2 + 3x + 3$ в точке $x_1 = 1$, если аргумент изменяется от $x_1 = 1$ до $x_2 = 1{,}001$.	1) 0,07; 2) 0,007; 3) 0,0007; 4) –0,007.
А10. Вычислите приближенно значение $(1{,}03)^5$ с помощью дифференциала.	1) 1,05; 2) 1,1; 3) 1,01; 4) 1,15.
А11. Шар радиуса $R = 5$ см при нагревании расширяется, увеличиваясь в радиусе на величину $\Delta R = 0{,}002$ см. Определите, насколько увеличится его объем (в $см^3$).	1) 0,1π; 2) 0,02π; 3) 0,01π; 4) 0,2π.
А12. Найдите скорость изменения функции $y = \frac{e^x \sin x}{2x^2 - 1}$ при $x_0 = 0$.	1) –1; 2) 1; 3) 0,5; 4) 0.
А13. Найдите на параболе $y = 4x^2 - 6x + 3$ точку, в которой касательная перпендикулярна прямой $y = \frac{x}{4}$.	1) $\left(\frac{1}{8}; \frac{37}{16}\right)$; 2) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{19}{4}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$; 4) $(1; 1)$.
А14. Найдите уравнение касательной к кривой $\begin{cases} x = t - t^2, \\ y = t - t^3 \end{cases}$ в точке, для которой $t_0 = 1$.	1) $2x - y = 0$; 2) $x + 2y = 0$; 3) $x - 2y = 0$; 4) $2x + y = 0$.
А15. Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону $s(t) = 200t - 4{,}9t^2$ (t – в секундах, s – в сантиметрах). Найдите наибольшую высоту (в метрах) подъема тела; результат округлите до целого значения.	1) 20; 2) 5; 3) 10; 4) 41.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Вычислите $y'(2)$, если $y = \operatorname{arcctg}\frac{x+1}{x-1}$.
В2. Вычислите $y'(0)$, если $2y\ln y - x = 0$.
В3. Вычислите y'_x при $t_0 = 1$, если $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t, \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

B4. Вычислите приближенно значение функции $y = x\sqrt{x^2 - 5}$ при $x_0 = 2{,}99$ с помощью дифференциала.
B5. Определите, при каком значении аргумента функция $f(x) = x^2 - x$ возрастает в два раза быстрее, чем функция $g(x) = x^2 + x$.
B6. Найдите сумму $k^2 + b^2$ коэффициентов уравнения касательной $y = kx + b$ к кривой $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ в точке, для которой $t_0 = 2$.
B7. Найдите сумму $k + b$ коэффициентов уравнения нормали $y = kx + b$ к кривой $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ в точке $(-4; -1)$.
B8. Найдите абсциссу точки, лежащей на прямой $-4x - 3y = 25$ и наименее удаленной от начала координат.
B9. Количество электричества в проводнике изменяется по закону $q(t) = 25e^{2t} + \cos(3t - 1)$ (t – в секундах, q – в кулонах). Найдите силу тока $I = q'(t)$ (в амперах; $1\,A = 1\,\text{кул/с}$) в конце 5-й секунды.
B10. Маховик за время t поворачивается на угол $\varphi(t) = 8t - 0{,}5t^2$ (t – в секундах, φ – в радианах). Найдите значение $\omega_0 t_0$ (в радианах), где ω_0 – угловая скорость в конце 3-й секунды; t_0 – момент времени, когда вращение прекратится.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите верно утверждение: *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция…* 1) *не определена*; 2) *имеет экстремум*; 3) *разрывна*; 4) *непрерывна*.
С2. Закончите верно утверждение: *Первая производная функции показывает…* 1) *приращение аргумента функции*; 2) *приращение функции*; 3) *скорость изменения функции*; 4) *направление функции*.
С3. Укажите формулу уравнения нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0;\, f(x_0)\right)$: 1) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; 2) $y = -f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; 3) $y = \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$; 4) $y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

С4. Укажите верную формулу:

1) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$; 2) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$;

3) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u(x)u'(x)}{v'(x)}$; 4) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

С5. Укажите формулу нахождения производной y'_x функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t): \end{cases}$

1) $y'_x = \dfrac{x'_t}{y'_t}$; 2) $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$; 3) $y'_x = x'_t y'_t$; 4) $y'_x = -\dfrac{y'_t \cdot x - y \cdot x'_t}{x^2}$.

ТЕСТ № 7.2.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $y''(1)$, если $y = \dfrac{1}{2}\ln(2x-3)$.	1) –1; 2) –2; 3) –3; 4) 2.
А2. Вычислите $y''(0)$, если $y = e^x x \sin x$.	1) 0; 2) 2; 3) –2; 4) 1.
А3. Вычислите $y^{(4)}(0)$, если $y = x \sin 3x$.	1) –4; 2) –27; 3) –108; 4) 4.
А4. Найдите дифференциал 2-го порядка функции $y = 4^{-x^2}$ в точке $x_0 = -1$.	1) $0,25(dx)^2$; 2) $-0,25(dx)^2$; 3) $\left(4\ln^2 2 - \ln 2\right)(dx)^2$; 4) $-\ln 2(dx)^2$.
А5. Найдите дифференциал 4-го порядка функции $y = x^4$.	1) $24(dx)^4$; 2) $4x^3(dx)^4$; 3) $12x^2(dx)^4$; 4) $(dx)^4$.
А6. Найдите $f'''(1)$, если $f(x) = 3(x-1)^3 + \dfrac{13}{6}(x-1)^4 + (x-1)^5 + R_5(x)$ – разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 1$.	1) 3; 2) 18; 3) 9; 4) 42.
А7. Найдите интервал убывания функции $y = -x^3 + 8$.	1) $(-2; 2)$; 2) $(-\infty; 2)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $(2; +\infty)$.

А8. Найдите середину промежутка возрастания функции $y = 6\sqrt{x-1} - 3x$.	1) 0,5; 2) 1; 3) 1,5; 4) 2.
А9. Найдите точку максимума функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$.	1) –2; 2) 3; 3) –3; 4) 2.
А10. Найдите точку минимума функции $y = \dfrac{1-x^2}{x-2}$.	1) $-2+\sqrt{3}$; 2) $2-\sqrt{3}$; 3) $-2-\sqrt{3}$; 4) $2+\sqrt{3}$.
А11. Найдите количество точек экстремума функции $y = (x^2-1)^4$.	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.
А12. Найдите сумму наименьшего и наибольшего значений функции $y = x^2 - 4x + 3$ на отрезке $[0; 3]$.	1) 2; 2) 3; 3) –2; 4) –1.
А13. Число 28 представлено в виде суммы двух слагаемых так, что сумма их кубов наименьшая. Найдите эти слагаемые.	1) {11; 17}; 2) {12; 16}; 3) {13; 15}; 4) {14; 14}.
А14. Участок в форме прямоугольника площадью $800\ \text{м}^2$ огорожен с трех сторон забором. Найдите наименьшую длину (в метрах) забора.	1) 60; 2) 80; 3) 100; 4) 120.
А15. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ с помощью правила Лопиталя.	1) ∞; 2) 0; 3) $\dfrac{1}{e}$; 4) e.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Вычислите $f'''(0) - g''(2)$, если $f(x) = \dfrac{3}{20}x^5 - \dfrac{3}{8}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 + 2,5x^2$, $g(x) = 2\left(x + \ln(x-1)\right)$.
В2. Найдите $f'''(-1)$, если $f(x) = 10 - 20(x+1) + 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + R_3(x)$ – разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = -1$.
В3. Найдите длину промежутка убывания функции $y = \dfrac{(x-3)^2}{x^2}$.
В4. Определите, при каком наибольшем значении *a* функция $f(x) = 2x^3 - 3(a+2)x^2 + 48ax + 6x - 3$ возрастает на всей числовой оси.
В5. Определите, при каком значении *a* функция $y = x^3 - 2,4x^2 + ax - 8,4$ не имеет экстремума в критической точке.

В6. Определите, при каком значении *a* точка $x = 1$ является точкой максимума функции $f(x) = ax^2 - \frac{1}{x}$.
В7. Определите, при каком наибольшем значении *a* точка $x = 6$ является точкой экстремума функции $y = (x - a)^3 - 3x + a$.
В8. Определите, при каком наименьшем значении *a* максимум функции $y = 3ax^2 - 12ax + a^2 - 11$ равен 2.
В9. Найдите наименьшее значение производной функции $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + 1$ на отрезке $[-2; 2]$.
В10. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5 - 2x + 1}{2x^4 - x - 1}$ с помощью правила Лопиталя.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Укажите неверную формулу: 1) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbf{R}$; 3) $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$; 4) $(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
С2. Укажите формулу нахождения дифференциала функции $y = f(x)$ в точке x_0: 1) $df(x_0) = f'(x_0)dx$; 2) $df(x_0) = \left(f'(x_0) + f(x_0)\right)dx$; 3) $df(x_0) = f'(x_0)dx + f(x_0)$; 4) $df(x_0) = f'(x_0)dx - f(x_0)$.
С3. Укажите формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0: 1) $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n}(x - x_0)^n + R_n(x)$; 2) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_n(x)$; 3) $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n + R_n(x)$; 4) $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$.
С4. Закончите верно утверждение: *Если дифференцируемая на интервале* $(a; b)$ *функция* $f(x)$ *возрастает, то при всех* $x \in (a; b) \ldots$ 1) $f'(x) \le 0$; 2) $f''(x) \le 0$; 3) $f'(x) \ge 0$; 4) $f''(x) \ge 0$.

C5. Закончите верно утверждение:

Если $M_0(x_0;\, y_0)$ – *точка перегиба графика функции* $y = f(x)$, *то…*

1) $f'(x_0) = 0$; 2) $f''(x_0) = 0$ *или не существует* $f''(x_0)$;

3) $f''(x_0) > 0$; 4) $f''(x_0) < 0$.

ТЕСТ № 7.2.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $y^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, если $y = e^{-x}\sin x$, используя формулу Лейбница.	1) $-2e^{-\frac{\pi}{6}}$; 2) $-2e^{\frac{\pi}{6}}$; 3) $2e^{-\frac{\pi}{6}}$; 4) $2e^{\frac{\pi}{6}}$.
А2. Найдите $y^{(10)}(x)$, если $y = e^x(x^3 - 2)$.	1) $x^3 + 30x^2 + 270x + 718$; 2) $e^x(x^3 + 30x^2 + 270x + 718)$; 3) $e^x(x^3 + 3x^2 - 1)$; 4) $x^3 + 3x^2 - 1$.
А3. Найдите $y^{(n)}(x)$, если $y = \ln(2x+1)$.	1) $\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}n!}{(2x+1)^n}$; 2) $\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}(n-1)!}{(2x+1)^n}$; 3) $\frac{(-1)^{n+1}2^{n}n!}{(2x+1)^n}$; 4) $\frac{(-1)^{n+1}2^{n}(n-1)!}{(2x+1)^n}$.
А4. Найдите $y''(x)$, если $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$	1) $e^{-t}(\cos t + \sin t)$; 2) $\cos t + \sin t$; 3) $\cos t - \sin t$; 4) $e^{-t}(\cos t - \sin t)$.
А5. Найдите $y''(x)$, если $y = \ln(x+y)$.	1) $\frac{1}{x+y-1}$; 2) $\frac{x+y}{(1-x-y)^3}$; 3) $-\frac{1}{(x+y-1)^2}$; 4) $\frac{x+y}{(x+y-1)^2}$.

А6. Найдите разложение функции $y = x^4 + 3x^3 + x - 2$ по степеням $x - 2$, используя формулу Тейлора.	1) $40 + 69(x-2) + 84(x-2)^2 + {}$ $+66(x-2)^3 + 24(x-2)^4$; 2) $40 + 69(x-2) + 42(x-2)^2 + {}$ $+11(x-2)^3 + (x-2)^4$; 3) $40 - 69(x-2) - 42(x-2)^2 - {}$ $-11(x-2)^3 - (x-2)^4$; 4) $40 + 69x + 42x^2 + 11x^3 + x^4$.
А7. Определите, какая из указанных формул является формулой Маклорена для функции $y = e^{x^2}$:	1) $e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + R_n(x)$; 2) $e^{x^2} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$; 3) $e^{x^2} = 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$; 4) $e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n(x)$.
А8. Найдите число, которое, будучи сложено со своим утроенным квадратом, дает наименьшую сумму.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) $-\frac{1}{3}$.
А9. Найдите произведение (в метрах) стороны основания и высоты открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 при условии, что на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.	1) 32; 2) 16; 3) 8; 4) 4.
А10. Найдите интервал выпуклости графика функции $y = x^4 - 2x^3 - 36x^2 - x + 7$.	1) $(-\infty; -2)$; 2) $(-2; 3)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(-\infty; +\infty)$.
А11. Найдите длину промежутка вогнутости графика функции $y = -x^4 - 2x^3 + 36x^2 + 12x - 5$.	1) 5; 2) 3,5; 3) 4; 4) 4,5.
А12. Найдите количество целочисленных значений параметра *a*, при которых кривая $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ является вогнутой на всей числовой прямой.	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.
А13. Найдите точку перегиба графика функции $y = x^3 - 6x^2 + 4$.	1) $(0; 4)$; 2) $(2; -12)$; 3) $(4; -28)$; 4) $(-2; -28)$.
А14. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}\sin x - x}{x^3 + 5x^2}$ с помощью правила Лопиталя.	1) $\frac{2}{5}$; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) 0; 4) ∞.
А15. Определите, какая из указанных функций удовлетворяет уравнению $y' = e^{x-y}$:	1) $y = \ln(1 + e^x)$; 2) $y = 1 + e^x$; 3) $y = \frac{1}{\ln(1+e^x)}$; 4) $y = \ln x$.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (B1–B10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Вычислите $y^{(5)}(2)$, если $y = x\ln x$.
B2. Вычислите $y^{(5)}(2)$, если $y = (x^2+1)\ln x$.
B3. Вычислите $y^{(6)}(0)$, если $y = 3^{2x+1}$.
B4. Вычислите $y^{(10)}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$, если $y = x\sin x$.
B5. Вычислите $y''(0)$, если $e^y + xy = e$.
B6. Вычислите $y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, если $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$
B7. Найдите значение $x_0 \in (1;\,4)$ в формуле Коши $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$, если $a=1$, $b=4$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $\varphi(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$.
B8. Найдите значение $x_0 \in (1;\,3)$ в формуле Лагранжа $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$, если $f(x) = \ln x$ при $x \in [1;\,3]$.
B9. Найдите сумму наименьшего и наибольшего значений функции $y = 2x^3 + 6x^2 + 5$ на отрезке $[-3;\,0]$.
B10. Определите, при каком значении a график функции $y = x^3 + ax^2 + 1$ имеет точку перегиба с абсциссой $x = 1$.

Часть C

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (C1–C5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
C1. Укажите неверную формулу: 1) $(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;   2) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$; 3) $(e^x)' = e^x \ln e$;   4) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

С2. Укажите формулу нахождения дифференциала n-го порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0, если x – независимая переменная:

1) $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n$; 2) $d^n f(x_0) = (f(x_0))^n (dx)^n$;

3) $d^n f(x_0) = f(x_0)(dx)^n$; 4) $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx$.

С3. Укажите верную формулу Тейлора:

1) $e^x = 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2} + ... + \dfrac{x^n}{n} + R_n(x)$;

2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + R_n(x)$;

3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} - ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)} + R_n(x)$;

4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + R_n(x)$.

С4. Закончите верно утверждение:

Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то ее производная в этой точке…

1) *строго положительна*; 2) *строго отрицательна*;

3) *равна нулю или не существует*; 4) *неотрицательна*.

С5. Закончите верно утверждение:

График функции $y = f(x)$ является вогнутым на интервале $(a; b)$, если при всех $x \in (a; b)$…

1) $f''(x) < 0$; 2) $f''(x) > 0$; 3) $f'(x) < 0$; 4) $f'(x) > 0$.

Тема 8. Функции многих переменных

ТЕСТ № 8.1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $z(-1, 2)$, если $z = x^3 + y^2 - 2xy$.	1) 1; 2) 3; 3) 5; 4) 7.
А2. Вычислите $u(M_0)$, если $u = y\sqrt{z} + 2z\sqrt{x} + 3x\sqrt{y}$, $M_0(1; 4; 9)$.	1) 35; 2) 36; 3) 49; 4) 51.
А3. Найдите область определения функции $z = x^2 + y^2$.	1) плоскость; 2) круг; 3) пара прямых; 4) окружность.
А4. Найдите линии уровня функции $z = \sqrt[3]{x + y}$.	1) семейство эллипсов; 2) семейство гипербол; 3) семейство парабол; 4) семейство параллельных прямых.
А5. Найдите область определения функции $u = \sqrt{2 - x^2 - y^2 - z^2}$.	1) пространство; 2) шар; 3) плоскость; 4) сфера.
А6. Найдите поверхности уровня функции $u = \dfrac{1}{x^2 + 3y^2 + z^2}$.	1) семейство однополостных гиперболоидов; 2) семейство двуполостных гиперболоидов; 3) семейство эллипсоидов; 4) семейство конусов.
А7. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x + y}{\sqrt{x + y + 1} - 1}$.	1) –2; 2) –1; 3) 1; 4) 2.
А8. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to -2}} \dfrac{\sin xy^2}{x}$.	1) –4; 2) 4; 3) –2; 4) 2.
А9. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, если $z = e^y(\cos x + y \sin x)$.	1) $e^y(\sin x - y\cos x)$; 2) $e^y(\cos x - y\sin x)$; 3) $e^y(-\sin x + y\cos x)$; 4) $e^y(-\cos x + y\sin x)$.

A10. Вычислите $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}$, если $z=x^3+2x^2y+xy^2+2y^3$, $M_0(2;-1)$.	1) 7; 2) 5; 3) 3; 4) 1.
A11. Найдите полный дифференциал функции $z=e^{(x^2+y^2)^2}$.	1) $4(x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}(xdx+ydy)$; 2) $2(x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}(dx+dy)$; 3) $4(x^2+y^2)(xdx+ydy)$; 4) $2e^{(x^2+y^2)^2}(xdx+ydy)$.
A12. Найдите полный дифференциал функции $z=\frac{x-y}{x+y}$ в точке $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.	1) $-dx-dy$; 2) $-dx+dy$; 3) $dx-dy$; 4) $dx+dy$.
A13. Определите, какая из указанных функций удовлетворяет равенству $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$:	1) $z=\ln(x+y)$; 2) $z=\ln(e^x+e^y)$; 3) $z=\ln(x^2+y^2)$; 4) $z=\ln(\sin x+\sin y)$.
A14. Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $z=\sin xy$.	1) $\sin xy+xy\cos xy$; 2) $\cos xy+xy\sin xy$; 3) $\sin xy-xy\cos xy$; 4) $\cos xy-xy\sin xy$.
A15. Вычислите $\frac{\partial^3 z(0,0)}{\partial x\partial y^2}$, если $z=x\ln(y+1)+e^xy^2$.	1) –1; 2) 0; 3) 1; 4) 2.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (B1–B10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Вычислите $z(M_0)$, если $z=\frac{x\cos y+y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$, $M_0(\pi;0)$.
B2. Вычислите $u(1,-1,2)$, если $u=x^3+2y^3+z^3-3xyz$.
B3. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sqrt{xy}+\operatorname{tg}x^3y^2}{x^2+y^3}$.
B4. Вычислите $\frac{\partial z(-1,1)}{\partial y}$, если $z=x^2y^3-2x^3y^2+6x^4y$.

B5. Вычислите $\dfrac{\partial z(1,2)}{\partial x}$, если $z=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}+xy+1.$	
B6. Найдите значение суммы $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0(-1;3)$, если $z=\operatorname{arctg} xy.$	
B7. Найдите $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\ln(x^2+xy+y^2).$	
B8. Вычислите $\dfrac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x\partial y}$, если $z=\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, $M_0(3;4).$	
B9. Вычислите $\dfrac{\partial^3 z(1,1)}{\partial x^2\partial y}$, если $z=x\sin^2 y-y^2\ln x.$	
B10. Найдите значение суммы $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в точке $M_0(-1;-1)$, если $z=e^{xy}.$	

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите определение: *Графиком функции* $z=f(x,y)$ *называется множество всех точек…* 1) *плоскости*; 2) *области определения функции* $f(x,y)$; 3) $(x;y)\in D$, *для которых* $f(x,y)=C$ $(C=\text{const})$; 4) $(x;y;z)\subseteq \mathbf{R}^3$, *где* $(x;y)\in D$, $z=f(x,y)$.
С2. Закончите определение: *Множество точек* $(x;y)\in D\subseteq \mathbf{R}^2$, *для которых* $f(x,y)=C$ $(C=\text{const})$, *называется…* 1) *графиком функции двух переменных*; 2) *касательной плоскостью к поверхности* $z=f(x,y)$; 3) *линией уровня функции* $z=f(x,y)$; 4) *поверхностью уровня функции* $z=f(x,y)$.
С3. Закончите определение: *Частной производной по переменной x функции* $f(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0;y_0)$ *называется…* 1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(\Delta x,y_0)}{\Delta x}$; 2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta x}$; 3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$; 4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)-f(\Delta x,y_0)}{\Delta x}$.

C4. Укажите формулу нахождения дифференциала функции $z = f(x, y)$:   1) $dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)(dx + dy)$; 2) $dz = f(x, y)dxdy$;   3) $dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$; 4) $dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.
C5. Укажите формулу нахождения полной производной функции $z = f(x, y)$, если $y = y(x)$:   1) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$; 2) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{dy}{dx}$; 3) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{dx}$; 4) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$.

ТЕСТ № 8.1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\ln(1+xy)}{xy^2}$.	1) e^{-1}; 2) 0; 3) e; 4) 1.
А2. Найдите $\frac{\partial u}{\partial x}$, если $u = \arccos\frac{yz}{x}$, $x > 0$.	1) $\frac{yz}{x\sqrt{y^2z^2 - x^2}}$; 2) $-\frac{yz}{x\sqrt{y^2z^2 - x^2}}$; 3) $\frac{yz}{x\sqrt{x^2 - y^2z^2}}$; 4) $-\frac{yz}{x\sqrt{x^2 - y^2z^2}}$;
А3. Вычислите $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}$, если $u = (xy)^z$, $M_0(1; 2; 1)$.	1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 8.
А4. Найдите полный дифференциал функции $u = \sin^2 xyz$.	1) $2(dx + dy + dz)\sin xyz$; 2) $2(yzdx + xzdy + xydz)\sin xyz$; 3) $(dx + dy + dz)\sin 2xyz$; 4) $(yzdx + xzdy + xydz)\sin 2xyz$.
А5. Найдите полный дифференциал функции $u = e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}}$ в точке $M_0(1; 1; 1)$.	1) $e(dx + dy - 2dz)$; 2) $e(dx + dy + 2dz)$; 3) $dx + dy - 2dz$; 4) $dx + dy + 2dz$.

А6. Определите, какая из указанных функций удовлетворяет равенству $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$:	1) $u=\sqrt{e^x+e^y+e^z}$; 2) $u=\ln(e^x+e^y+e^z)$; 3) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; 4) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$.
А7. Вычислите $\dfrac{du}{dx}$ при $x_0=1$, если $u=\ln\left(x^2-\sqrt{y}+z\right)$, $y=x^2$, $z=x^3$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
А8. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, если $z=\dfrac{1}{2}(x^2-xy+2y^2)$, $x=u+v$, $y=u-v$.	1) $2u-v$; 2) $2u+v$; 3) $u-4v$; 4) $u+4v$.
А9. Вычислите $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}$, если $xe^y+(y+z)e^x=1$, $M_0(0;1)$.	1) $1-e$; 2) $-1-e$; 3) $-1+e$; 4) $1+e$.
А10. Найдите уравнение касательной плоскости к поверхности $x^3+y^3+z^3+xyz=6$ в точке $M_0(2;1;-1)$.	1) $11x+y+5z-18=0$; 2) $x+11y+5z-8=0$; 3) $5x+11y+z-20=0$; 4) $11x+5y+z-26=0$.
А11. Вычислите производную функции $u=xy^2z^3$ в точке $M(1;1;1)$ по направлению вектора $\overline{MN}$, если $N(3;2;3)$.	1) $\dfrac{8}{3}$; 2) 3; 3) $\dfrac{10}{3}$; 4) $\dfrac{11}{3}$.
А12. Вычислите $\left\|\overline{\operatorname{grad} z(M_0)}\right\|$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0(3;4)$.	1) 0,1; 2) 0,2; 3) 0,3; 4) 0,4.
А13. Найдите $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\partial y^2\partial z^3}$, если $u=\dfrac{1}{120}x^3y^4z^5$.	1) $6xyz^4$; 2) $12xy^3z^2$; 3) $12x^2yz^3$; 4) $18x^2y^2z^2$.
А14. Найдите значение суммы $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ в точке $M_0(3;2;1)$, если $u=\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y-z}+\dfrac{1}{z-x}$.	1) 7,5; 2) 0,5; 3) –0,5; 4) –7,5.
А15. Найдите экстремум функции $z=1-4x+4y-x^2-2y^2$.	1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 8.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (B1–B10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt[3]{x^2y^2+1}-1}$.
B2. Вычислите $\dfrac{\partial u(1, 2, 0)}{\partial x}$, если $u = \operatorname{arctg}(x^2y+z)$.
B3. Найдите значение суммы $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$ в точке $M_0(2;1;1)$, если $u=\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{y}$.
B4. Найдите $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$, если $u=\dfrac{z-y}{y-x}+z$.
B5. Вычислите $\dfrac{du}{dt}$ при $t_0=1$, если $u=z^2\sqrt{x^2+y^2}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $z=t^2$.
B6. Вычислите $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ при $u_0=1$, $v_0=1$, если $z=2x\ln y$, $x=u^2v$, $y=\dfrac{u}{v}$.
B7. Вычислите $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}$, если $x\cos y^2+y\cos z^2+z\cos x^2=1$, $M_0(0;0)$.
B8. Вычислите производную функции $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ в точке $M_0(1;2;1)$ по направлению вектора $\overline{l}=\overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k}$.
B9. Вычислите $\dfrac{\partial^4 u(0,1,1)}{\partial x\partial y^2\partial z}$, если $u=e^{\frac{x+y}{z}}$.
B10. Найдите экстремум функции $z=x^2+xy+y^2-4x-5y+9$.

Часть C

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (C1–C5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
C1. Закончите определение: *Графиком функции* $u=f(x, y, z)$ *называется множество всех точек…* 1) *пространства*; 2) *области определения функции* $f(x, y, z)$; 3) $(x; y; z)\in D$, *для которых* $f(x, y, z)=C$ $(C=\text{const})$; 4) $(x; y; z; u)\subseteq \mathbf{R}^4$, *где* $(x; y; z)\in D$, $u=f(x, y, z)$.

С2. Закончите определение:

Множество точек $(x;\, y;\, z) \in D \subseteq \mathbf{R}^3$, *для которых* $f(x, y, z) = C$ $(C = \text{const})$, *называется…*

1) *графиком функции трех переменных*;

2) *касательной плоскостью к поверхности* $f(x, y, z) = 0$;

3) *линией уровня функции* $f(x, y, z) = 0$;

4) *поверхностью уровня функции* $u = f(x, y, z)$.

С3. Закончите определение:

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0;\, y_0)$ *называется…*

1) $\Delta z = f(\Delta x, \Delta y)$;

2) $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$;

3) $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$;

4) $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(\Delta x, \Delta y)$.

С4. Укажите неверное равенство:

1) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$;

2) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$;

3) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}\right)$;

4) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$.

С5. Укажите формулу нахождения частной производной функции $z = f(x, y)$, если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, по переменной u:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial u}$;

2) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial u}$;

4) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\right)$.

Тема 9. Интегралы

ТЕСТ № 9.1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Найдите $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx.$	1) $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln\lvert x\rvert+C;$ 2) $\frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}+e^x+\ln\lvert x\rvert+C;$ 3) $2x-e^x-\ln\lvert x\rvert+C;$ 4) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+e^x+\ln\lvert x\rvert+C.$
А2. Найдите $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx.$	1) $2x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{8x^2}+C;$ 2) $3x+\frac{12}{5}\sqrt[6]{8x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C;$ 3) $2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C;$ 4) $2x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{9x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{8x^2}+C.$
А3. Найдите $\int \frac{3-4\cos^3 x}{\cos^2 x}dx.$	1) $3\operatorname{tg}x-4\sin x+C;$ 2) $3\operatorname{ctg}x+4\sin x+C;$ 3) $3\operatorname{tg}x+4\cos x+C;$ 4) $3\operatorname{ctg}x-4\cos x+C.$
А4. Найдите $\int \frac{dx}{(5x-7)^2}.$	1) $\frac{1}{7(5x-7)^3}+C;$ 2) $-\frac{1}{7(5x-7)}+C;$ 3) $\frac{1}{5(5x-7)^3}+C;$ 4) $-\frac{1}{5(5x-7)}+C.$
А5. Найдите $\int \operatorname{tg}^2 3x dx.$	1) $\operatorname{tg}3x-x+C;$ 2) $\frac{1}{3}(\operatorname{tg}3x-3x)+C;$ 3) $\operatorname{tg}3x-3x+C;$ 4) $\frac{1}{3}(\operatorname{tg}3x+3x)+C.$

A6. Найдите $\int \frac{xdx}{x+2}$.	1) $2x-\ln\lvert x+2\rvert+C$; 2) $x-2\ln\lvert x+2\rvert+C$; 3) $2x+\ln\lvert x+2\rvert+C$; 4) $x+2\ln\lvert x+2\rvert+C$.
A7. Найдите $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.	1) $\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{2}+C$; 2) $\mathrm{arctg}\,\frac{x+5}{2}+C$; 3) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x+2}{5}+C$; 4) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2}+C$.
A8. Найдите $\int \mathrm{tg}\,4xdx$.	1) $\ln\lvert\cos 4x\rvert+C$; 2) $-\ln\lvert\cos 4x\rvert+C$; 3) $\frac{1}{4}\ln\lvert\cos 4x\rvert+C$; 4) $-\frac{1}{4}\ln\lvert\cos 4x\rvert+C$.
A9. Найдите $\int \frac{e^x dx}{9+e^{2x}}$.	1) $\mathrm{arctg}\,e^x+C$; 2) $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,e^x+C$; 3) $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{e^x}{3}+C$; 4) $\mathrm{arctg}\,\frac{e^x}{3}+C$.
A10. Найдите $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}}$.	1) $\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}+C$; 2) $(1+\mathrm{tg}\,x)^2+C$; 3) $2\sqrt{1+\mathrm{tg}\,x}+C$; 4) $2(1+\mathrm{tg}\,x)^2+C$.
A11. Найдите $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$.	1) $2\sqrt{x}+\frac{\ln^2 x}{2}+C$; 2) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\ln^2 x+C$; 3) $\sqrt{x}+2\ln^2 x+C$; 4) $2\sqrt{x}+\ln x+C$.

A12. Найдите $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx.$	1) $\frac{3}{2}\sqrt{\arcsin^3 x}+C;$ 2) $\frac{2}{3}\sqrt{\arcsin^3 x}+C;$ 3) $2\sqrt{\arcsin x}+C;$ 4) $3\sqrt{\arcsin x}+C.$
A13. Найдите $\int \frac{xdx}{2x^2+3}.$	1) $\frac{1}{2}\ln(2x^2+3)+C;$ 2) $\frac{1}{4}\ln(2x^2+3)+C;$ 3) $\ln(2x^2+3)+C;$ 4) $4\ln(2x^2+3)+C.$
A14. Найдите $\int \frac{\sin 3xdx}{3+\cos 3x}.$	1) $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x)+C;$ 2) $\ln(3+\cos 3x)+C;$ 3) $\sin 3x(3+\cos 3x)+C;$ 4) $\frac{1}{3}(3+\cos 3x)+C.$
A15. Найдите $\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$	1) $3^{\sqrt{x}}\ln 3+C;$ 2) $\frac{3^{\sqrt{x}}}{\ln 3}+C;$ 3) $\frac{2}{\ln 3}3^{\sqrt{x}}+C;$ 4) $2\cdot 3^{\sqrt{x}}\ln 3+C.$

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Вычислите $\int_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{2}dx.$
В2. Вычислите $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)^2}.$
В3. Вычислите $\int_1^e \frac{1+\lg x}{x}dx.$

B4. Вычислите $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx.$
B5. Вычислите $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x dx.$
B6. Вычислите $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx.$
B7. Вычислите $\int\limits_0^1 \arcsin x dx.$
B8. Вычислите $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\, x dx.$
B9. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin^2 x dx.$
B10. Вычислите $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите определение: *Функция* $F(x)$ *называется первообразной для функции* $f(x)$ *на интервале* $(a;b)$, *если для любого* $x\in(a;b)$ *выполняется равенство…* 1) $F'(x)=f(x)$; 2) $f'(x)=F(x)$; 3) $F(x)=f(x)+C$; 4) $F(x)=f'(x)+C$.
С2. Укажите верную формулу: 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}+C$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a}+C$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\mathrm{arctg}\frac{x}{\lvert a\rvert}+C$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$.

С3. Укажите формулу интегрирования по частям:

1) $\int u\,dv = uv + \int v\,du$; 2) $\int u\,dv = uv - \int u\,dv$;

3) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$; 4) $\int u\,dv = uv + \int u\,dv$.

С4. Закончите правильно утверждение:

Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что определенный интеграл представляет собой…

1) *семейство кривых на плоскости*; 2) *некоторую кривую на плоскости*;

3) *площадь криволинейной трапеции*; 4) *криволинейную фигуру на плоскости*.

С5. Укажите формулу Ньютона – Лейбница:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, где $F'(x) = f(x)$; 2) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a-b)$, где $F'(x) = f(x)$; 4) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b-a)$, где $F'(x) = f(x)$.

ТЕСТ № 9.1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Найдите $\int \frac{x^4 dx}{x^2+4}$.	1) $\frac{x^3}{3} - 4x + 8\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C$; 2) $x^2 + x - 4\,\mathrm{arctg}\,2x + C$; 3) $\frac{x^3}{3} + 2x + \mathrm{arctg}\,x + C$; 4) $x^3 - 4x + \mathrm{arctg}\,2x + C$.
А2. Найдите $\int x^2 \ln x dx$.	1) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{9}\ln x + C$; 2) $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$; 3) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3}\ln x + C$; 4) $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{3} + C$.

А3. Найдите $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$	1) $\sqrt{x}\ln x+4\sqrt{x}+C;$ 2) $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C;$ 3) $4\sqrt{x}\ln x+2\sqrt{x}+C;$ 4) $4\sqrt{x}\ln x-2\sqrt{x}+C.$
А4. Найдите $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}.$	1) $\arcsin(x+2)+C;$ 2) $\arccos\frac{x+1}{2}+C;$ 3) $\arccos\frac{x+2}{3}+C;$ 4) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C.$
А5. Найдите $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx.$	1) $\sqrt{x^2-4}+3\ln\left\|x+\sqrt{x^2-4}\right\|+C;$ 2) $\sqrt{x^2-4}+\ln\left\|x+\sqrt{x^2-4}\right\|+C;$ 3) $\sqrt{x^2-4}-3\ln\left\|x+\sqrt{x^2-4}\right\|+C;$ 4) $\sqrt{x^2-4}-\ln\left\|x+\sqrt{x^2-4}\right\|+C.$
А6. Найдите $\int \frac{2xdx}{x^2+3x-4}.$	1) $\ln\sqrt[3]{(x-1)(x+4)^5}+C;$ 2) $\ln\sqrt[5]{(x-1)^3(x+4)^6}+C;$ 3) $\ln\sqrt[3]{(x-1)^2(x+4)^7}+C;$ 4) $\ln\sqrt[5]{(x-1)^2(x+4)^8}+C.$
А7. Найдите $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+1)}.$	1) $\ln\|x+1\|+\frac{1}{x+2}+C;$ 2) $\ln\|x+1\|-\frac{1}{x+2}+C;$ 3) $\ln\|x+1\|+\frac{4}{x+2}+C;$ 4) $\ln\|x+1\|-\frac{4}{x+2}+C.$
А8. Найдите $\int \sin x\sin 3xdx.$	1) $\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\cos 2x}{4}+C;$ 2) $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}+C;$ 3) $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\cos 4x}{8}+C;$ 4) $\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{8}+C.$

A9. Найдите $\int \cos^3 x dx.$	1) $\frac{1}{3}\cos^3 x+\sin x+C;$ 2) $\frac{1}{3}\sin^3 x+\sin x+C;$ 3) $\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C;$ 4) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$
A10. Найдите $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx.$	1) $\frac{3}{\cos^3 x}+\frac{2}{\cos x}+\cos x+C;$ 2) $\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{2\cos x}-\cos x+C;$ 3) $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x+C;$ 4) $\frac{3}{\cos^3 x}-\frac{1}{2\cos x}+\cos x+C.$
A11. Найдите $\int \sin^4 x dx.$	1) $\frac{x}{8}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+C;$ 2) $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C;$ 3) $\frac{3x}{16}+\frac{\sin 2x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C;$ 4) $\frac{x}{16}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{16}+C.$
A12. Найдите $\int x\sqrt{x^2-4}dx.$	1) $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x^2-4}+C;$ 2) $\frac{1}{3}x\sqrt{(x^2-4)^3}+C;$ 3) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-4)^3}+C;$ 4) $\frac{2}{3}x\sqrt{x^2-4}+C.$
A13. Найдите первообразную функции $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}$, график которой проходит через точку $M(\pi;1)$.	1) $\frac{1}{2}\sqrt{1+4\sin x}+\frac{1}{2};$ 2) $\frac{1}{2}\sqrt{1-4\sin x}+\frac{1}{2};$ 3) $\frac{1}{2}(1+4\sin x)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2};$ 4) $\frac{1}{2}(1-4\sin x)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}.$

A14. Найдите первообразную функции $f(x)=\dfrac{1}{4x^2+10x-24}$, график которой проходит через точку $M\left(-3;\ \dfrac{1}{22}\ln\dfrac{9}{2}\right)$.	1) $\dfrac{1}{22}\ln\left\|\dfrac{2x-3}{2x+8}\right\|$; 2) $\dfrac{1}{22}\ln\left\|\dfrac{3x}{x+1}\right\|$; 3) $\dfrac{1}{22}\ln\left\|\dfrac{4x+3}{3x+7}\right\|$; 4) $\dfrac{1}{22}\ln\left\|\dfrac{x-6}{2x+8}\right\|$.
A15. Найдите значение $F(1)$, если известно, что график функции $y=F(x)$ проходит через точку $M(0;\,2)$ и $F'(x)=\operatorname{arctg} x$.	1) $\pi+\ln 2+1$; 2) $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2+2$; 4) $\dfrac{\pi}{4}+\ln 2+2$.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Вычислите $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$.
В2. Вычислите $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{x}\sin x\,dx$.
В3. Вычислите $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x-4}{x^2+8x+15}dx$.
В4. Вычислите $\displaystyle\int_0^{2\operatorname{arctg}0{,}5} \frac{dx}{5-3\cos x}$.
В5. Вычислите $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.
В6. Вычислите $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

B7. Вычислите $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.
B8. Найдите значение $F(-1)$, если известно, что график функции $y = F(x)$ проходит через точку $M(2; \ln 2)$ и $F'(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$.
B9. Найдите значение $F(0)$, если известно, что график функции $y = F(x)$ проходит через точку $M\left(1; \frac{1}{24}\ln 3\right)$ и $F'(x) = \frac{1}{x^3 + 8}$.
B10. Найдите значение $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если известно, что график функции $y = F(x)$ проходит через точку $M\left(0; \ln\sqrt{2}\right)$ и $F'(x) = \operatorname{tg}^3 x$.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Укажите верную формулу: 1) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; 2) $\int a^x dx = a^x + C$; 3) $\int a^x dx = a^x \ln a + C$; 4) $\int a^x dx = a^x - \ln a + C$.
С2. Укажите верную формулу: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a} + C$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\rvert + C$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\rvert + C$.
С3. Закончите верно утверждение: *Определенный интеграл представляет собой…* 1) *первообразную функции*; 2) *предел интегральных сумм*; 3) *интегральную сумму*; 4) *совокупность всех первообразных*.
С4. Укажите верную формулу: 1) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a)$; 2) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b)$; 3) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{2} - \operatorname{arctg}\frac{b}{2}\right)$; 4) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a}{2}\right)$.

C5. Укажите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b + \int\limits_a^b v(x)du(x);$ 2) $\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u(x)dv(x);$

3) $\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x);$ 4) $\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b + \int\limits_a^b u(x)dv(x).$

ТЕСТ № 9.2.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$.
А2. Вычислите $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}dx.$	1) $-e^{-1}$; 2) e^{-1}; 3) $-e$; 4) e.
А3. Вычислите $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}.$	1) $\ln\frac{5}{8}$; 2) $\ln\frac{8}{5}$; 3) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{8}$; 4) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$.
А4. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx.$	1) 1; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$.
А5. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx.$	1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$.
А6. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{5+4\cos x}.$	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $\frac{\pi}{12}$.

A7. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.	1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 0; 4) 1.
A8. Вычислите $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.	1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{2}$.
A9. Вычислите $\int\limits_0^{3} \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$.	1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{9\pi}{2}$.
A10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $y=-x^2+6x-5$ и осью Ox.	1) $\frac{22}{3}$; 2) $\frac{32}{3}$; 3) $\frac{25}{3}$; 4) $\frac{38}{3}$.
A11. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+4x$, $y=x+4$.	1) $\frac{61}{6}$; 2) $\frac{101}{6}$; 3) $\frac{125}{6}$; 4) $\frac{145}{6}$.
A12. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$.	1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{11}{2}$; 4) $\frac{13}{2}$.
A13. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$.	1) 0,5; 2) 2; 3) 1,5; 4) 1.
A14. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ (или установите его расходимость).	1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 4; 4) расходится.
A15. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$ (или установите его расходимость).	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) расходится.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Вычислите $\int_{1}^{2} x\log_2 x dx.$
В2. Вычислите $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x)dx.$
В3. Вычислите $\int_{2}^{4} \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx.$
В4. Вычислите $\int_{1}^{2} \sqrt{3+2x-x^2}dx.$
В5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $x=-y^2+8y-7$ и осью Oy.
В6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$ и осью Ox.
В7. Вычислите длину дуги линии $y=\ln(1-x^2)$ от $x_1=0$ до $x_2=0,5$.
В8. Вычислите длину дуги астроиды $\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t. \end{cases}$
В9. Вычислите несобственный интеграл $\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$
В10. Вычислите несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+13}.$

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

С1. Укажите формулу вычисления площади S плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x),\ \ y = f_2(x)\ \ (f_1(x) \le f_2(x))$ и прямыми $x = a,\ \ x = b$:

1) $S = \int\limits_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx;$ 2) $S = \int\limits_a^b \left(f_1(x) + f_2(x) \right) dx;$

3) $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx;$ 4) $S = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right)^2 dx.$

С2. Укажите формулу вычисления объема V тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)\ \ (f(x) \ge 0)$, прямыми $x = a,\ \ x = b$ и осью Ox:

1) $V = \int\limits_a^b \left(f'(x) \right)^2 dx;$ 2) $V = \pi\int\limits_a^b \left(f'(x) \right)^2 dx;$ 3) $V = \int\limits_a^b f^2(x)dx;$ 4) $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$

С3. Укажите формулу вычисления площади S поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = f(x)\ \ (f(x) \ge 0),\ \ x \in [a; b]$:

1) $S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx;$ 2) $S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f^2(x)}dx;$

3) $S = 2\pi\int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx;$ 4) $S = 2\pi\int\limits_a^b \sqrt{1 + f^2(x)}dx.$

С4. Укажите формулу вычисления длины l дуги кривой $y = f(x),\ \ x \in [a; b]$:

1) $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx;$ 2) $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f^2(x)}dx;$

3) $l = \int\limits_a^b \left(1 + f'(x)\right)^2 dx;$ 4) $l = \int\limits_a^b \left(1 + f^2(x)\right) dx.$

С5. Укажите формулу вычисления длины l дуги кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$:

1) $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1 + (y'(t))^2}dt;$ 2) $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt;$

3) $l = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt;$ 4) $l = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$

ТЕСТ № 9.2.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 12}$.	1) $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.
А2. Вычислите $\int\limits_0^1 \arcsin^2 x dx$.	1) $\frac{\pi}{4}+1$; 2) $\frac{\pi^2}{4}-2$; 3) $\frac{\pi}{4}-2$; 4) $\frac{\pi^2}{4}-1$.
А3. Вычислите $\int\limits_0^1 \frac{x-4}{(x-2)(x^2+1)} dx$.	1) $\frac{1}{5}\left(\frac{9\pi}{4} + \ln 8\right)$; 2) $\frac{1}{5}\left(\frac{7\pi}{4} - \ln 8\right)$; 3) $\frac{1}{5}\left(\frac{5\pi}{4} + \ln 4\right)$; 4) $\frac{1}{5}\left(\frac{3\pi}{4} - \ln 4\right)$.
А4. Вычислите $\int\limits_0^{0,5} \frac{x dx}{x^4 - 3x^2 + 2}$.	1) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$; 2) $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}$; 3) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{6}$.
А5. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{5}{3}$.

А6. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$.	1) $2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2\sqrt{3}}$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,2\sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
А7. Вычислите $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$.	1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{4}{3}\ln 2$; 3) $\frac{4}{3}(1-\ln 2)$; 4) $\frac{4}{3}(1+\ln 2)$.
А8. Вычислите $\int\limits_0^{0,5} \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.	1) $\frac{5\sqrt{3}}{6}+2$; 2) $\frac{7\sqrt{3}}{6}-2$; 3) $\frac{5\sqrt{3}}{6}-2$; 4) $\frac{7\sqrt{3}}{6}+2$.
А9. Вычислите $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.	1) $4-\pi$; 2) $4+\pi$; 3) $2-\pi$; 4) $2+\pi$.
А10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $x=y^2$, $y=\frac{1}{3}(4-x)$.	1) $\frac{25}{3}$; 2) $\frac{25}{6}$; 3) $\frac{125}{3}$; 4) $\frac{125}{6}$.
А11. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной синусоидой $y=\sin x$ в промежутке от $x=0$ до $x=\pi$ и осью Ox.	1) $\frac{\pi^2}{2}$; 2) $\frac{\pi^3}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi^3}{4}$.
А12. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy=4$, прямыми $x=1$, $x=4$ и осью Ox.	1) 4π; 2) 8π; 3) 12π; 4) 16π.
А13. Вычислите длину дуги кардиоиды $\rho=3(1-\cos\varphi)$.	1) 9; 2) 12; 3) 18; 4) 24.
А14. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ (или установите его расходимость).	1) расходится; 2) e; 3) 1; 4) 2.
А15. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ (или установите его расходимость).	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) π; 3) 2π; 4) расходится.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho^2 = 2\cos 2\varphi.$
B2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 2 + \cos\varphi.$
B3. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$
B4. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной астроидой $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$
B5. Вычислите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 4x,$ отсеченной прямой $x = 3.$
B6. Вычислите площадь поверхности тора, образованного вращением вокруг оси Ox окружности $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t. \end{cases}$
B7. Вычислите длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$
B8. Вычислите длину дуги линии $\rho = 2\sin^3 \dfrac{\varphi}{3}.$
B9. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x dx.$
B10. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1 + x^3}.$

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Укажите формулу вычисления площади S плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $(y(t) \geq 0),\ t \in [\alpha; \beta],$ прямыми $x = a,\ x = b$ и осью Ox, причем $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$: 1) $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt;$ 2) $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt;$ 3) $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt;$ 4) $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$
С2. Укажите формулу вычисления площади S плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, и лучами $\varphi = \varphi_1,\ \varphi = \varphi_2$: 1) $S = \frac{1}{2}\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi;$ 2) $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi;$ 3) $S = \frac{1}{2}\pi\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)d\varphi;$ 4) $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)d\varphi.$
С3. Укажите формулу вычисления объема V тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $(y(t) \geq 0),\ t \in [\alpha; \beta],$ прямыми $x = a,\ x = b$ и осью Ox, причем $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$: 1) $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x^2(t)y'(t)dt;$ 2) $S = \pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} x^2(t)y'(t)dt;$ 3) $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y^2(t)x'(t)dt;$ 4) $S = \pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} y^2(t)x'(t)dt.$
С4. Укажите формулу вычисления площади S поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $(y(t) \geq 0),\ t \in [\alpha; \beta]$: 1) $S = 2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{1 + (x'(t))^2}dt;$ 2) $S = 2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{1 + (y'(t))^2}dt;$ 3) $S = 2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt;$ 4) $S = 2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$

C5. Укажите формулу вычисления длины l дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi),\ \ \varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$:

1) $l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) - (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$; 2) $l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 - \rho^2(\varphi)}\, d\varphi$;

3) $l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2\right) d\varphi$; 4) $l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

Тема 10. Дифференциальные уравнения

ТЕСТ № 10.1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Определите, какое из указанных дифференциальных уравнений является уравнением второго порядка:	1) $y'^2 - 2xy' = 0$; 2) $2xy'' + y''' = 0$; 3) $xy'' - y' = 0$; 4) $y^2 = y' + x^2 - 1$.
А2. Определите, какое из указанных дифференциальных уравнений является уравнением с разделяющимися переменными:	1) $(y^2 - x^2)dx + y(2x + y)dy = 0$; 2) $(x + y^2)dx - xydy = 0$; 3) $(2x - y - 1)dx + (2y - x + 1)dy = 0$; 4) $(x + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0$.
А3. Определите, какая из указанных функций является решением дифференциального уравнения $y' + 2y = 4x$:	1) $y = 4x + 1$; 2) $y = 2x - 1$; 3) $y = 2x + 1$; 4) $y = 4x - 1$.
А4. Решите уравнение $ye^x dx - (1 + e^x)dy = 0$.	1) $y = C(1 + e^x)$; 2) $y = \dfrac{C}{1 + e^x}$; 3) $y = Ce^x(1 + e^x)$; 4) $y = \dfrac{Ce^x}{1 + e^x}$.
А5. Проинтегрируйте уравнение $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$.	1) $e^{-\frac{x}{y}} = Cx$; 2) $e^{-\frac{x}{y}} = Cy$; 3) $e^{\frac{x}{y}} = Cx$; 4) $e^{\frac{x}{y}} = Cy$.
А6. Решите задачу Коши $(x + 2y)dx - xdy = 0$, $y(1) = 0$.	1) $y = x^3 - 1$; 2) $y = x^3 - x$; 3) $y = x^2 - 1$; 4) $y = x^2 - x$.
А7. Найдите общее решение уравнения $xy' - y = x^2 \cos x$.	1) $y = (C + x)\sin x$; 2) $y = (C + \sin x)x$; 3) $y = C + x\sin x$; 4) $y = (C - \sin x)x$.
А8. Решите задачу Коши $y' + \dfrac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 2$.	1) $y = \dfrac{1}{x} + x$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2} + x$; 3) $y = \dfrac{1}{x} + x^2$; 4) $y = \dfrac{1}{x^2} + x^2$.

А9. Решите задачу Коши $xy' + y = y^2$, $y(1) = -1$.	1) $y = \frac{1}{1-2x}$; 2) $y = \frac{x}{1-2x}$; 3) $y = \frac{1}{x-2}$; 4) $y = \frac{x}{x-2}$.
А10. Решите задачу Коши $y'' = 6x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.	1) $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$; 2) $y = x^3 - x + 1$; 3) $y = x^3 + x^2 - 3x + 2$; 4) $y = x^3 - x^2 + x$.
А11. Найдите общее решение уравнения $xy'' + 2y' = 0$.	1) $y = C_1x^2 + C_2$; 2) $y = C_1x + C_2$; 3) $y = \frac{C_1}{x^2} + C_2$; 4) $y = \frac{C_1}{x} + C_2$.
А12. Решите задачу Коши $y'' = \frac{y'}{x} + x$, $y(1) = \frac{1}{3}$, $y'(1) = 3$.	1) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1$; 2) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x$; 3) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$; 4) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x - 2$.
А13. Найдите общее решение уравнения $y'' + 4y' - 12y = 0$.	1) $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{2x}$; 2) $y = C_1e^{6x} + C_2e^{-2x}$; 3) $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{3x}$; 4) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-3x}$.
А14. Решите задачу Коши $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.	1) $y = xe^{-2x}$; 2) $y = xe^{-x}$; 3) $y = xe^{x}$; 4) $y = xe^{2x}$.
А15. Найдите уравнение линии, проходящей через точку $M(-1; 1)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен квадрату ординаты точки касания.	1) $y = \frac{1}{x} + 2$; 2) $y = -\frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{1}{x^3} + 2$; 4) $y = -\frac{1}{x^3}$.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Найдите значение $y(2)$, если $y(x)$ – решение задачи Коши $(y+1)dx + (x-1)dy = 0$, $y(0) = 0$.

В2. Найдите значение $y(-1)$, если $y(x)$ – решение задачи Коши $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$.
В3. Найдите значение $y(2)$, если $y(x)$ – решение задачи Коши $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 0$.
В4. Найдите значение $y(0)$, если $y(x)$ – решение задачи Коши $y' - y = e^x$, $y(-1) = 0$.
В5. Найдите значение $y(2)$, если $y(x)$ – решение задачи Коши $xy' + y + x^2y^2 = 0$, $y(1) = 1$.
В6. Найдите значение $y\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $y(x)$ – решение задачи Коши $y'' = 4\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
В7. Найдите значение $y(1)$, если $y(x)$ – решение задачи Коши $(1+x)y'' = y'$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.
В8. Найдите значение $y(\pi)$, если $y(x)$ – решение задачи Коши $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
В9. Найдите значение $y(2)$, если $y = y(x)$ – уравнение линии, проходящей через начало координат, у которой угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен абсциссе точки касания.
В10. С высоты 18 м над уровнем Земли брошено вертикально вверх тело со скоростью 30 м/с. Найдите наибольшую высоту (в метрах) подъема тела; результат округлите до десятых долей (принять $g = 9{,}81\,\text{м}/\text{с}^2$).

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите определение: *Порядком дифференциального уравнения называется…* 1) *наивысшая степень переменной x, входящей в состав дифференциального уравнения*; 2) *порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение*; 3) *наивысшая степень переменной y, входящей в состав дифференциального уравнения*; 4) *количество производных, которое содержит дифференциальное уравнение*.
С2. Закончите определение: *Интегрированием дифференциального уравнения* $y' = f(x, y)$ *называется нахождение…* 1) *решения дифференциального уравнения*; 2) *интеграла от правой части дифференциального уравнения*; 3) *интеграла от искомой функции* $y(x)$; 4) *интеграла от* $y'(x)$.
С3. Закончите определение: *Уравнение вида* $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ *называется…* 1) *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*; 2) *однородным дифференциальным уравнением*; 3) *линейным дифференциальным уравнением*; 4) *уравнением Бернулли*.

С4. Закончите определение:

Для линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, *где* $a_k \in \mathbf{R}$ $(k = \overline{1, n})$, *характеристическим называется уравнение вида…*

1) $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda = 0;$ 2) $\lambda^n (a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = 0;$

3) $\lambda^n + \lambda^{n-1} + \ldots + \lambda + 1 = 0;$ 4) $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$

С5. Закончите правильно утверждение:

Если характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет два разных действительных корня λ_1, λ_2, *то общее решение заданного дифференциального уравнения…*

1) $y = e^x (C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_2 x);$ 2) $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$

3) $y = C_1 e^{\lambda_1 x} \cos x + C_2 e^{\lambda_2 x} \sin x;$ 4) $y = C_1 \cos \lambda_1 x + C_2 \sin \lambda_2 x.$

ТЕСТ № 10.1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Определите, какое из указанных дифференциальных уравнений первого порядка является однородным:	1) $(x^2 + y^2 + 1)dx + xydy = 0;$ 2) $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0;$ 3) $(x - y + 1)dx + (x + y - 1)dy = 0;$ 4) $ydx + \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = 0.$
А2. Определите, какая из указанных функций является общим интегралом дифференциального уравнения $y' = 2^{x+y}$:	1) $2^x - 2^{-y} = C;$ 2) $2^x + 2^{-y} = C;$ 3) $2^{-x} + 2^y = C;$ 4) $2^{-x} - 2^y = C.$
А3. Решите уравнение $(xy - y)dx + (xy + x)dy = 0.$	1) $ye^{y-x} = Cx;$ 2) $xye^{y-x} = C;$ 3) $ye^{x+y} = Cx;$ 4) $xye^{x+y} = C.$
А4. Решите задачу Коши $y' = \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$	1) $2\sin x \cos y = 1;$ 2) $2\sin x \sin y = 1;$ 3) $2\cos x \sin y = 1;$ 4) $2\cos x \cos y = 1.$
А5. Проинтегрируйте уравнение $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$	1) $x^2 + y^2 = Cx;$ 2) $x^2 + y^2 = Cy;$ 3) $x^2 - y^2 = Cx;$ 4) $x^2 - y^2 = Cy.$

А6. Решите задачу Коши $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$, $y(0)=1$.	1) $y^2+xy-x^2=1$; 2) $y^2+2xy-x^2=1$; 3) $y^2-xy+x^2=1$; 4) $y^2-2xy+x^2=1$.
А7. Найдите общее решение уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x-y^2}$.	1) $x=C+y^2$; 2) $x=C-y^2$; 3) $x=Cy+y^2$; 4) $x=Cy-y^2$.
А8. Решите задачу Коши $x^2y'-2xy=3$, $y(1)=0$.	1) $y=x^3-\dfrac{1}{x}$; 2) $y=x^2-\dfrac{1}{x^2}$; 3) $y=x^2-\dfrac{1}{x}$; 4) $y=x-\dfrac{1}{x^2}$.
А9. Решите уравнение $y'-y\operatorname{tg}x+y^2\cos x=0$.	1) $y=\dfrac{1}{(C+x)\cos x}$; 2) $y=\dfrac{\cos x}{C+x}$; 3) $y=\dfrac{1}{(C-x)\cos x}$; 4) $y=\dfrac{\cos x}{C-x}$.
А10. Решите задачу Коши $y''=xe^x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.	1) $y=(x+2)e^x-3x-1$; 2) $y=(x+1)e^x-2x$; 3) $y=(x-1)e^x+2$; 4) $y=(x-2)e^x+x+3$.
А11. Решите уравнение $y''\operatorname{tg}x=y'+1$.	1) $y=C_1\cos x+C_2-x$. 2) $y=C_1\sin x+C_2+x$; 3) $y=C_1\cos x+C_2+x$; 4) $y=C_1\sin x+C_2-x$.
А12. Решите задачу Коши $y''+y'=x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.	1) $y=-\dfrac{x^2}{2}+x-1+e^{-x}$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2}+x-1+e^{-x}$; 3) $y=-\dfrac{x^2}{2}-x+1-e^{-x}$; 4) $y=\dfrac{x^2}{2}-x+1-e^{-x}$.
А13. Найдите общее решение уравнения $y'''-5y''+6y'=0$.	1) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$; 2) $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$; 3) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$; 4) $y=C_1+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$.

А14. Решите задачу Коши $y'' - 4y' + 5y = 0,\ \ y(0) = 1,$ $y'(0) = 1.$	1) $y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x);$ 2) $y = e^{2x}(\cos x + 2\sin x);$ 3) $y = e^{2x}(\cos x - \sin x);$ 4) $y = e^{2x}(\cos x + \sin x).$
А15. Найдите уравнение линии, проходящей через начало координат, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен сумме координат точки касания.	1) $y = e^{x} - x - 1;$ 2) $y = e^{-x} - x - 1;$ 3) $y = e^{-x} + x - 1;$ 4) $y = e^{x} + x - 1.$

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Найдите значение $y(-1),$ если $y(x)$ – решение задачи Коши $(1+y^2)dx - (1+x^2)dy = 0,$ $y(0) = 1.$
В2. Найдите значение $y(2),$ если $y(x)$ – решение задачи Коши $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2},\ \ y(1) = 0.$
В3. Найдите значение $y(1),$ если $y(x)$ – решение задачи Коши $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2,\ \ y(0) = 0.$
В4. Найдите значение $y(1),$ если $y(x)$ – решение задачи Коши $y' + 2xy = 2xe^{-x^2},\ y(0) = 0.$
В5. Найдите значение $y(-1),$ если $y(x)$ – решение задачи Коши $y' + 2y = e^{x}y^2,\ \ y(0) = 1.$
В6. Найдите значение $y(\pi),$ если $y(x)$ – решение задачи Коши $y''' = \sin x + \cos x,\ \ y(0) = 1,$ $y'(0) = -1,\ \ y''(0) = -1.$
В7. Найдите значение $y(1),$ если $y(x)$ – решение задачи Коши $y''(x^2+1) = 2xy',\ \ y(0) = 1,$ $y'(0) = 3.$
В8. Найдите значение $y(-1),$ если $y(x)$ – решение задачи Коши $y''' + 4y'' + 4y' = 0,\ \ y(0) = 1,$ $y'(0) = -1,\ \ y''(0) = 0.$
В9. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 20 км/ч. Через 40 с после выключения мотора скорость лодки уменьшилась до 8 км/ч. Найдите скорость (в км/ч) лодки через 2 мин после остановки мотора, если известно, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости.
В10. По закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурами тела и окружающей среды. Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 мин падает от 100 до $60°.$ Определите, через сколько минут от начала охлаждения температура хлеба понизится до $30°,$ если температура воздуха составляет $20°.$

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Укажите дифференциальное уравнение, записанное в нормальной форме: 1) $f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy = 0$; 2) $F(x, y, y') = 0$; 3) $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$; 4) $y' = f(x, y)$.
С2. Закончите определение: *Задачей Коши для дифференциального уравнения* $y' = f(x, y)$ *называется…* 1) *задача нахождения функции* $y(x)$, *которая обращает уравнение в тождество*; 2) *задача нахождения интегральной кривой, которая проходит через начало системы координат*; 3) *задача нахождения частного решения уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию*; 4) *задача нахождения семейства интегральных кривых данного дифференциального уравнения*.
С3. Закончите определение: *Уравнение вида* $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ *называется…* 1) *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*; 2) *однородным дифференциальным уравнением*; 3) *линейным дифференциальным уравнением*; 4) *уравнением Бернулли*.
С4. Укажите линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка: 1) $p(x)dx + q(y)dy = 0$; 2) $y' + p(x)y = q(x)$; 3) $y' + p(x)y = 0$; 4) $y' = q(x)$.
С5. Закончите правильно утверждение: *Если характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения* 4*-го порядка с постоянными коэффициентами имеет действительные корни* λ_1, λ_2, *причем оба кратности* 2, *то общее решение заданного дифференциального уравнения…* 1) $y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x)\cos\lambda_1 x + e^{\lambda_2 x}(C_3 + C_4 x)\sin\lambda_2 x$; 2) $y = e^{\lambda_1 x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{\lambda_2 x}(C_3\cos x + C_4\sin x)$; 3) $y = (C_1 + C_2 x)\cos\lambda_1 x + (C_3 + C_4 x)\sin\lambda_2 x$; 4) $y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x) + e^{\lambda_2 x}(C_3 + C_4 x)$.

Комбинированные тесты

ТЕСТ № 1.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $(2-3i)(-1+2i)$.	1) $4-i$; 2) $1-5i$; 3) $8-i$; 4) $4+7i$.
А2. Найдите сумму элементов матрицы $2A-B$, если $A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$.	1) –4; 2) 0; 3) 8; 4) 16.
А3. Вычислите $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 4 & 0\end{vmatrix}$.	1) 33; 2) 25; 3) 24; 4) 13.
А4. Определите, при каком значении λ векторы $\overline{a}=(-2;3;\lambda)$, $\overline{b}=(4;-6;-8)$ коллинеарны.	1) –2; 2) 0; 3) 1; 4) 4.
А5. Найдите длину вектора $\overline{a}+\overline{b}$, если $\overline{a}=(1;0;3)$, $\overline{b}=(-1;1;-2)$.	1) $2\sqrt{2}$; 2) 2; 3) $\sqrt{2}$; 4) 1.
А6. Найдите сумму координат центра линии $(x+1)^2+(y-3)^2=1$.	1) 4; 2) –2; 3) 2; 4) –4.
А7. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-2n^2+3n+7}{8n^2-n^3}$.	1) –3; 2) $-\dfrac{1}{4}$; 3) 2; 4) ∞.
А8. Вычислите $y'(1)$, если $y=x\ln x-x$.	1) e; 2) 1; 3) e^{-1}; 4) 0.
А9. Найдите угол, который составляет с осью Ox касательная к кривой $y=x^3-3x+1$ в точке с абсциссой $x_0=1$.	1) 0; 2) $\dfrac{\pi}{3}$; 3) $\dfrac{\pi}{4}$; 4) $\dfrac{\pi}{6}$.
А10. Вычислите $y'''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $y=\cos^2 x$.	1) –8; 2) –1; 3) 0; 4) 4.
А11. Вычислите $\dfrac{\partial^3 u(1,1,1)}{\partial x\partial y\partial z}$, если $u=x^2y^3z-2yz+x^4$.	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 6.

A12. Найдите $\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.	1) $\sqrt{8+2x-x^2}+C$; 2) $\frac{1}{3}\arcsin(x-1)+C$; 3) $\arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right)+C$; 4) $\ln\left\|x-1+\sqrt{8+2x-x^2}\right\|+C$.
A13. Вычислите $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$.	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
A14. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.	1) $-\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$.
A15. Решите задачу Коши $y\sin x dx + dy = 0,\ \ y(0)=1$.	1) $y=e^{\cos x-1}$; 2) $y=\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$; 3) $y=e^{\mathrm{tg}x}$; 4) $y=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right)+1$.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (B1–B10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Найдите модуль комплексного числа $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.
B2. Найдите $\mathrm{Re}\,z$, если $z=\frac{4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{2e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.
B3. Найдите элемент c_{32} матрицы $C=AB$, если $A=\begin{bmatrix}1&-2&3&4\\0&1&3&5\\-4&-1&2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0\\2&-3\\-1&5\\3&-2\end{bmatrix}$.
B4. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=(-2;1;0)$, $\bar{b}=(0;-3;-1)$.

B5. Найдите косинус острого угла между плоскостями $3x-2y+z+4=0,\ \ 4x+y+2z-3=0.$
B6. Вычислите $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}.$
B7. Найдите точку максимума функции $y=24x-2x^3+6.$
B8. Найдите значение суммы $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$ в точке $M_0(1;1;1),$ если $u=\ln(1+x+y^2+z^2).$
B9. Вычислите $\int\limits_{-1}^{0} xe^{-x}dx.$
B10. Вычислите $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx.$

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите определение: *Единичной матрицей называется…* 1) *матрица, у которой каждый элемент равен единице*; 2) *квадратная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице*; 3) *диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице*; 4) *матрица, у которой все элементы первой строки равны единице*.
С2. Закончите верно утверждение: *Ненулевые векторы* $\overline{m},\overline{n}$ *являются неколлинеарными, если…* 1) $(\overline{m},\overline{n})=0;$ 2) $[\overline{m},\overline{n}]=\overline{0};$ 3) $\overline{m}=c\overline{n};$ 4) $\overline{m}\uparrow\downarrow\overline{n}.$
С3. Укажите уравнение, которое не является уравнением гиперболы: 1) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1;$ 2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1;$ 3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;$ 4) $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1.$
С4. Укажите неверную формулу: 1) $\int 0dx=C;$ 2) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln x+C;$ 3) $\int e^x dx=e^x+C;$ 4) $\int\sin xdx=-\cos x+C.$
С5. Укажите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: 1) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0;$ 2) $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right);$ 3) $y'+p(x)y=q(x);$ 4) $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0.$

ТЕСТ № 1.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $\frac{2z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$.	1) –2; 2) –2*i*; 3) 2*i*; 4) $2-i$.
А2. Найдите сумму элементов матрицы $A^{\mathrm{T}}B$, если $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.	1) 7; 2) 9 3) 11; 4) 13.
А3. Найдите $x_1 + x_2 + x_3$, если x_1, x_2, x_3 – решение системы $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$	1) –1; 2) 5; 3) 1; 4) 6.
А4. Найдите сумму координат точки *C*, если известно, что точка $B(0; 2; 3)$ является серединой отрезка AC, $A(1; -2; 0)$.	1) 0; 2) –2; 3) 2; 4) 11.
А5. Определите, при каком значении λ векторы $\overline{a} = (1; 2; 4)$, $\overline{b} = (0; -3; \lambda)$, $\overline{c} = (0; -1; -2)$ компланарны.	1) –6; 2) –4; 3) 1; 4) 3.
А6. Определите тип линии $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$.	1) парабола; 2) гипербола; 3) окружность; 4) эллипс.
А7. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.	1) 0; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) ∞.
А8. Вычислите $y'(0)$, если $y = \frac{\mathrm{tg} 2x}{x+2}$.	1) 1; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$.
А9. Найдите положительную абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = x^3 - 12x$ параллельна оси Ox.	1) 0; 2) 2; 3) $2\sqrt{3}$; 4) 6.
А10. Вычислите $y''(1)$, если $y = \frac{e^x}{x}$.	1) *e*; 2) 0; 3) 2*e*; 4) –1.

A11. Вычислите $\frac{\partial^3 u(1,-1,1)}{\partial x \partial y^2}$, если $u = x\ln y + x^3y^2z$.	1) –1; 2) 0; 3) 2; 4) 5.
A12. Найдите $\int \frac{x-3}{\sqrt[3]{6x-x^2+7}}dx.$	1) $\frac{(6x-x^2+7)^{\frac{1}{3}}}{4}+C;$ 2) $\operatorname{arctg}(6x-x^2)^{\frac{2}{3}}+C;$ 3) $-\frac{3(6x-x^2+7)^{\frac{2}{3}}}{4}+C;$ 4) $\arcsin(3-x)^{\frac{1}{3}}+C.$
A13. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$	1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$; 3) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$.
A14. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+1}.$	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{8}$; 3) 1; 4) ∞.
A15. Решите задачу Коши $xydx+(x+1)dy=0,\ \ y(0)=1.$	1) $y=(x+1)e^{x+1};$ 2) $y=x+e^{x+1};$ 3) $y=(x+1)e^{-x};$ 4) $y=e^{-x}+x.$

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Найдите модуль комплексного числа $3+2i^{27}+5i^{17}$.
В2. Найдите $\operatorname{Im} z$, если $z = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}(2-3i)$.
В3. Определите, при каком значении λ определитель системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + \lambda x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$ равен нулю.
В4. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a} = (-1; 0; 3)$, $\bar{b} = (-2; 1; 0)$, $\bar{c} = (0; 1; -1)$.

B5. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x+1}{2}}$.
B6. Найдите длину промежутка возрастания функции $y=3x^2-x^3$.
B7. Найдите произведение (в сантиметрах) радиуса основания и высоты цилиндра, имеющего наибольший объем среди всех цилиндров с площадью полной поверхности 48 см^2.
B8. Вычислите $\dfrac{\partial^3 z(M_0)}{\partial x^2 \partial y}$, если $z=\sin xy$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{2};1\right)$
B9. Вычислите $\displaystyle\int_1^{16}\frac{x+\sqrt[4]{x^3}}{x}dx.$
B10. Вычислите $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin\frac{x}{2}dx.$

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Укажите формулу умножения комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$: 1) $z_1z_2=(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$; 2) $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$; 3) $z_1z_2=(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-b_1a_2)i$; 4) $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2-b_1a_2)i$.
С2. Закончите определение: *Транспонированной матрицей для матрицы А называется матрица, полученная из данной…* 1) *заменой первой ее строки на первый столбец и первого ее столбца на первую строку*; 2) *приведением матрицы А к треугольному виду*; 3) *заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером*; 4) *приведением матрицы А к диагональному виду*.
С3. Закончите определение: *Скалярным произведением векторов* $\bar a, \bar b$ *называется число…* 1) $\left(\bar a,\bar b\right)=\lvert\bar a\rvert\,\lvert\bar b\rvert\cos(\widehat{\bar a,\bar b})$; 2) $\left(\bar a,\bar b\right)=\lvert\bar a\rvert^2\lvert\bar b\rvert^2$; 3) $\left(\bar a,\bar b\right)=\lvert\bar a\rvert\,\lvert\bar b\rvert\sin(\widehat{\bar a,\bar b})$; 4) $\left(\bar a,\bar b\right)=\dfrac{\cos(\widehat{\bar a,\bar b})}{\lvert\bar a\rvert\,\lvert\bar b\rvert}$.
С4. Укажите формулу нахождения производной y'_x функции $y=f(x)$, заданной неявно соотношением $F(x,y)=0$: 1) $y'_x=\dfrac{F'_x}{F'_y}$; 2) $y'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$; 3) $y'_x=-\dfrac{F'_y}{F'_x}$; 4) $y'_x=\dfrac{F'_y}{F'_x}$.

С5. Закончите верно утверждение: *Несобственный интеграл первого рода представляет собой интеграл…* 1) *по конечному промежутку от функции, имеющей на нем разрыв первого рода*; 2) *по конечному промежутку от функции, имеющей на нем разрыв второго рода*; 3) *по бесконечному промежутку от функции, имеющей на нем разрыв второго рода*; 4) *бесконечному промежутку от непрерывной функции*.

ТЕСТ № 2.1

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $(3+2i)(2-3i)$.	1) $6-i$; 2) $6-5i$; 3) $5+6i$; 4) $12-5i$.
А2. Найдите сумму элементов матрицы $A-2B$, если $A=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$.	1) 15; 2) –5; 3) 17; 4) –4.
А3. Вычислите $\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 0 & -1 & 3\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}$.	1) 1; 2) 7; 3) –1; 4) –7.
А4. Определите, при каком значении λ длины векторов $\bar{a}=(3;-1;\lambda)$, $\bar{b}=(5;6;7)$ равны.	1) 3; 2) 9; 3) 4; 4) 10.
А5. Найдите косинус угла между векторами $\bar{a}=(-1;0;2)$, $\bar{b}=(-2;1;0)$.	1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
А6. Найдите сумму координат центра линии $\frac{(x-2)^2}{3}+(y+3)^2=1$.	1) 5; 2) –1; 3) 1; 4) –5.
А7. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}+1}{n^2+4n}$.	1) 0; 2) ∞; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 1.
А8. Вычислите $y'(1)$, если $y=\ln^2(x+1)$.	1) $2\sqrt{e}$; 2) e; 3) 1; 4) $\ln 2$.

А9. Найдите угол, который составляет с осью Ox касательная к кривой $y=2x^2-3x+1$ в точке с абсциссой $x_0=1$.	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$.
А10. Вычислите $y'''\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $y=\sin^2 x$.	1) –8; 2) –4; 3) 1; 4) 8.
А11. Вычислите $\frac{\partial^3 u(-1,1,0)}{\partial x\partial y\partial z}$, если $u=x^2yz+e^{x+y}+z^2$.	1) 2; 2) 0; 3) –1; 4) –2.
А12. Найдите $\int\frac{dx}{x^2+4x+20}$.	1) $\operatorname{arctg}(x+2)+C$; 2) $\ln(x^2+2)+C$; 3) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C$; 4) $\frac{1}{4(x+2)^2}+C$.
А13. Вычислите $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$.	1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{5}{2}$; 3) $\frac{7}{2}$; 4) $\frac{9}{2}$.
А14. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.	1) $-\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) ∞; 4) 1.
А15. Решите задачу Коши $(y^2+1)dx+x^2dy=0,\ \ y(1)=0$.	1) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}-1\right)$; 2) $y^2=x^2-1$; 3) $y=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)-1$; 4) $y=\ln(2x-1)$.

Часть В

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (В1–В10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
В1. Найдите модуль комплексного числа $-2\sqrt{3}+2i$.
В2. Найдите $\operatorname{Re} z$, если $z=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$.

B3. Найдите элемент c_{23} матрицы $C = AB,$ если $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$
B4. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} = (2; 0; -1), \ \bar{b} = (-2; 1; 0).$
B5. Найдите косинус острого угла между плоскостями $2x + y - z + 3 = 0, \ \ 4x - y + z - 2 = 0.$
B6. Вычислите $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}.$
B7. Найдите точку минимума функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1.$
B8. Найдите значение суммы $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}$ в точке $M_0(1; 2; 1),$ если $u = \sqrt{x^2 + 2y - z^2}.$
B9. Вычислите $\int\limits_0^2 x e^{\frac{x}{2}} dx.$
B10. Вычислите $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}\, dx.$

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
С1. Закончите определение: *Квадратная матрица А называется невырожденной, если…* 1) $\det A = 0$; 2) *не все ее элементы равны нулю*; 3) $\det A \neq 0$; 4) *все ее элементы равны единице*.
С2. Укажите формулу нахождения длины вектора $\overline{AB}$, если $A(x_1; y_1; z_1), \ B(x_2; y_2; z_2)$: 1) $\left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$; 2) $\left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2}$; 3) $\left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) + (z_2^2 - z_1^2)}$; 4) $\left\|\overline{AB}\right\| = \left\|x_2 - x_1\right\| + \left\|y_2 - y_1\right\| + \left\|z_2 - z_1\right\|$.
С3. Укажите уравнение цилиндрической поверхности, если $a, b, c \neq 0$: 1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$; 3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$; 4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

C4. Укажите верную формулу: 1) $(\text{arcctg}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $(\text{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$; 3) $(\text{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 4) $(\text{arcctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
C5. Закончите верно утверждение: *Если y_1, y_2 – линейно независимые частные решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка, то его общее решение…* 1) $y = e^x(C_1 \cos y_1 + C_2 \sin y_2)$; 2) $y = C_1 e^{y_1} + C_2 e^{y_2}$; 3) $y = C_1 \cos y_1 + C_2 \sin y_2$; 4) $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

ТЕСТ № 2.2

Часть А

К каждому заданию теста А даны четыре варианта ответа, из которых только один является верным. Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (А1–А15) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ	ВАРИАНТЫ ОТВЕТА
А1. Вычислите $\frac{\overline{z}_1}{z_2}$, если $z_1 = 3+2i$, $z_2 = -1+2i$.	1) $1-i$; 2) $-1{,}7-0{,}8i$; 3) $8+i$; 4) $4+7i$.
А2. Найдите сумму элементов матрицы AB^{T}, если $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.	1) 1; 2) 3 3) 5; 4) 7.
А3. Найдите $x_1 + x_2 + x_3$, если x_1, x_2, x_3 – решение системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 3x_3 = 0. \end{cases}$	1) –7; 2) –1; 3) 3; 4) 5.
А4. Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка AB, если $A(-1; -2; 3)$, $B(1; 0; -1)$.	1) $\sqrt{2}$; 2) 2; 3) 6; 4) 11.
А5. Вычислите $\left\|\left[\overline{a}, \overline{b}\right]\right\|$, если $\overline{a} = (1; 0; 2)$, $\overline{b} = (0; -3; -1)$.	1) 2; 2) $\sqrt{33}$; 3) $\sqrt{46}$; 5) 5.
А6. Определите тип линии $3x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 25 = 0$.	1) парабола; 2) гипербола; 3) окружность; 4) эллипс.

A7. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$.	1) –1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) $-\frac{1}{2}$.
A8. Вычислите $y'(1)$, если $y=\ln\frac{1+x^2}{2-x^2}$.	1) 3; 2) 1; 3) $\ln 2$; 4) 0.
A9. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y=x^2-4x$ составляет с осью Ox угол $45°$.	1) 1; 2) 0; 3) $\frac{5}{2}$; 4) –2.
A10. Вычислите $y'''(0)$, если $y=xe^{-x}$.	1) 0; 2) 3; 3) $2e$; 4) $4e$.
A11. Вычислите $\frac{\partial^3 u(0,1,1)}{\partial x^2\partial y}$, если $u=e^x\ln y+yz\ln(x+1)$.	1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $e+\frac{1}{2}$; 4) 1.
A12. Найдите $\int\frac{x+3}{\sqrt[4]{x^2+6x-10}}dx$.	1) $\frac{3}{4}\ln(x^2+6x-10)+C$; 2) $\ln\left\lvert x+3+\sqrt[4]{x^2+6x-10}\right\rvert+C$; 3) $\mathrm{arctg}(x+3)^{\frac{3}{4}}+C$; 4) $\frac{2}{3}(x^2+6x-10)^{\frac{3}{4}}+C$.
A13. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{2-\cos x}$.	1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$; 3) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$; 4) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$.
A14. Вычислите несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}xdx$.	1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) ∞.
A15. Решите задачу Коши $(1+y^2)dx+xydy=0,\ \ y(1)=0$.	1) $x(y^2+1)=1$; 2) $y^2+1=x$; 3) $x^2(y^2+1)=1$; 4) $y^2+1=x^2$.

Часть B

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (B1–B10) запишите полученный вами ответ.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
B1. Найдите модуль комплексного числа $3+2i^{21}+4i^{23}$.

B2. Найдите $\operatorname{Im} z$, если $z = 3e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(\sqrt{3} - 4i\right)$.
B3. Определите, при каком значении λ определитель системы $\begin{cases} 3x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 25, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$ равен нулю.
B4. Вычислите объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\bar{a} = (0; -1; 1)$, $\bar{b} = (2; 1; -1)$, $\bar{c} = (0; 3; -2)$.
B5. Вычислите $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{\sin(x^2 - 4)}$.
B6. Найдите длину промежутка убывания функции $y = x^3 - 3x + 2$.
B7. Найдите радиус (в сантиметрах) основания цилиндра, имеющего наименьшую площадь полной поверхности среди всех цилиндров с объемом $16\pi^4$ см^3.
B8. Вычислите $\dfrac{\partial^3 z(M_0)}{\partial x \partial y^2}$, если $z = \cos xy$, $M_0(\pi; 1)$.
B9. Вычислите $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$.
B10. Вычислите $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$.

Часть С

Выполните задание. В таблице ответов под номером задания (С1–С5) запишите номер выбранного вами ответа.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ
C1. Укажите неверное свойство комплексно-сопряженных чисел: 1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; 2) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$; 3) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$; 4) $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im} z$.
C2. Укажите неверное равенство для векторного произведения $\left[\bar{a}, \bar{b}\right]$: 1) $\left\|\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right\| = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$; 2) $\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \left[\bar{b}, \bar{a}\right]$; 3) $\left[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}\right] = \left[\bar{a}, \bar{c}\right] + \left[\bar{b}, \bar{c}\right]$; 4) $\left[\lambda\bar{a}, \bar{b}\right] = \left[\bar{a}, \lambda\bar{b}\right]$ $(\lambda \in \mathbf{R})$.
C3. Укажите уравнение плоскости, параллельной оси Oz: 1) $Ax + By + Cz = 0$; 2) $Ax + By + D = 0$; 3) $Ax + Cz + D = 0$; 4) $By + Cz + D = 0$.

С4. Укажите неверное соотношение эквивалентности, если $u(x) \to 0$: 1) $\operatorname{tg} u(x) \sim u(x)$; 2) $\arcsin u(x) \sim u(x)$; 3) $e^{u(x)} \sim u(x)$; 4) $\ln\left(1+u(x)\right) \sim u(x)$.
С5. Закончите верно утверждение: *Линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно y и y' решается с помощью подстановки…* 1) $y = u(x)v(x)$; 2) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$; 3) $y = xu(x)$; 4) $y = \dfrac{u(x)}{x}$.

Решение комбинированного теста № 1.1

Задание А1. ***Решение.*** $(2-3i)(-1+2i)=(-2\cdot 1+3\cdot 2)+(2\cdot 2+3\cdot 1)i=4+7i.$

Вариант ответа: 4) $4+7i$.

Задание А2. ***Решение.*** По определению линейных операций над матрицами имеем

$$2A-B=2\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot(-2) & 2\cdot 0\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 6 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-4-4 & 0+2\\ 6+1 & 2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 2\\ 7 & -1\end{bmatrix}.$$

Найдем искомую сумму элементов матрицы $2A-B$: $-8+2+7-1=0.$

Вариант ответа: 2) 0.

Задание А3. ***Решение.*** Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ -3 & 4 & 0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}2 & -2\\ -3 & 0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{vmatrix}=-(0+8)-0+3(8+3)=25.$$

Вариант ответа: 2) 25.

Задание А4. ***Решение.*** В случае коллинеарности коодинаты векторов пропорциональны:

$$\frac{4}{-2}=\frac{-6}{3}=\frac{-8}{\lambda},\quad \text{т. е. } \frac{-8}{\lambda}=-2,$$

откуда следует, что $\lambda=4$.

Вариант ответа: 4) 4.

Задание А5. ***Решение.*** Следуя правилам действий над векторами в координатной форме, имеем

$$\bar{a}+\bar{b}=(1;0;3)+(-1;1;-2)=(1-1;0+1;3-2)=(0;1;-1).$$

Тогда

$$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|=\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Вариант ответа: 3) $\sqrt{2}$.

Задание А6. ***Решение.*** Это уравнение окружности с центром в точке $(-1;3)$ и радиусом $R=1$.

Найдем искомую сумму координат центра: $-1+3=2.$

Вариант ответа: 3) 2.

Задание А7. ***Решение.*** Здесь имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень переменной *n*, т. е. на n^3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^2+3n+7}{8n^2-n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^2+3n+7}{-n^3+8n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{-1+\frac{8}{n}}=-3.$$

Вариант ответа: 1) –3.

Задание А8. ***Решение.*** Так как

$$y'(x) = (x\ln x - x)' = (x\ln x)' - x' = x'(\ln x) + x(\ln x)' - 1 = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x,$$

то $y'(1) = \ln 1 = 0.$

Вариант ответа: 4) 0.

Задание А9. ***Решение.*** Так как тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс равен значению производной в точке касания, найдем производную функции

$$y'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3.$$

По условию $\operatorname{tg}\varphi = y'(x_0) = y'(1) = 3\cdot 1^2 - 3 = 0.$ Следовательно, искомый угол $\varphi = 0.$

Вариант ответа: 1) 0.

Задание А10. ***Решение.*** Найдем производную 1-го порядка:

$$y' = (\cos^2 x)' = 2\cos x\cdot(\cos x)' = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x.$$

Далее получаем

$$y'' = (-\sin 2x)' = -\cos 2x\cdot(2x)' = -2\cos 2x.$$

$$y''' = (-2\cos 2x)' = 2\sin 2x\cdot(2x)' = 4\sin 2x.$$

Следовательно, $y'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 4.$

Вариант ответа: 4) 4.

Задание А11. ***Решение.*** Найдем частную производную 1-го порядка по z:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^3z - 2yz + x^4) = x^2y^3 - 2y.$$

Далее дифференцируем полученную производную по y, а затем по x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 - 2y) = 3x^2y^2 - 2;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 2) = 6xy^2.$$

Следовательно, $\frac{\partial^3 u(1,1,1)}{\partial x\partial y\partial z} = 6\cdot 1\cdot 1^2 = 6.$

Вариант ответа: 4) 6.

Задание А12. ***Решение.*** Выделим в подкоренном выражении полный квадрат:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{9-(1-2x+x^2)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{9-(x-1)^2}}.$$

Применяя метод поднесения под знак дифференциала и таблицу интегралов, получаем

$$\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{9-(x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{3} + C.$$

Вариант ответа: 3) $\arcsin\frac{x-1}{3} + C.$

Задание А13. ***Решение.*** Используем метод поднесения под знак дифференциала и таблицу интегралов:

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx = -\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{1}{x}\,d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} = \cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi = 0 - (-1) = 1.$$

Вариант ответа: 1) 1.

Задание А14. ***Решение.*** По определению несобственного интеграла первого рода имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Вариант ответа: 2) $\frac{\pi}{4}$.

Задание А15. ***Решение.*** Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные:

$$\sin x dx+\frac{dy}{y}=0.$$

Интегрируя, имеем

$$\int\sin x dx+\int\frac{dy}{y}=C \quad \text{или} \quad -\cos x+\ln|y|=C.$$

Используя начальное условие $y=1$ при $x=0$, находим C:

$$-\cos 0+\ln 1=C \quad \text{или} \quad C=-1.$$

Отсюда получаем искомое частное решение:

$$-\cos x+\ln|y|=-1 \quad \text{или} \quad y=e^{\cos x-1}.$$

Вариант ответа: 1) $y=e^{\cos x-1}$.

Задание В1. ***Решение.*** $\left|-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=2.$

Ответ: 2.

Задание В2. ***Решение.*** Запишем знаменатель дроби в тригонометрической форме:

$$2e^{i\frac{3\pi}{4}}=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Воспользуемся формулой деления комплексных чисел в тригонометричской форме:

$$z=\frac{4}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Следовательно, $\operatorname{Re}z=2\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\frac{\pi}{12}.$

Ответ: $2\cos\frac{\pi}{12}$.

Задание В3. ***Решение.*** Матрицы A и B согласованные, т. к. матрица A имеет размер 3×4, а матрица B – размер 4×2.

Элемент c_{32} матрицы $C=AB$ находится как сумма произведений каждого элемента 3-й строки матрицы A на соответствующий элемент 2-го столбца матрицы B:

$$c_{32}=(-4)\cdot0+(-1)\cdot(-3)+2\cdot5+1\cdot(-2)=11.$$

Ответ: 11.

Задание В4. ***Решение.*** Вычисляем векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в координатной форме (разлагаем определитель по первой строке):

$$\left[\bar{a},\bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-\bar{i}-2\bar{j}+6\bar{k}=(-1;-2;6).$$

Тогда

$$\left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+6^2}=\sqrt{41}.$$

Значит, $S_{пар}=\sqrt{41}.$

Ответ: $\sqrt{41}.$

Задание В5. ***Решение.*** Так как $\bar{n}_1=(3;-2;1)$ и $\bar{n}_2=(4;1;2)$ – нормальные векторы заданных плоскостей, то

$$\cos\varphi=\cos\left(\bar{n}_1,\hat{\ }\bar{n}_2\right)=\frac{\left(\bar{n}_1,\bar{n}_2\right)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}=\frac{3\cdot 4+(-2)\cdot 1+1\cdot 2}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{4^2+1^2+2^2}}=\frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{7}.$

Задание В6. ***Решение.*** Имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{1-4x}+3,$ а также разложим числитель дроби на множители. Получаем

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{1-4x}+3\right)}{\left(\sqrt{1-4x}-3\right)\left(\sqrt{1-4x}+3\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{1-4x}+3\right)}{(-8-4x)}=$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to-2}(x-2)\left(\sqrt{1-4x}+3\right)=6.$$

Ответ: 6.

Задание В7. ***Решение.*** Найдем производную функции:

$$y'=(24x-2x^3+6)'=24-6x^2=6(4-x^2).$$

Она определена для любого $x\in\mathbf{R}.$

Если $y'=0,$ то $4-x^2=0,$ откуда $x_1=-2,$ $x_2=2$ – стационарные точки.

Найдем вторую производную функции:

$$y''=(24-6x^2)'=-12x.$$

Так как производная первого порядка в точке $x=2$ равна нулю, а производная второго порядка в этой точке меньше нуля, то $x=2$ – точка локального максимума.

Ответ: 2.

Задание В8. ***Решение.*** Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(1+x+y^2+z^2)\right)=\frac{1}{1+x+y^2+z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(1+x+y^2+z^2)=\frac{1}{1+x+y^2+z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(1+x+y^2+z^2)\right)=\frac{1}{1+x+y^2+z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(1+x+y^2+z^2)=\frac{2y}{1+x+y^2+z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\ln(1+x+y^2+z^2)\right)=\frac{1}{1+x+y^2+z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(1+x+y^2+z^2)=\frac{2z}{1+x+y^2+z^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1+2y+2z}{1+x+y^2+z^2};$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{M_0(1;1;1)}=\frac{1+2\cdot1+2\cdot1}{1+1+1^2+1^2}=\frac{5}{4}=1,25.$$

Ответ: 1,25.

Задание B9. ***Решение.*** Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_{-1}^{0} xe^{-x}dx=\begin{vmatrix} u=x, & dv=e^{-x}dx, \\ du=dx, & v=-e^{-x} \end{vmatrix}=-xe^{-x}\Big|_{-1}^{0}+\int\limits_{-1}^{0}e^{-x}dx=(0-e)-e^{-x}\Big|_{-1}^{0}=-e-(1-e)=-1.$$

Ответ: -1.

Задание B10. ***Решение.*** Используем метод подстановки. Положим $x=\sqrt{3}\sin t$, тогда $dx=\sqrt{3}\cos t dt$.

Найдем новые пределы интегрирования: если $x=0$, то $t=0$; если $x=\sqrt{3}$, то $t=\frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3-3\sin^2 t}\cdot\sqrt{3}\cos t dt=3\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=3\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=$$

$$=3\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{3}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{3}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

Задание C1. *Вариант ответа*: 3).

Задание C2. *Вариант ответа*: 1).

Задание C3. *Вариант ответа*: 3).

Задание C4. *Вариант ответа*: 2).

Задание C5. *Вариант ответа*: 4).

Используя полученные ответы, заполняем таблицу ответов.

Номер задания	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**	**A10**	**A11**	**A12**	**A13**	**A14**	**A15**
Номер ответа	4	2	2	4	3	3	1	4	1	4	4	3	1	2	1

Номер задания	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**	**B7**	**B8**	**B9**	**B10**
Ответ	2	$2\cos\frac{\pi}{12}$	11	$\sqrt{41}$	$\frac{2\sqrt{6}}{7}$	6	2	1,25	-1	$\frac{3\pi}{4}$

Номер задания	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**
Номер ответа	3	1	3	2	4

Ответы к заданиям комбинированного теста № 1.2

Решите тест № 1.2 самостоятельно и сверьте полученные вами ответы с указанными в таблице.

Номер задания	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**	**A10**	**A11**	**A12**	**A13**	**A14**	**A15**
Номер ответа	3	3	2	4	1	4	3	1	2	1	4	3	1	2	3

Номер задания	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**	**B7**	**B8**	**B9**	**B10**
Ответ	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	–1	5	e	2	$\frac{16}{\pi}$	–2	$\frac{73}{3}$	4

Номер задания	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**
Номер ответа	2	3	1	2	4

Краткие теоретические сведения

Тема 1. Множества. Комплексные числа

Выражения. Формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы,

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности,

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – разность квадратов,

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы,

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности,

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов,

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов.

Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Множества. *Объединение множеств A, B* – множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству *A*, или множеству *B*.

Пересечение множеств A, B – множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству *A*, и множеству *B*.

Разность множеств A, B – множество $A \setminus B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству *A* и не принадлежат множеству *B*.

Комплексные числа. **C** – *множество комплексных чисел*, определяется как множество всех чисел вида $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbf{R}$; $i^2 = -1$.

Алгебраическая форма комплексного числа:

$$z = a + bi,$$

где $a = \operatorname{Re} z$ – *действительная часть* числа *z*; $b = \operatorname{Im} z$ – *мнимая часть* числа *z*; *i* – *мнимая единица*.

$\bar{z} = a - bi$ – число, *сопряженное* числу $z = a + bi$.

Если $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + a_2) \pm (b_1 + b_2)i,$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \quad (z_2 \neq 0).$$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – *модуль числа z*,

$\varphi = \arg z$ $(z \neq 0;\ 0 \le \varphi < 2\pi$ либо $-\pi < \varphi \le \pi)$ – *аргумент числа z*:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = |z|$; $\varphi = \arg z$; $z \neq 0$.

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, причем $z_1,\ z_2 \neq 0$, то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right),$$

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) \quad (n\in\mathbf{N}),$$

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \quad (k=\overline{0,\,n-1}).$$

Показательная форма комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$; $\varphi = \arg z$; $z \neq 0$.

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, причем $z_1,\ z_2 \neq 0$, то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi} \quad (n\in\mathbf{N}),$$

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} \quad (k=\overline{0,\,n-1}).$$

Тема 2. Выражения. Функции

Функции. Если каждому числу x, $x\in X\subseteq\mathbf{R}$, по некоторому правилу f ставится в соответствие единственное число y, $y\in\mathbf{R}$, то говорят, что задана *функция* $y=f(x)$.

Множество X – *область определения функции*, обозначают $D(f)$.

Множество всех значений функции – *область значений функции*, обозначают $E(f)$.

Функция $f(x)$ – *четная*, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно $x=0$;

2) для любого $x\in D(f)$ выполняется $f(-x)=f(x)$.

Функция $f(x)$ – *нечетная*, если:

1) $D(f)$ симметрична относительно $x=0$;

2) для любого $x\in D(f)$ выполняется $f(-x)=-f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной – относительно начала координат.

Функция $f(x)$ – *периодическая*, если существует число T (*период*), $T\neq 0$, такое, что для любого $x\in D(f)$:

1) $x\pm T\in D(f)$;

2) $f(x-T)=f(x+T)=f(x)$.

Пусть x_1, x_2 – произвольные значения из области $X\subseteq D(f)$ функции $f(x)$, причем $x_1<x_2$, тогда на множестве X функция $f(x)$ называется *возрастающей*, если $f(x_1)<f(x_2)$; *убывающей*, если $f(x_1)>f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными функциями*.

Тема 3. Линейная алгебра

Матрицы. *Матрица* (*числовая матрица*) *размера m на n* $(m\times n)$ – прямоугольная таблица, образованная из mn чисел $(m, n\in \mathbf{N})$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix},$$

или кратко: $[a_{ij}]$ $(i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n})$. Числа a_{ij} – *элементы матрицы*; $a_{i1},\ a_{i2},\ \ldots,\ a_{in}$ $(i=\overline{1, m})$ – элементы *i*-й строки; $a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{mj}$ $(j=\overline{1, n})$ – элементы *j*-го столбца.

Сумма (и *разность*) *матриц* $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ размеров $m\times n$ – матрица $A\pm B=[a_{ij}\pm b_{ij}]$ размера $m\times n$ $(i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n})$.

Произведение матрицы $A=[a_{ij}]$ размера $m\times n$ *на число* λ $(\lambda\in\mathbf{R})$ – матрица $\lambda A=[\lambda a_{ij}]$ размера $m\times n$ $(i=\overline{1, m},\ j=\overline{1, n})$.

Операция произведения матриц *A*, *B* определена для *согласованных матриц*, т. е. когда количество столбцов матрицы *A* равно количеству строк матрицы *B*.

Произведение матрицы $A=[a_{ik}]$ размера $m\times n$ *на матрицу* $B=[b_{kj}]$ размера $n\times p$ – матрица $AB=[a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+...+a_{in}b_{nj}]$ размера $m\times p$ $(i=\overline{1, m},\ k=\overline{1, n},\ j=\overline{1, p})$.

k-я степень $(k\in\mathbf{N})$ квадратной *матрицы A* – матрица A^k, такая, что $A^k=\underbrace{AA...A}_{k\text{ раз}}$.

Матрицей, *транспонированной* по отношению к матрице $A=[a_{ij}]$ размера $m\times n$, называется матрица $A^T=[a_{ji}]$ размера $n\times m$.

Определители. *Определитель первого порядка* – число $|a_{11}|=a_{11}$.

Определитель второго порядка – число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка – число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Для матрицы $A=[a_{ij}]$ $(i,\ j=\overline{1, n},\ n\in\mathbf{N})$ *определитель n-го порядка* записывают в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель, соответствующий матрице *A*, обозначают: $\det A,\ |A|,\ \Delta$.

Минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка $(n>1)$ – определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка – число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij}.

Вычисление определителя n-го порядка матрицы $A = [a_{ij}]$ разложением по элементам i-й строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

Ранг матрицы – наивысший порядок отличных от нуля ее миноров.

Метод окаймляющих миноров. Если в матрице A найден ненулевой минор M_k порядка k $(k \in \mathbf{N})$, а все окаймляющие его миноры $(k+1)$-го порядка равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

Обратная матрица. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $|A| \neq 0.$ В противном случае A – *вырожденная*.

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* для квадратной матрицы A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица.

Если $A = [a_{ij}]$ $(i,\ j = \overline{1, n}),$ то

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где $|A|$ – определитель матрицы A; A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Системы линейных алгебраических уравнений. *Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$ – *коэффициенты* системы; b_i $(i = \overline{1, m})$ – *свободные члены*; $x_1, x_2, ..., x_n$ – неизвестные величины; $m, n \in \mathbf{N}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$ – *матрица системы*.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$ – *расширенная матрица системы*.

Определителем системы n линейных уравнений с n неизвестными называется определитель Δ матрицы этой системы.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

1) перестановка строк;

2) умножение строки на одно и то же число λ $(\lambda \neq 0)$;

3) прибавление к строке матрицы другой строки, умноженной на некоторое число.

Метод Крамера. Необходимо:

1) вычислить определитель Δ системы;

2) в определителе Δ (если $\Delta \neq 0$) заменить поочередно i-й столбец столбцом свободных членов и вычислить соответствующие определители Δ_i $(i = \overline{1, n})$;

3) вычислить значения $x_1, x_2, ..., x_n$ по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta};$$

4) записать решение $(x_1; x_2; ...; x_n)$.

Метод обратной матрицы. Необходимо:

1) записать систему в матричном виде:

$$AX = B,$$

где A – матрица системы; X – матрица-столбец неизвестных; B – матрица-столбец свободных членов;

2) найти обратную матрицу A^{-1} (если $\Delta \neq 0$);

3) решить матричное уравнение по формуле

$$X = A^{-1}B;$$

4) записать решение $(x_1; x_2; ...; x_n)$.

Метод Гаусса. Необходимо:

1) записать расширенную матрицу системы;

2) с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы свести матрицу системы к треугольной или трапециевидной;

3) для преобразованной таким образом расширенной матрицы записать соответствующую систему уравнений;

4) решить полученную систему, начиная с последнего уравнения;

5) записать решение $(x_1; x_2; ...; x_n)$.

Тема 4. Векторная алгебра

Векторы. *Вектор* – направленный отрезок.

Длина (или *модуль*) *вектора* – расстояние между его началом и концом.

Коллинеарные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (обозначают $\bar{a} \parallel \bar{b}$) – векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. *Компланарные векторы* – векторы, параллельные одной плоскости.

Угол $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ *между векторами* $\bar{a}$, $\bar{b}$ – наименьший угол между направлениями векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, причем $0 \leq (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) \leq \pi$.

Если $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$, то векторы называются *ортогональными* (обозначают $\bar{a} \perp \bar{b}$).

Если $\bar{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $\bar{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то:

$$|\bar{a}|=\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}},$$

$$\lambda\bar{a}=(\lambda x_1;\,\lambda y_1;\,\lambda z_1)\quad(\lambda\in\mathbf{R}),$$

$$\bar{a}\pm\bar{b}=(x_1\pm x_2;\,y_1\pm y_2;\,z_1\pm z_2),$$

для коллинеарности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Если в прямоугольной системе координат $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$ и $M_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то:

$$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;\,y_2-y_1;\,z_2-z_1),$$

$$\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Если отрезок M_1M_2 делится точкой M в отношении λ (т. е. $\overline{M_1M}=\lambda\overline{MM_2}$), где $\lambda\neq-1$, то точка M имеет координаты:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Произведения векторов. *Скалярным произведением* $(\bar{a},\bar{b})$ *векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число

$$(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}).$$

Если $\bar{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $\bar{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то:

$$(\bar{a},\bar{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

$$\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},$$

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

Векторным произведением $[\bar{a},\bar{b}]$ *векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, удовлетворяющий условиям:

1) $\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|=|\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$;

2) $[\bar{a},\bar{b}]\perp\bar{a}$ и $[\bar{a},\bar{b}]\perp\bar{b}$;

3) тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $[\bar{a},\bar{b}]$ – правая.

Если $\bar{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $\bar{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то

$$[\bar{a},\bar{b}]=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\bar{i}+(x_2z_1-x_1z_2)\bar{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\bar{k}.$$

Для коллинеарности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ необходимо и достаточно, чтобы $[\bar{a},\bar{b}]=\bar{0}$.

Площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$S=\left|[\bar{a},\bar{b}]\right|.$$

Смешанным произведением $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ *векторов* $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$.

Если $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\bar{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Для компланарности ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ необходимо и достаточно, чтобы $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$.

Объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$V = \left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|.$$

Объем V пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|.$$

Тема 5. Аналитическая геометрия

Прямая на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\bar{n} = (A; B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Общее уравнение прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A, B, C \in \mathbf{R}$, причем $A^2 + B^2 \neq 0$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом *k*, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b.$$

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R},$$

где $M_0(x_0; y_0)$ – точка, лежащая на прямой; $\bar{a} = (l; m)$ – ненулевой направляющий вектор.

Каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

где $M_0(x_0; y_0)$ – точка, лежащая на прямой; $\bar{a} = (l; m)$ – ненулевой направляющий вектор.

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $M_1(a; 0)$ и $M_2(0; b)$ – точки пересечения прямой с осями координат.

Угол φ между двумя прямыми на плоскости:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых.

Расстояние *d* от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Кривые второго порядка. Уравнение окружности радиуса *R* с центром в точке $C(x_0; y_0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – фокусы эллипса, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет.

Уравнение эллипса с полуосями *a*, *b* с центром в точке $C(x_0; y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – фокусы гиперболы, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – эксцентриситет.

Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

определяет гиперболу, *сопряженную* данной.

Уравнение гиперболы с полуосями *a*, *b* с центром в точке $C(x_0; y_0)$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

$F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – фокус параболы; для параболы эксцентриситет $\varepsilon = 1$.

Уравнение параболы с осью симметрии, параллельной одной из координатных осей, и вершиной в точке $C(x_0; y_0)$:

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0) \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0).$$

Плоскость в пространстве. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\bar{n} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Общее уравнение плоскости в пространстве:

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где $A, B, C, D \in \mathbf{R},$ причем $A^2+B^2+C^2 \neq 0.$

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1),$ $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где $M_1(a; 0; 0),$ $M_2(0; b; 0)$ и $M_3(0; 0; c)$ – точки пересечения плоскости с осями координат.

Угол φ между двумя плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{n}_1, \overline{n}_2)}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|},$$

где $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ – нормальные векторы плоскостей.

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Прямая в пространстве. Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbf{R}, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, лежащая на прямой; $\overline{a} = (l; m; n)$ – ненулевой направляющий вектор.

Канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, лежащая на прямой; $\overline{a} = (l; m; n)$ – ненулевой направляющий вектор.

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Общие уравнения прямой в пространстве (как линия пересечения двух плоскостей):

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

где $\overline{n}_1 = (A_1; B_1; C_1),$ $\overline{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ – неколлинеарные векторы, причем направляющий вектор $\overline{a} = [\overline{n}_1, \overline{n}_2].$

Угол φ между двумя прямыми в пространстве:

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{a}_1, \overline{a}_2)}{|\overline{a}_1||\overline{a}_2|},$$

где $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ – направляющие векторы прямых.

Угол φ между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = \frac{(\overline{a}, \overline{n})}{|\overline{a}||\overline{n}|},$$

где $\overline{a}$ направляющий вектор прямой; $\overline{n}$ – нормальный вектор плоскости.

Поверхности второго порядка.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – *эллипсоид*;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – *конус второго порядка*;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – *однополостный гиперболоид*;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – *двуполостный гиперболоид*;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ – *эллиптический параболоид*;

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ – *гиперболический параболоид*;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – *эллиптический цилиндр*;

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – *гиперболический цилиндр*;

$y^2 = 2px \;\; (p > 0)$ – *параболический цилиндр*.

Тема 6. Предел последовательности и функции

Числовая последовательность и ее предел. *Числовой последовательностью* (x_n) называется функция $x_n = f(n)$, определенная на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел.

Последовательность (x_n) называется: *возрастающей*, если $x_n < x_{n+1}$; *убывающей*, если $x_n > x_{n+1}$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

Последовательность (x_n) *ограничена сверху*, если существует $M \in \mathbf{R}$, такое, что $x_n \le M$ для всех $n \in \mathbf{N}$; *ограничена снизу*, если существует $m \in \mathbf{R}$, такое, что $x_n \ge m$ для всех $n \in \mathbf{N}$; *ограничена*, если она ограничена сверху и снизу.

Если последовательности (x_n) и (y_n) имеют предел, то:

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c\lim_{n\to\infty} x_n \quad (c = \text{const}),$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad (\lim_{n\to\infty} y_n \ne 0).$$

Предел функции. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то:

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = c\lim_{x\to x_0} f(x) \quad (c=\text{const}),$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0\right),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0).$$

Формулы вычисления пределов:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ – *первый замечательный предел*;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ – *второй замечательный предел*;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ $(a=\text{const})$, в частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ $(a=\text{const})$, в частности $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$ $(\alpha=\text{const})$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, где $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$, то $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными*; пишут: $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$.

Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то он не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой.

Если $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то:

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x), \qquad \operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x), \qquad \operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x),$$
$$\ln(1+x)\sim x, \qquad e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),$$

Тема 7. Производная

Производная и ее нахождение. *Производной функции* $f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

если он существует.

Геометрический смысл производной: $f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0;\, f(x_0))$, т. е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

Физический смысл производной: если t – время прямолинейного движения материальной точки, $s(t)$ – путь, пройденный за время t, то $s'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ – *мгновенная скорость* движения точки в момент времени t_0.

Правила дифференцирования. Если $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, то:

$$(cu)' = cu' \quad (c = \text{const}),$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$
$$(uv)' = u'v + uv',$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Если $y = f\left(g(x)\right)$ – сложная функция, где $y = f(u)$, $u = g(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$y'_x = f'_u g'_x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{df}{du}\frac{dg}{dx}.$$

Таблица производных

$(c)' = 0, \quad c = \text{const}$	
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha = \text{const})$, в частности $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a = \text{const},\ a > 0)$, в частности $(e^x)' = e^x$	
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (a = \text{const},\ a > 0,\ a \neq 1)$, в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	
$(\sin x)' = \cos x;$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\text{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$	$(\text{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(\text{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1 + x^2};$	$(\text{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Для нахождения производной $y'(x)$ неявной функции $F(x, y) = 0$ необходимо:

1) продифференцировать обе части заданного уравнения $F(x, y) = 0$ по x, считая, что $y = y(x)$;

2) из полученного уравнения выразить производную $y'(x)$.

В случае параметрического задания функции $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$ находят

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Дифференциал функции $f(x)$:

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Если $|\Delta x|$ мало, то

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x + f(x_0).$$

Производной n-го порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка этой функции:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \quad n \in \mathbf{N}.$$

Полагают $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Если $f = f(x)$ и $g = g(x)$ – дифференцируемые n раз функции $(n \in \mathbf{N})$, то:

$$(cf(x))^{(n)} = cf^{(n)}(x) \quad (c = \text{const}),$$

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x).$$

Ф о р м у л а Л е й б н и ц а:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g^{(0)} + C_n^1 f^{(n-1)} g^{(1)} + C_n^2 f^{(n-2)} g^{(2)} + \ldots + C_n^{n-1} f^{(1)} g^{(n-1)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n)},$$

где C_n^m $(m = \overline{0, n})$ – биномиальные коэффициенты.

Дифференциал n-го порядка $(n \in \mathbf{N})$ *функции* $y = f(x)$:

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n,$$

где x – независимая переменная.

Правило Лопиталя. Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции, которые имеют производные в проколотой окрестности точки x_0, причем $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$) и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Формула Тейлора. Пусть функция $f(x)$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Ф о р м у л а Т е й л о р а:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Здесь ξ – некоторая точка из окрестности точки x_0; $R_n(x)$ – остаточный член в форме Лагранжа.

Формула Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Если $n\in\mathbf{N}$ и ξ – некоторая точка из окрестности точки 0, в которой функция определена и $n+1$ раз дифференцируема, то:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+2}(x),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x),$$

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),$$

Исследование функций. *Достаточное условие монотонности функции*. Если для дифференцируемой на (a,b) функции $f(x)$ выполняется условие $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка локального экстремума и функция $f(x)$ дифференцируема в этой точке, то $f'(x)=0$.

Критические точки функции $f(x)$ – те точки из области определения функции, для которых выполняется условие $f'(x)=0$ или производная в которых не существует.

Первое достаточное условие экстремума. Если функция $f(x)$ дифференцируема в проколотой окрестности критической точки x_0 и $\begin{cases} f'(x)>0 \text{ для } x<x_0, \\ f'(x)<0 \text{ для } x>x_0, \end{cases}$ то x_0 – точка максимума, а если $\begin{cases} f'(x)<0 \text{ для } x<x_0, \\ f'(x)>0 \text{ для } x>x_0, \end{cases}$ то x_0 – точка минимума.

Второе достаточное условие экстремума. Если x_0 – критическая точка $f(x)$, в которой функция дважды дифференцируема, и $f''(x_0)<0$ $(f''(x_0)>0)$, то x_0 – точка максимума (минимума).

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a,b]$ необходимо:

1) найти критические точки функции $f(x)$;

2) отобрать для исследования только те из них, которые принадлежат (a,b);

3) вычислить значения функции в отобранных критических точках и на концах отрезка;

4) среди вычисленных значений функции найти наибольшее (т. е. $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$) и наименьшее (т. е. $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$).

Достаточное условие выпуклости, вогнутости. Если на промежутке X, $X \subset \mathbf{R}$, функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную и $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый на X, если $f''(x) > 0$, – то вогнутый.

Точками перегиба графика функции $f(x)$ могут быть *критические точки второго рода*, т. е. точки, в которых $f''(x) = 0$ или в которых производная второго порядка не существует.

Первое достаточное условие перегиба. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, непрерывна в самой точке x_0 и

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \quad (f''(x) > 0) \quad \text{для } x < x_0, \\ f''(x) < 0 \quad (f''(x) < 0) \quad \text{для } x > x_0, \end{cases}$$

то x_0 является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Второе достаточное условие перегиба. Пусть в точке x_0 существует непрерывная производная n-го порядка $(n \geq 2)$ функции $f(x)$ и выполнены условия

$$\begin{cases} f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0. \end{cases}$$

Тогда если n – нечетное число, то в точке x_0 график функции $f(x)$ имеет перегиб.

Тема 8. Функции многих переменных

Понятие функции многих переменных. Если каждой упорядоченной паре чисел $(x; y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2$ по некоторому правилу f ставится в соответствие единственное число z, $z \in \mathbf{R}$, то говорят, что задана *функция двух переменных* $z = f(x, y)$ (или $z = f(M)$, где $M(x; y) \in D$).

Множество D – *область определения функции* обозначают $D(f)$.

Линия уровня функции $z = f(x, y)$ − множество точек $(x; y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2$, для которых $f(x, y) = C$ $(C = \text{const})$.

Если каждой упорядоченной совокупности n чисел $(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in D \subseteq \mathbf{R}^n$ по некоторому правилу f ставится в соответствие единственное число u, $u \in \mathbf{R}$, то говорят, что задана *функция n переменных* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Поверхность уровня функции $u = f(x, y, z)$ − множество точек $(x; y; z) \in D \subseteq \mathbf{R}^3$, для которых $f(x, y, z) = C$ $(C = \text{const})$.

Частные производные и дифференциал. *Частной производной по переменной x* функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется предел

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

если он существует. Производную обозначают также $f'_x(x_0, y_0)$.

Частной производной по переменной y функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется предел

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

если он существует. Производную обозначают также $f'_y(x_0, y_0)$.

Аналогично определяются частные производные функции n переменных.

Дифференциал функции $z = f(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Если $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ достаточно малы, то

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y.$$

Если $z = f(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем $f(x, y)$, $x(t)$, $y(t)$ – дифференцируемые функции, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Если $z = f(x, y)$, где $y = y(x)$, причем $f(x, y)$, $y(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Если $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, причем $f(x, y)$, $x(u, v)$, $y(u, v)$ – дифференцируемые функции, то:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Аналогичные формулы имеют место для функции n переменных.

Если функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

где $F'_y(x, y) \neq 0$.

Если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

где $F'_z \neq 0$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

– если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$ и $z_0 = f(x_0, y_0)$, то

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0;$$

– если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Частные производные второго порядка обозначают также f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2}.

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и высших порядков от функции трех и более переменных.

Производная по направлению и градиент. *Производной функции* $u = f(x, y, z)$ *в точке* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *по направлению вектора* $\overline{l}$ называется предел

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta l},$$

где $\overline{l} = \overline{M_0 M}$; $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$; $\Delta l = \left|\overline{M_0 M}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, если этот предел существует.

Если $u = f(x, y, z)$ дифференцируема, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\overline{l}$.

Градиент функции $u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – вектор

$$\overline{\operatorname{grad} u} = \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right) \quad \text{или} \quad \overline{\operatorname{grad} u} = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}.$$

Необходимое условие экстремума. Если $M_0(x_0; y_0)$ – точка локального экстремума и функция $f(x, y)$ дифференцируема в этой точке, то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Стационарные точки – точки, в которых частные производные равны нулю.

Достаточное условие экстремума. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ – стационарная точка функции $f(x, y)$ и

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}, \quad \Delta = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция имеет локальный экстремум (максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке M_0 нет;

3) если $\Delta = 0$, то необходимы дополнительные исследования.

Тема 9. Интегралы

Неопределенный интеграл. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных. Пишут: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Свойства линейности неопределенного интеграла:

$$\int c\, f(x)dx = c\int f(x)dx \quad (c = \text{const}),$$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Таблица интегралов

$\int 0dx = C$	
$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$	$\int \frac{dx}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a = \text{const},\ a > 0),$ в частности $\int e^x dx = e^x + C$	
$\int \sin x dx = -\cos x + C;$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} \arcsin \frac{x}{\lvert a\rvert} + C, \\ -\arccos \frac{x}{\lvert a\rvert} + C; \end{array}\right.$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{array}\right.$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C;$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$

Методы интегрирования:

– *метод замены переменной* (или *метод подстановки*):

$$\int f\left(u(x)\right)u'(x)dx = \left| \begin{array}{l} u(x) = t, \\ u'(x)dx = dt \end{array} \right| = \int f(t)dt = F(t) + C = F\left(u(x)\right) + C,$$

где $F(t)$ – первообразная для $f(t)$;

– *метод поднесения под знак дифференциала*:

$$\int f\left(u(x)\right)u'(x)dx = \int f\left(u(x)\right)d\left(u(x)\right) = F\left(u(x)\right) + C,$$

где $F\left(u(x)\right)$ – первообразная для $f\left(u(x)\right)$;

– *метод интегрирования по частям*:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где $u = u(x),\ v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Интегрирование некоторых классов функций. *Интегрирование простейших рациональных дробей*:

(I) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln\lvert x - a\rvert + C;$

(II) $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C;$

(III) $\int \frac{Ax+B}{x^2 + px + q} dx$ заменой $x + \frac{p}{2} = t$ сводится к линейной комбинации интегралов

$$\int \frac{tdt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2 + a^2) + C \quad \text{и} \quad \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C;$$

(IV) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r}dx$ заменой $x+\frac{p}{2}=t$ сводится к линейной комбинации интегралов

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^r} \quad \text{и} \quad \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^r}=\frac{1}{2(1-r)(t^2+a^2)^{r-1}}+C.$$

Интеграл $I_r=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^r}$ можно вычислить по рекуррентной формуле

$$I_{r+1}=\frac{1}{2ra^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^r}+\frac{2r-1}{2ra^2}I_r.$$

Интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей, на которые она разлагается (если дробь правильная). В случае неправильной дроби вначале выделяют ее целую часть (многочлен).

Интегрирование тригонометрических функций:

– для нахождения интегралов

$$\int \sin ax\cos bxdx, \quad \int \sin ax\sin bxdx, \quad \int \cos ax\cos bxdx$$

применяют формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму;

– интегралы

$$\int \sin^m ax\cos^{2n-1} axdx, \quad \int \cos^m ax\sin^{2n-1} axdx,$$

где $m\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$, вычисляют поднесением под знак дифференциала функций $\cos ax$ или $\sin ax$;

– для нахождения интеграла

$$\int \sin^{2m} ax\cos^{2n} axdx \quad (m, n\in\mathbf{N})$$

используют тригонометрические формулы понижения степени;

– интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

где R – рациональная функция, в общем случае сводится к интегралу от рациональной функции от t с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$ При этом:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx=\frac{2tdt}{1+t^2}.$$

Интегрирование иррациональных функций:

– интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{l}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx,$$

где R – рациональная функция; $a, b, c, d\in\mathbf{R}$; $ad-bc\neq 0$; $m, n, ..., s\in\mathbf{Z}$, сводится к интегралу от рациональной функции от t с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^p$, где $p=\text{НОК}(n, l, ..., s)$;

– интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

где R – рациональная функция; $a, b, c \in \mathbf{R}$; $a \neq 0$; $b^2-4ac \neq 0$, выделением полного квадрата сводится к одному из трех типов интегралов:

$$\int \sqrt{k^2-t^2}dt, \quad \int \sqrt{k^2+t^2}dt, \quad \int \sqrt{t^2-k^2}dt,$$

для вычисления которых используют соответственно следующие тригонометрические подстановки:

$$t = k\sin z, \quad t = k\,\mathrm{tg}\, z, \quad t = \frac{k}{\cos z}.$$

Интеграл от *дифференциального бинома*

$$\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx,$$

где $m, n, p \in \mathbf{Q}$; $a, b \in \mathbf{R}$, выражается через элементарные функции лишь в трех случаях:

1) если $p \in \mathbf{Z}$, то применяют подстановку $x = t^k$, где k – наименьший общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$, то применяют подстановку $a+bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p;

3) если $\dfrac{m+1}{n}+p \in \mathbf{Z}$, то применяют подстановку $\dfrac{a}{x^n}+b = t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Определенный интеграл. *Геометрический смысл определенного интеграла*: определенный интеграл равен площади *криволинейной трапеции*, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0\right)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Основные свойства определенного интеграла:

$$\int_a^a f(x)dx = 0; \quad \int_a^b dx = b-a; \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

– *линейность*:

$$\int_a^b \left(\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\right)dx = \alpha\int_a^b f_1(x)dx+\beta\int_a^b f_2(x)dx,$$

где $\alpha, \beta = \mathrm{const}$;

– если $a, b, c \in \mathbf{R}$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Методы вычисления определенного интеграла:

– формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$;

– *метод замены переменной* (или *метод подстановки*):

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \begin{vmatrix} g(x)=t, & g'(x)dx=dt \\ g(a)=\alpha, & g(b)=\beta \end{vmatrix} = \int_\alpha^\beta f(t)dt;$$

– *метод интегрирования по частям*:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

где $u=u(x),\ \ v=v(x)$ – дифференцируемые функции на $[a,b]$.

Геометрические приложения определенного интеграла. *Площадь плоской фигуры*:

– ограниченной кривой $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox:

$$S=\int_a^b f(x)dx;$$

– ограниченной кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ $(y(t)\geq 0),\quad t\in[\alpha,\beta]$, прямыми $x=a,\ \ x=b$ и осью Ox:

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt,$$

где $x(\alpha)=a,\ \ x(\beta)=b$;

– ограниченной кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ и лучами $\varphi=\varphi_1,\ \ \varphi=\varphi_2$:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Объем тела вращения:

– образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx;$$

– образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной кривой $x=g(y)$ $(g(y)\geq 0)$, прямыми $y=c,\ \ y=d$ и осью Oy:

$$V=\pi\int_c^d g^2(y)dy;$$

– образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ $(y(t)\geq 0),\ \ t\in[\alpha,\beta]$, прямыми $x=a,\ \ x=b$ и осью Ox:

$$V=\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt,$$

где $x(\alpha)=a,\ \ x(\beta)=b.$

Площадь поверхности вращения:

– образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, $x \in [a, b]$:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx;$$

– образованной вращением вокруг оси Oy кривой $x = g(y)$ $(g(y) \geq 0)$, $y \in [c, d]$:

$$S = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dy;$$

– образованной вращением вокруг оси Ox кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ $(y(t) \geq 0)$, $t \in [\alpha, \beta]$:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Длина дуги кривой:

– заданной уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx;$$

– заданной уравнением $x = g(y)$, $y \in [c, d]$:

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\,dy;$$

– заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt;$$

– заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Несобственный интеграл первого рода. Несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ (или *несобственный интеграл первого рода*) определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

вычисляют по формуле

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функция $f(x)$.

Аналогично

– по промежутку $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

вычисляют по формуле

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a);$$

– по промежутку $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

вычисляют по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a).$$

Если указанные пределы существуют, то соответствующие интегралы называются *сходящимися*; в противном случае – *расходящимися*.

Тема 10. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка. Общий вид *дифференциального уравнения первого порядка*:

$$F(x, y, y') = 0.$$

$y' = f(x, y)$ – уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.

Начальное условие (или *условие Коши*) – условие $y(x_0) = y_0$ $(x_0, y_0 \in \mathbf{R})$, накладываемое на искомое решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, если:

1) она является решением данного уравнения при любом значении произвольной постоянной C;

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию.

Общее решение, полученное в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, называется *общим интегралом дифференциального уравнения*.

Частное решение дифференциального уравнения – всякое решение, полученное из общего при конкретном значении $C = C_0$.

Задача Коши – задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$f_1(x)g_1(y)\,dx + f_2(x)\,g_2(y)\,dy = 0.$$

Предполагая, что $f_2(x)g_1(y) \neq 0,$ почленным делением на $f_2(x)g_1(y)$ его сводят к уравнению

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy.$$

Далее равенство интегрируют и получают общий интеграл.

Однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy = 0,$$

где $f_1(x, y),$ $f_2(x, y)$ – однородные функции одной и той же степени *n*, т. е. при любом $t \in \mathbf{R}$ выполняются условия

$$f_1(tx, ty) = t^n f_1(x, y), \quad f_2(tx, ty) = t^n f_2(x, y).$$

Однородное уравнение может быть приведено к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Для решения однородного уравнения делают замену $z = \frac{y}{x},$ где $z = z(x),$ т. е. $y = xz,$ $y' = z + xz',$ и сводят его к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейное уравнение имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x),$$

которое при $q(x) \equiv 0$ называется *линейным однородным*, в противном случае – *линейным неоднородным*.

Однородное уравнение

$$y' + p(x)y = 0$$

имеет общее решение $y = Ce^{-\int p(x)dx},$ где *C* – произвольная постоянная.

К методам решения линейного неоднородного уравнения относятся методы Лагранжа и Бернулли.

Метод Лагранжа (или *метод вариации произвольной постоянной*). Необходимо:

1) найти общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y = Ce^{-\int p(x)dx},$ где *C* – произвольная постоянная;

2) искать общее решение линейного неоднородного уравнения в виде $y = C(x)e^{-\int p(x)dx},$ где $C = C(x)$ – некоторая функция;

3) подставить в уравнение выражения для *y* и y' и найти функцию $C(x)$:

$$C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

где *C* – произвольная постоянная;

4) записать общее решение исходного уравнения:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

Метод Бернулли. Необходимо:

1) искать общее решение уравнения в виде $y = uv,$ где $u = u(x),$ $v = v(x)$ – функции, которые надо найти;

2) подставить $y = uv,$ $y' = u'v + uv'$ в уравнение;

3) записать уравнение в виде
$u'v + u(v' + p(x)\,v) = q(x);$

4) найти функцию $v(x)$ как частное решение дифференциального уравнения $v' + p(x)v = 0$;

5) найти общее решение уравнения $u'v = q(x)$;

6) записать общее решение $y = uv$ исходного уравнения для найденных функций u, v.

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)y^m,$$

где $m \in \mathbf{R}$ $(m \neq 0,\ m \neq 1)$. Решают с помощью метода Бернулли, т. е. подстановкой $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка:

– уравнение

$$y^{(n)} = f(x)$$

решают n-кратным интегрированием;

– уравнение, не содержащее искомой функции и последовательных первых производных

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0 \quad (1 \le k < n),$$

решают подстановкой $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$, приводят к уравнению $(n-k)$-го порядка. Полученное уравнение решают в зависимости от его типа.

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

где $a_k \in \mathbf{R}$ $(k = \overline{1, n})$..

Общее решение этого уравнения:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, …, $y_n = y_n(x)$ – линейно независимые частные решения; C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные. Для получения частных решений составляют *характеристическое уравнение*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

и решают его.

Каждому корню характеристического уравнения соответствует определенное частное решение:

1) если λ_0 – простой действительный корень, то ему соответствует решение вида $y = e^{\lambda_0 x}$;

2) если λ_1 – действительный корень кратности k $(k = 2, 3, ...)$, то ему соответствует k частных решений:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = xe^{\lambda_1 x}, \ \ldots, \ y_k = x^{k-1} e^{\lambda_1 x};$$

3) если $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ – пара комплексно-сопряженных корней, то им соответствуют два частных решения:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

4) если $\lambda_{4,5} = \alpha \pm i\beta$ – пара комплексно-сопряженных корней кратности k $(k = 2, 3, ...)$, то им соответствует $2k$ частных решения:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ \ldots, \ y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_{k+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ \ldots, \ y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Учебное издание

Майсеня Людмила Иосифовна
Жавнерчик Валерий Эдуардович
Ермолицкий Александр Александрович
Мацкевич Ирина Юрьевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

Учебно-методическое пособие

В 2-х частях

Часть 1

Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Математический анализ

Корректоры Е. Н. Батурчик, Н. В. Гриневич
Ответственный за выпуск В. Э. Жавнерчик

Подписано в печать 14.12.2011. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 8,49. Уч.-изд. л. 9,5.
Тираж 300 экз. Заказ 713.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.
220013, Минск, П. Бровки, 6