Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Институт информационных технологий

И. Ю. Мацкевич

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В КОНТЕКСТЕ ФИЗИКИ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
для студентов, получающих высшее образование,
интегрированное со средним специальным
образованием, по специальностям в области
информатики и радиоэлектроники, в качестве пособия*

Минск БГУИР 2014

УДК [517:53](076.1)
ББК 22.1я73+22.3я73
М36

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра высшей математики и математической физики физического факультета
Белорусского государственного университета
(протокол №7 от 26.02.2013);

профессор кафедры высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет»,
доктор физико-математических наук, профессор И. В. Белько

Мацкевич, И. Ю.
М36 Руководство к решению математических задач в контексте физики : пособие / И. Ю. Мацкевич. – Минск : БГУИР, 2014. – 108 с. : ил.
ISBN 978-985-543-060-6.

Представлен теоретический и практический материал, раскрывающий междисциплинарные связи математики и физики. Приведены примеры решения математических задач в контексте физики, а также задачи физического содержания, предназначенные для самостоятельной работы студентов.

Адресуется студентам и преподавателям математики и физики технических специальностей университетов.

УДК [517:53](076.1)
ББК 22.1я73+22.3я73

ISBN 978-985-543-060-6

Содержание

Введение

Особенности протекания научно-технического прогресса и повышение наукоемкости производства на современном этапе развития общества приводят к необходимости синтеза общеобразовательных, общетехнических и специальных дисциплин в обучении студентов технических университетов. Исходя из этого была определена цель данного пособия – обеспечение междисциплинарных связей математики и физики. Достижение поставленной цели будет способствовать более полной реализации методологической функции математики и подводить студентов к мировоззренческим выводам о взаимосвязи научных теорий и методов познания, к формированию в их сознании единой естественнонаучной картины мира.

Пособие включает в себя следующие компоненты:

- теоретический материал по математике, специально отобранный и адаптированный с учетом востребованности при решении задач по физике;
- примеры решения задач по различным темам математики в контексте физики, содержащие рекомендации методического характера и комментарии применения определенных математических методов;
- задачи физического содержания, предназначенные для самостоятельной работы студентов, и ответы к предложенным задачам;
- список использованной литературы.

Спецификой пособия является то, что в нем системно представлен материал, который касается применения математических методов при решении задач физического содержания по всем основным темам курса высшей математики технического университета. Оно может быть полезно при разработке преподавателями содержания практических и лекционных занятий.

Автор выражает глубокую признательность официальным рецензентам – доктору физико-математических наук, профессору И. В. Белько, кафедре высшей математики и математической физики физического факультета Белорусского государственного университета – за внимательное прочтение рукописи и ряд ценных замечаний по ее улучшению.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Понятие производной функции одной переменной и ее геометрический смысл. Правила дифференцирования. Таблица производных

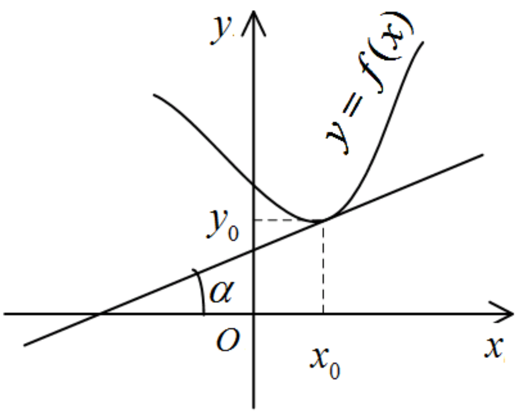

Рис. 1.1

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

С геометрической точки зрения $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона к оси *Ox* касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 1.1). При этом значение $f'(x_0)$ называют ***угловым коэффициентом*** наклона этой касательной к оси *Ox*. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ – дифференцируемые функции, $C = \text{const}$. Тогда имеют место **основные правила дифференцирования** функции одной переменной:

1) $C' = 0$;

2) $(Cu)' = Cu'$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(uv)' = u'v + uv'$;

5) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

7) если $y = f(u)$ и $u = g(x)$ – дифференцируемые функции, то производная сложной функции $y = f(g(x))$ по переменной *x* вычисляется по формуле $y'_x = f'_u \cdot g'(x)$;

8) если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ – взаимно обратные дифференцируемые функции и $\varphi'(y) \neq 0$, то $y'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

При вычислении производных элементарных функций целесообразно использовать таблицу производных (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Таблица производных основных элементарных функций

№	Формула	№	Формула
1	$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, где $\alpha \in R$	2	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3	$(a^x)' = a^x \ln a$, где $a > 0, a \neq 1$	4	$(e^x)' = e^x$
5	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, где $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$	6	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7	$(\sin x)' = \cos x$	8	$(\cos x)' = -\sin x$
9	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	10	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	14	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
15	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	16	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
17	$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	18	$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

1.2. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

Пусть определенная на интервале $(a;b)$ функция $y=f(x)$ является дифференцируемой на этом интервале.

Точка x_0 называется ***точкой локального максимума*** (***минимума***) функции $f(x)$, если существует некоторая окрестность точки x_0, такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)\le f(x_0)$ $\left(f(x)\ge f(x_0)\right)$. При этом значение $f(x_0)$ называется локальным ***максимумом*** (***минимумом***) функции.

Точки максимума или минимума функции называются ***точками*** локального ***экстремума***. Максимум (максимальное значение функции) и минимум (минимальное значение функции) называются ***экстремумом функции***.

Критическими точками называют те точки из области определения функции $f(x)$, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует.

Точка x_0 называется ***точкой глобального максимума*** (***минимума***) функции $f(x)$ на некотором промежутке $(a;b)$, если для любой точки x из этого промежутка выполняется неравенство $f(x)\le f(x_0)$ $\left(f(x)\ge f(x_0)\right)$.

Точки глобального максимума и минимума называются ***точками глобального экстремума***. Значения функции в этих точках называются соответственно ***глобальным максимумом*** (***наибольшим значением***) и ***глобальным минимумом*** (***наименьшим значением***).

Исследование функции на экстремум начинается с нахождения критических точек. Однако не в каждой критической точке существует экстремум. Для того чтобы определить точки экстремума, используют достаточные условия (признаки экстремума).

Справедливы следующие утверждения:

1. *Достаточное условие монотонности*: функция возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ $\forall x\in(a;b)$.

2. *Необходимое условие существования экстремума функции*: если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

3. *Первый признак экстремума функции*: если x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$ и в некоторой окрестности точки x_0 одновременно выполняются условия $f'(x)>0$ для всех $x<x_0$, $f'(x)<0$ для всех $x>x_0$, то x_0 – точка локального максимума; если одновременно выполняются условия $f'(x)<0$ для всех $x<x_0$, $f'(x)>0$ для всех $x>x_0$, то x_0 – точка локального минимума; если производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак в левой и правой

полуокрестностях точки x_0, то x_0 не является точкой экстремума.

4. *Второй признак экстремума функции*: если x_0 – критическая точка дважды дифференцируемой функции $f(x)$, то точка x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$, если $f''(x_0)>0,$ и точкой локального максимума, если $f''(x_0)<0$.

5. *Третий признак экстремума функции*: если $f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируемая в критической точке x_0 функция и $f'(x_0)=f''(x_0)=$ $=...=f^{(n-1)}(x_0)=0,$ $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то:

а) если n – четное и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума;

б) если n – четное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума;

в) если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

6. *Теорема Вейерштрасса*: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она достигает на нем своих наименьшего и наибольшего значений.

Непрерывная на отрезке функция достигает наименьшего (наибольшего) значения либо на концах отрезка, либо в точках ее локального экстремума.

Алгоритм нахождения глобального экстремума функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

1) найти производную $y'(x)$;

2) найти критические точки функции;

3) найти значения функции на концах отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$, а также в критических точках, принадлежащих интервалу $(a;b)$;

4) из всех полученных значений функции определить наибольшее и наименьшее ее значения.

1.3. Физические приложения производной

1. Если путь неравномерного движения частицы (материальной точки) при заданной траектории описывается функцией $S=S(t)$, выражающей зависимость пути от времени t, то производная $S'(t_0)$ представляет собой модуль мгновенной скорости движения частицы в момент времени t_0:

$$v(t_0)=S'(t_0).$$

2. Если скорость неравномерного движения частицы описывается функцией $v=v(t)$, выражающей зависимость скорости от времени t, то производная $v'(t_0)$ представляет собой мгновенное ускорение данной частицы в фиксированный момент времени t_0:

$$a(t_0) = v'(t_0).$$

3. Если процесс изменения количества теплоты, сообщаемой телу при его нагревании до температуры T, описывается функцией $Q = Q(T)$, то производная этой функции $Q'(T_0)$ представляет собой теплоемкость тела, нагретого до температуры T_0:

$$C(T_0) = Q'(T_0).$$

4. Если масса неоднородной материальной кривой описывается функцией $m = m(x)$, выражающей зависимость массы от расположения точки $x \in [0; l]$ на кривой, то производная $m'(x_0)$ представляет собой линейную плотность данной кривой в фиксированной точке $x_0 \in [0; l]$:

$$\rho(x_0) = m'(x_0).$$

5. Если магнитный поток описывается функцией $\varphi = \varphi(t)$, выражающей зависимость потока от времени t, то производная $\varphi'(t_0)$ представляет собой мгновенное значение электродвижущей силы индукции в момент времени t_0:

$$\varepsilon(t_0) = \varphi'(t_0).$$

6. Если заряд на пластинах конденсатора описывается функцией $q = q(t)$, выражающей зависимость заряда от времени t, то производная $q'(t_0)$ представляет собой силу тока в колебательном контуре в момент времени t_0:

$$I(t_0) = q'(t_0).$$

1.4. Примеры решения задач

***Задача* 1.** *Шайба, скользящая без трения по льду с начальной скоростью $\vec{v}_0$, заскакивает на трамплин, верхняя часть которого горизонтальна, и соскальзывает с него. При какой высоте трамплина h дальность S полета шайбы, соскользнувшей с трамплина, будет максимальной?*

Решение. Обозначим скорость движения шайбы по льду до подъема на трамплин v_0, а скорость шайбы на трамплине v.

По закону сохранения энергии

$$\frac{m v_0^2}{2} = m g h + \frac{m v^2}{2},$$

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \quad (1.1)$$

Из формулы

$$h = \frac{g\,t^2}{2} \tag{1.2}$$

определяем время падения шайбы с трамплина:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{1.3}$$

Столько же времени шайба движется равномерно в горизонтальном направлении и пролетает путь $S = \upsilon t$. Подставив выражения (1.2), (1.3) в формулу $S = \upsilon t$, получим

$$S = \sqrt{\frac{2\upsilon_0^2 h}{g} - 4h^2}\,.$$

Далее задача сводится к нахождению максимума функции $S = S(h)$. Как известно, наибольшего или наименьшего значений функция достигает в критических точках, т. е. в точках, в которых производная этой функции не существует или равна нулю. Найдем критические точки функции $S(h)$, приравняв производную $S'(h)$ к нулю. Тогда

$$S' = \frac{\upsilon_0^2 - 4g\,h}{\sqrt{g}\sqrt{2\upsilon_0^2 h - 4gh^2}} = 0\,.$$

Приравняв к нулю сначала числитель дроби, а затем ее знаменатель, получим

$$h_1 = \frac{\upsilon_0^2}{4g},\ h_2 = \frac{\upsilon_0^2}{2g}\,.$$

Очевидно, что одно значение высоты будет соответствовать минимуму функции, а другое – максимуму. Чтобы сделать выбор, определим числовые значения функции $S(h)$ в точках h_1 и h_2: $S(h_1) = \frac{\upsilon_0^2}{2g}$ и $S(h_2) = 0$. Значит, первый ответ соответствует максимуму функции, а второй – минимуму. Следовательно, $h = h_1 = \frac{\upsilon_0^2}{4g}$.

***Ответ*:** $h = \frac{\upsilon_0^2}{4g}$.

***Задача* 2.** *Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону* $\varphi(t) = A + Bt + Ct^2$, *где* $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2{,}0$ рад/с^2. *Найти полное ускорение* a *точки, находящейся на расстоянии* $r = 10$ см *от оси вращения, для момента времени* $t = 4$ с.

Решение. Полное ускорение $\vec{a}$ точки, движущейся по кривой линии, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Так как векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения равен

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}_\tau^{\,2} + \vec{a}_n^{\,2}}, \qquad (1.4)$$

где

$$\vec{a}_\tau = \varepsilon\vec{r}, \quad \vec{a}_n = \omega^2\vec{r}. \qquad (1.5)$$

Угловую скорость найдем, взяв первую производную от угла поворота по времени,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct. \qquad (1.6)$$

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости по времени,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C. \qquad (1.7)$$

Подставляя (1.5), (1.6) и (1.7) в (1.4), с учетом того, что $|\vec{r}| = r$ и $|\vec{a}| = a$, находим

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = r\sqrt{4C^2 + (B + 2Ct)^4}.$$

В момент времени $t = 4{,}0$ с модуль полного ускорения a равен $1{,}7$ м/с^2.

Ответ: $a = 1{,}7$ м/с^2.

***Задача* 3.** *Материальная точка, собственная частота колебаний которой* ω_0, *в начальный момент времени* $t = 0$ *имела смещение, равное* x_0, *и начальную скорость* v_0. *Определить амплитуду и начальную фазу колебаний.*

Решение. Материальная точка совершает гармонические колебания, уравнения которых имеет вид $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$. В момент времени $t = 0$ смещение материальной точки $x = x_0$. Следовательно,

$$x_0 = A\cos\alpha. \tag{1.8}$$

Скорость материальной точки равна первой производной по времени от смещения *x*, т. е.

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

При $t = 0$ скорость υ равна $\upsilon_0 = -A\omega_0 \sin\alpha$, откуда

$$\frac{\upsilon_0}{\omega_0} = -A\sin\alpha. \tag{1.9}$$

Возводя в квадрат уравнения (1.8) и (1.9) и складывая почленно, получим

$$x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega_0^2} = A^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = A^2.$$

Отсюда амплитуда колебаний равна

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega_0^2}}.$$

Начальную фазу колебаний можно определить, разделив выражение (1.9) на выражение (1.8):

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\upsilon_0}{x_0\omega_0},$$

откуда $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{\upsilon_0}{x_0\omega_0}$.

***Ответ*:** $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega_0^2}}$; $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{\upsilon_0}{x_0\omega_0}$.

Задача 4. *Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, уравнения которых* $x(t) = A_1\cos\omega_1 t$ (1) *и* $y(t) = A_2\cos\omega_2 t$ (2), *где* $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\omega_1 = \pi$ с$^{-1}$, $\omega_2 = \frac{\pi}{2}$ с$^{-1}$. *Найти уравнение траектории точки, построить ее и указать направление движения точки.*

Решение. Чтобы определить траекторию точки, подставим численные значения A_1, A_2, ω_1 и ω_2 в уравнения (1) и (2). Получим: $x(t) = \cos\pi t$, $y(t) = 2\cos\dfrac{\pi t}{2}$. Используя формулу для косинуса половинного угла

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{2}$$

и отбросив размерности *x* и *y*, можно написать

$$y = 2\cos\frac{\pi t}{2} = \pm 2\sqrt{\frac{1+\cos\pi t}{2}},\ x = \cos\pi t,$$

откуда

$$y = \pm 2\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \pm\sqrt{2x+2}.$$

Данное уравнение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью Ox. Как показывают уравнения (1) и (2), амплитуда колебаний точки по оси Ox равна 1, а по оси Oy – 2. Следовательно, абсциссы всех точек траектории заключены в пределах от –1 до +1, а ординаты – от –2 до +2. Для построения траектории найдем по уравнению параболы значения *y*, соответствующие ряду значений *x*, удовлетворяющих условию $|x| \le 1$:

x	–1	–0,75	–0,5	0	0,5	1
$y = \pm\sqrt{2x+2}$	0	±0,71	±1	±1,41	±1,73	±2

Выберем за единицу длины 1 см и построим точки. Соединив их плавной кривой, получим траекторию результирующего колебания точки. Она представляет собой часть параболы (рис. 1.2).

Из уравнений (1) и (2) находим, что период колебаний точки по горизонтальной оси $T_x = 2$ с, а по вертикальной оси $T_y = 4$ с. Следовательно, когда точка совершит одно полное колебание по оси Ox, она совершит только половину полного колебания по оси Oy. В начальный момент $t = 0$ с имеем $x = 1,\ y = 2$. При $t = 1$ с имеем $x = -1,\ y = 0$ (точка находится в вершине параболы). При $t = 2$ с получим $x = 1,\ y = -2$. После этого она будет двигаться в обратном направлении.

***Ответ*:** $y = \pm\sqrt{2x+2}$.

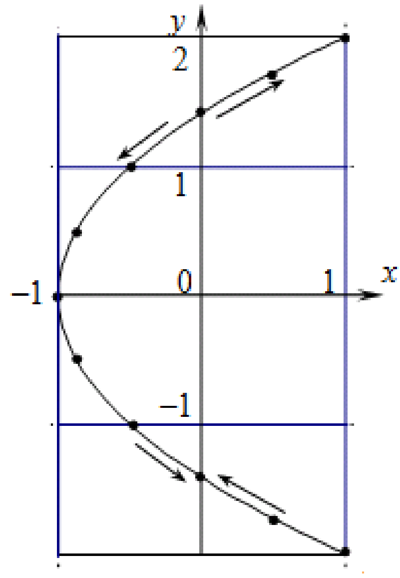

Рис. 1.2

***Задача* 5.** *Тело массой* $m = 12$ г *совершает затухающие колебания с циклической частотой* $\omega = 3{,}14$ рад/с. *При этом за время* $t = 60$ с *тело теряет 0,9 своей полной механической энергии. Найти*: **1)** *коэффициент затухания*; **2)** *коэффициент сопротивления среды*; **3)** *добротность колебательной системы.*

Решение.

1. Начальную фазу колебаний можно положить равной нулю, т. е. $\varphi_0 = 0$. Тогда уравнение затухающих колебаний имеет решение

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega t, \qquad (1.10)$$

где коэффициент затухания β связан с коэффициентом сопротивления среды r соотношением

$$r = 2\beta m, \qquad (1.11)$$

а частота затухающих колебаний ω связана с частотой свободных колебаний ω_0 в отсутствие затуханий соотношением

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2}, \qquad (1.12)$$

где k – коэффициент упругости затухающей системы.

Полная механическая энергия системы определяется как сумма кинетической и потенциальной энергии:

$$E = E_К + E_П = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}. \qquad (1.13)$$

Дифференцируя соотношение (1.10) по времени, найдем скорость затухающих колебаний:

$$v = -A_0 e^{-\beta t} \left(\omega \sin \omega t + \beta \cos \omega t \right). \qquad (1.14)$$

Подставляя (1.10) и (1.14) в (1.13) и используя соотношение (1.12), найдем зависимость полной энергии от времени:

$$E(t) = \frac{mA_0^2 e^{-2\beta t} \left(\omega \sin \omega t + \beta \cos \omega t \right)^2}{2} + \frac{kA_0^2 e^{-2\beta t} \cos^2 \omega t}{2} =$$

$$= \frac{mA_0^2 e^{-2\beta t}}{2} \left(\omega^2 + \beta^2 + \beta\omega \sin 2\omega t + \beta^2 \cos 2\omega t \right). \qquad (1.15)$$

По условию задачи $E(t)=0,9E(0)$, где $t=60$ с. Следовательно, из (1.15) получаем

$$E(t)=\frac{mA_0^2e^{-2\beta t}}{2}\left(\omega^2+\beta^2+\beta\omega\sin 2\omega t+\beta^2\cos 2\omega t\right)=0,9\frac{mA_0^2}{2}\left(\omega^2+2\beta^2\right). \quad (1.16)$$

Используя численные значения ω и *t*, с учетом того, что циклическая частота $\omega=3{,}14$ рад/с = π с^{-1}, получаем $\sin 2\omega t=\sin 2\pi t=\sin 2\pi\cdot 60=0$. Аналогично $\cos 2\omega t=\cos 2\pi t=\cos 2\pi\cdot 60=1$. Следовательно, из (1.16) получаем уравнение для определения β:

$$e^{-2\beta t}\left(\omega^2+2\beta^2\right)=0,9\left(\omega^2+2\beta^2\right).$$

Сокращая на $\omega^2+2\beta^2$, находим коэффициент затухания:

$$\beta=-\frac{\ln 0,9}{2t}=-\frac{0,10536}{2\cdot 60}=8,8\cdot 10^{-4}\ \text{с}^{-1}. \quad (1.17)$$

2. Подставляя (1.17) в (1.11), найдем коэффициент сопротивления среды:

$$r=2\beta m=2,1\cdot 10^{-7}\ \text{кг/с}.$$

3. Добротность вычислим по формуле

$$Q=\frac{\omega}{2\beta}=1,8\cdot 10^3.$$

Полученные значения для коэффициента затухания и добротности свидетельствуют о том, что силы сопротивления среды, действующие в системе, малы, и система может достаточно долго колебаться, хотя за первую минуту колебаний она теряет 90 % своей энергии.

***Ответ*: 1)** $\beta=8,8\cdot 10^{-4}\ \text{с}^{-1}$; **2)** $r=2,1\cdot 10^{-7}$ кг/с; **3)** $Q=1,8\cdot 10^3$.

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на некотором промежутке $X \subset R$, если $F(x)$ дифференцируема на промежутке X и для всех $x \in X$ выполняется соотношение

$$F'(x) = f(x).$$

Если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ на промежутке X, то любая другая ее первообразная имеет вид $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная. Операция нахождения всех первообразных функции $f(x)$ называется ***интегрированием*** этой функции.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

причем функцию $f(x)$ называют ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, x – ***переменной интегрирования***.

Всякая непрерывная на множестве X функция имеет на этом множестве первообразную, а значит, неопределенный интеграл. С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство так называемых ***интегральных кривых*** $y = F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

2.2. Свойства неопределенного интеграла

Пусть $f = f(x)$, $f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(x)$ – интегрируемые функции, $C = \text{const}$. Тогда имеют место **основные свойства неопределенного интеграла:**

1) $\int C\, f(x)dx = C\int f(x)dx$;

2) $\int \left(f_1(x) + f_2(x) \right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;

3) $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$;

4) $d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$;

5) $\int dF(x) = F(x) + C$;

6) если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(ax+b)dt = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, $a \neq 0$.

2.3. Таблица неопределенных интегралов

При вычислении неопределенных интегралов целесообразно применять формулы, приведенные в таблице интегралов (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Таблица неопределенных интегралов основных элементарных функций

№	Формула	№	Формула
1	$\int 0\,dx = C$, $C = \mathrm{const}$	2	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,$
3	$\int 1dx = x + C$	4	$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$
5	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$, $x \neq 0$	6	$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$
7	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0,\ a \neq 1$	8	$\int e^x dx = e^x + C$
9	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	10	$\int \cos x dx = \sin x + C$
11	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	12	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
13	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
15	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

Окончание табл. 2.1

№	Формула	№	Формула
17	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$	18	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
19	$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} +$ $+\frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C$	20	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
21	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} +$ $+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$	22	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

2.4. Основные методы интегрирования

К основным методам вычисления неопределенного интеграла относятся следующие способы их нахождения:

1. ***Непосредственное интегрирование*** **–** вычисление интегралов с помощью таблицы неопределенных интегралов основных элементарных функций, свойств неопределенного интеграла и тождественных преобразований подынтегральной функции.

2. ***Метод замены переменной*****:**

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \left| \begin{matrix} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{matrix} \right| = \int f(t)dt = F(t) + C = F\left(g(x)\right) + C,$$

где $F(t)$ – первообразная функции $f(t)$.

3. ***Метод подстановки*****:**

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f\left(g(t)\right)g'(t)dt + C.$$

4. ***Метод поднесения под знак дифференциала*****:**

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int f\left(g(x)\right)d\left(g(x)\right) = F\left(g(x)\right) + C.$$

5. ***Метод интегрирования по частям*:**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции переменной x.

При использовании этих методов удобно применять простейшие преобразования дифференциала:

- $dx = d(x+b)$ (b– произвольная постоянная величина);
- $dx = \frac{1}{a} d(ax)$ (постоянная $a \neq 0$);
- $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$ (постоянная $a \neq 0$).

2.5. Понятие определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная ограниченная неотрицательная функция $y = f(x)$.

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0\ \forall x \in [a;b]\right)$ осью координат Ox, а также прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 2.1).

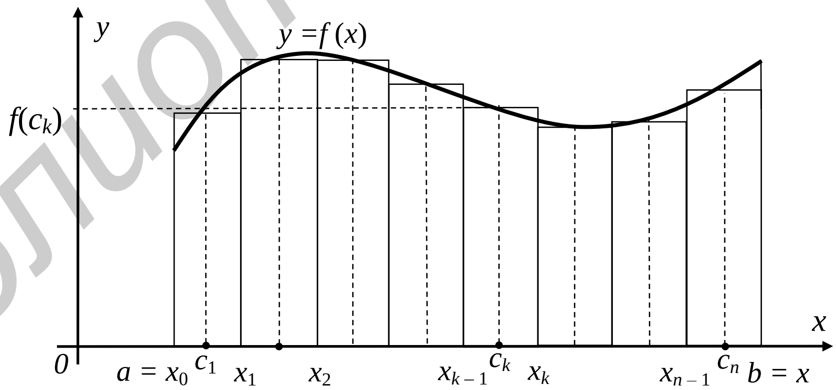

Рис. 2.1

Произведем разбиение данной криволинейной трапеции на частичные криволинейные трапеции с основаниями $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, ограниченные графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$, $k = \overline{1, n}$.

Определенным интегралом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, если он существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек на каждом частичном отрезке, при этом $c_k\in[x_{k-1};\ x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta = \max\Delta x_k$, $k=\overline{1,n}$. В таком случае числа a и b называются соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***, функция $f(x)$ – ***подынтегральной функцией***, $f(x)\,dx$ – ***подынтегральным выражением***, x – ***переменной интегрирования***, отрезок $[a;b]$ – ***отрезком интегрирования***.

Функция $f(x)$, для которой существует введенный выше определенный интеграл, называется ***интегрируемой на отрезке***.

Классы интегрируемых функций: непрерывная на отрезке $[a;b]$; ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция, имеющая лишь конечное число точек разрыва; монотонная ограниченная функция.

2.6. Геометрический смысл определенного интеграла

Геометрический смысл определенного интеграла состоит в том, что определенный интеграл от неотрицательной функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$, численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, снизу – отрезком оси *Ox*.

2.7. Свойства определенного интеграла

Пусть $f=f(x)$, $f_1=f_1(x)$, $f_2=f_2(x)$ – интегрируемые на отрезке $[a;b]$ функции, $C_1=\mathrm{const}$, $C_2=\mathrm{const}$. Тогда имеют место **основные свойства определенного интеграла**:

1) ***линейность***: $\int\limits_a^b \left(C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x)\right)dx = C_1\int\limits_a^b f_1(x)\,dx + C_2\int\limits_a^b f_2(x)\,dx$;

2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$;

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

4) ***независимость от обозначения переменной интегрирования***:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt;$$

5) ***аддитивность***: если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a;b]$, $[a;c]$, $[b;c]$, то она интегрируема на любом из двух других отрезков, причем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

при любом взаимном расположении чисел a, b, c;

6) если $f_1(x) \le f_2(x)$ при $x \in [a;\, b]$, то

$$\int\limits_a^b f_1(x)dx \le \int\limits_a^b f_2(x)dx;$$

7) если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$, то верна оценка

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a);$$

8) ***оценка модуля интеграла***: $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$;

9) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то существует точка $c \in [a;\, b]$, такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$;

10) если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$;

11) если $f(x)$ – четная функция, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$;

12) если $f(x)$ – периодическая функция периода T, то при любом $a \in R$ верно равенство

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx.$$

2.8. Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и $F(x)$ – ее первообразная на этом отрезке, то имеет место ***формула Ньютона – Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b).$$

2.9. Формула замены переменной

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;\, b]$ функция, а функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\, \beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Вместе с заменой переменной в определенном интеграле меняются пределы интегрирования.

2.10. Формула интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывные функции, которые имеют непрерывные производные на отрезке $[a;\, b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

2.11. Геометрические приложения определенного интеграла

1. ***Площадь плоской фигуры***

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и отрезком $[a;\, b]$ оси Ox, при $f(x) \geq 0$ (рис. 2.2) выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

а при $f(x) \leq 0$ (рис. 2.3) – формулой $S = -\int_a^b f(x)dx$.

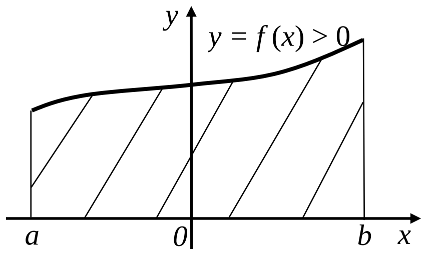

Рис. 2.2

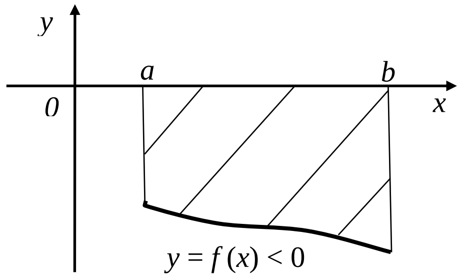

Рис. 2.3

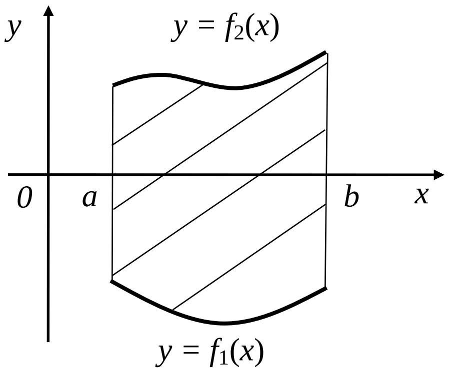

Рис. 2.4

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a,\ x=b$ и кривыми $y=f_1(x), y=f_2(x)$, где $f_1(x)\le f_2(x)$ для $x\in[a;\ b]$ (рис. 2.4), выражается формулой

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

Если криволинейная трапеция ограничена сверху кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad \psi(t)\ge 0,\ t\in[\alpha,\ \beta],$$

прямыми $x=a, x=b$ и отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt,$$

где α и β определяются из равенств $a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi=\varphi_1,\ \varphi=\varphi_2$ $(\varphi_1<\varphi_2)$ (рис. 2.5), причем $\rho(\varphi)\ge 0$ для $\varphi\in[\varphi_1,\ \varphi_2]$, выражается формулой

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

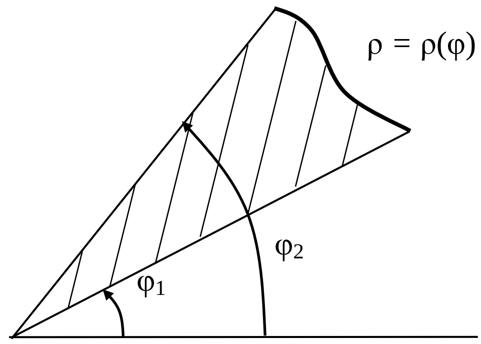

Рис. 2.5

2. ***Длина дуги кривой***

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a;\ b]$, то длина дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a;\ b]$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Если кривая задана в пространстве параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha;\ \beta], \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

где $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2 + \left(\chi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ при $\varphi \in [\alpha;\ \beta]$, причем $\rho = \rho(\varphi)$ – функция, имеющая непрерывную производную по переменной φ. Тогда длина дуги этой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

3. ***Объем тела***

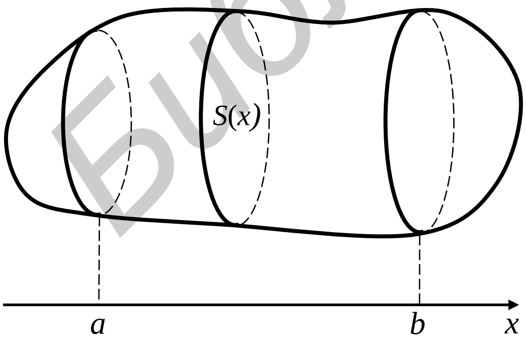

Рис. 2.6

Если известна площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, причем $S(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a;\ b]$, то объем тела, заключенного между плоскостями $x = a$ и $x = b$, перпендикулярными оси *Ox* (рис. 2.6), вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

4. *Объем и площадь поверхности тела вращения*

Если тело ограничивает поверхность, полученную вращением кривой $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$ вокруг оси Ox (рис. 2.7), то его объем вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

а площадь поверхности – по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Если тело ограничено поверхностью, которая образована вращением кривой $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$ вокруг оси Oy, то его объем вычисляется по формуле

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Если тело ограничено поверхностью, полученной вращением кривой $x = g(y)$, $y \in [c;\ d]$ вокруг оси Oy (рис. 2.8), то его объем вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\,dy,$$

а площадь поверхности – по формуле

$$S = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\,dy.$$

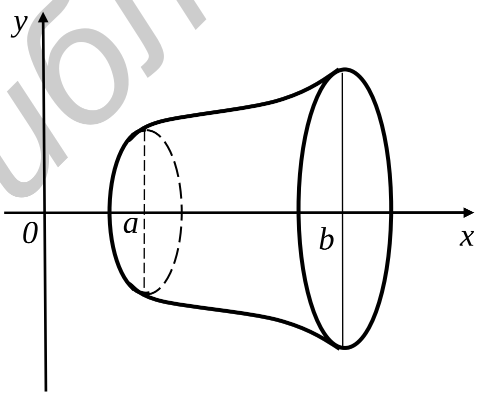

Рис. 2.7

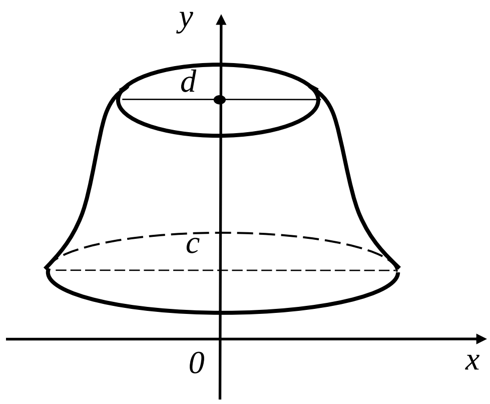

Рис. 2.8

2.12. Физические приложения определенного интеграла

1. ***Вычисление пути***

Путь, пройденный телом со скоростью $v=v(t)$, $v(t)\geq 0$ за промежуток времени $[t_1;\ t_2]$, вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

2. ***Работа переменной силы***

Если частица движется по оси Ox из точки $x=a$ до точки $x=b$ под действием направленной вдоль оси Ox переменной силы $F(x)$, которая задается непрерывной функцией, то **работа, произведенная силой F по перемещению точки**, вычисляется по формуле

$$A=\int_a^b F(x)\,dx.$$

3. ***Давление жидкости***

Давление жидкости на погруженную в нее в горизонтальном положении пластинку на глубину h от поверхности жидкости вычисляется по закону Паскаля: $P=\rho g h S$, где g – ускорение свободного падения ($(g=9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2)$); S – площадь пластинки; ρ – плотность жидкости. Если пластинка погружена в жидкость в вертикальном положении, то сила давления жидкости на единицу площади изменяется с глубиной погружения. **Давление жидкости на вертикальную пластину**, ограниченную линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ (рис. 2.9), вычисляется по формуле

$$P=\rho g\int_a^b x\,f(x)\,dx.$$

Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$ (рис. 2.10), вычисляется по формуле

$$P=\rho g\int_a^b x\big(f_2(x)-f_1(x)\big)\,dx.$$

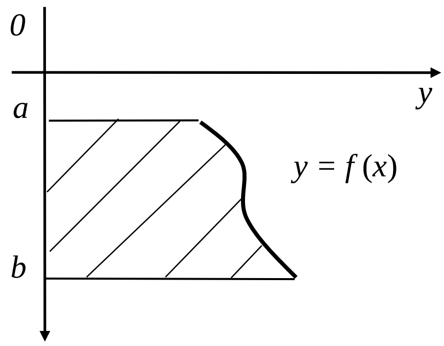

Рис. 2.9

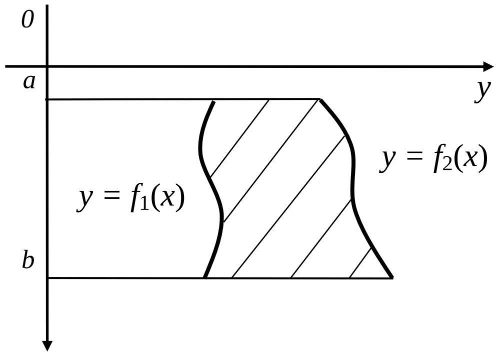

Рис. 2.10

4. ***Масса***

Масса неоднородного стержня, расположенного на отрезке $[a;\ b]$ оси Ox, имеющего линейную плотность $\rho=\rho(x)$, где $\rho(x)$ – непрерывная на $[a;\ b]$ функция, вычисляется по формуле

$$m=\int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Если дуга плоской кривой задана уравнением $y=f(x)$, где $x\in[a;\ b]$, и имеет плотность $\rho=\rho(x)$, то **статистические моменты** M_x и M_y этой дуги относительно координатных осей Ox и Oy вычисляются соответственно по формулам

$$M_x=\int_a^b \rho(x)\,f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx,$$

$$M_y=\int_a^b \rho(x)\,x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, имеет однородную плотность $\rho=1$, то формулы имеют вид

$$M_x=\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt,$$

$$M_y=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

5. ***Моменты инерции***

Моменты инерции дуги плоской кривой $y=f(x)$, где $x\in[a;\ b]$, имеющей линейную плотность $\rho=\rho(x)$, вычисляются по формулам

$$I_x=\int_a^b \rho(x) f^2(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx,$$

$$I_y=\int_a^b \rho(x) x^2\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, $\rho=1$, то формулы имеют вид

$$I_x=\int_\alpha^\beta \psi^2(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt,$$

$$I_y=\int_\alpha^\beta \varphi^2(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

6. ***Координаты центра масс***

Координаты центра масс дуги плоской кривой $y=f(x)$, где $x\in[a;\ b]$, имеющей плотность $\rho=\rho(x)$, вычисляются по формулам

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\int_a^b \rho(x) x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{m},$$

$$y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\int_a^b \rho(x) f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{m},$$

где m – масса дуги, которая находится по формуле

$$m=\int_a^b \rho(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, $\rho=1$, то формулы имеют вид

$$x_c=\frac{M_y}{m},\ y_c=\frac{M_x}{m},$$

где m – масса дуги, которая находится по формуле

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt.$$

2.13. Примеры решения задач

***Задача* 1.** *На тонком стержне длиной* $l = 20$ см *находится равномерно распределенный электрический заряд. На продолжении оси стержня на расстоянии* $a = 10$ см *от ближайшего конца находится точечный заряд* $Q = 40$ нКл, *который взаимодействует со стержнем с силой* $F = 6$ мкН. *Определить линейную плотность* τ *заряда на стержне.*

Решение. Сила взаимодействия F заряженного стержня с точечным зарядом Q зависит от линейной плотности τ заряда на стержне. Зная эту зависимость, можно определить τ. При вычислении силы F следует иметь в виду, что заряд на стержне не является точечным, поэтому закон Кулона непосредственно применить нельзя. В этом случае можно поступить следующим образом. Выделим в стержне малый участок dr с зарядом $dQ = \tau dr$ (рис. 2.11). Этот заряд можно рассматривать как точечный.

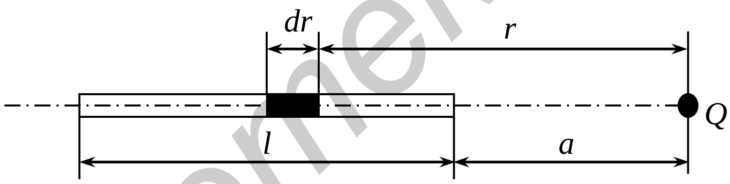

Рис. 2.11

Согласно закону Кулона,

$$dF = \frac{Q\tau dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Интегрируя это выражение в пределах от a до $a + l$, получаем

$$F = \frac{Q\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_{a}^{a+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right) = \frac{Q\tau l}{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)},$$

откуда $\tau = \dfrac{4\pi\varepsilon a(a+l)F}{Ql} = 2{,}5$ нКл/м.

Ответ: $\tau = 2{,}5$ нКл/м.

***Задача* 2.** *По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности, равномерно распределен заряд с линейной плотностью* $\tau = 10$ нКл/м. *Определить напряженность E и потенциал* φ *электрического поля, создаваемого таким распределенным зарядом в точке, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина нити составляет одну треть длины окружности и равна* $l = 15$ см.

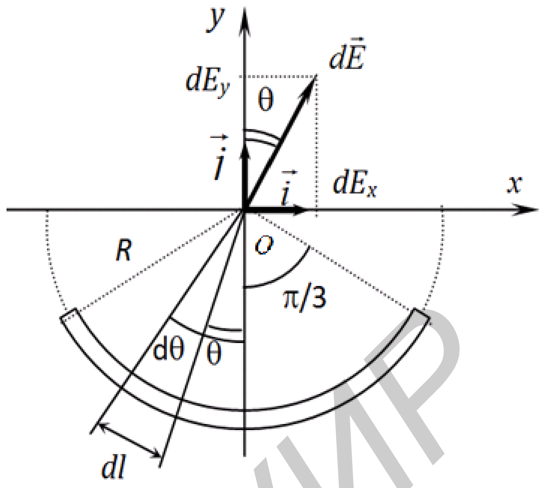

Рис. 2.12

Решение. Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны дуги, а ось Oy была бы симметрично расположена относительно концов дуги (рис. 2.12). На нити выделим элемент длиной dl. Заряд $dQ = \tau dl$, находящийся на выделенном участке, можно считать точечным.

Определим напряженность электрического поля в начале координат. Для этого найдем сначала напряженность $d\vec{E}$ поля, создаваемого зарядом dQ:

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon r}\frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от элемента dl к точке, в которой вычисляется напряженность поля.

Выразим вектор $d\vec{E}$ через проекции dE_x и dE_y на оси координат: $d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y = dE_x\vec{i} + dE_y\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – единичные векторы направлений (орты).

Напряженность $\vec{E}$ найдем посредством интегрирования:

$$\vec{E} = \int_l d\vec{E} = \vec{i}\int_l dE_x + \vec{j}\int_l dE_y.$$

Интегрирование ведется вдоль дуги длиной l. В силу симметрии $\int_l dE_x = 0$
.

Тогда

$$\vec{E} = \vec{j}\int_l dE_y, \tag{2.1}$$

где $dE_y = \cos\theta\, dE = \dfrac{\tau\cos\theta\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Так как $r = R = \text{const}$, $dl = Rd\theta$, то $dE_y = \dfrac{\tau\cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

Подставив это выражение dE_y в (2.1) и приняв во внимание симметричное расположение дуги относительно оси Oy, пределы интегрирования возмем от 0 до $\dfrac{\pi}{3}$, а результат удвоим:

$$\vec{E} = \vec{j}\,\frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta d\theta = \vec{j}\,\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \vec{j}\,\frac{\tau\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Выразив радиус R через длину l нити ($3l = 2\pi R$), получим

$$\vec{E} = \vec{j}\,\frac{\tau\sqrt{3}}{6\varepsilon_0 l}. \qquad (2.2)$$

Из этой формулы видно, что напряженность поля по направлению совпадает с осью Oy.

Найдем потенциал электрического поля в начале координат. Сначала запишем потенциал, создаваемый точечным зарядом dQ в этой точке:

$$d\varphi = \frac{\tau d\,l}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Заменим r на R и проведем интегрирование:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^l dl = \frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Так как $3l = 2\pi R$, то

$$\varphi = \frac{\tau}{6\varepsilon_0}. \qquad (2.3)$$

Производя вычисления по формулам (2.2) и (2.3), находим E:

$$E = E_y = 2{,}18\ \text{кВ/м},\ \varphi = 188\,\text{В}.$$

Ответ: $E = E_y = 2{,}18$ кВ/м, $\varphi = 188$ В.

***Задача* 3.** *Кольцо из проволоки радиусом* R *равномерно заряжено зарядом с линейной плотностью* τ (*рис.* 2.13). *Найти модуль и направление напряженности электрического поля на расстоянии* h *от центра кольца на оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр кольца.*

Решение. Для нахождения напряженности и потенциала разобьем кольцо на бесконечно малые элементы dl, на которых сосредоточен заряд $dq = \tau dl$. Каждый элемент создает в точке A, находящейся на оси кольца на расстоянии h от центра кольца, напряженность электрического поля

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\tau dl}{r^2}, \qquad (2.4)$$

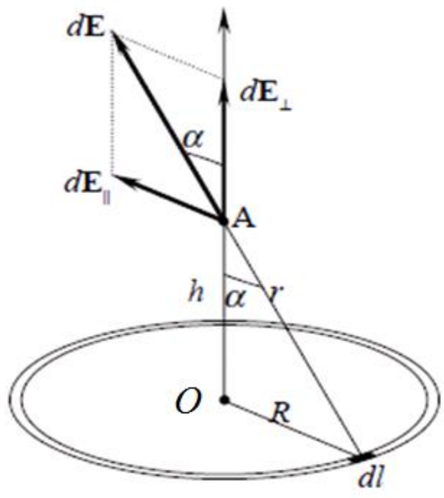

Рис. 2.13

вектор $d\vec{E}$ которой направлен от элемента dl, если $\tau > 0$ (этот вариант изображен на рис. 2.13), или к элементу dl, если $\tau < 0$.

Вектор $d\vec{E}$ разложим на составляющие:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_{\parallel} + d\vec{E}_{\perp},$$

где вектор $d\vec{E}_{\parallel}$ параллелен плоскости кольца, а вектор $d\vec{E}_{\perp}$ перпендикулярен плоскости кольца, как показано на рис. 2.13.

Точка A находится на оси симметрии, и поэтому вектор $\vec{E}$ напряженности результирующего поля в этой точке направлен перпендикулярно плоскости кольца, т. е. $\vec{E} = \vec{E}_{\perp}$.

Из рис. 2.13 следует, что

$$dE_{\perp} = dE\cos\alpha = \frac{hdE}{r}, \qquad (2.5)$$

где

$$r = \sqrt{R^2 + h^2}. \qquad (2.6)$$

С учетом (2.4), (2.5) и (2.6) получаем

$$dE_{\perp} = k\frac{\tau h dl}{r^3} = k\frac{\tau h dl}{\left(R^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Окончательно результирующая напряженность определяется по формуле

$$E = E_{\perp} = k\frac{\tau h dl}{\left(R^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi R} dl = k\frac{\tau h 2\pi R}{\left(R^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\tau h R}{2\varepsilon_0\left(R^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

В центре O кольца $h = 0$, и поэтому $E_0 = 0$.

***Ответ*:** $E = \dfrac{\tau h R}{2\varepsilon_0\left(R^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Задача 4. *Найти напряженность $\vec{E}(r)$ и разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ электрического поля внутри и вне объемно заряженного шара радиусом R, если ρ – объемная плотность заряда, r – расстояние от центра шара.*

Решение. Найдем напряженность и потенциал внутри объемно заряженного шара. Для нахождения напряженности поля применим теорему Гаусса:

$$\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}, \tag{2.7}$$

где Φ_E – поток вектора $\vec{E}(r)$ через сферическую поверхность радиуса r; q – заряд внутри гауссовой поверхности, который находится по формуле

$$q = \frac{4}{3}\pi\rho r^3. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.7), получим $E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{4}{3\varepsilon_0}\pi\rho r^3$,

откуда следует

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}, \;\; \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\,.$$

Найдем разность потенциалов между двумя точками внутри объемно заряженной сферы:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2}\bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r_2^2 - r_1^2\right).$$

Определим напряженность и потенциал вне заряженного шара. Гауссову поверхность выбираем в виде сферы радиусом $r > R$ (рис. 2.14).

Заряд внутри гауссовой поверхности вычисляется по формуле

$$q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.7), получаем $E \cdot 4\pi r^2 = \dfrac{4}{3\varepsilon_0}\pi\rho R^3$, откуда следует

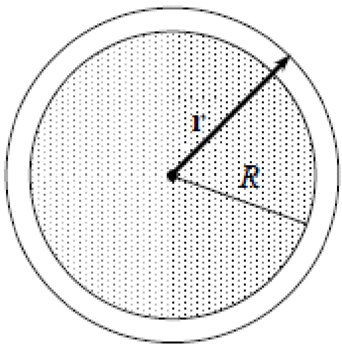

Рис. 2.14

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, \;\; \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\,.$$

Разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

***Ответ*:** $\vec{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$, если $r \le R$;

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\,, \;\; \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \text{ если } r \ge R.$$

3. ПОНЯТИЕ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ

3.1. Частные производные и дифференциал первого порядка

Частной производной по переменной x функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

если он существует, при этом применяют обозначения $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ или $f'_x(x_0, y_0)$.

Частной производной по переменной y функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

если он существует, при этом применяют обозначения $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ или $f'_y(x_0, y_0)$.

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ (в случае их существования) аналогично определяют три частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется разность $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, где Δx, Δy – приращения аргументов.

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $M_0(x_0; y_0)$, если полное приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где A, B – некоторые числа; $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Если функция дифференцируема в точке M_0, то в формуле $A=\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}$, $B=\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}$.

Главная часть полного приращения дифференцируемой функции $z=f\left(x,\,y\right)$ называется ***дифференциалом*** этой функции и обозначается dz:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Для независимых переменных x и y дифференциалы совпадают с их приращениями: $dx=\Delta x,\;dy=\Delta y.$

Дифференциал функции двух переменных $z=f\left(x,\,y\right)$ вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Дифференциал функции трех переменных $u=f\left(x,\,y,\,z\right)$ вычисляется по формуле

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ для функции $z=f\left(x,\,y\right)$, дифференцируемой в точке $M_0\left(x_0;\,y_0\right)$ и ее окрестности, имеет место приближенное равенство

$$f\left(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0,\,y_0\right)+\frac{\partial f\left(x_0,\,y_0\right)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f\left(x_0,\,y_0\right)}{\partial y}\Delta y.$$

3.2. Дифференцирование сложных функций

Пусть $z=f\left(x,\,y\right)$, где $x=x(t),\;y=y(t),$ причем $f\left(x,\,y\right)$ имеет непрерывные частные производные, функции $x(t),\,y(t)$ имеют непрерывные производные, t – независимая переменная. Тогда ***производная сложной функции*** $z=f\left(x(t),\,y(t)\right)$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Пусть $z = f(x, y)$ и $y = y(x)$, где x – независимая переменная, причем функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, $y(x)$ – непрерывную производную. Тогда справедлива ***формула полной производной*** функции z по x:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Пусть $z = f(x, y)$ и $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, причем функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y, а функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, имеют непрерывные частные производные по u и u и v Тогда частные производные функции z по u и v находят по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приведенные выше формулы обобщаются на любое конечное количество переменных.

3.3. Дифференцирование неявных функций

Допустим, что функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ и требуется найти $y'(x)$. Если $F'_y(x, y) \neq 0$, используют формулу

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Производные неявной функции $y = f(x)$ порядка выше первого находят последовательным дифференцированием по приведенной формуле, учитывая, что y – функция от x.

Для нахождения частных производных функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, используют формулы

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

при условии, что эти производные существуют и $F'_z \neq 0$.

3.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и высших порядков. В частности, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$.

Частная производная второго порядка и выше, взятая по различным переменным, называется ***смешанной частной производной.***

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка не зависят от порядка дифференцирования, например, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$.

Дифференциал второго порядка функции $z = f(x, y)$ определяется формулой

$$d^2 z = d(dz).$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и высших порядков.

Справедлива формула

$$d^{n+1} z = d(d^n z),\ n \in N.$$

Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, и переменные x и y являются независимыми, то дифференциалы второго и третьего порядков вычисляются по формулам

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Для всякого $n\in N$ формула вычисления дифференциала порядка n по форме записи аналогична формуле бинома Ньютона:

$$d^nz=C_n^0\frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n+C_n^1\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy+C_n^2\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2+$$

$$+\ldots+C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k+\ldots+C_n^{n-1}\frac{\partial^n z}{\partial x\partial y^{n-1}}dxdy^{n-1}+C_n^n\frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n,$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $k=\overline{0,n}$, причем $0!=1$.

3.5. Производная по направлению. Градиент

Производной функции $u=f(x,y,z)$ ***в точке*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***по направлению*** $\vec{l}$ называется предел

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta l},$$

где $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M}$, $M=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$, $\Delta l=\left|\overrightarrow{M_0M}\right|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$, если предел существует.

Если функция $u=f(x,y,z)$ дифференцируема, то производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Градиентом функции $u(x;y;z)$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ называется вектор

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x};\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y};\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right),$$

или

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Связь между градиентом функции и производной по направлению устанавливает формула

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u\right| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$ и $\vec{l}$.

Градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции. Наибольшее значение производной $\frac{\partial u}{\partial l}$, достигаемое в направлении градиента, равно

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

В частности, если $z = f(x, y)$ – функция двух переменных, то

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

3.6. Примеры решения задач

***Задача* 1.** *Определить вектор напряженности электрического поля, потенциал которого зависит от координат x и y по закону*: **1)** $\varphi = a\left(x^2 - y^2\right)$; **2)** $\varphi = axy$, *где a – постоянная.*

Решение. Известно, что $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j}$.

1. $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay \Rightarrow \vec{E} = -2ax\vec{i} + 2ay\vec{j} = -2a\left(x\vec{i} - y\vec{j}\right)$;

2. $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ay, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = ax \Rightarrow \vec{E} = -ay\vec{i} - ax\vec{j} = -a\left(y\vec{i} + x\vec{j}\right)$.

***Ответ*: 1)** $\vec{E} = -2a\left(x\vec{i} - y\vec{j}\right)$; **2)** $\vec{E} = -a\left(y\vec{i} + x\vec{j}\right)$.

***Задача* 2.** *Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до его центра по закону* $\varphi = ar^2 + b$, *где a и b – некоторые постоянные. Найти распределение объемного заряда* $\rho(r)$ *внутри шара.*

Решение. В нашем случае $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Поэтому $\varphi = ar^2 + b = a\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + b$.

Известно, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (3.1)$$

Производные второго порядка $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\left(2ax\right)'=2a$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\left(2ay\right)'=2a$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\left(2az\right)'=2a$ подставим в формулу (3.1) и получим соотношение $6a=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Rightarrow\rho=-6\varepsilon_0 a$.

Ответ: $\rho=-6\varepsilon_0 a$.

***Задача* 3.** *Потенциал поля в некоторой области пространства зависит от координаты x как* $\varphi=-ax^3+b$*, где a и b – некоторые постоянные. Найти распределение объемного заряда* $\rho\left(x\right)$.

Решение. Найдем производные второго порядка:

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\left(-3ax^2\right)'=-6ax$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$.

Тогда $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Rightarrow\ \rho=\rho\left(x\right)=-\varepsilon_0\cdot\left(-6ax\right)=6\varepsilon_0 ax$.

Ответ: $\rho\left(x\right)=6\varepsilon_0 ax$.

4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Пусть $y(x)$ – функция от независимой переменной x, заданная на некотором промежутке $(a;b)$.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение

$$F(x,\ y,\ y')=0, \tag{4.1}$$

содержащее переменную x, неизвестную функцию $y=y(x)$ и ее производную y' в точке x. Здесь $F(x,\ y,\ y')$ – заданная функция переменных x, y, $y'=\dfrac{dy}{dx}$, но при этом предполагается, что соотношение (4.1) можно разрешить относительно y'.

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной функции, называется ***дифференциальным уравнением в нормальной форме***. Его общий вид

$$y'=f(x,\ y), \tag{4.2}$$

где f – известная функция от переменной x и искомой функции $y(x)$, причем $(x,y)\in D\subset R^2$.

Решением дифференциального уравнения (4.1) или (4.2) называется такая дифференцируемая функция $y=y(x)$, определенная на интервале $(a;b)$, которая обращает это уравнение в тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения***, а график этого решения – ***интегральной кривой***.

Начальным условием (***условием Коши***) называется условие $y(x_0)=y_0$ $(x_0,\ y_0\in R)$, которым задается дополнительное требование на решение $y(x)$ дифференциального уравнения.

Теорема Коши (*о существовании и единственности решения*). Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области $D\subset R^2$, содержащей точку $(x_0,\ y_0)$, и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ в этой области, то в окрестности точки x_0 уравнение (4.2) имеет единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Общим решением дифференциального уравнения (4.2) в области D называется функция $y=\varphi(x,\ C)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\varphi(x,\ C)$ является решением данного дифференциального уравнения при любом допустимом значении произвольной постоянной C;

2) для любого начального условия $y(x_0)=y_0$, такого, что $(x_0,\ y_0)\in D$, существует такое значение $C=C_0$, что $\varphi(x_0,\ C_0)=y_0$.

Общее решение $\Phi(x,\ y,\ C)=0$, заданное в неявном виде, называется ***общим интегралом дифференциального уравнения***.

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, полученное из общего при конкретном значении $C=C_0$.

Задачей Коши называется задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0)=y_0$. Геометрически общему решению на координатной плоскости соответствует семейство интегральных кривых $y=\varphi(x,\ C)$, зависящее от числового параметра *C*, а частному решению – определенная интегральная кривая, проходящая через точку $(x_0,\ y_0)$.

Решение дифференциального уравнения, во всех точках которого не выполняется условие единственности, называется ***особым решением***. Особое решение не может быть получено из общего решения дифференциального уравнения ни при каком значении произвольной постоянной *C*.

4.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида
$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0, \tag{4.3}$$
где f_1, f_2 – функции переменной *x*; g_1, g_2 – функции переменной *y*, называется ***уравнением с разделяющимися переменными***.

Предполагая, что $f_2(x)\neq 0$ и $g_1(y)\neq 0$, почленным делением уравнения (4.3) на $f_2(x)\cdot g_1(y)$ его сводят к уравнению
$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy, \tag{4.4}$$
которое в левой части содержит выражение только от переменной *x*, а в правой – только от переменной *y* (этим объясняется название данного типа дифференциальных уравнений). Дифференциальное уравнение (4.4) называют ***дифференциальным уравнением с разделенными переменными*** и решают интегрированием равенства (4.4) слева – по переменной *x*, а справа – по переменной *y*, в результате чего получают общее решение.

Ограничения $f_2(x)\neq 0$, $g_1(y)\neq 0$ могут привести к потере решений. Поэтому следует дополнительно решить уравнения $f_2(x)=0$, $g_1(y)=0$ и с помощью подстановки в заданное дифференциальное уравнение установить, являются ли они особыми решениями этого уравнения или входят в общее решение.

4.3. Однородные дифференциальные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним

Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x,\ y)dx + f_2(x,\ y)dy = 0 \tag{4.5}$$

называют ***однородным***, если обе функции f_1 и f_2 являются однородными функциями одной и той же степени *n*, т. е. для любого допустимого параметра $t \in R, t > 0$, выполняются: $f_1(tx,\ ty) = t^n f_1(x,\ y),\ \ f_2(tx,\ ty) = t^n f_2(x,\ y)$.

Однородное уравнение может быть сведено к виду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{4.6}$$

где φ – некоторое выражение относительно $\frac{y}{x}$.

Для решения однородного уравнения (4.5) его можно вначале свести к виду (4.6), а затем заменить $\frac{y}{x} = z$, где $z = z(x)$. Этой заменой дифференциальное уравнение (4.6) приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Иногда целесообразнее сделать замену $\frac{x}{y} = z$, где $z = z(y)$.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{4.7}$$

при определенных значениях $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ сводится к однородному уравнению. Рассмотрим три возможных случая коэффициентов:

1. Если $\frac{a_1}{a_2} \ne \frac{b_1}{b_2}$, то делают замену переменных:

$$\begin{cases} x = u + \alpha, \\ y = v + \beta,\ v = v(u), \end{cases}$$

где числа α и β находят как решение системы уравнений

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Этой заменой дифференциальное уравнение (4.7) сводится к уравнению

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right).$$

Далее его решают как однородное.

2. Если $k=\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$, то уравнение (4.7) записывают в виде

$$y'=f\left(\frac{k\left(a_2x+b_2y\right)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),\ k\in R,$$

и затем заменяют $z=a_2x+b_2y$, где $z=z(x)$. Эта замена приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

3. Если $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=k,\ k\in R$, то имеем

$$y'=f\left(\frac{k\left(a_2x+b_2y+c_2\right)}{a_2x+b_2y+c_2}\right),$$

т. е. $dy=f(k)dx$. Далее интегрируют.

4.4. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{4.8}$$

где $p(x), q(x)$ – заданные непрерывные функции. Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение (4.8) имеет вид

$$y'+p(x)y=0 \tag{4.9}$$

и называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением***. Если $q(x)\neq 0$, то уравнение (4.8) называют ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением***.

Однородное уравнение (4.9) решают, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx.$$

Его общее решение имеет вид

$$y=Ce^{-\int p(x)dx},$$

где C – произвольная постоянная.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (4.8) можно найти одним из следующих методов.

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной):

1) находим общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y=Ce^{-\int p(x)dx}, C=\mathrm{const}$;

2) общее решение линейного неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \;; \tag{4.10}$$

3) подставляем функцию (4.10) в уравнение (4.8) и находим функцию $C(x)$:

$$C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

где C – произвольная постоянная;

4) общее решение уравнения (4.8) записываем в виде

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)\; e^{\int p(x)dx}dx\right). \tag{4.11}$$

Метод Бернулли:

1) ищем общее решение дифференциального уравнения (4.8) в виде

$$y = u \cdot v\;, \tag{4.12}$$

где $u = u(x), v = v(x)$ – искомые функции;

2) после подстановки функции (4.12) и ее производной в уравнение (4.8) получаем

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \;\text{ или }\; u\left(v' + vp(x)\right) + u'v = q(x); \tag{4.13}$$

3) функцию $v(x)$ подбираем как произвольное частное решение (например, из общего решения при $C = 0$) дифференциального уравнения

$$v' + vp(x) = 0; \tag{4.14}$$

4) при условии (4.14) находим общее решение уравнения с разделяющимися переменными (4.13), которое приобретает вид

$$u'v = q(x);$$

5) общее решение исходного уравнения (4.8) записываем как произведение найденных функций $u(x)$ и $v(x)$ (см. (4.12)), т. е. в виде (4.11).

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},$$

где $\alpha \in R, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, называется ***уравнением Бернулли***.

При решении таких уравнений также применяют метод Лагранжа или метод Бернулли.

4.5. Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Дифференциальным уравнением n-го порядка, $n \in N$, называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (4.15)$$

Если уравнение (4.15) можно разрешить относительно старшей производной, то дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right). \qquad (4.16)$$

Решением дифференциального уравнения n-го порядка является всякая n раз дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество. Задача нахождения решения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y'(x_0) = y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},\ y(x_0) = y_0,$$

где $x_0,\ y_0,\ y'_0,\ ...,\ y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, причем $x_0 \in (a;b)$, называется ***задачей Коши***.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка (4.15) или (4.16) называется функция

$$y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n),$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные, если:

1) она является решением заданного уравнения при любых допустимых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$;

2) при соответствующем выборе произвольных постоянных она будет решением любой задачи Коши, поставленной для заданного уравнения.

Перечислим типы уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение, разрешенное относительно n-й производной, вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

решается последовательным интегрированием n раз.

2. Уравнение вида

$$F\left(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}\right) = 0,$$

не содержащее явно искомой функции y и первых ее производных до порядка $k-1, k \in N,$ включительно, решают с помощью замены $z = y^{(k)}$, где $z = z(x)$. Таким образом, порядок исходного уравнения понижается на k единиц. Приходят к уравнению $F\left(x, z, ..., z^{(n-k)}\right) = 0$. Полученное уравнение решают далее в зависимости от его типа.

3. Уравнение вида

$$F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right)=0,$$

не содержащее явно независимой переменной *x*, решают с помощью замены $p=y'$, где $p=p(y), y=y(x)$. Тогда $y''=\dfrac{d\,p}{d\,y}p$. Этой заменой порядок исходного уравнения понижается на единицу. Аналогично выражают y''' и т. д.

4.6. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+a_1(x)y'+a_0(x)y=0. \qquad (4.17)$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n,$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ – линейно независимые частные решения уравнения (4.17), $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Совокупность *n* линейно независимых на (*a*, *b*) частных решений уравнения (4.17) называется ***фундаментальной системой решений***.

Частным случаем уравнения (4.17) является линейное однородное уравнение *n*-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+...+a_1y'+a_0y=0, \qquad (4.18)$$

где $a_0,a_1,a_2,...,a_{n-1}$ – действительные числа.

Для нахождения частных решений уравнения (4.18) составляют ***характеристическое уравнение***

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0 \qquad (4.19)$$

путем замены в уравнении (4.18) производных определенного порядка на соответствующие степени параметра λ: $y^{(k)}$ на λ^k, где $k=0, 1, ..., n$.

Каждому корню уравнения (4.19) соответствует определенное частное решение дифференциального уравнения. Вид частного решения зависит от типа корня уравнения (4.19). Возможны следующие четыре случая:

1. Если λ_0 – действительный корень кратности 1 (простой корень), то ему соответствует частное решение вида $y=e^{\lambda_0 x}$.

2. Если λ_1 – действительный корень кратности *k*, то ему соответствует *k* линейно независимых частных решений: $y_1=e^{\lambda_1 x}$, $y_2=xe^{\lambda_1 x}$, ..., $y_k=x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$.

3. Если $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ – комплексно сопряженные корни, то им соответствует два линейно независимых частных решения: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

4. Если $\lambda_{4,5} = \alpha \pm i\beta$ – пара k-кратных комплексно сопряженных корней, то им соответствуют $2k$ линейно независимых частных решений:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{k+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Поскольку характеристическое уравнение (4.19) имеет n корней, считая их кратность, то для дифференциального уравнения (4.18) можно указать n линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Эти решения образуют фундаментальную систему решений.

Тогда общее решение уравнения (4.18) определяется формулой

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

4.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad (4.20)$$

где $a_0(x), a_1(x), a_2(x), \ldots, f(x)$ – непрерывные функции на некотором промежутке (a, b).

Если $f(x) \equiv 0$ в уравнении (4.20), то получаем соответствующее ***линейное однородное дифференциальное уравнение***

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \qquad (4.21)$$

Общее решение уравнения (4.20) определяется формулой

$$y = y_0 + y_ч, \qquad (4.22)$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения, $y_ч$ – частное решение неоднородного уравнения.

Для решения дифференциального уравнения (4.20) используют **метод Лагранжа** (метод вариации произвольных постоянных). Для его реализации необходимо сделать следующее:

1. Записать соответствующее однородное дифференциальное уравнение.
2. Найти фундаментальную систему частных решений

$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \dots,\ y_n = y_n(x)$ соответствующего ему однородного дифференциального уравнения.

3. Найти общее решение однородного уравнения в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \qquad (4.23)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

4. Решение заданного неоднородного дифференциального уравнения искать в виде (4.23), но считать, что $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x), \dots, C_n = C_n(x)$ – функциональные коэффициенты, которые надо найти.

5. Для нахождения коэффициентов $C_k\left(k = \overline{1,n}\right)$ решения уравнения (4.23) необходимо записать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \qquad (4.24)$$

6. Решить систему (4.24) относительно $C_1', \dots, C_n'$ и получить $C_1'(x) = \varphi_1(x), \dots, C_n'(x) = \varphi_n(x)$.

7. Проинтегрировать полученные равенства для $C_k'(x), k = \overline{1,n}$ и найти $C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_1,\ \dots,\ C_n(x) = \int \varphi_n(x)dx + C_n,$ где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

8. Подставить полученные выражения вместо $C_1, C_2, \dots, C_n$ в записанное решение (4.23). Это и есть общее решение заданного дифференциального уравнения (4.20).

Согласно методу Лагранжа, сразу находим общее решение (4.22) заданного дифференциального уравнения (4.20) без нахождения отдельно его частного решения $y_{\text{ч}}$.

Для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений (4.20) с постоянными коэффициентами и правой частью $f(x)$ специального вида используют **метод Эйлера** (метод неопределенных коэффициентов). Этот метод применим, если функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (4.25)$$

где $\alpha, \beta \in R,\ P_n(x),\ Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно.

Для реализации метода необходимо сделать следующее:

1. Решить соответствующее однородное дифференциальное уравнение (4.21), используя характеристическое уравнение:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \qquad (4.26)$$

Общее решение дифференциального уравнения (4.21) записать в виде

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{4.27}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – частные решения уравнения (4.21), полученные в соответствии с типом корней характеристического уравнения (4.26).

2. Записать контрольное число $\sigma = \alpha + \beta i$, где α, β – числа, которые заданы в (4.25). Определить, имеется ли число σ среди корней уравнения (4.26). Если имеется, то какова кратность *k* этого корня.

3. Если $\sigma = \alpha + \beta i$ не содержится среди корней характеристического уравнения (4.26), то записать искомое частное решение $y_ч$ дифференциального уравнения (4.20) в виде

$$y_ч = e^{\alpha x}\left(\bar{P}_r(x)\cos\beta x + \overline{Q_r}(x)\sin\beta x\right). \tag{4.28}$$

Если среди корней характеристического уравнения (4.26) имеется корень $\sigma = \alpha + \beta i$, кратность которого *k*, то искомое частное решение $y_ч$ дифференциального уравнения (4.20) записать в виде

$$y_ч = x^k e^{\alpha x}\left(\bar{P}_r(x)\cos\beta x + \overline{Q_r}(x)\sin\beta x\right), \tag{4.29}$$

где в равенствах (4.28) и (4.29) $\bar{P}_r(x)$, $\overline{Q_r}(x)$ – многочлены степени *r*, $r = \max(n, m)$ – бóльшая степень заданных многочленов в (4.29).

4. Коэффициенты многочленов $\bar{P}_r(x)$, $\overline{Q_r}(x)$ найти методом неопределенных коэффициентов. Для этого необходимо вычислить производные $y'_ч,\ y''_ч,\ \ldots,\ y_ч^{(n)}$ функции (4.28) или (4.29) и подставить в левую часть уравнения (4.20). Далее надо привести подобные относительно $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$, а затем приравнять многочлены при одноименных тригонометрических функциях. Используя равенство многочленов, записывают систему уравнений относительно искомых числовых коэффициентов.

5. Найденные значения числовых коэффициентов необходимо подставить в многочлены $\bar{P}_r(x)$ и $\overline{Q_r}(x)$ частного решения $y_ч$, записанного в виде функции (4.28) или (4.29).

6. Записать общее решение заданного дифференциального уравнения (4.20) в виде (4.22), где решение y_0 имеет вид (4.27), а $y_ч$ – решение вида, записанного в п. 5.

Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка применяются для анализа линейной стационарной цепи (ЛСЦ) и нахождения уравнения, связывающего выходное напряжение $u_{вых}(t)$ с входным напряжением $u_{вх}(t)$.

Для произвольной ЛСЦ основное соотношение будет выражаться линейным неоднородным дифференциальным уравнением *n*-го порядка:

$$a_n \frac{d^n u_{вых}(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} u_{вых}(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{du_{вых}(t)}{dt} + a_0 u_{вых}(t) = \\ = b_m \frac{d^m u_{вх}(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} u_{вх}(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du_{вх}(t)}{dt} + b_0 u_{вх}(t), \quad (4.30)$$

причем порядок дифференциального уравнения равен количеству индуктивностей и конденсаторов в цепи.

При нахождении решения данного дифференциального уравнения вначале необходимо решить соответствующее линейное однородное уравнение

$$a_n \frac{d^n u_{вых}(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} u_{вых}(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{du_{вых}(t)}{dt} + a_0 u_{вых}(t) = 0. \quad (4.31)$$

Нуль в правой части уравнения означает, что входное напряжение на некотором интервале времени $t > t_0$ равно нулю. Таким образом, с момента $t = t_0$ (отключения источника входного напряжения) происходит релаксация накопленной энергии, которая проявляется в виде затухающего колебания, возникающего в цепи. Это колебание в виде зависимости $u_{вых}(t)$ называется ***собственной реакцией цепи***. Общее решение дифференциального уравнения (4.30), т. е. собственная реакция цепи, представляет собой линейную комбинацию вида $u_{вых}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}$, компоненты которой $e^{\lambda_i t}$ называют ***собственными колебаниями*** цепи, а $\lambda_i = \sigma_i + i\omega_i$ – ***собственными комплексными частотами***, причем эти частоты являются корнями характеристического уравнения $b_n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_1 \lambda + b_0 = 0$, соответствующего уравнению (4.30).

4.8. Примеры решения задач

***Пример* 1**. *Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы F, прямо пропорциональной времени от начала движения и обратно пропорциональной скорости движения v. Установить зависимость между скоростью и временем, если $v(0) = 0$.*

Решение. Согласно второму закону Ньютона,

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}.$$

Для нахождения $v(t)$ имеем задачу Коши:

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{kt}{v};\ v(0) = 0.$$

Решим полученное уравнение с разделяющимися переменными вида (4.3). Разделив переменные и проинтегрировав равенство, получим уравнение с разделенными переменными вида (4.4):

$$v\,dv = \frac{k}{m} t\,dt \Rightarrow \int v\,dv = \frac{k}{m}\int t\,dt,$$

откуда

$$\frac{v^2}{2}=\frac{k}{m}\cdot\frac{t^2}{2}+C.$$

Воспользовавшись начальным условием $v(0)=0$, установим численное значение постоянной: $C=0$. Таким образом, зависимость между скоростью и временем движения материальной точки массы m определяется функцией $v(t)=\sqrt{\frac{k}{m}}t.$

***Ответ*:** $v(t)=\sqrt{\frac{k}{m}}t$.

Пример 2. *В помещении объемом* 200 м^3 *в* 1 м^3 *воздуха содержится* 1,5 г *паров вредных примесей. Вентилятор подает* 20 м^3/мин *воздуха, в котором содержится* 0,4 г/м^3 *примесей. Через какой промежуток времени содержание вредных примесей в помещении уменьшится втрое?*

Решение. Пусть $y(t)$– содержание вредных примесей в момент времени *t*. Выясним, на какую величину изменится содержание примесей за промежуток времени от *t* до $t+\Delta t$.

За время Δt вентилятор подаст в помещение $20\Delta t\cdot 0,4=8\Delta t$ (г) вредных примесей и вытеснит $20\cdot\frac{y(t)}{200}\Delta t=0,1y(t)\Delta t$ (г) примесей. Здесь 200 м^3 – объем воздуха в помещении, 20 м^3 – объем подаваемого воздуха с плотностью вредных примесей в нем 0,4 г/м^3. Таким образом, разница в содержании примесей за указанный промежуток времени Δt составит $y(t+\Delta t)-y(t)=8\Delta t-0,1y(t)\Delta t$ (г). Из полученного соотношения при делении на Δt перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $y'=8-0,1y$, общее решение которого имеет вид $y=80-10Ce^{\frac{-t}{10}}$.

Для нахождения частного решения воспользуемся начальным условием $y(0)=1,5\cdot 200=300$ (г), указывающим первоначальное содержание примесей в помещении. Тогда из уравнения $300=80-10Ce^{\frac{-t}{10}}$ находим $C=-22$, т. е. процесс изменения содержания вредных примесей в нашем случае описывается следующим дифференциальным уравнением: $y=80+220e^{\frac{-t}{10}}$.

Чтобы определить, через какой промежуток времени содержание вредных примесей в помещении уменьшится втрое, т. е. составит 100 г вместо 300 г, в полученное уравнение надо подставить $y(t)=100$. Получим время $t=10\cdot\ln 11\approx 24$ мин.

***Ответ*:** 24 мин.

Пример 3. *Найти силу тока в электрической цепи с сопротивлением* $R = \text{const}$, *самоиндукцией* $L = \text{const}$ *и ЭДС* $E = E_0 = \text{const}$ *при условии, что* $i(0) = I_0 = \text{const}$.

Решение. Сила тока $i(t)$ описывается линейным дифференциальным уравнением $\dfrac{d\,i(t)}{d\,t} + \dfrac{R}{L} i(t) = \dfrac{E(t)}{L}$. Учитывая тот факт, что $E = E_0 = \text{const}$, уравнение примет вид

$$\frac{d\,i(t)}{d\,t} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E_0}{L}.$$

Это дифференциальное уравнение типа (4.8). Применим метод Бернулли, сделав замену $i(t) = u(t) \cdot v(t)$ (см. формулы (4.12)–(4.14)). Тогда $i'(t) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$. После подстановки введенных функций в уравнение имеем $u'v + uv' + \dfrac{R}{L} uv = \dfrac{E_0}{L} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \dfrac{R}{L} v\right) = \dfrac{E_0}{L}$. Найдем сначала частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $v' + \dfrac{R}{L} v = 0$, т. е. $\dfrac{d\,v}{d\,t} = -\dfrac{R}{L} v$. Разделив переменные и проинтегрировав по переменной *t* данное уравнение, имеем

$$\frac{d\,v}{v} = -\frac{R}{L} d\,t \Rightarrow \ln v = -\frac{R}{L} t.$$

Частное решение таково: $v = e^{-\frac{R}{L}t}$. Затем подставим полученное частное решение в исходное уравнение $u'v = \dfrac{E_0}{L}$ и придем к новому уравнению с разделяющимися переменными:

$$u' e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E_0}{L}.$$

Отсюда $\dfrac{d\,u}{d\,t} = \dfrac{E_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \Rightarrow d\,u = \dfrac{E_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} d\,t$, после интегрирования $\int d\,u = \dfrac{E_0}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} d\,t \Rightarrow u = \dfrac{E_0}{L} \cdot \dfrac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C$, где C – произвольная постоянная. Таким образом, $u = \dfrac{E_0}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C$. Вернемся к прежней переменной $i(t) = u(t) \cdot v(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\dfrac{E_0}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C\right)$. Имеем

$$i(t) = \frac{E_0}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Учитывая начальное условие $i(0)=I_0$, найдем постоянную C из уравнения $I_0=\frac{E_0}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t}$. Так как $I_0=\frac{E_0}{R}+C$, то $C=I_0-\frac{E_0}{R}$. Окончательно имеем

$$i(t)=\frac{E_0}{R}+\left(I_0-\frac{E_0}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Анализируя полученную зависимость, видим, что с течением времени, т. е. при $t\to+\infty$, сила тока $i(t)$ стремится к постоянному значению $\frac{E_0}{R}$.

Ответ: $i(t)=\frac{E_0}{R}+\left(I_0-\frac{E_0}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$.

Пример 4. *Решить задачу Коши* $\frac{d^2u(t)}{dt^2}+2\gamma\frac{du(t)}{dt}+\omega_0 u(t)=0, u(0)=0,$ *где* γ *– коэффициент затухания;* ω_0 *– резонансная частота*.

Решение. Нам дано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (4.31) типа (4.18). Сначала составим характеристическое уравнение (см. формулу (4.19)) $\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega_0^2=0$ и определим его корни. Мы получим комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2}=-\gamma\pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$, которым, согласно случаю 3 алгоритма подразд. 4.6, соответствуют линейно независимые частные решения $u_1(t)=e^{-\gamma t}\left(\cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t+\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right)$ и $u_2(t)=e^{-\gamma t}\left(\cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t-\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right)$. Общее решение имеет вид $u(t)=C_1u_1(t)+C_2u_2(t)$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные. В нашем случае общее решение можно записать в виде

$$u(t)=C_1e^{-\gamma t}\left(\cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t+\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right)+C_2e^{-\gamma t}\left(\cos\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t-\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t\right).$$

Исходя из начального условия и положив $U_m=2C_1$, получим, что $C_2=-C_1$. Следовательно, $u(t)=U_me^{-\gamma}\sin\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t$.

При $\gamma<0$ колебания являются нарастающими по амплитуде; в случае $\gamma>0$ на выходе генератора будет экспоненциально затухающее колебание; при $\gamma=0$ – гармоническое колебание $u(t)=U_m\sin\omega_0 t$.

5. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1. Понятие двойного интеграла, его свойства и вычисление в декартовой системе координат

Пусть в замкнутой ограниченной области D плоскости xOy определена непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем указанную область произвольным образом на элементарные плоские области $S_1, S_2, ..., S_n$ (рис. 5.1), площади которых будем считать соответственно равными $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. Внутри каждой элементарной области выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i) \in S_i$, $i = \overline{1, n}$.

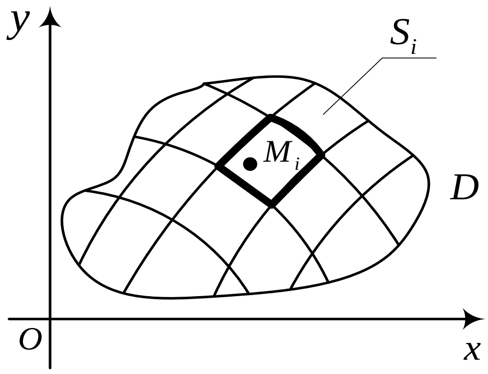

Рис. 5.1

Диаметром области назовем наибольшее из расстояний между любыми двумя точками границы области.

Обозначим через d_i диаметры элементарных областей S_i, а через Δ – максимальный диаметр, т. е. $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. Составим интегральную сумму функции $f(x, y)$ в области D:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Устремим $n \to \infty$ так, чтобы $\Delta \to 0$. Если существует предел интегральной суммы, который не зависит ни от способа разбиения области D на элементарные области, ни от выбора точек M_i внутри каждой из этих областей, то этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

При этом говорят, что функция $f(x, y)$ ***интегрируема*** в области D, а x и y называют ***переменными интегрирования***.

Достаточное условие интегрируемости функции: если определенная в некоторой ограниченной замкнутой области функция непрерывна, то она интегрируема в этой области.

Если функции $f(x, y)$, $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы в области D, то имеют место следующие свойства:

1) ***линейность***:

$$\iint\limits_D \left(C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y)\right) dxdy = C_1 \iint\limits_D f_1(x, y)\,dxdy + C_2 \iint\limits_D f_2(x, y)\,dxdy,$$

где $C_1 = \text{const}, C_2 = \text{const}$;

2) ***аддитивность***:

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dxdy,$$

причем области D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек;

3) если $\forall (x, y) \in D$ выполняется неравенство $f_1(x, y) \le f_2(x, y)$, то

$$\iint\limits_{D} f_1(x, y)dxdy \le \iint\limits_{D} f_2(x, y)dxdy;$$

4) ***оценка модуля интеграла***:

$$\left| \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy \right| \le \iint\limits_{D} \left| f(x, y) \right| dxdy;$$

5) если $m = \min\limits_{(x;y) \in D} f(x, y)$, $M = \max\limits_{(x;y) \in D} f(x, y)$, то

$$mS \le \iint\limits_{D} f(x; y)dS \le MS,$$

где S – площадь области D.

Геометрический смысл двойного интеграла:

$$\iint\limits_{D} dS = S, \qquad (5.1)$$

где S – площадь области D.

В основе вычисления двойного интеграла в декартовых координатах лежит понятие элементарной области. Область D называют ***элементарной в направлении оси Oy***, если всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку области параллельно оси Oy, пересекает только один раз (только одну) «линию входа» и только один раз (только одну) «линию выхода», которые ограничивают эту область. В частности, это выполняется, если область D имеет вид, приведенный на рис. 5.2.

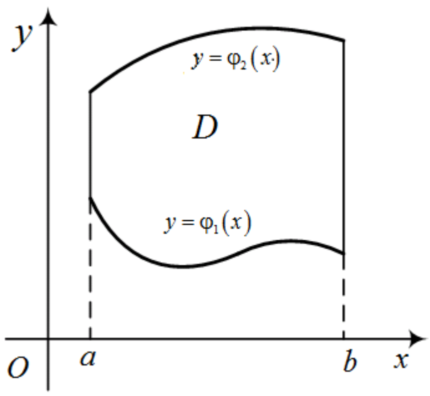

Рис. 5.2

$$D = \left\{ (x; y) \,\middle|\, a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \right\}.$$

В случае элементарной области D в направлении оси Oy верна формула

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (5.2)$$

Область D называют ***элементарной в направлении оси Ox***, если всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку области параллельно оси Ox, пересекает только один раз (только одну) «линию входа» и только один раз (только одну) «линию выхода», которые ограничивают эту область. В частности, это выполняется, если область D имеет вид, приведенный на рис. 5.3.

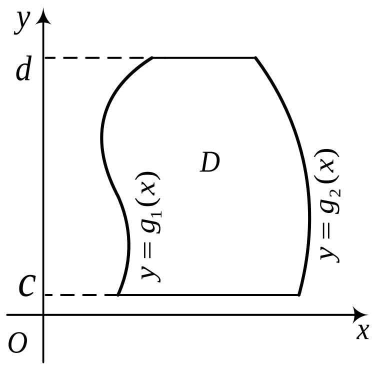

Рис. 5.3

$$D = \left\{ (x;y) \,\middle|\, c \le y \le d,\ g_1(y) \le x \le g_2(y) \right\}.$$

Тогда

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (5.3)$$

Если область D является элементарной и в направлении оси Ox, и в направлении оси Oy, то для вычисления двойного интеграла можно использовать любую из формул (5.2) или (5.3).

Если область интегрирования D не является элементарной ни в направлении оси Ox, ни в направлении оси Oy, то необходимо произвести разбиение этой области D на конечное количество областей и воспользоваться свойством аддитивности двойных интегралов.

5.2. Вычисление двойных интегралов в полярной системе координат

Если область интегрирования представляет собой круг или его часть, для упрощения производимых вычислений переходят к полярным координатам. Формулы перехода от декартовых координат x и y к полярным координатам φ и ρ имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \qquad (5.4)$$

где $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$).

Формула замены переменных в двойном интеграле при переходе к полярным координатам имеет вид

$$\iint\limits_{D} f(x;y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho\,d\varphi\,d\rho, \tag{5.5}$$

где D^* – область в полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат; $f(x, y)$ – функция, непрерывная в этой области.

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах также переходят к повторному интегралу. При этом используют понятие области, элементарной в полярной системе.

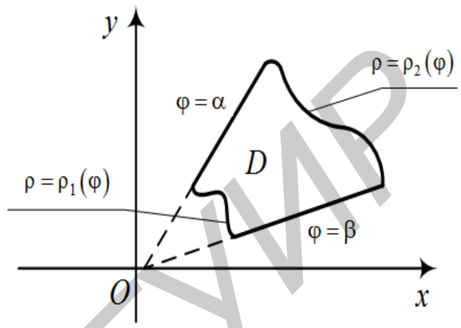

Рис. 5.4

Область D называют ***элементарной в полярной системе***, если всякий луч, выходящий из полюса и проходящий через внутреннюю точку области, пересекает только одну (только один раз) «линию входа» и только одну (только один раз) «линию выхода».

В случае элементарной области (рис. 5.4) верна формула

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\, f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\rho. \tag{5.6}$$

Если область интегрирования D ограничена эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ или его частью, обосновано применение ***обобщенных полярных координат***, переход к которым осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{5.7}$$

Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)ab\rho\,d\varphi\,d\rho,$$

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)ab\rho\,d\varphi\,d\rho, \tag{5.8}$$

где D^* – область в обобщенной полярной системе координат, соответствующая области D в декартовой системе координат. Далее переходят к повторному интегралу.

5.3. Геометрические и физические приложения двойных интегралов

1. ***Площадь плоской фигуры***

Для нахождения **площади плоской фигуры** D в зависимости от того, задана она в декартовых или полярных координатах, применяют соответственно формулы

$$S=\iint\limits_{D} dxdy \quad \text{и} \quad S=\iint\limits_{D^*} \rho\, d\varphi\, d\rho. \tag{5.9}$$

2. ***Объем цилиндрического тела***

Чтобы найти **объем** v **цилиндрического тела** V (рис. 5.5), ограниченного сверху частью поверхности $z=f(x, y)$, применяют формулу

$$v=\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy, \tag{5.10}$$

где D – основание криволинейного цилиндра, а его образующие параллельны оси Oz.

3. ***Площадь ограниченной части поверхности***

Площадь ограниченной части **поверхности**, заданной уравнением $z=z(x, y)$ и имеющей проекцию D_{XY} на плоскость xOy, вычисляют по формуле

$$S=\iint\limits_{D_{XY}} \sqrt{1+{z'_x}^2+{z'_y}^2}\,dxdy, \tag{5.11}$$

где z'_x и z'_y – непрерывные в области D_{XY} функции.

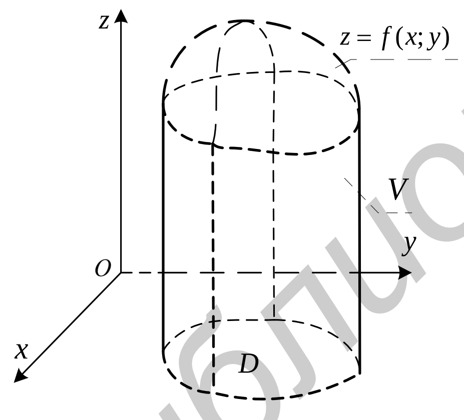

Рис. 5.5

4. ***Масса плоской пластины***

Если $f(x, y)$ – непрерывная функция, выражающая поверхностную плотность распределения массы по плоской пластине D, то **масса** m этой **плоской пластины** вычисляется по формуле

$$m=\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy. \tag{5.12}$$

5. ***Координаты центра масс***

Для нахождения **координат центра масс** плоской материальной пластины D с поверхностной плотностью распределения массы, выражаемой функцией $f(x, y)$, применяют следующие формулы:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\, f\left(x, y\right) dxdy,$$
$$y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\, f\left(x, y\right) dxdy, \qquad (5.13)$$

где m – масса пластины D, вычисляемая по формуле (5.12).

5.4. Примеры решения задач

***Задача* 1.** *Найти массу плоской пластины D, ограниченной линиями* $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y$, *если плотность распределения массы на пластине* $f\left(x; y\right) = x^2 y$.

Решение. Изобразим пластину D (рис. 5.6). Расставим пределы интегрирования, исходя из рисунка области D: $0 \le x \le 2$, $\frac{x^2}{4} \le y \le 2\sqrt{x}$. Найдем массу этой пластины по формуле (5.12):

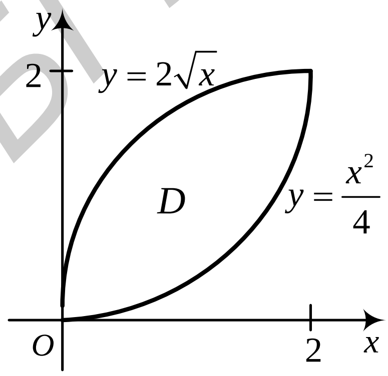

Рис. 5.6

$$m = \iint\limits_D x^2 y dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} x^2 y dy = \int\limits_0^2 x^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=\frac{x^2}{4}}^{y=2\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(4x^3 - \frac{1}{16}x^6\right) dx = \frac{1}{2}\left.\left(x^4 - \frac{1}{112}x^7\right)\right|_0^2 = \frac{51}{7}.$$

***Ответ*:** $\frac{51}{7}$.

***Задача* 2.** *Найти координаты центра масс плоской однородной пластины D, ограниченной линиями* $y^2 = 2x + 2$ *и* $y^2 = 2 - x$.

Решение. Изобразим пластину D (рис. 5.7). В уравнениях кривых, ограничивающих указанную область, выразим x через y, поскольку область является элементарной в направлении оси Ox. Из первого уравнения имеем $y^2 = 2\left(x + 1\right)$, т. е. $x + 1 = \frac{y^2}{2}$, $x = \frac{y^2}{2} - 1$. Из второго уравнения линии получаем $x = 2 - y^2$.

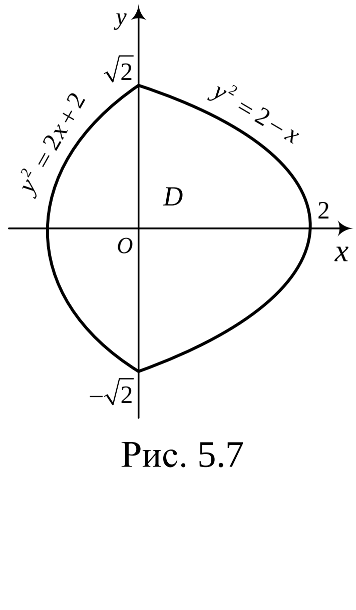

Рис. 5.7

Определим границы изменения переменной y: $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$. Учитывая симметричность отрезка изменения y, будем считать, что $0 \le y \le \sqrt{2}$.

Найдем массу этой пластины по формуле (5.12):

$$m=\iint\limits_D dxdy=2\int\limits_0^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{\frac{y^2}{2}-1}^{2-y^2}dx=2\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(3-\frac{3y^2}{2}\right)dy=$$

$$=6\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{y^2}{2}\right)dy=6\left(y-\frac{1}{6}y^3\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}.$$

Воспользуемся формулами (5.13) и вычислим сначала абсциссу, а затем и ординату центра масс пластины:

$$x_0=\frac{1}{m}\iint\limits_D xdxdy=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{\frac{y^2}{2}-1}^{2-y^2}xdx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2}{2}-1}^{2-y^2}dy=\frac{3\sqrt{2}}{64}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(y^4-4y^2+4\right)dy=$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{32}\left(\frac{y^5}{5}-\frac{4y^3}{3}+4y\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{2}{5};$$

$$y_0=\frac{1}{m}\iint\limits_D ydxdy=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}ydy\int\limits_{\frac{y^2}{2}-1}^{2-y^2}dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}yx\Bigg|_{x=\frac{y^2}{2}-1}^{x=2-y^2}dy=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}y\left(2-y^2-\frac{y^2}{2}+1\right)dy=\frac{\sqrt{2}}{16}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(3y-\frac{3}{2}y^3\right)dy=\frac{3\sqrt{2}}{16}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=0.$$

Ответ: точка $\left(\frac{2}{5};0\right)$ – центр масс данной пластины.

6. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1. Понятие тройного интеграла, его свойства и геометрический смысл

Пусть в замкнутой ограниченной пространственной области *V*, расположенной в декартовой прямоугольной системе координат *Oxyz*, определена непрерывная функция $w = f(x, y, z)$. Разобьем указанную область произвольным образом на элементарные области $V_1, V_2, ..., V_n$, объемы которых будем считать соответственно равными $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_n$. Внутри каждой элементарной области выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i) \in V_i,\ i = \overline{1, n}$.

Диаметром области будем называть наибольшее из расстояний между любыми двумя точками границы области. Обозначим через d_i диаметры элементарных областей V_i, а через Δ – максимальный диаметр, т. е. $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. Составим интегральную сумму функции $f(x, y, z)$ в области *V*:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Устремим $n \to \infty$ так, чтобы $\Delta \to 0$. Если существует предел интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения области *V* на частичные области V_i, ни от выбора точек $M_i(x_i; y_i; z_i)$ внутри каждой из этих областей, то этот предел называется ***тройным интегралом*** от функции $f(x, y, z)$ по области *V*:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

При этом говорят, что функция $f(x, y, z)$ ***интегрируема*** в области *V*; а x, y и z называют ***переменными интегрирования***.

Достаточное условие интегрируемости функции: если определенная в некоторой ограниченной замкнутой области функция непрерывна, то она интегрируема в этой области.

Геометрический смысл тройного интеграла:

$$\iiint\limits_V dxdydz = \upsilon, \qquad (6.1)$$

где υ – объем области *V*.

Если функции $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ интегрируемы в области *V*, то имеют место следующие свойства:

1) ***линейность***:

$$\iiint\limits_V \left(C_1\ f_1(x, y, z) + C_2\ f_2(x, y, z)\right) dxdydz =$$
$$= C_1 \iiint\limits_V f_1(x, y, z)\, dxdydz + C_2 \iiint\limits_V f_2(x, y, z)\, dxdydz,$$

где $C_1 = \text{const},\ C_2 = \text{const}$;

2) ***аддитивность***:

$$\iiint\limits_{V_1 \cup V_2} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x, y, z)\, dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x, y, z)\, dxdydz,$$

где V_1 и V_2 – области, не имеющие общих внутренних точек;

3) если выполняется неравенство $f_1(x, y, z) \le f_2(x, y, z)\ \ \forall (x; y) \in V$, то

$$\iiint\limits_V f_1(x, y, z)\, dxdydz \le \iiint\limits_V f_2(x, y, z)\, dxdydz;$$

4) ***оценка модуля интеграла***:

$$\left| \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz \right| \le \iiint\limits_V \left| f(x, y, z) \right| dxdydz;$$

5) если $m = \min\limits_{(x;y;z)\in V} f(x, y, z),\ M = \max\limits_{(x;y;z)\in V} f(x, y, z),$ то

$$m\upsilon \le \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz \le M\upsilon,$$

где υ – объем области *V*.

6.2. Вычисление тройных интегралов в декартовой системе координат

Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах основано на понятии элементарной пространственной области. Область *V* называют ***элементарной в направлении оси Oz***, если:

1) всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку пространственной области *V* параллельно оси *Oz*, пересекает только один раз (только одну) «поверхность входа» и только один раз (только одну) «поверхность выхода»;

2) проекция *D* пространственной области *V* на плоскость *xOy* является правильной плоской областью в направлении оси *Ox* или *Oy*.

Пусть область V является элементарной в направлении оси Oz, ограниченной снизу поверхностью $z = g_1(x, y)$, а сверху – поверхностью $z = g_2(x, y)$ (рис. 6.1). Пусть она проектируется на область $D \subset xOy$, элементарную в направлении оси Oy, и снизу ее ограничивает кривая $y = \varphi_1(x)$, а сверху – кривая $y = \varphi_2(x)$, $x \in [a;b]$ (рис. 6.2).

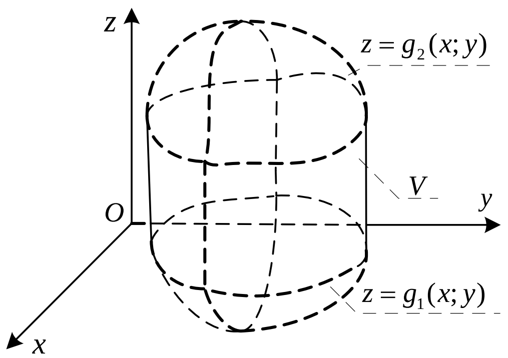

Рис. 6.1

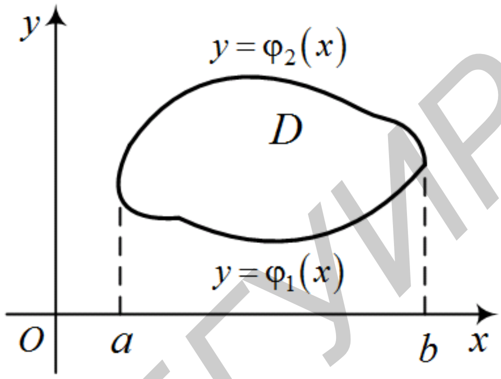

Рис. 6.2

Тогда справедлива следующая формула:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (6.2)$$

Аналогично рассматривают пространственные области, элементарные в направлении оси Ox или Oy, и применяют соответствующие формулы перехода к повторным интегралам.

Если область интегрирования V не подпадает под эти случаи, необходимо произвести разбиение этой области V на конечное число элементарных областей и воспользоваться свойством аддитивности.

6.3. Вычисление тройных интегралов в цилиндрической и сферической системах координат

Если область интегрирования при вычислении тройного интеграла представляет собой тело, ограниченное цилиндром или некоторой его частью, целесообразно перейти к ***цилиндрическим координатам***. Схематически переход от декартовой системы координат к цилиндрической изображен на рис. 6.3.

Формулы перехода от декартовых координат x, y и z к цилиндрическим координатам φ, ρ и z имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad (6.3)$$

где $0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$), $|z| < +\infty$.

Формула замены переменных в тройном интеграле при переходе к цилиндрическим координатам имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\, d\varphi d\rho dz, \qquad (6.4)$$

где V^* – область в цилиндрической системе координат, соответствующая области V в декартовой системе координат; $f(x, y, z)$ – функция, непрерывная в этой области.

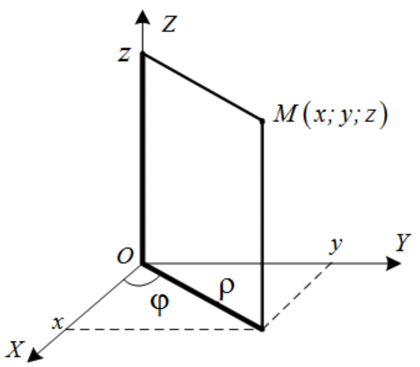

Рис. 6.3

Вычисление тройных интегралов в цилиндрических координатах основано на понятии элементарной пространственной области.

Область V называют ***элементарной пространственной областью в направлении оси Oz*** в цилиндрической системе координат, если:

1) переход от декартовых координат к цилиндрическим осуществляется по формулам (6.3);

2) всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку пространственной области V параллельно оси Oz, пересекает только один раз (только одну) «поверхность входа» и только один раз (только одну) «поверхность выхода»;

3) проекция D пространственной области V на плоскость xOy является элементарной в полярной системе координат.

Аналогично в случае перехода к цилиндрическим координатам по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \\ y = y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \\ x = x \end{cases}$$

вводят понятие элементарной пространственной области в направлении оси Oy или оси Ox в цилиндрической системе координат.

Если область интегрирования при вычислении тройного интеграла представляет собой тело, ограниченное сферой или некоторой ее частью, целесообразно перейти к ***сферическим*** координатам. Схематически переход от декартовой системы координат к сферической изображен на рис. 6.4.

Формулы перехода от декартовых координат x, y и z к сферическим координатам r, θ и φ, исходя из приведенного чертежа, имеют вид

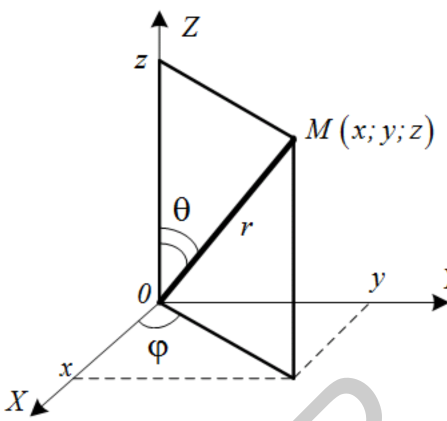

Рис. 6.4

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad (6.5)$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$), $0 \le \theta \le \pi$.

Формула замены переменных в тройном интеграле при переходе к сферическим координатам имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{V^{**}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi, \qquad (6.6)$$

где V^{**} – область в сферической системе координат, соответствующая области V в декартовой системе координат; $f(x, y, z)$ – функция, непрерывная в этой области.

6.4. Геометрические и физические приложения тройных интегралов

1. ***Объем пространственной области***

Объем v пространственной области V находят по формулам

$$v = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V^*} \rho\,d\varphi\,d\rho\,dz = \iiint\limits_{V^{**}} r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr \qquad (6.7)$$

в зависимости от того, какая система координат используется: декартова, цилиндрическая или сферическая. Здесь подразумевается, что область V, заданная в декартовых координатах, преобразуется в пространственную область V^* в цилиндрической системе координат или область V^{**} в сферических координатах.

2. ***Масса пространственной области***

Если $f(x, y, z)$ – непрерывная функция, выражающая объемную плотность распределения массы внутри пространственного тела V, то масса m области V вычисляется по формуле

$$m = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz. \qquad (6.8)$$

3. ***Центр масс***

Для нахождения координат центра масс пространственного тела V применяют формулы:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\, f\left(x, y, z\right)dxdydz,$$
$$y_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\, f\left(x, y, z\right)dxdydz, \qquad (6.9)$$
$$z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\, f\left(x, y, z\right)dxdydz,$$

где m – масса области V, вычисляемая по формуле (6.8); x_0, y_0 и z_0 – соответственно абсцисса, ордината и аппликата искомой точки.

6.5. Примеры решения задач

***Задача* 1.** *Найти массу призмы, ограниченной поверхностями* $x=0$, $z=0$, $y=2$, $y=4$, $x+2z=4$ *и заполненной массой с плотностью* $f\left(x, y, z\right)=x+y$.

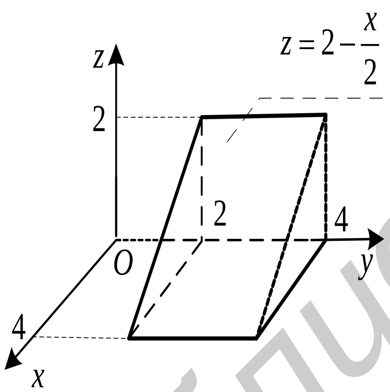

Рис. 6.5

Решение. Нарисуем призму (рис. 6.5). Она элементарна в направлении оси Oz.

По формуле (6.8) найдем массу призмы с учетом данной плотности:

$$m = \iiint\limits_V \left(x+y\right)dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^4 dx \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^{2-\frac{x}{2}} \left(x+y\right)dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_2^4 \left(x+y\right)z \Bigg|_{z=0}^{z=2-\frac{x}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 dx \int\limits_2^4 (4x+4y-x^2-xy)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \left(4xy+2y^2-x^2y-\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=2}^{y=4} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \left(4xy+2y^2-x^2y-\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=2}^{y=4} dx = \frac{1}{2}\left(x^2+24x-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^4 = \frac{104}{3}.$$

***Ответ*:** $\dfrac{104}{3}$.

***Задача* 2.** *Найти массу шара* $x^2+y^2+z^2 \le 4z$ *с плотностью распределения массы* $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Решение. Изобразим указанное тело V (рис. 6.6). Так как тело ограничено сферой $x^2+y^2+z^2=4z$, перейдем к сферическим координатам, воспользовавшись формулами (6.5). Запишем уравнение этой сферы в сферических координатах: $r^2=4r\cos\theta$, т. е. $r=4\cos\theta$. Определим границы интегрирования в сферических координатах:

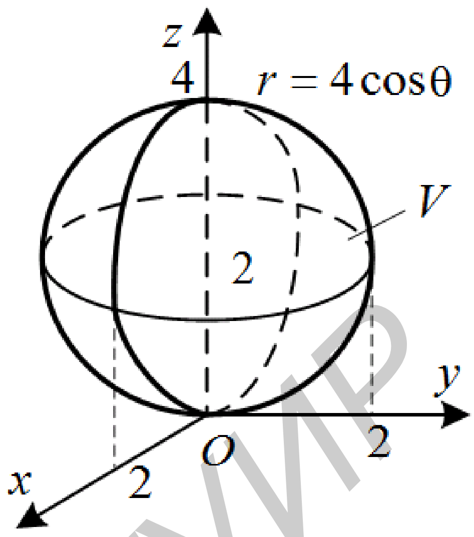

Рис. 6.6

$$0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le r\le 4\cos\theta.$$

Найдем массу шара с учетом данной плотности, применив формулу (6.8):

$$m=\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{4\cos\theta}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2}}\,dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{4\cos\theta}r\sin\theta dr=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}r^2\Big|_{r=0}^{r=4\cos\theta}\sin\theta d\theta=$$

$$=8\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta=-8\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\cos\theta=$$

$$=-\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}\cos^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{8}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{16\pi}{3}.$$

***Ответ*:** $\dfrac{16\pi}{3}$.

***Задача* 3.** *Найти координаты центра масс тела, ограниченного поверхностями* $z=4-x^2-y^2$, $z=0$ *и заполненного массой с плотностью* $f(x,y,z)=x^2+y^2$.

Решение. Нарисуем указанное тело V (рис. 6.7). Перейдем к цилиндрическим координатам, воспользовавшись формулами (6.3). Определим границы интегрирования в цилиндрических координатах с учетом того, что область интегрирования элементарна в направлении оси Oz: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$, $0 \le z \le 4 - \rho^2$.

Найдем массу тела с учетом данной плотности, применив формулу (6.8):

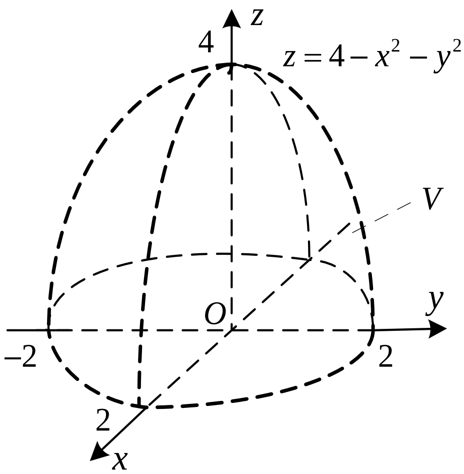

Рис. 6.7

$$m = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_0^{4-\rho^2} \rho^3 dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 z \Bigg|_{z=0}^{z=4-\rho^2} d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(4\rho^3 - \rho^5\right) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\rho^4 - \frac{1}{6}\rho^6\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \left(16 - \frac{32}{3}\right) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}\varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{32\pi}{3}.$$

С помощью первой из формул (6.9) найдем абсциссу x_0 центра масс данного тела:

$$x_0 = \frac{3}{32\pi} \iiint\limits_V x\left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \frac{3}{32\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_0^{4-\rho^2} \rho^4 \cos\varphi \, dz =$$

$$= \frac{3}{32\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^4 \cos\varphi \, z \Bigg|_{z=0}^{z=4-\rho^2} d\rho = \frac{3}{32\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4\rho^4 - \rho^6)\cos\varphi \, d\rho =$$

$$= \frac{3}{32\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \left(\frac{4\rho^5}{5} - \frac{\rho^7}{7}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=2} d\varphi = \frac{24}{35\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{24}{35\pi} \sin\varphi \Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Аналогичным образом найдем ординату y_0 и аппликату z_0 центра масс:

$$y_0 = \frac{3}{32\pi} \iiint\limits_V y\left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \frac{3}{32\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_0^{4-\rho^2} \rho^4 \sin\varphi \, dz =$$

$$= \frac{3}{32\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^4 \sin\varphi \, z \Bigg|_{z=0}^{z=4-\rho^2} d\rho = \frac{3}{32\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sin\varphi \, (4\rho^4 - \rho^6) d\rho =$$

$$= \frac{3}{32\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{4}{5}\rho^5 - \frac{1}{7}\rho^7\right)\Bigg|_0^2 \sin\varphi \, d\varphi = \frac{24}{35\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{24}{35\pi} \cdot (-\cos\varphi) \Bigg|_0^{2\pi} = 0;$$

$$z_0 = \frac{3}{32\pi}\iiint\limits_V z\left(x^2+y^2\right)dxdydz = \frac{3}{32\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} d\rho \int\limits_0^{4-\rho^2} \rho^3 z dz =$$

$$= \frac{3}{64\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho^3 z^2 \Bigg|_{z=0}^{z=4-\rho^2} d\rho = \frac{3}{64\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \left(16\rho^3 - 8\rho^5 + \rho^7\right) d\rho =$$

$$= \frac{3}{64\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(4\rho^4 - \frac{4\rho^6}{3} + \frac{\rho^8}{8}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = 1.$$

Ответ: центр масс тела находится в точке $M_0\left(0; 0; 1\right)$.

7. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

7.1. Понятие криволинейного интеграла 1-го рода, его свойства и вычисление

Пусть на плоскости *xOy* задана гладкая незамкнутая кривая *L* с началом в точке *A* и концом в точке *B*, не имеющая самопересечений. Допустим, что на этой кривой определена непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем указанную кривую *L* произвольным образом на элементарные дуги $L_1, L_2, ..., L_n$, длины которых будем считать соответственно равными $\Delta L_1, \Delta L_2, ..., \Delta L_n$. На каждой из элементарных дуг L_i выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим через $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta L_i$ и составим ***интегральную сумму***:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta L_i.$$

Устремим $n \to \infty$ так, чтобы $\Delta \to 0$. Если существует предел интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения кривой *L* на части, ни от выбора точек $M_i(x_i; y_i)$, то этот предел называется ***криволинейным интегралом 1-го рода*** от функции $f(x, y)$ вдоль кривой *L*:

$$\int_L f(x, y) dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta L_i,$$

причем *dl* называют ***дифференциалом длины дуги***, а саму кривую *L* – ***линией интегрирования***. При этом говорят, что функция $f(x, y)$ ***интегрируема*** по кривой *L*.

Если *L* – гладкая кривая в трехмерном пространстве без самопересечений, а $f(x, y, z)$ – непрерывная функция в точках этой кривой, то криволинейный интеграл 1-го рода по этой кривой определяется равенством

$$\int_L f(x, y, z) dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta L_i$$

в случае существования предела и при аналогичных плоской кривой условиях.

Если кривая *L* представляет собой замкнутый контур (т. е. начало кривой и ее конец совпадают), используют специальное обозначение: $\oint\limits_L f(x, y, z) dl$.

Достаточное условие интегрируемости функции: если функция определена и непрерывна в точках гладкой, не имеющей самопересечений, кривой, то она интегрируема по этой кривой.

Если функции $f(x, y)$, $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы по гладкой кривой *L*, то справедливы следующие свойства:

1) ***линейность***:

$$\int\limits_L \left(C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y)\right) dl = C_1 \int\limits_L f_1(x, y)\, dl + C_2 \int\limits_L f_2(x, y)\, dl,$$

где $C_1 = \text{const}$, $C_2 = \text{const}$;

2) ***аддитивность***: если гладкая или кусочно-гладкая кривая *L* состоит из конечного числа гладких дуг L_i, $i = \overline{1, n}$, то

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{L_i} f(x, y)\, dl;$$

3) ***независимость от направления пути интегрирования***: если кривая *L* соединяет точки *A* и *B*, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_{BA} f(x, y)\, dl;$$

4) ***оценка модуля интеграла***:

$$\left| \int\limits_L f(x, y)\, dl \right| \le \int\limits_L \left| f(x, y) \right| dl.$$

Допустим, что $z = f(x, y)$ – функция, непрерывная в точках кривой *L*. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода сводится к вычислению определенного интеграла, причем вид формулы зависит от способа задания кривой *L*:

1. Если кривая *L* задана явно уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx. \qquad (7.1)$$

2. Если кривая *L* задана явно уравнением $x = x(y)$, $c \le x \le d$, то

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + \left(x'(y)\right)^2}\, dy. \qquad (7.2)$$

3. Если плоская кривая *L* задана параметрически формулами $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

где $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (7.3)$$

4. Если пространственная кривая L задана параметрически формулами

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

где $\alpha \le t \le \beta$, а $f(x, y, z)$ – непрерывная в точках этой кривой функция, то

$$\int_L f(x, y, z)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt. \qquad (7.4)$$

5. Если кривая L задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, где $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то

$$\int_L f(x, y)\,dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \big(\rho'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi. \qquad (7.5)$$

7.2. Понятие криволинейного интеграла 2-го рода, его свойства и вычисление. Формула Грина

Пусть на плоскости xOy задана гладкая незамкнутая кривая L, и на этой кривой определена вектор-функция

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j},$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – непрерывные функции.

Разобьем указанную кривую L произвольным образом на элементарные дуги $L_1, L_2, ..., L_n$. На каждой из элементарных дуг L_i выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Составим произведение значения функции $P(x_i, y_i)$ на длину проекции Δx_i дуги L_i на ось Ox и произведение значения функции $Q(x_i, y_i)$ на длину проекции Δy_i дуги L_i на ось Oy. Запишем предельную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n}\big(P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\big).$$

Обозначим через $\Delta_1 = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$, а через $\Delta_2 = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta y_i$. Устремим $n \to \infty$ так, чтобы $\Delta_1 \to 0$ и $\Delta_2 \to 0$. Если существует предел интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения кривой L на части, ни от выбора точек $M_i(x_i; y_i)$, то этот предел называется ***криволинейным интегралом 2-го рода*** от функции $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ по координатам x и y:

$$\int\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \lim_{\substack{\Delta_1 \to 0 \\ \Delta_2 \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i \right).$$

Если L – некоторая гладкая кривая в трехмерном пространстве, а $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ – вектор-функция, заданная на кривой L, причем $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ – непрерывные функции в точках этой кривой, то в случае существования предела и при аналогичных плоской кривой условиях криволинейный интеграл 2-го рода по координатам x, y и z определяется равенством

$$\int\limits_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz == \lim_{\substack{\Delta_1 \to 0 \\ \Delta_2 \to 0 \\ \Delta_3 \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \left(P\Delta x_i + Q\Delta y_i + R\Delta z_i \right),$$

где в правой части формулы $P = P(x_i, y_i, z_i)$, $Q = Q(x_i, y_i, z_i)$ и $R = R(x_i, y_i, z_i)$.

Если кривая L представляет собой замкнутый контур (т. е. начало кривой и ее конец совпадают), вводят понятие положительного и отрицательного направлений обхода контура. ***Положительным направлением обхода контура*** называется такое направление, при котором линию интегрирования обходят против хода часовой стрелки. Противоположное ему направление обхода контура называется ***отрицательным***. При этом считают, что $\oint\limits_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz > 0$ при положительном направлении обхода контура L.

Достаточное условие интегрируемости функции: если определенная в точках гладкой кривой вектор-функция $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ имеет непрерывные координатные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, то эта вектор-функция $\vec{F}(x, y, z)$ интегрируема по этой кривой.

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода аналогичны свойствам криволинейного интеграла 1-го рода, кроме одного. Величина криволинейного интеграла 2-го рода численно зависит от направления интегрирования, т. е.

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$
$$= -\int\limits_{BA} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Допустим, что координатные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны на рассматриваемой кривой. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода сводится к вычислению определенных интегралов. Вид формулы зависит от способа задания кривой.

Возможны следующие случаи:

1. Если плоская кривая L с началом в точке A и концом в точке B задана явно уравнением $y = y(x),\ a \le x \le b$, причем при изменении x от a до b кривая L описывается от A к B, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \Big(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big)y'(x)\Big)dx. \qquad (7.6)$$

2. Если плоская кривая L с началом в точке A и концом в точке B задана явно уравнением $x = x(y),\ c \le y \le d$, причем при изменении y от c до d кривая L описывается от A к B, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d \Big(P\big(x(y), y\big)x'(y) + Q\big(x(y), y\big)\Big)dy. \qquad (7.7)$$

3. Если плоская кривая L с началом в точке A и концом в точке B задана параметрически с помощью формул $x = x(t),\ y = y(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, причем при изменении параметра t от α к β кривая L описывается от A к B, функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ непрерывно дифференцируемы, тогда

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\Big)dt. \qquad (7.8)$$

4. Если пространственная кривая L задана параметрически с помощью формул $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, причем при изменении параметра t от α к β кривая описывается от A к B, то

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_\alpha^\beta \big(P\,x'(t) + Q\,y'(t) + Rz'(t)\big)dt, \qquad (7.9)$$

причем в правой части формулы $P = P\big(x(t), y(t), z(t)\big),\ Q = Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ и $R = R\big(x(t), y(t), z(t)\big)$.

Формула Грина: если функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в замкнутой ограниченной области D, то имеет место формула Грина:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dxdy, \quad (7.10)$$

где L – граница области D, интегрирование вдоль которой производится в положительном направлении (рис. 7.1).

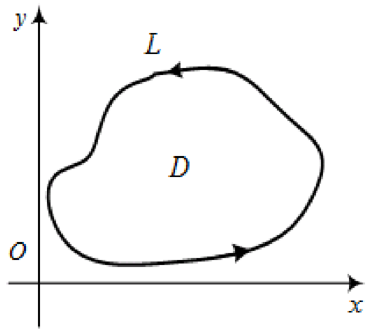

Рис. 7.1

7.3. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов

1. ***Длина дуги кривой***

Если L – гладкая кривая с началом в точке A и концом в точке B, то

$$\int_L dl = l, \qquad (7.11)$$

где l – длина дуги кривой L от точки A до точки B.

2. ***Масса***

Если $f(x, y)$ – непрерывная функция, выражающая линейную плотность распределения массы m по гладкой кривой L, то криволинейный интеграл 1-го рода представляет собой массу данной материальной кривой:

$$m = \int_L f(x, y)dl. \qquad (7.12)$$

В этом состоит физический смысл криволинейного интеграла 1-го рода.

3. ***Координаты центра масс***

Для нахождения координат центра масс дуги кривой L пользуются следующими формулами:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L x\, f(x, y, z)dl,$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_L y\, f(x, y, z)dl, \qquad (7.13)$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\int_L z\, f(x, y, z)dl,$$

где m – масса материальной кривой L с линейной плотностью $f(x, y)$, которая вычисляется по формуле (7.12).

4. ***Работа переменной силы***

Если $\vec{F}\left(P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)\right)$ – переменная сила, которая действует вдоль контура L, то криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz$ выражает работу A этой силы $\vec{F}$, т. е.

$$A=\int\limits_L P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz\,. \tag{7.14}$$

5. ***Площадь***

Площадь S области D, ограниченной простым замкнутым контуром L, вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx, \tag{7.15}$$

причем обход контура интегрирования L совершается в положительном направлении.

7.4. Независимость криволинейных интегралов 2-го рода от пути интегрирования

Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в замкнутой ограниченной области D, то все следующие условия равносильны:

1) $\oint\limits_L P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0,$ где L – любой замкнутый контур, целиком лежащий в области D;

2) интеграл $\int\limits_L P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ не зависит от линии интегрирования, соединяющей две данные точки;

3) выражение $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой однозначной функции;

4) во всех точках области D имеет место равенство $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$.

7.5. Примеры решения задач

Задача **1.** *Найти массу дуги*:

1) *кривой* $y=4\sqrt{x}$ *от точки* $O(0;0)$ *до точки* $A(4;8)$ *с плотностью распределения массы* $f(x, y)=\sqrt{x^2+\frac{1}{4}y^2}$;

2) *винтовой линии* $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t,\ 0\le t\le 2\pi$ *с плотностью распределения массы* $f(x, y)=z\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3$.

Решение.

1. Найдем производную функции $y=y(x)$ и возведем ее в квадрат: $y'(x)=\dfrac{4}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}},\ \left(y'(x)\right)^2=\dfrac{4}{x}$. Воспользовавшись формулой $dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$, определим дифференциал длины дуги кривой: $dl=\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}dx=\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}dx,$ причем $0\le x\le 4$. Затем вычислим массу дуги по формуле (7.12):

$$m=\int\limits_L f(x, y)dl=\int\limits_0^4\sqrt{x^2+4x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}dx=\int\limits_0^4(x+4)dx=\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_0^4=24.$$

2. Найдем производные функций $x=x(t)$, $y=y(t)$ и $z=z(t)$: $x'(t)=-\sin t,\ y'(t)=\cos t,\ z'(t)=1.$

Определим дифференциал длины дуги в случае параметрического задания кривой:

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z^2(t)}dt=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}\,dt=\sqrt{2}dt.$$

Вычислим массу дуги, воспользовавшись формулой (7.12):

$$m=\int\limits_L f(x, y, z)dl=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+t^2}dt=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}t\sqrt{1+t^2}dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}d\left(1+t^2\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\left(4\pi^2+1\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

***Ответ*: 1)** 24; **2)** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\left(4\pi^2+1\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$.

Задача 2. *Найти центр масс однородной дуги циклоиды, заданной уравнениями.* $x=2(t-\sin t),\ y=2(1-\cos t),\ 0\le t\le\pi.$

Решение. Найдем производные функций $x=x(t)$, $y=y(t)$: $x'(t)=2(1-\cos t),\ y'(t)=2\sin t.$

Определим дифференциал длины дуги в случае параметрического задания кривой:

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{4-8\cos t+4\cos^2 t+4\sin^2 t}dt=$$

$$= 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt = 4\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Вычислим массу дуги, воспользовавшись формулой (7.12):

$$m = \int\limits_L dl = 4\int\limits_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = -8\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 16.$$

Найдем абсциссу центра масс данной дуги кривой, применив одну из формул (7.13):

$$x_0 = \frac{1}{m}\int\limits_L x\, f(x,y)\,dl = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} 2(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt = 2\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2} - \int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt.$$

После интегрирования по частям имеем

$$x_0 = \left|\begin{matrix} u = \dfrac{t}{2}, & dv = \sin\dfrac{t}{2}\,d\,\dfrac{t}{2} \\ du = \dfrac{1}{2}\,dt, & v = -\cos\dfrac{t}{2} \end{matrix}\right| = 2\left(-\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} -$$

$$-2\int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\,d\sin\frac{t}{2} = 2 - \frac{2}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{3}.$$

Аналогично найдем ординату центра масс дуги кривой:

$$y_0 = \frac{1}{m}\int\limits_L y\, f(x,y)\,dl = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} 2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt = \int\limits_0^{\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -2\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\cos\frac{t}{2} = -2\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: центр масс имеет координаты $\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

***Задача* 3.** *Найти работу переменной силы* $\vec{F} = \dfrac{1}{y}\vec{i} + \dfrac{1}{z}\vec{j} + \dfrac{1}{x}\vec{k}$ *при перемещении материальной точки единичной массы вдоль отрезка AB, где* $A(1;1;1)$, $B(2;4;8)$.

Решение. Предварительно запишем параметрические уравнения прямой *AB*. Направляющим вектором этой прямой является вектор $\overrightarrow{AB}(1;3;7)$, прямая проходит через точку $A(1;1;1)$, параметрическими уравнениями прямой будут соотношения $x = t+1$, $y = 3t+1$, $z = 7t+1$, где при изменении переменной *x* от 1 до 2 параметр *t* заключен между 0 и 1, т. е. $0 \le t \le 1$.

Применив формулу (7.14) и подставив соответствующие выражения для функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, получим $A = \int\limits_{AB} \frac{1}{y}dx + \frac{1}{z}dy + \frac{1}{x}dz$.

При вычислении данного интеграла необходимо перейти к определенному интегралу, для чего следует применить формулу (7.9) и учесть, что $dx = dt$, $dy = 3dt$, $dz = 7dt$. Получим

$$A = \int\limits_{AB} \frac{1}{y}dx + \frac{1}{z}dy + \frac{1}{x}dz = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3t+1} + \frac{3}{7t+1} + \frac{7}{t+1} \right) dt =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ln|3t+1| + \frac{3}{7}\ln|7t+1| + 7\ln|t+1| \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\ln 4 + \frac{3}{7}\ln 8 + 7\ln 2 = \frac{188}{21}\ln 2.$$

***Ответ*:** $\frac{188}{21}\ln 2$.

8. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

8.1. Поверхностный интеграл 1-го рода

Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на гладкой замкнутой ограниченной поверхности σ. Разобьем эту поверхность произвольным образом на элементарные поверхности $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, площади которых будем считать соответственно равными $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$. Внутри каждой элементарной области выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Диаметром ограниченной замкнутой поверхности будем называть наибольшее расстояние между любыми двумя точками границы поверхности. Обозначим через d_i диаметры элементарных поверхностей σ_i, а через Δ – максимальный диаметр, т. е. $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i.$$

Устремим $n \to \infty$ так, чтобы $\Delta \to 0$. Если существует предел последовательности интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения поверхности σ, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется ***поверхностным интегралом 1-го рода от функции*** $f(x, y, z)$ ***по поверхности*** σ:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i.$$

В таком случае говорят, что функция $f(x, y, z)$ ***интегрируема*** на поверхности σ, при этом x, y и z называют ***переменными интегрирования***.

Достаточное условие интегрируемости функции: если определенная на некоторой ограниченной замкнутой гладкой поверхности функция непрерывна, то она интегрируема на этой поверхности.

Геометрический смысл поверхностного интеграла 1-го рода:

$$\iint\limits_{\sigma} d\sigma = S,$$

где S – площадь поверхности σ.

Если функции $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ интегрируемы на поверхности σ, то имеют место следующие свойства:

1) ***линейность***:

$$\iint\limits_{\sigma}\left(C_1\, f_1(x, y, z)+C_2\, f_2(x, y, z)\right) d\sigma=C_1 \iint\limits_{\sigma} f_1(x, y, z) d\sigma+C_2 \iint\limits_{\sigma} f_2(x, y, z)\, d\sigma,$$

где $C_1=\text{const},\ C_2=\text{const}$;

2) ***аддитивность***:

$$\iint\limits_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f(x, y, z)\, d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1} f(x, y, z)\, d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2} f(x, y, z)\, d\sigma,$$

причем поверхности σ_1 и σ_2 не имеют общих внутренних точек;

3) если для любой точки $(x, y, z) \in \sigma$ выполняется неравенство $f_1(x, y, z) \leq f_2(x, y, z)$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f_1(x, y, z) d\sigma \leq \iint\limits_{\sigma} f_2(x, y, z) d\sigma;$$

4) ***оценка модуля интеграла***:

$$\left|\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma\right| \leq \iint\limits_{\sigma}|f(x, y, z)| d\sigma;$$

5) если $m=\min\limits_{(x;\, y;\, z) \in \sigma} f(x, y, z),\ M=\max\limits_{(x;\, y;\, z) \in \sigma} f(x, y, z)$, то

$$mS \leq \iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma \leq MS,$$

где S – площадь ограниченной части поверхности σ.

Физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода:

Если $f(x, y, z)$ – поверхностная плотность материальной поверхности σ, то

$$m=\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma, \tag{8.1}$$

где m – масса поверхности σ.

Пусть $f(x, y, z)$ – функция, непрерывная в точках поверхности σ. Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода сводится к вычислению двойного интеграла. В зависимости от способа задания поверхности σ и ее функции возможны следующие случаи вычисления поверхностного интеграла 1-го рода:

1. Если поверхность σ задана явно уравнением $z=z(x, y)$ и однозначно проектируется на область D_{XY} плоскости xOy, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma=\iint\limits_{D_{XY}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1+\left(z_x'(x, y)\right)^2+\left(z_y'(x, y)\right)^2} dxdy. \tag{8.2}$$

2. Если поверхность σ задана явно уравнением $y = y(x, z)$ и однозначно проектируется на область D_{XZ} плоскости *xOz*, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_{D_{XZ}} f\left(x, y(x, z), z\right)\sqrt{1 + \left(y'_x(x, z)\right)^2 + \left(y'_z(x, z)\right)^2}\,dxdz. \quad (8.3)$$

3. Если поверхность σ задана явно уравнением $x = x(y, z)$ и однозначно проектируется на область D_{YZ} плоскости *yOz*, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_{D_{YZ}} f\left(x(y, z), y, z\right)\sqrt{1 + \left(x'_y(y, z)\right)^2 + \left(x'_z(y, z)\right)^2}\,dydz. \quad (8.4)$$

4. Если поверхность σ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, которое определяет единственную функцию $z = \varphi(x, y)$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint_{D} f\left(x, y, \varphi(x, y)\right)\frac{\sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'\right)_z^2}}{\left|F'_z\right|}\,dxdy. \quad (8.5)$$

где D – проекция поверхности σ на плоскость *xOy*, $F'_z(x, y, z) \neq 0$ на всей поверхности σ.

Координаты центра масс материальной поверхности σ с поверхностной плотностью распределения масс $f(x, y, z)$ находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_{\sigma} xf(x, y, z)d\sigma,$$
$$y_0 = \frac{1}{m}\iint_{\sigma} yf(x, y, z)d\sigma, \quad (8.6)$$
$$z_0 = \frac{1}{m}\iint_{\sigma} zf(x, y, z)d\sigma,$$

где m – масса поверхности σ, рассчитываемая по формуле (8.1).

8.2. Поверхностный интеграл 2-го рода

Пусть в пространстве R^3 задана гладкая двусторонняя поверхность σ (т. е. такая поверхность, у которой различают внешнюю и внутреннюю сторону) с единичным вектором нормали $\vec{n}(M)$ для внешней стороны, где $M(x; y; z)$ – произвольная точка поверхности. Такая поверхность называется ***ориентированной***. Допустим, что на этой поверхности σ определена вектор-функция

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Разобьем поверхность σ на части $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, площади которых будем считать соответственно равными $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$. Внутри каждой элементарной области выберем произвольную точку M_i. Найдем в ней значение вектор-функции $\vec{F}(M_i)$ и вектор нормали $\vec{n}(M_i)$, $i = \overline{1, n}$. Вычислив скалярные произведения $\left(\vec{F}(M_i), \vec{n}(M_i)\right)$, где $i = \overline{1, n}$, составим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(M_i), \vec{n}(M_i)\right)\Delta\sigma_i.$$

Пусть Δ – диаметр разбиения поверхности σ. Устремим $n \to \infty$ так, чтобы $\Delta \to 0$. Если существует предел интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения поверхности σ, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется ***поверхностным интегралом 2-го рода от функции*** $f(x, y, z)$ ***по поверхности*** σ**:**

$$\iint_{\sigma}\left(\vec{F}, \vec{n}\right)d\sigma = \lim_{\Delta \to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(M_i), \vec{n}(M_i)\right)\Delta\sigma_i. \qquad (8.7)$$

Интеграл (8.7) может быть записан также в следующем виде:

$$\iint_{\sigma}\left(\vec{F}, \vec{n}\right)d\sigma = \iint_{\sigma}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma,$$

где $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ – известные функции; α, β, γ – углы, которые образует единичный вектор нормали $\vec{n}$ с координатными осями *Ox, Oy, Oz* соответственно.

Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода связаны между собой соотношением

$$\iint_{\sigma}\left(\vec{F}, \vec{n}\right)d\sigma = \iint_{\sigma}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma} P(x, y, z)\,dydz + Q(x, y, z)\,dzdx + R(x, y, z)\,dxdy. \qquad (8.8)$$

Поверхностный интеграл 2-го рода обладает теми же свойствами, что и поверхностный интеграл 1-го рода (линейность, аддитивность, оценка модуля). Исключением является лишь его зависимость (по знаку) от ориентации поверхности, т. е. от выбора вектора нормали (внешнего или внутреннего).

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению двойного интеграла.

1. Если поверхность σ задана явно уравнением $z = z(x, y)$, $\vec{n}$ – ее единичный вектор нормали (внешний), то справедлива формула

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \mp \iint_{D_{XY}} \left(P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} - R \right) dxdy, \tag{8.9}$$

где $P = P(x, y, z(x, y))$, $Q = Q(x, y, z(x, y))$, $R = R(x, y, z(x, y))$ – известные функции; D_{XY} – проекция поверхности σ на плоскость xOy.

Знак «–» или «+» перед интегралом в формуле (8.9) выбирают в зависимости от того, какой угол γ образует вектор $\vec{n}$ с осью Oz: если $\gamma < \frac{\pi}{2}$, берут знак «–»; при $\gamma > \frac{\pi}{2}$ берут «+».

2. Если поверхность σ задана неявно уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, где $\Phi'_z(x, y, z) \neq 0$ на всей поверхности σ, то справедлива формула

$$\iint_{\sigma} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \pm \iint_{D_{XY}} \frac{1}{|\Phi'_z|} \left(P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + R \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dxdy, \tag{8.10}$$

где $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – известные функции, в которых учтена зависимость $z = z(x, y)$; D_{XY} – проекция поверхности σ на плоскость xOy.

Если вектор $\vec{n}$ образует угол $\gamma < \frac{\pi}{2}$ с осью Oz, то в формуле (8.10) перед интегралом выбирают знак «+», если $\gamma > \frac{\pi}{2}$ – знак «–».

Если σ – гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая область $V \subset R^3$, и в этой области определены непрерывно дифференцируемые функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, то в случае интегрирования по внешней стороне поверхности σ имеет место ***формула Остроградского – Гаусса***:

$$\oiint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \tag{8.11}$$

8.3. Элементы теории поля

Если каждой точке $M(x; y; z) \in V \subset R^3$ поставлена в соответствие некоторая скалярная величина $u = u(M) = f(x, y, z)$, то говорят, что в области V пространства R^3 задано ***скалярное поле*** $u = u(M)$. Если функция $u = u(M)$ не зависит от времени, то скалярное поле называется ***стационарным***; поле, меняющееся с течением времени, – ***нестационарным***. Далее будем рассматривать только стационарные поля.

Скалярное поле можно изображать графически в виде ***поверхностей уровня*** – множества точек $(x; y; z)$, в которых функция принимает постоянное значение $f(x, y, z) = C = \text{const}.$ Если заданная функция $u = f(x, y, z)$ является непрерывной и дифференцируемой в области *V*, то через каждую точку, не являющуюся критической, проходит единственная поверхность уровня.

В случае задания функции двух переменных $z = f(x, y)$, где $(x; y) \in D \subset R^2$, рассматриваемое скалярное поле называется ***плоским***, а множество точек $(x; y)$, в которых $f(x, y) = C,$ называется ***линиями уровня***.

Для характеристики скорости изменения поля $u = u(M)$ в заданном направлении введена такая характеристика, как производная от функции по направлению (см. подразд. 3.5), физический смысл которой состоит в том, что модуль данной производной представляет собой мгновенную скорость изменения функции в направлении дифференцирования в выбранной точке. С физической точки зрения направление наибыстрейшего возрастания функции задает градиент функции (см. подразд. 3.5).

Если каждой точке $M(x; y; z) \in V \subset R^3$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что в области $V \subset R^3$ задано ***векторное поле*** $\vec{a} = \vec{a}(M)$. Задание векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ равносильно заданию вектор-функции

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}. \tag{8.12}$$

В случае отсутствия одной из переменных *x*, *y*, *z* или равенства нулю одной из функций $P(x, y, z),$ $Q(x, y, z),$ $R(x, y, z)$ рассматриваемое векторное поле является ***плоским***.

Если в каждой точке области существуют все непрерывные частные производные первого порядка от функций $P(x, y, z),$ $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z),$ векторное поле (8.12) называется ***дифференцируемым в области V***. По аналогии со скалярным полем, если вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$ не зависит от времени, задаваемое им векторное поле называется ***стационарным***; поле, меняющееся с течением времени, – ***нестационарным***.

Геометрическими характеристиками векторного поля $\vec{a}$ являются ***векторные линии***, т. е. линии, касательные к которым в каждой точке имеют направление вектора $\vec{a}(M)$.

Пусть векторное поле образовано вектором (8.12), который будем считать вектором скорости некоторого потока несжимаемой жидкости, движущейся стационарно. Предположим, что в этом потоке находится некоторая поверхность σ, пропускающая данную жидкость.

Потоком вектора $\vec{a}$ ***через поверхность*** σ называется интеграл по поверхности σ от скалярного произведения вектора поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ на единичный вектор $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ нормали к поверхности, т. е. поверхностный интеграл 1-го рода:

$$K = \iint_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma.$$

С учетом формулы (8.8) при вычислении потока вектора через поверхность σ можно легко перейти к поверхностному интегралу 2-го рода:

$$K = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \qquad (8.13)$$

С физической точки зрения поток вектора $\vec{a}$ представляет собой скалярную величину, численно равную объему несжимаемой жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени.

Если поверхность σ является замкнутой и ограничивает объем *V*, поток вектора записывают в виде

$$K = \oint\!\!\!\oint_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n})\, d\sigma,$$

причем за направление вектора $\vec{n}$ принято брать направление внешней нормали, тогда поток считается идущим изнутри поверхности σ. В этом случае величина потока *K* через замкнутую поверхность выражает разность между количеством жидкости, вытекающей из области объема *V* и втекающей в нее за единицу времени. При этом если $K > 0$, из области *V* вытекает больше жидкости, чем в нее втекает, т. е. внутри области имеются дополнительные источники. При $K < 0$ внутри области *V* имеются стоки, поглощающие избыток жидкости. Значение потока $K = 0$ свидетельствует о том, что из области *V* вытекает столько же жидкости, сколько и втекает в нее за единицу времени, т. е. внутри рассматриваемой области либо нет источников и стоков, либо их действие взаимно компенсируется.

Для описания распределения и интенсивности источников и стоков векторного поля применяют такую характеристику, как дивергенция. ***Дивергенцией векторного поля*** $\vec{a}(M)$ в точке $M(x; y; z)$ называется предел отношения потока поля через замкнутую поверхность σ, окружающую точку *M*, к объему *V* тела, ограниченного этой поверхностью, при стремлении диаметра этого тела Δ к нулю:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\oiint\limits_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma}{V}.$$

Если векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$ дифференцируемо в области *V*, то в любой точке $M(x;y;z)$ существует дивергенция поля, причем

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}. \qquad (8.14)$$

Физический смысл дивергенции состоит в том, что абсолютная величина $\left|\operatorname{div}\vec{a}(M)\right|$ выражает интенсивность источника или стока в токе *M*. По знаку дивергенции можно судить о наличии источника или стока векторного поля в рассматриваемой точке *M*: если $\operatorname{div}\vec{a}(M)>0$, то в точке *M* находится источник; если $\operatorname{div}\vec{a}(M)<0$, в точке *M* – сток; при $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$ источников и стоков в точке *M* нет.

Свойства дивергенции:

1) если $\vec{a}=\text{const}$, то $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$;

2) $\operatorname{div}(C\vec{a})=C\operatorname{div}\vec{a}$, где $C=\text{const}$;

3) $\operatorname{div}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$;

4) если *u* является скалярной функцией, то $\operatorname{div}(u\cdot\vec{a})=u\cdot\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,u$.

Формулу Остроградского – Гаусса (8.11) можно записать в векторном виде:

$$\oiint\limits_{\sigma}(\vec{a},\vec{n})\,d\sigma=\iiint\limits_{V}\operatorname{div}\vec{a}\,dv.$$

Пусть в области $V\subset R^3$ задано векторное поле (8.12) и гладкая поверхность σ с границей *L*, причем функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$ являются непрерывно дифференцируемыми, а обход контура – положительным.

Циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура *L* называется криволинейный интеграл:

$$C=\oint\limits_{L}(\vec{a},\vec{\tau})\,dl=\oint\limits_{L}Pdx+Qdy+Rdz, \qquad (8.15)$$

где $\vec{\tau}$ – единичный вектор, направленный по касательной к кривой *L* в направлении ее обхода.

Физический смысл циркуляции состоит в том, что если замкнутая кривая *L* расположена в силовом поле $\vec{F}(M)$, то циркуляция равна работе силы $\vec{F}(P,Q,R)$ при перемещении материальной точки вдоль *L* (см. формулу (8.14)).

Ротором векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке $M(x; y; z)$ называется предел отношения при стягивании контура L в точку M:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \lim_{S\to M}\frac{\oint\limits_L(\vec{a}, \vec{\tau})\,dl}{S} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}, \tag{8.16}$$

где $\vec{n}$ – вектор нормали к замкнутой поверхности σ в точке M; V – объем области; σ – площадь поверхности интегрирования.

Свойства ротора:

1) если $\vec{a} = \text{const}$, то $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$;

2) если $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$;

3) $\operatorname{rot}\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) = \alpha\operatorname{rot}\vec{a} + \beta\operatorname{rot}\vec{b}$, где $\vec{a} = \text{const}, \beta = \text{const}$;

4) если u представляет собой скалярную функцию, то $\operatorname{rot}(u\cdot\vec{a}) = u\cdot\operatorname{rot}\vec{a} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}u\times\vec{a}$.

Формулу (8.16) можно записать в символической форме:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{8.17}$$

С физической точки зрения направление ротора – это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшую плотность по сравнению с циркуляцией вокруг любого направления, не совпадающего с нормалью к поверхности σ.

Имеет место соотношение

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\sigma \left(R'_y - Q'_z\right))ydz + \left(P'_z - R'_x\right)dxdz + \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy,$$

называемое ***формулой Стокса***. Эта формула может быть записана в векторном виде:

$$C = \oint\limits_L(\vec{a}, \vec{\tau})dl = \iint\limits_\sigma\left(\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right), \vec{n}\right)d\sigma, \tag{8.18}$$

где левая часть соотношения представляет собой циркуляцию вектора $\vec{a}$ по контуру L, а правая часть – поток вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ через поверхность σ, ограниченную контуром L. Таким образом, формула Стокса (8.18) показывает, что циркуляция вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого вектора $\vec{a}$ через поверхность, лежащую в этом векторном поле и ограниченную контуром L.

Векторное поле, в каждой точке $M \in V \subset R^3$ которого дивергенция поля равна нулю, т. е. $\operatorname{div}\vec{a}(M) \equiv 0$, называется ***соленоидальным*** в области V. Для соленоидального поля в области V характерно следующее:

• нет источников и стоков;

• для любой замкнутой поверхности $\sigma \subset V$ поток векторного поля через поверхность σ равен нулю;

• векторные линии поля являются замкнутыми или имеют концы на границе области V.

Если в каждой точке векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ выполняется соотношение $\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \vec{0}$, то векторное поле называется ***потенциальным*** в области V задания поля.

Согласно определению ротора (8.16), необходимым и достаточным условием потенциальности поля является справедливость равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}. \end{cases} \tag{8.19}$$

Для того чтобы поле $\vec{a}(M)$ было потенциальным в области V, необходимо и достаточно, чтобы существовала дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция $u(M) = u(x, y, z)$, такая, что $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u(M)$. Функция $u(M)$ при этом называется ***потенциалом поля*** $\vec{a}(M)$.

При выполнении условий (8.19) криволинейный интеграл 2-го рода не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки M_0 и M. Поэтому для нахождения потенциала векторного поля $\vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ применяют формулу

$$u(x, y, z) = \int\limits_{M_0 M} Pdx + Qdy + Rdz,$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0) \in V$ – некоторая фиксированная точка; $M(x; y; z) \in V$ – произвольная точка.

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется ***гармоническим***, если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{a}(M)=0, \\ \operatorname{rot}\vec{a}(M)=\vec{0}. \end{cases}$$

Потенциал $u(M)$ гармонического поля является решением уравнения Лапласа:

$$\Delta u(M)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (8.20)$$

Функция $u(M)=u(x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа (8.20), называется ***гармонической***.

8.4. Примеры решения задач

***Задача* 1.** *Используя поверхностный интеграл 1-го рода, найти координаты центра масс поверхности* σ, *ограниченной поверхностями* $z=\sqrt{x^2+y^2}$ *и* $z=2$, *при условии, что поверхностная плотность распределения масс выражается функцией* $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Уравнение $z=\sqrt{x^2+y^2}$ задает часть конуса вдоль оси Oz при $z\ge 0$, отсекаемую плоскостью $z=2$ (рис. 8.1).

Найдем массу этой части конуса по формуле (8.1): $m=\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma$.

Спроектировав ограниченную поверхность конуса на плоскость xOy, получим круг $x^2+y^2\le 4$. По формулам $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$ перейдем к полярным координатам, причем в нашем случае $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 2$. Применив формулу $d\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy,$ вычислим элемент площади:

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

Поверхностный интеграл 1-го рода вычислим по формуле (8.2):

$$m=\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{XY}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\rho^2\,d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^2 d\varphi=\frac{8\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{3}\varphi\bigg|_0^{2\pi}=\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}.$$

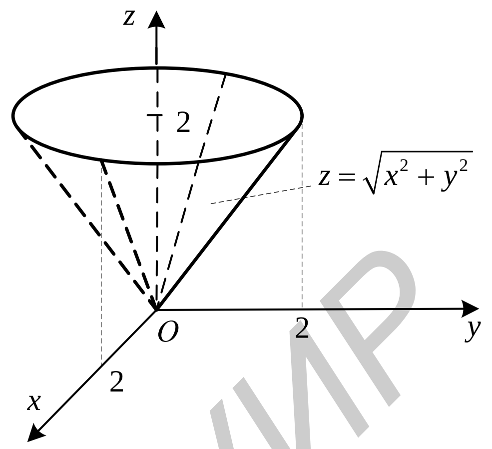

Рис. 8.1

Абсциссу, ординату и аппликату центра масс находим по формулам (8.6). Учтем также, что элемент площади $d\sigma=\sqrt{2}dxdy$ в декартовых координатах при переходе к полярным координатам приобретает вид $d\sigma=\sqrt{2}\,\rho d\varphi d\rho$. Получим следующие соотношения:

$$x_0=\frac{3}{16\pi\sqrt{2}}\iint\limits_{\sigma}x\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\iint\limits_{\sigma}x\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\rho\cos\varphi\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{3}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\cos\varphi\rho^3\,d\rho=\frac{3}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^2\cos\varphi d\varphi=\frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=\frac{3}{4\pi}\sin\varphi\bigg|_0^{2\pi}=0;$$

$$y_0=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\iint\limits_{\sigma}y\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\frac{3}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\rho\sin\varphi\rho^2\,d\rho=\frac{3}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\sin\varphi\rho^3\,d\rho=$$

$$=\frac{3}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^2\sin\varphi d\varphi=\frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=-\frac{3}{4\pi}\cos\varphi\bigg|_0^{2\pi}=0;$$

$$z_0=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\iint\limits_{\sigma}z\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\iint\limits_{\sigma}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2d\sigma=\frac{3\sqrt{2}}{32\pi}\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)d\sigma=$$

$$=\frac{3}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\rho^3\,d\rho=\frac{3}{16\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^2 d\varphi=\frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{3}{4\pi}\varphi\bigg|_0^{2\pi}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: центр масс находится в точке (0; 0; 1,5).

Задача 2. *Определить суммарный электрический заряд, распределенный на поверхности, полученной при пересечении параболоида* $2z=x^2+y^2$ *и цилиндра* $x^2+y^2=8$, *если плотность заряда в каждой точке выражается функцией* $f(x,y,z)=z$.

Решение. Вычислим поверхностный интеграл 1-го рода, выражающий суммарный электрический заряд $Q=\iint\limits_S zdS$. В нашем случае поверхность задается явно функцией $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, поэтому для перехода к декартовым координатам при нахождении элемента площади применим формулу $dS=\sqrt{1+(z')_x^2+(z')_y^2}\,dxdy$, т. е. $dS=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$.

Итак, $Q=\iint\limits_{x^2+y^2\le 8}\dfrac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$. Так как проекция поверхности интегрирования на плоскость *xOy* представляет собой круг $x^2+y^2\le 8$, вычисления легче производить в полярных координатах $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$. Тогда

$$Q=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho=$$

$$=\begin{bmatrix} t=1+\rho^2 \\ dt=2\rho d\rho \\ \rho^2=t-1 \\ 1\le t\le 9 \end{bmatrix}=\frac{\pi}{2}\int_1^9(t-1)\sqrt{t}\,dt=\pi\left(\frac{t^{5/2}}{5}-\frac{t^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_1^9=\frac{596\pi}{15}.$$

Ответ: $\dfrac{596\pi}{15}$.

***Задача* 3.** *Найти поток векторного поля* $\vec{a}(M)=x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$ *через верхнюю сторону части поверхности* $z=2-x^2-y^2$, *отсеченной плоскостью* $z=0$.

Решение. Нахождение потока векторного поля сводится к вычислению поверхностного интеграла 2-го рода по формуле (8.13):

$$K=\iint\limits_{\sigma}xdydz+ydxdz-zdxdy.$$

Спроектировав поверхность параболоида $z=2-x^2-y^2$ на плоскость *xOy*, сведем вычисление поверхностного интеграла к нахождению двойного интеграла по области D_{XY}, представляющей собой круг $x^2+y^2\le 2$. Применив формулу (8.9), получим

$$K=\iint_{\sigma} xdydz+ydxdz-zdxdy=$$

$$=\iint_{D_{XY}}\left(x(-2x)+y(-2y)-z(-1)\right)dxdy=\iint_{D_{XY}}\left(-2x^2-2y^2+z\right)dxdy.$$

После подстановки в подынтегральное выражение $z=2-x^2-y^2$ имеем интеграл $K=\iint_{D_{XY}}\left(2-3\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy$, который вычислим, перейдя к полярным координатам $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$ и с учетом того, что в повторном интеграле $0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le\sqrt{2}$:

$$K=\iint_{D_{XY}}\left(2-3\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy==\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-3\rho^2\right)\rho\,d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(2\rho-3\rho^3\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{3\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}d\varphi=-\int_0^{2\pi}d\varphi=-\varphi\Big|_0^{2\pi}=-2\pi.$$

Ответ: -2π.

***Задача* 4.** *Вычислить дивергенцию векторного поля* $\vec{a}(M)=\left(xy+z^2\right)\vec{i}+\left(yz+x^2\right)\vec{j}+\left(xz+y^2\right)\vec{k}$ *в точке* $M_0(1;3;-5)$.

Решение. По условию $P=xy+z^2, Q=yz+x^2, R=xz+y^2$. Согласно формуле (8.14), имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\left(xy+z^2\right)'_x+\left(yz+x^2\right)'_y+\left(zx+y^2\right)'_z=y+z+x.$$

В точке $M_0(1;3;-5)$ имеем $\operatorname{div}\vec{a}(M_0)=3-5+1=-1$.

Так как $\operatorname{div}\vec{a}(M_0)<0$, то точка M_0 является стоком поля.

Ответ: $\operatorname{div}\vec{a}(M_0)=-1$.

***Задача* 5.** *Вычислить циркуляцию векторного поля* $\vec{a}(M)=-x^2y\vec{i}+$ $+4\vec{j}+x^2z\vec{k}$ *вдоль замкнутого контура* L: $x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\ \ z=4$, *если* $0\le t\le 2\pi$.

Решение. Циркуляция векторного поля находится с помощью криволинейного интеграла 2-го рода по формуле (8.15). При этом вычисление криволинейного интеграла 2-го рода производится с помощью соотношения (8.9), так как мы имеем дело с параметрическим заданием пространственной кривой. В нашем случае получим

$$C=\oint\limits_L\left(-x^2y\right)dx+4dy+x^2zdz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(-4\cos^2 t\,2\sin t\left(-2\sin t\right)+4\left(2\cos t\right)+\left(4\cos^2 t\right)4\cdot 0\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(16\cos^2 t\,\sin^2 t+8\cos t\right)dt=\int\limits_0^{2\pi}\left(4\sin^2 2t+8\cos t\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(2\left(1-\cos 4t\right)+8\cos t\right)dt=\left(2t-\frac{1}{2}\sin 4t+8\sin t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=4\pi.$$

Ответ: 4π.

***Задача* 6.** *Найти ротор векторного поля* $\vec{a}(M)=xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}-x^2\vec{k}$ *в точке* $M_0(1;-2;0)$.

Решение. По условию $P=xy^2, Q=yz^2, R=-x^2$. Согласно формуле (8.17), имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy^2 & yz^2 & -x^2\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\left(-x^2\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(yz^2\right)}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial\left(-x^2\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial\left(yz^2\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial y}\right)\vec{k}=-2yz\vec{i}+2x\vec{j}-2xy\vec{k}.$$

В точке $M_0(1;-2;0)$ имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M_0)=-2\cdot(-2)\cdot 0\cdot\vec{i}+2\cdot 1\cdot\vec{j}-2\cdot 1\cdot(-2)\cdot\vec{k}=2\vec{j}-4\vec{k}.$$

Ответ: $\operatorname{rot}\vec{a}(M_0)=2\vec{j}-4\vec{k}$.

***Задача* 7.** *С помощью формулы Стокса вычислить циркуляцию векторного поля* $\vec{a}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$ *по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости* $\Pi: x+2y+z-2=0$ *с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора* $\vec{n}=(1,2,1)$ *этой плоскости.*

Решение. В результате пересечения плоскости с координатными плоскостями получим треугольник *АВС*. Укажем на нем положительное направление обхода контура *АВС* согласно условию задачи (рис. 8.2).

Так как данный треугольник *АВС* лежит в плоскости *П*, то в качестве поверхности σ возьмем часть плоскости, ограниченную указанным контуром.

Найдем ротор векторного поля $\vec{a}(M) = (x+z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x+y-z)\vec{k}$. В нашем случае $P = x+z,\ Q = 2y,\ R = x+y-z$. По формуле (8.17) находим

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+z & 2y & x+y-z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(x+y-z)}{\partial y} - \frac{\partial(2y)}{\partial z} \right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial(x+y-z)}{\partial x} - \frac{\partial(x+z)}{\partial z} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(2y)}{\partial x} - \frac{\partial(x+z)}{\partial y} \right)\vec{k} = \vec{i}.$$

Согласно формуле Стокса (8.18),

$$C = \iint_{\sigma} \left((\operatorname{rot}\vec{a}), \vec{n} \right) d\sigma = \iint_{\sigma} dydz.$$

Из уравнения плоскости *П* находим $z = 2 - x - 2y$. Поскольку поверхность σ задана уравнением в явном виде, а нормальный вектор $\vec{n}$ образует с осью *Oz* острый угол $\left(\gamma < \dfrac{\pi}{2}\right)$, то для вычисления последнего интеграла используем формулу (8.9) со знаком «–». Тогда

$$\iint_{\sigma} dydz = -\iint_{D_{XY}} (-1)dxdy = \iint_{D_{XY}} dxdy = S_{D_{XY}} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1,$$

где $S_{D_{XY}}$ – площадь треугольника *АОВ*.

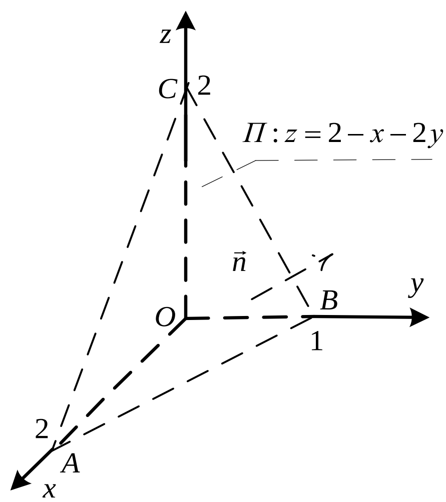

Рис. 8.2

Ответ: 1.

***Задача* 8.** *Найти поле линейной скорости* $\vec{V}$ *материальной точки М, вращающейся против часовой стрелки с угловой скоростью* $\vec{\omega}$ *вокруг оси Oz* (*рис. 8.3*). *Для найденного поля указать:* **1)** *векторные линии*; **2)** *дивергенцию*; **3)** *циркуляцию вдоль замкнутой кривой Г, целиком лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения*; **4)** *ротор.*

Решение. Найдем векторное поле линейной скорости. Пусть $\vec{r}(x, y, z)$ – радиус-вектор точки M, а вектор $\vec{\omega}$ берет начало в точке $O(0; 0; 0)$ и направлен вдоль оси Oz. Тогда вектор скорости $\vec{V}$ направлен в сторону вращения и совпадает с векторным произведением $\vec{\omega}\times\vec{r}$, т. е. $\vec{V}\perp\vec{\omega}$, $\vec{V}\perp\vec{r}$ и векторы $\vec{\omega}$, $\vec{r}$, $\vec{V}$ образуют правую тройку. Таким образом,

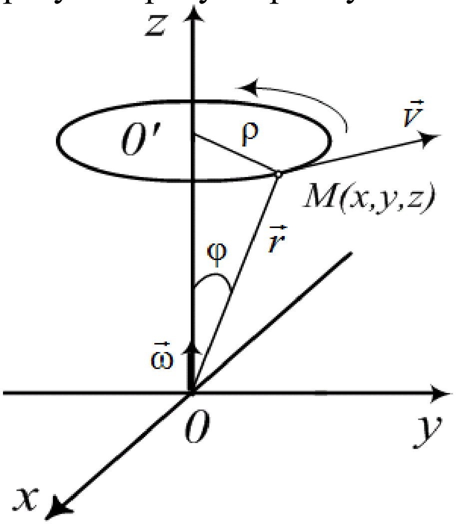

Рис. 8.3

$$\vec{V}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=-\omega y\vec{i}+\omega x\vec{j},$$

т. е. поле линейной скорости является плоским и определяется вектором $\vec{V}(-\omega y;\ \omega x;\ 0)$.

1. Определим векторные линии найденного поля. Так как векторные линии поля

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=P(x, y, z)\vec{i}+Q(x, y, z)\vec{j}+R(x, y, z)\vec{k}$$

описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x, y, z)}=\frac{dy}{Q(x, y, z)}=\frac{dz}{R(x, y, z)},$$

в нашем случае имеем $\dfrac{dx}{-\omega y}=\dfrac{dy}{\omega x}=\dfrac{dz}{0}$, откуда получаем соотношения $\omega x dx=-\omega y dy,\ 0\cdot dx=\omega x dz$. В результате интегрирования находим векторные линии данного поля, представляющие собой окружности с центрами на оси Oz, лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси: $x^2+y^2=C_1,\ z=C_2$.

2. Для вычисления дивергенции поля будем считать ось Oz осью вращения жидкости. Тогда по формуле (8.14) получим

$$\operatorname{div}\vec{V}(M)=\frac{\partial}{\partial x}(-\omega y)+\frac{\partial}{\partial y}(\omega x)+\frac{\partial}{\partial z}(0)=0.$$

3. Вычислим циркуляцию поля $\vec{V}$ по формуле (8.15) в предположении, что направление нормали к заданной плоскости совпадает с направлением оси Oz:

$$C=\oint_{\Gamma}-\omega y dx+\omega x dy+0dz=\omega\oint_{\Gamma}-y dx+x dy=2\omega\left(\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}-y dx+x dy\right)=2\omega S,$$

где S – площадь поверхности интегрирования, ограниченной кривой Г.

4. По формуле (8.17) определим ротор векторного поля $\vec{V}\left(-\omega y;\ \omega x;\ 0\right)$. Получим следующее:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=\left(-\frac{\partial\left(x\omega\right)}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial\left(-y\omega\right)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial\left(x\omega\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(y\omega\right)}{\partial y}\right)\vec{k}=2\vec{\omega}.$$

Таким образом, ротор этого поля направлен параллельно оси вращения, а его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения. С точностью до числового множителя ротор поля скоростей $\vec{V}$ представляет собой угловую скорость вращения тела. С этим и связано название ротора.

***Ответ*:**

1) векторные линии – окружности с центрами на оси Oz, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к этой оси: $x^2+y^2=C_1,\ z=C_2$;

2) $\operatorname{div}\vec{V}\left(M\right)=0$;

3) $C=2\omega S$, где S – площадь поверхности интегрирования, ограниченной кривой Г;

4) $\operatorname{rot}\vec{a}=2\vec{\omega}$.

9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти траекторию, скорость и ускорение частицы, координаты которой изменяются по закону $x = at^2$ и $y = bt^2$, где a и b – положительные константы.

2. Мальчик выдувает мыльный пузырь, радиус которого увеличивается со скоростью $v = 0{,}3$ см/с. С какими скоростями $v(S)$ и $v(V)$ будут увеличиваться площадь поверхности пузыря S и его объем V в момент времени, когда его радиус r станет равным 4 см?

3. Частица массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}2$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 5$ см. Определить: 1) модуль максимальной возвращающей силы $F_{\max}$, действующей на частицу; 2) полную энергию E колеблющейся частицы.

4. Тонкий однородный стержень используется в качестве физического маятника. Определить длину стержня l, если частота колебаний маятника максимальна, когда точка подвеса маятника находится от центра масс на расстоянии $d = 20$ см.

5. Материальная точка движется по плоскости согласно уравнению $\vec{r}(t) = At^3\vec{i} + Bt^2\vec{j}$. Определить зависимости: 1) $\vec{v}(t)$; 2) $\vec{a}(t)$.

6. Движение частицы задано уравнением $\vec{r}(t) = A\left(\vec{i}\cos\omega t - \vec{j}\sin\omega t\right)$, где $A = 0{,}5$ м, $\omega = 6$ рад/с. Определить траекторию движения частицы, а также модуль скорости v и модуль нормального ускорения a_n.

7. Движение частицы задано уравнением $\vec{r}(t) = \left(A + Bt^2\right)\vec{i} + Ct\,\vec{j}$, где $A = 10$ м, $B = -5$ м/с^2, $C = 10$ м/с. Определить траекторию движения частицы и показать ее на графике. Найти выражения $\vec{v}(t)$ и $\vec{a}(t)$. Для момента времени $t = 1$ с найти: 1) модуль скорости v; 2) модуль ускорения a; 3) модуль тангенциального ускорения a_τ; 4) модуль нормального ускорения a_n.

8. Небольшое тело массой $m = 2$ кг движется под действием некоторой силы, направленной вдоль оси Ox, согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 10$ м, $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Найти мгновенную мощность силы N в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с.

9. Движение небольшого тела по окружности радиусом $R = 4$ м задано уравнением $s(t) = A + Bt + Ct^2$, где $s(t)$ – криволинейная координата, отсчитанная вдоль дуги окружности, $A = 10$ м, $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с^2. Определить тангенциальное ускорение a_τ, нормальное ускорение a_n и полное ускорение a в момент времени $t = 2$ с.

10. Частица движется по окружности радиусом $R = 2$ м согласно уравнению $s(t) = At^3$, где $s(t)$ – криволинейная координата, отсчитанная вдоль дуги окружности, $A = 2$ м/с^3. В какой момент времени тангенциальное ускорение частицы a_τ бу-

дет равно нормальному ускорению a_n? Найти полное ускорение a в этот момент времени.

11. Тонкий стержень длиной $l=1$ м равномерно заряжен зарядом $q=1$ пКл. Найти потенциал φ электрического поля, созданного этим зарядом, в точке, расположенной на оси стержня на расстоянии $d=1$ м от его конца.

12. Оценить давление в центре Земли. Радиус Земли $R_з=6370$ км, средняя плотность Земли $\rho=5{,}5\cdot10^3$ кг/м^3.

13. Поезд движется прямолинейно со скоростью $v_0=180$ км/ч. Внезапно на пути появляется препятствие и после включения тормозного механизма скорость поезда изменяется по закону $v=v_0-\alpha t^2$, где $\alpha=1$ м/с^3. Рассчитать тормозной путь поезда $S_т$. Через какое время после начала торможения поезд остановится?

14. Предположим, что вдоль диаметра Земли просверлена сквозная шахта, в которую у поверхности Земли опустили без начальной скорости небольшое тело массой m. Определить кинематический закон движения этого тела и его скорость в центре Земли. Сопротивление воздуха не учитывать. Радиус Земли $R_з=6370$ км.

15. Определить положение центра масс тонкого полукольца и однородного полукруга радиусом R.

16. Определить положение центра масс тонкой полусферы и однородного полушара радиусом R.

17. Определить момент инерции I_1 тонкого обруча и момент инерции I_2 сплошного диска. Массы m и радиусы R обруча и диска одинаковы.

18. Цилиндрический сосуд высотой $h=50$ см и радиусом $R=10$ см наполнен доверху водой. В дне сосуда открывается отверстие радиусом $r=1$ мм. Определить время τ, за которое вся вода вытечет из сосуда. Вязкостью воды пренебречь.

19. Заряд $q=1$ мкКл равномерно распределен по объему шара радиусом $R=10$ мм. Найти напряженность E и потенциал φ в центре шара.

20. Точечный заряд $q=1$ мкКл находится в центре шарового слоя из однородного и изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=3$. Внутренний радиус слоя $r=10$ см, внешний – $R=20$ см. Определить энергию электрического поля, заключенную в пределах диэлектрика.

21. Изолированный провод намотан так, что образует плоскую спираль с числом витков $N=100$. Радиус внутреннего витка $r_1=10$ мм, внешнего – $r_2=40$ мм. Магнитная проницаемость среды $\mu=1$. Определить магнитный момент спирали, если сила тока в ней $I=10$ мА?

22. Найти производную функции $z=x^2+xy+y^2$ в точке $A(1;1)$ по направлению вектора $\vec{a}(2;-1)$.

23. Найти градиент функции $u=3x^3z-2xy+5$ в точке $A(2;3;0)$.

24. Тело брошено вертикально вверх со скоростью 30 м/с с высоты 18 м над уровнем Земли. Определите наибольшую высоту подъема тела, приняв $g = 9{,}81$ м/с.

25. Собственная скорость моторной лодки составляет 20 км/ч. Через 40 с после выключения мотора скорость лодки уменьшилась до 8 км/ч. Определите скорость лодки через 2 мин после остановки мотора, считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости.

26. Скорость охлаждения тела, согласно закону Ньютона, пропорциональна разности между температурой тела и окружающей среды. Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 мин падает от 100° до 60°. Температура воздуха составляет 20°. За какое время от начала охлаждения температура хлеба понизится до 30°?

27. Материальная точка массы 1 г движется прямолинейно с момента времени $t = 0$ с под действием силы, которая прямо пропорциональна времени и обратно пропорциональна скорости движения точки. В момент времени $t = 10$ с скорость составляла 0,5 м/с, а сила – $4 \cdot 10^{-5}$ Н. Найти скорость данной точки через 1 мин после начала движения.

28. Собственная скорость моторной лодки составляет 10 км/ч. На полном ходу ее двигатель был выключен, и через 20 с скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Учитывая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна ее скорости, найти:

а) скорость лодки через 2 мин после остановки двигателя;

б) расстояние, пройденное лодкой в течение 1 мин после остановки двигателя.

29. На точку массой 6 г, которая движется прямолинейно, действует сила, пропорциональная времени с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 4$. К тому же сопротивление среды пропорционально скорости движения точки (коэффициент пропорциональности $k_2 = 2$). Найти зависимость скорости от времени с учетом того, что в начальный момент времени скорость была равна нулю.

30. Найти массу плоской пластины с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$, ограниченной указанными кривыми:

а) $x = \frac{1}{4}, y = 0, y^2 = 16x, \rho(x, y) = 16x + \frac{9}{2}y^2$;

б) $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0, \rho(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.

31. Найти массу тела с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$, ограниченного указанными поверхностями:

а) $x = \sqrt{2y}, x = 2\sqrt{2y}, z = 1 - y, z = 0, \rho(x, y, z) = 2x$;

б) $x^2 + y^2 = 4, z = \frac{x^2 + y^2}{2}, z = 0, \rho(x, y, z) = z$;

в) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, $\rho(x,y,z)=20z$.

32. Найти координаты центра масс M_0 однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=\dfrac{z^2}{16}$ и $z=4$.

33. Найти векторные линии векторных полей:

а) $\vec{a}=2y\vec{i}+6x\vec{j}$;

б) $\vec{a}=z\vec{i}-4z\vec{k}$.

34. Установить потенциальность векторного поля $\vec{a}$ и найти его потенциал $u(M)$:

а) $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$;

б) $\vec{a}=\dfrac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{x+y+z}$.

35. Найти поток векторного поля $\vec{a}=-x\vec{i}+2y\vec{j}+z\vec{k}$ через плоскость $x+2y+3z=1$, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

36. Найти поток векторного поля $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ через часть поверхности $x^2+y^2=1$, вырезаемую плоскостью $z=0\,(z\geq 0)$ (внешняя нормаль к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

37. Найти поток векторного поля $\vec{a}=x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(z-y)\vec{k}$ через часть сферы $x^2+y^2+z^2=9$, вырезаемую плоскостями $z=0$ и $z=2$ (внешняя нормаль к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

38. С помощью формулы Остроградского – Гаусса найти поток векторного поля $\vec{a}=\left(y^2+z^2\right)\vec{i}+\left(xy+y^2\right)\vec{j}+(xz+z)\vec{k}$ через замкнутую поверхность σ, являющуюся полной поверхностью цилиндра $x^2+y^2=1,\ z=0,\ z=1$ (внешняя нормаль).

39. Найти работу силы $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+\vec{j}$ при перемещении вдоль кривой Г $x^2+y^2=4\,(y\geq 0)$ от точки $A(2;0)$ к точке $B(-2;0)$.

40. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=\dfrac{y}{3}\vec{i}-3x\vec{j}+x\vec{k}$ вдоль замкнутого контура Г: $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \\ z=1-2\cos t-2\sin t, \end{cases}$ при $t\in[0;2\pi]$.

41. По формуле Стокса найти модуль циркуляции векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}-xz\vec{j}+xy\vec{k}$ вдоль замкнутого контура Г, образованного при пересечении поверхностей $x^2+y^2+z^2=9$ и $x^2+y^2=9$.

10. ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Траектория – прямая линия; скорость $v = 2t\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right)$; ускорение $\vec{a} = 2\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right)$.

2. $v(S) = S' = \dfrac{dS}{dt}$, $V(S) = 30$ см^2/с;

$v(V) = V' = \dfrac{dV}{dt}$; $v(V) = 60$ см^3/с.

3. 1) $F_{\max} = 4\pi^2\nu^2 Am$; $F_{\max} = 0{,}8$ мН;

2) $E = 2\pi^2\nu^2 A^2 m$; $E = 20$ мкДж.

4. $l = 2\sqrt{3}\,d$; $l = 69$ см.

5. 1) $\vec{v}(t) = 3At^2\vec{i} + 2Bt\,\vec{j}$; 2) $\vec{a}(t) = 6At\vec{i} + 2B\vec{j}$.

6. $\vec{v}(t) = -A\omega\left(\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}\right)$; $v = 2{,}5$ м/с; $a_n = 18$ м/с^2.

7. $\vec{v}(t) = 2Bt\vec{i} + C\,\vec{j}$, $\vec{a}(t) = 2B\vec{i}$; $v = 14$ м/с;

$a = 10$ м/с^2; $a_\tau = a_n = 7{,}1$ м/с^2.

8. $N_1 = 0{,}32$ Вт; $N_2 = 56$ Вт.

9. $a_\tau = 2$ м/с^2; $a_n = 1$ м/с^2; $a = 2{,}2$ м/с^2.

10. $t = 0{,}87$ с; $a = 15$ м/с^2.

11. $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(1 + \dfrac{l}{d}\right)$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $\varphi = 6{,}3$ мВ.

12. $p = \dfrac{2}{3}\pi G\rho^2 R_з^2$, где $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг·с^2) – гравитационная постоянная; $p = 1{,}6\cdot10^{11}$ Па.

13. $S_т = v_0 t - \dfrac{1}{3}\alpha t^3$, $S_т = 0{,}23$ км; $t = \sqrt{\dfrac{v_0}{\alpha}}$, $t = 7$ с.

14. $x(t) = R_з\cos\omega_0 t$, где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{4}{3}\pi G\rho}$ – циклическая частота колебаний, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг·с^2) – гравитационная постоянная, $\rho = 5{,}5\cdot10^3$ кг/м^3 – средняя плотность Земли; $v = \omega_0 R_з$, $v = 7{,}8$ км/с.

15. 1) полукольцо: $y_c = \dfrac{2R}{\pi}$; 2) полукруг: $y_c = \dfrac{4R}{3\pi}$.

16. 1) полусфера: $z_c = \dfrac{2R}{3}$; 2) полушар: $z_c = \dfrac{3R}{4}$.

17. $I_1 = mR^2$, $I_2 = \frac{1}{2}mR^2$.

18. $\tau = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{2h}{g}}$, $\tau = 3{,}2\cdot 10^3$ с $= 53$ мин.

19. $E = 0$, $\varphi = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

20. $W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$, $W = 7{,}5$ мДж.

21. $p_m = \frac{\pi N I}{3(r_2 - r_1)}\left(r_2^3 - r_1^3\right)$, $p_m = 2{,}2$ мА $\cdot$ м^2.

22. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

23. $(-6;-4;81)$.

24. 63,9 м.

25. 1,28 км/ч.

26. 60 мин.

27. $\approx 2{,}7$ м/с.

28. а) $\approx 0{,}467$ км/ч; б) 85,2 м.

29. $v(t) = 2\left(t - 3 + 3e^{-t/3}\right)$.

30. а) 2; б) $\pi + \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

31. а) 1; б) $\frac{8\pi}{5}$; в) 4π.

32. $M_0(0;0;3)$.

33. а) $3x^2 - y^2 = C_1$, $z = C_2$; б) $4x^2 + z^2 = C_1$, $y = C_2$.

34. а) $u(M) = xy + yz + xz + C$; б) $u(M) = \ln(x + y + z) + C$.

35. $\frac{1}{18}$.

36. 4π.

37. 54π.

38. 2π.

39. 2π.

40. $-\frac{52\pi}{3}$.

41. 9π.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрашина-Жадаева, Н. Г. Основы векторного и тензорного анализа: теория, задачи : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений по физ. и радиофиз. спец. / Н. Г. Абрашина-Жадаева, И. А. Тимощенко. – Минск : БГУ, 2011. – 255 с.

2. Беликов, Б. С. Решение задач по физике: общие методы / Б. С. Беликов. – М. : Высш. шк., 1986. – 295 с.

3. Болсун, А. И. Методы математической физики : учеб. пособие / А. И. Болсун, В. К. Гронский, А. А. Бейда. – Минск : Выш. шк., 1988. – 190 с.

4. Виноградова, И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях : учеб. пособие / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. – М. : Изд-во МГУ, 1991. – 352 с.

5. Иродов, И. Е. Задачи по общей физике : учеб. пособие / И. Е. Иродов. – М. : Наука, 1981. – 386 с.

6. Карпук, А. А. Сборник задач по высшей математике. В 10 ч. Ч. 9: Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / А. А. Карпук, В. В. Цегельник, В. А. Ранцевич. – Минск : БГУИР, 2008. – 166 с.

7. Кручкович, Г. И. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики : учеб. пособие для втузов / Г. И. Кручкович, Г. М. Мордасова, Х. Р. Сулейманов. – М. : Высш. шк., 1970. – 512 с.

8. Курс вышэйшай матэматыкі: функцыі некалькіх зменных. Інтэгральнае злічэнне. Шэрагі : падручнік / В. М. Русак [і інш.]. – Мінск : Выш. шк., 1997. – 505 с.

9. Майсеня, Л. И. Справочник по математике: основные понятия и формулы : справ. пособие для учащихся общеобразоват. и сред. спец. учеб. заведений / Л. И. Майсеня. – Минск : Выш. шк., 2008 . – 383 с.

10. Мацкевич, И. Ю. Высшая математика: приложения в физике и электронике : учеб.- метод. пособие для учащихся специальностей 2-41 01 31 «Микроэлектроника», 2-40 02 02 «Электронные вычислительные средства», 2-39 02 02 «Проектирование и производство радиоэлектронных средств», 2-39 02 31 «Техническая эксплуатация радиоэлектронных средств» / И. Ю. Мацкевич. – Минск : МГВРК, 2008. – 124 с.

11. Новодворская, Е. М. Методика проведения упражнений по физике во втузе : учеб. пособие / Е. М. Новодворская, Э. М. Дмитриев. – М. : Высш. шк., 1981. – 318 с.

12. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / под ред. А. И. Кириллова. – М. : Физматлит, 2003. – 400 с.

13. Савельев, И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике : учеб. пособие для вузов по направлениям 510000 «Естественные науки и математика», 540000 «Педагогические науки», 550000 «Технические науки» / И. В. Савельев. – СПб. : Лань, 2007 . – 288 с.

14. Сборник задач по математике для втузов : учеб. пособие для втузов. В 4 ч. / А. В. Ефимов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Изд-во физ.-мат. лит., 2001. – Ч. 2. – 431 с.

15. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики с решениями : учеб. пособие для вузов / Т. И. Трофимова, З. Г. Павлова. – М. : Высш. шк., 2002 . – 591 с.

16. Харитонов, В. В. Математические методы решения физических задач : учеб. пособие для студ. втузов / В. В. Харитонов, Д. Г. Лин, В. А. Пенязь. – Минск : Выш. шк., 1991. – 255 с.

17. Чертов, А. Г. Задачник по физике : учеб. пособие для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Физматлит, 2001. – 640 с.